

平成 15 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (自然教育・技術教育) 1 2 3 4 17 18 19 (180 分)
数 I・II・A・B
- 教育学部 (情報教育系) 1 2 3 4 17 18 と (19 20 のうち 1 問)(180 分)
数 I・II・A・B
- 文 (行動科学)・法経学部 3 4 5 (6 12 のうち 1 問)(90 分)
数 I・II・A・B
- 園芸学部 4 5 6 (12 13 14 のうち 1 問) (90 分) 数 I・II・A・B
- 理学部 (生物学科, 地球科学科), 工学部 (建築学科, 都市環境システム学科, デザイン学科) 5 6 7 8 (12 15 16 のうち 1 問)(120 分)
数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (物理学科, 化学科), 医学部, 薬学部, 工学部 (電子機械工学科, メディカルシステム工学科, 情報画像工学科, 共生応用化学科 6 7 9 10 (12 15 16 のうち 1 問)(120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) 6 7 9 10 11 (12 15 16 のうち 1 問)(180 分)
数 I・II・III・A・B・C

- 1 放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 2 だけ平行移動したところ, 放物線

$$y = x^2 + 2(2 - a)x + 2(1 - 2a)$$

が得られた。ただし, a は定数である。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ が $1 \leq x \leq 4$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような a の値の範囲を求めよ。

- 2 三角形 ABC において, $\angle A$ の 2 等分線が辺 BC と交わる点を D とする。

- (1) $AB : AC = BD : DC$ を証明せよ。
- (2) $AB = 2$, $AC = 4$, $AD = 1$ のとき, 辺 BC の長さ と 三角形 ABC の面積を求めよ。

- 3** n 枚のカードの表に $1, 2, \dots, n$ の数をそれぞれ 1 つずつ書く. この n 枚のカードを裏返しにして, よくまぜ, 重ねて, 上から順に $1, 2, \dots, n$ の数を書く. 表と裏に書かれた数が一致するカードが 1 枚もない確率を p_n とする.

- (1) p_3 を求めよ.
- (2) $n = 4$ のとき, 表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数の期待値を求めよ.
- (3) p_5 を求めよ.

- 4** 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2$$

$$a_n = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

で定める.

- (1) 一般項 a_n を求めよ.
 - (2) $\sum_{k=1}^n k^2 a_k$ を求めよ.
- 5** 放物線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 A, B は, 直線 AB と C で囲まれる図形の面積が $\frac{1}{6}$ になる, という条件を満たしながら C 上を動くとする. このとき, 直線 AB が通りうる点の範囲を求め, 図示せよ.
- 6** R を平面上の凸 6 角形とし, その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ とおく. R が $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$, $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$ を満たすとする.
- (1) $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$ であることを示せ.
 - (2) 三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の間の関係を求めよ.
 - (3) R が (2) の条件を満たし, さらに内積に関して $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$ を満たすとき, R の面積を求めよ.

- 7 実数 t に対して, u の 3 次方程式 $u^3 - 3u + 2t = 0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする.

(1) 媒介変数 t を用いて

$$x = f(t), \quad y = -2t \quad (t \text{ は実数})$$

と表される曲線を図示せよ.

(2) 関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め, $f(t)$ のグラフをかけ.

- 8 n を自然数とする. 関数

$$f(x) = (1 - \tan^4 x) \tan^n x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積が $\frac{2}{35}$ であるとき, $f(x)$ の最大値を求めよ.

- 9 関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して定義され, すべての実数 x で微分可能であるとする. このとき, 以下の命題について, 正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ.

(1) $x_1 < x_2$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとする. このとき, すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ である.

(2) $f(0) = 0$ かつ, すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ である.

(3) $f(0) = 0$ かつ, すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty$ である.

- 10 a は定数とし, n は 2 以上の整数とする. 関数

$$f(x) = ax^n \log x - ax \quad (x > 0)$$

の最小値が -1 のとき, 定積分

$$\int_1^e f(x) dx$$

の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ.

- 11 p を素数とする. x に関する 2 次方程式

$$px^2 + (5 - p^2)x - 3p = 0$$

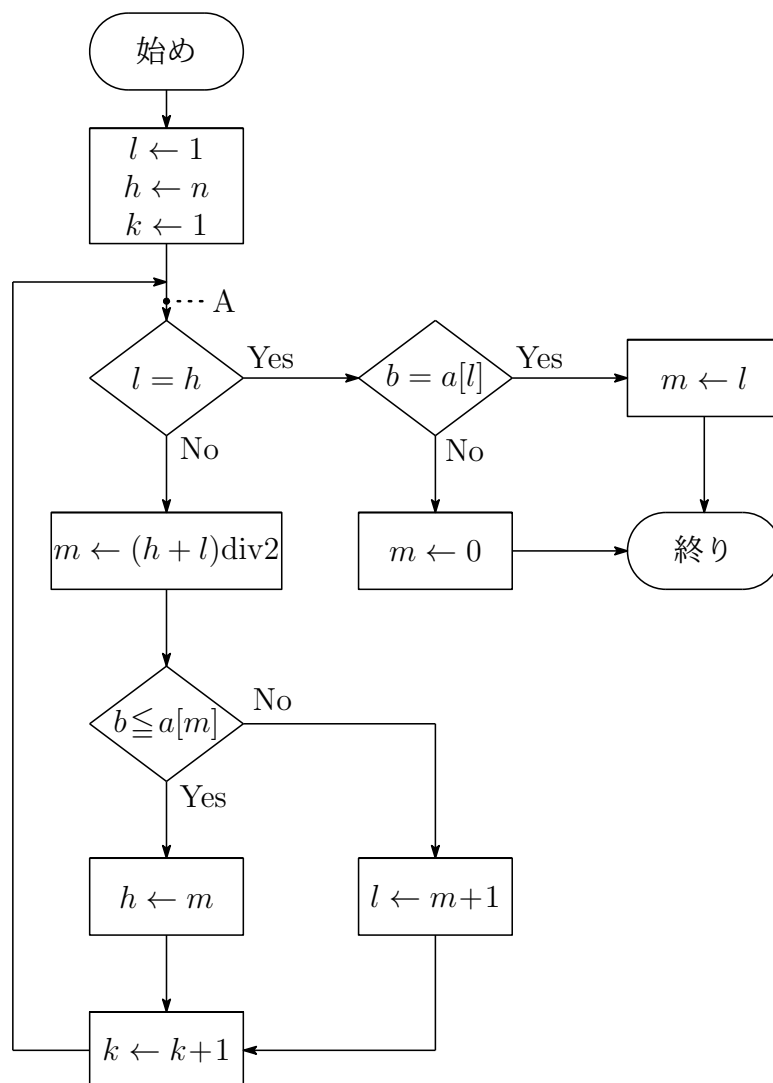
が整数の解を持つのは $p = 2$ のときに限ることを示せ.

- 12** 配列 (添え字付き変数) a において, $a[1], a[2], \dots, a[n]$ には異なる整数の値が小さい順に入っている. このとき, 次頁の流れ図は値 b が

$$a[1], a[2], \dots, a[n]$$

の中に現れるかどうかを判定し, 現れたら $b = a[m]$ となる m を返し, 現われなければ 0 を返すプログラムに対応している. そのプログラムについて以下の問いに答えよ. ただし, $(h + l) \text{div} 2$ は $h + l$ を 2 で割った商の整数部分を表している.

- (1) $n = 16$ とし, $a[5] < b < a[6]$ であったとする. このプログラムの実行開始から終了までの, 流れ図中の A 点における k, l, h の値の表を作成せよ.
- (2) ある自然数 p に対して $n = 2^p$ と表せるとき, A 点で成立している k, l, h, p の関係式を求め, プログラムが終了したときの k を p を使って表せ. ただし, 証明は述べなくてよい.



13 a を実数とし, z を複素数とする. 複素数平面上で, a, z, z^2, z^3 が表す 4 点が, ある正方形の 4 頂点になるとする. ただし, a と z^2 が表す頂点是对角線上にあるとする. このような a と z の値をすべて求めよ.

14 n 枚のカードの表に $1, 2, \dots, n$ の数をそれぞれ 1 つずつ書く. この n 枚のカードを裏返しにして, よくまぜ, 重ねて, 上から順に $1, 2, \dots, n$ の数を書く. 表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数を X とする.

(1) $n = 4$ のとき, X の期待値を求めよ.

(2) $n = 5$ のとき, $X = 0$ となる確率を求めよ.

(3) $n = 5$ のとき, 条件 $X \geq 1$ の下で, $X = 1$ となる条件つき確率を求めよ.

15 a を実数とし, z を複素数とする. 複素数平面上で, a, z, z^2, z^3 が表す 4 点が, あるひし形の 4 頂点になるとする. ただし, a と z^2 が表す頂点是对角線上にあるとする. このような a と z の値をすべて求めよ.

16 k を整数とし q を実数とする. A, B の 2 人が次のようなゲームを行う. まず A が 3 枚の硬貨を投げ, 表の出た枚数を X とする. $X > k$ なら A の勝ち, $X < k$ から B の勝ちとする. $X = k$ のときは当たる確率が q のくじを A が引き, 当たれば A の勝ち, そうでなければ B の勝ちとする. A, B とも, 勝った場合には $X + 1$ 円の賞金がもらえ, 負けた場合には何ももらえない (0 円もらう) とする. ここで k および q の値は, A と B のもらう賞金の期待値が等しくなるように定める.

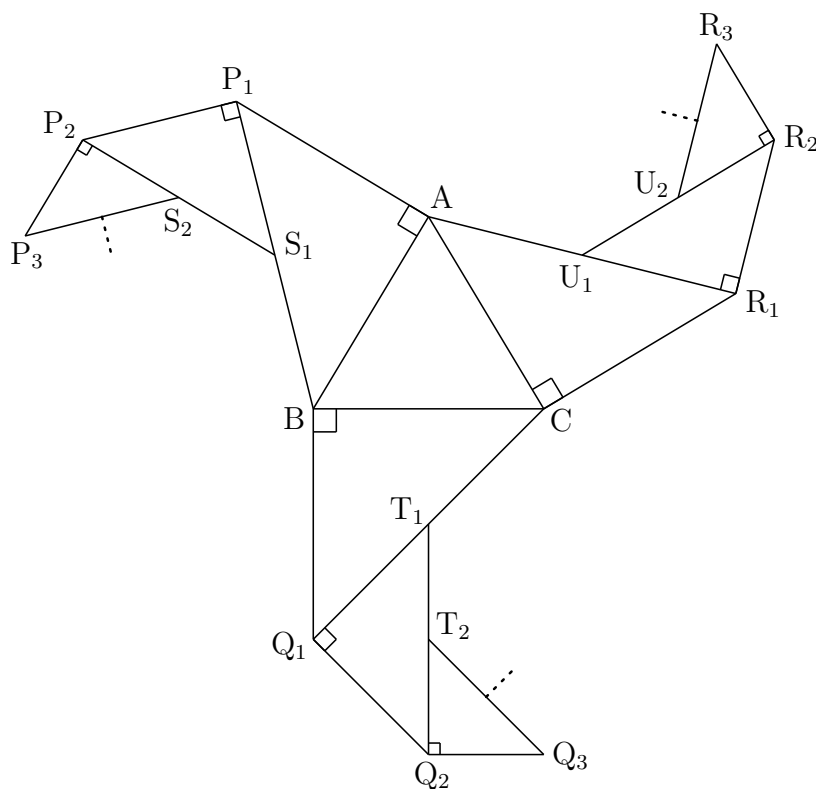
(1) k と q の値を求めよ.

(2) 上のゲームを 2 回行ったとき, B の賞金総額が 3 円であった. このとき, A の賞金総額も 3 円である条件付き確率を求めよ.

- 17** $\triangle ABC$ は1辺1の正三角形である．辺 AB , BC , CA を1辺として，それらに垂直な辺をもつ直角二等辺三角形 BAP_1 , CBQ_1 , ACR_1 を定める．このときできた全体の図形を F_1 とする．また BP_1 , CQ_1 , AR_1 の中点をそれぞれ S_1 , T_1 , U_1 として， $\angle S_1P_1P_2 = \angle T_1Q_1Q_2 = \angle U_1R_1R_2 = 90^\circ$ となる直角二等辺三角形 $S_1P_1P_2$, $T_1Q_1Q_2$, $U_1R_1R_2$ を下図のように定める．同様にして， $\triangle S_2P_2P_3$, $\triangle T_2Q_2Q_3$, $\triangle U_2R_2R_3$, $\triangle S_3P_3P_4, \dots, \triangle T_3Q_3Q_4, \dots, \triangle U_3R_3R_4, \dots$ を図のように定める． P_n , Q_n , R_n を定めてできた全体の図形を F_n とする． F_n のまわりの長さを l_n , F_n の面積を S_n とする．次の問いに答えよ．

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ を求めよ．

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ．



18 a を正の定数とする．2つの曲線

$$y = a \sin x, \quad y = -\frac{1}{a} \sin^2 x$$

で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．ただし， $0 \leq x \leq \pi$ とする．

19 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(1) A^4 , A^{13} を求めよ．

(2) $\sum_{k=1}^{4n} A^k$ を求めよ．ただし， n は正の整数とする．

20 次のプログラムは方程式 $x^3 - 3x - 6 = 0$ の近似解を，誤差の限界を 0.0001 と
して二分法で求めたものである．

```

10 DEF F(X)=X^3-3*X-6
20 LET A=2
30 LET B=3
40 FOR N=1 TO 20
50 LET C=(A+B)/2
60 IF F(C) <= 0 THEN (イ)
70 IF (ロ)
80 NEXT N
90 PRINT "キンジカイ =" ; C
100 END

```

このことについて以下の問いに答えよ．

- (1) 方程式 $x^3 - 3x - 6 = 0$ は区間 $[2, 3]$ の間に唯一の解をもつことを示せ．
- (2) 上のプログラムで 60 行は二分法によって新しい区間 $[A, B]$ を定める命令文で，70 行は区間 $[A, B]$ の幅が 0.0001 以下かどうかを判定し，もしそうなら繰り返しはこの段階で終了し，結果を出力させる命令文である．(イ) と (ロ) の部分を適切に補って命令文を完成させよ．(イ) は 2 行にわたって書いてもよい．

解答例

- 1** (1) $y = x^2 + 2(2 - a)x + 2(1 - 2a)$ より $y = (x + 2 - a)^2 - a^2 - 2$
これを x 軸方向に 2, y 軸方向に -2 だけ平行移動したものは

$$y = (x - a)^2 - a^2 - 4$$

$$\text{よって } f(x) = (x - a)^2 - a^2 - 4 = \mathbf{x^2 - 2ax - 4}$$

- (2) 条件を満たすのは、次の場合である.

$$(i) f(1)f(4) \leq 0 \text{ のとき } (-3 - 2a)(12 - 8a) \leq 0$$

$$(2a + 3)(2a - 3) \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$$

$$(ii) 1 \leq a \leq 4, f(a) = -a^2 - 4 \leq 0, f(1) \geq 0, f(4) \geq 0 \text{ のとき}$$

$$1 \leq a \leq 4, \quad -3 - 2a \geq 0, \quad 12 - 8a \geq 0$$

これを満たす a は存在しない.

$$(i), (ii) \text{ より } \mathbf{-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}}$$



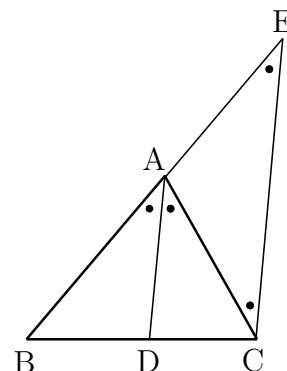
- 2 (1) 点 D は $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点より

$$\angle BAD = \angle DAC \quad \cdots \textcircled{1}$$

頂点 C を通り直線 AD に平行な直線を引き、
辺 AB の A を越える延長との交点を E とする
と、 $AD \parallel EC$ から

$$\angle BAD = \angle AEC \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle DAC = \angle ACE \quad \cdots \textcircled{3}$$



①, ②, ③ から, $\triangle ACE$ において

$$\angle AEC = \angle ACE \text{ となるから } AE = AC$$

$$\text{また, } AD \parallel EC \text{ から } BD : DC = BA : AE$$

$$\text{したがって } BD : DC = AB : AC$$

別証 $A = 2\theta$ とすると

$$BD : DC = \triangle ABC : \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \theta : \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin \theta = AB : AC$$

- (2) $AB = 2$, $AC = 4$, $AD = 1$ より $AE = AC = 4$, $CE = 3$

CE の中点を M, $\theta = \angle AEM$ とすると, $EM = \frac{3}{2}$ より

$$\cos \theta = \frac{EM}{AE} = \frac{3}{8}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \theta = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{2}$$

したがって

$$BC = 3BD = 3\sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{3\sqrt{14}}{2},$$

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \theta + \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \sin \theta = 3 \sin \theta = \frac{3\sqrt{55}}{8}$$



- 3** (1) 3枚のカードの数字の書き方の総数は $3!$ 通り
表裏の数字が一致しない場合の総数は 2通り

よって $p_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$

表	1	2	3
裏	2	3	1
裏	3	1	2

- (2) 4枚のカードうち、表裏の数が一致する枚数を X とすると

$$P(X=1) = \frac{4M_3}{4!} = \frac{4 \cdot 2}{4!} = \frac{8}{24}, \quad P(X=2) = \frac{{}_4C_2 \cdot M_2}{4!} = \frac{6 \cdot 1}{4!} = \frac{6}{24}$$

$$P(X=3) = 0, \quad P(X=4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

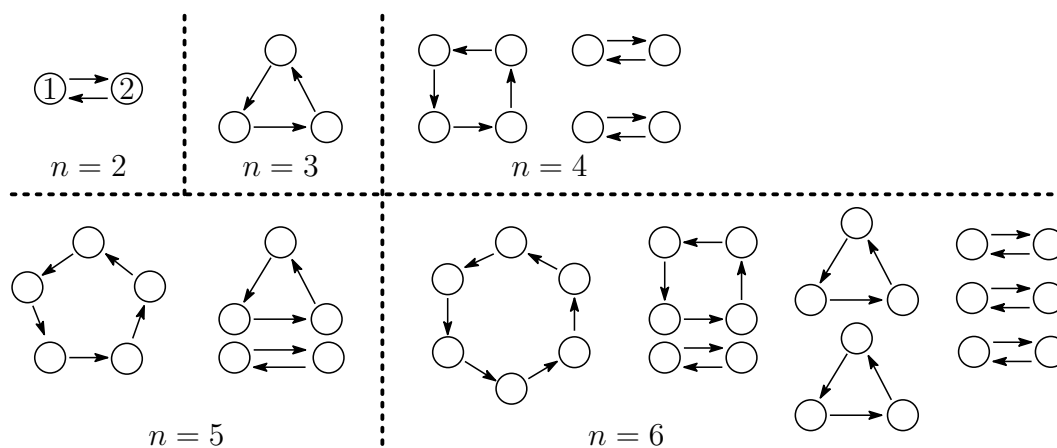
求める期待値は $E(X) = 1 \cdot \frac{8}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 4 \cdot \frac{1}{24} = 1$

補足 求める期待値は1である (九大1999年理系7番参照).

- (3) $n=5$ のとき、完全順列の総数は $M_5 = 4! + {}_5C_3 \times 2! = 44$

よって $p_5 = \frac{44}{5!} = \frac{11}{30}$

補足 完全順列の総数 (モンモール数) は、次の図に示したループにより求めることもできる¹.



まず, $M_1 = 0$, $M_2 = 1$ は明らか. $n = 3, 4, 5, 6$ について

$$M_3 = 2! = 2,$$

$$M_4 = 3! + \frac{{}_4C_2}{2!} = 9,$$

$$M_5 = 4! + {}_5C_3 \times 2! = 44,$$

$$M_6 = 5! + {}_6C_4 \times 3! + \frac{{}_6C_3 \times 2! \times 2!}{2!} + \frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{3!} = 265$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_1999.pdf 7

4 (1) $a_n = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_{n-1}$ より

$$na_n = 1 + (n-1)a_{n-1}$$

数列 $\{na_n\}$ は、初項 $1 \cdot a_1 = 2$ 、公差 1 の等差数列であるから

$$na_n = 2 + (n-1) \cdot 1 \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{n+1}{n}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 a_k &= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k(k+1)\{(k+2) - (k-1)\} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

■

5 (1) 2 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ を通る直線の方程式は $(a < b)$

$$y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = (a+b)x - ab \quad \cdots \textcircled{1}$$

直線 AB と曲線 $C: y = x^2$ で囲まれた部分の面積が $\frac{1}{6}$ であるから

$$\begin{aligned} \int_a^b \{(a+b)x - ab - x^2\} dx &= - \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= \frac{1}{6}(b-a)^3 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

したがって $b-a=1$ ゆえに $b=a+1 \quad \cdots \textcircled{2}$

② を ① に代入すると

$$y = (2a+1)x - a^2 - a$$

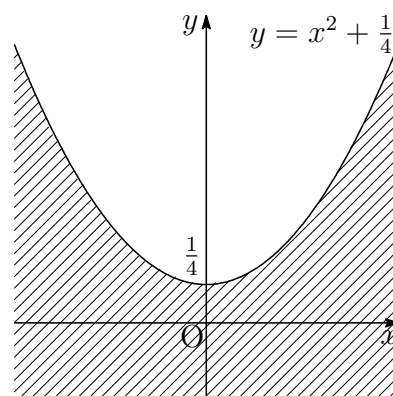
これを a について整理すると

$$a^2 - (2x-1)a + y - x = 0$$

a は実数であるから

$$(2x-1)^2 - 4 \cdot 1(y-x) \geq 0$$

よって、求める領域は $y \leq x^2 + \frac{1}{4}$ (境界線を含む)



■

- 6 (1) $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{EF} = -\vec{b}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + (-\vec{a}) + (-\vec{b}) = \vec{c}\end{aligned}$$

- (2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \vec{c} + \vec{b}$

$\triangle ACE$ の重心を G とすると

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{b}) = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{AF} = \vec{c}$$

$\triangle BDF$ の重心を G' とすると

$$3\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$$

G と G' が一致するから, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG'}$ より

$$\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$$

- (3) (2) の結果から, $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. これを $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$ に代入すると

$$\vec{b} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 1, \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} + 1$$

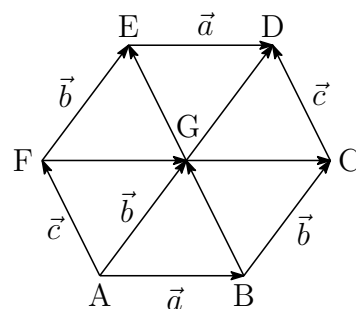
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \text{ であるから } |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = 5$$

$$(2) \text{ の結果から } \overrightarrow{AG} = \vec{b}$$

$$R \text{ の面積を } S \text{ とすると } S = 6\triangle ABG$$

$$\begin{aligned}\triangle ABG &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 5 - 4^2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad S = 6 \times \frac{3}{2} = 9$$



■

- 7 (1) $f(t)$ は u の 3 次方程式 $u^3 - 3u + 2t = 0$ (t は実数) の解であるから

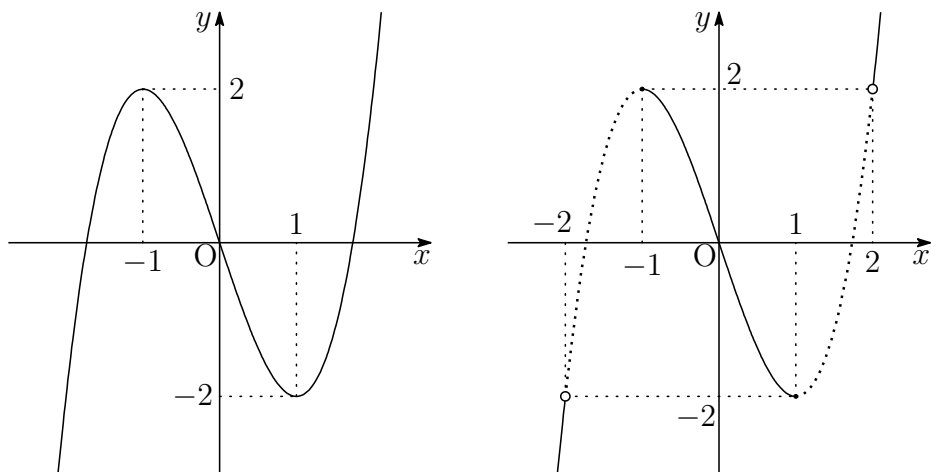
$$f(t)^3 - 3f(t) + 2t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -2t = f(t)^3 - 3f(t)$$

$$x = f(t), \quad y = -2t \text{ であるから } y = x^3 - 3x \text{ (左下図)}$$

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

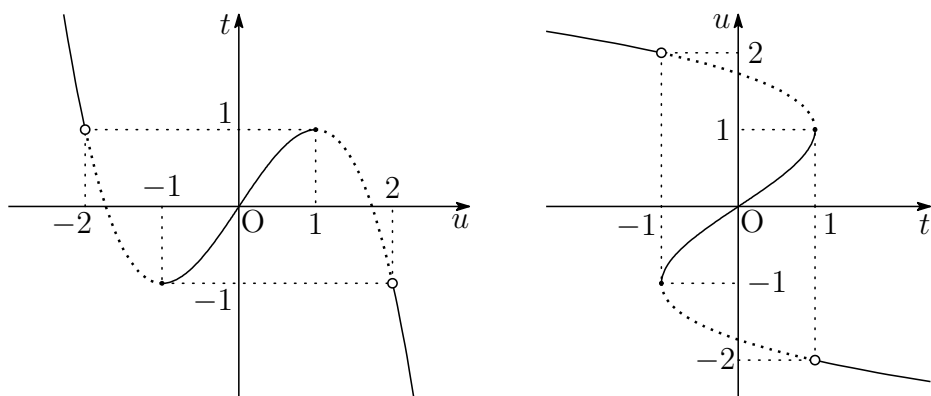
ここでは, y に対して, x の絶対値が最小のものであるから, 求める曲線は, 右下の図の実線部分である. ただし, $\circ$ は含まない.



$$(2) \quad t = -\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u \text{ より } t' = -\frac{3}{2}(u+1)(u-1)$$

u	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
t'	$-$	0	$+$	0	$-$
t	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$

t に対して, u の絶対値が最小のものであるから, 左下の図の実線部分である. よって, $u = f(t)$ は右下の図の実線部分である ($\circ$ は含まない). ■



8 $f(x) = (1 - \tan^4 x) \tan^n x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$ より

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ のとき $f(x) > 0$, $f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \tan^4 x) \tan^n x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x)(1 - \tan^2 x) \tan^n x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x - \tan^{n+2} x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx \\ &= \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1} - \frac{\tan^{n+3} x}{n+3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

この面積が $\frac{2}{35}$ より $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{2}{35}$

$$n^2 + 4n - 32 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (n-4)(n+8) = 0$$

n は自然数であるから $n = 4$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - \tan^4 x) \tan^4 x \\ &= -\left(\tan^4 x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって, $f(x)$ は, $\tan x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ のとき, 最小値 $\frac{1}{4}$ をとる. ■

- 9** (1) $f(x) = x^3$ とすると, $x_1 < x_2$ のとき $f(x_1) < f(x_2)$ であるが, $f'(0) = 0$ によって 正しくない
- (2) $f(x) = 1 - e^{-x}$ とすると, $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$ であるが, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ によって 正しくない
- (3) $f(0) = 0$ かつ, すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ であるから $f(1) > 0$ $t > 1$ のとき, $f(t) > f(1)$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &> \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(1) dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt + (x-1)f(1) \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)f(1) = +\infty$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty$$

よって 正しい



10 $f(x) = ax^n \log x - ax$ ($x > 0$) について (n は 2 以上の整数)

$$a = 0 \text{ のとき } f(x) = 0, \quad a < 0 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

したがって, $f(x)$ の最小値が -1 となるための条件は $a > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= anx^{n-1} \log x + ax^{n-1} - a \\ &= a(nx^{n-1} \log x + x^{n-1} - 1) \end{aligned}$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } \quad nx^{n-1} \log x < 0, \quad x^{n-1} - 1 < 0$$

$$x = 1 \text{ のとき } \quad nx^{n-1} \log x = 0, \quad x^{n-1} - 1 = 0$$

$$1 < x \text{ のとき } \quad nx^{n-1} \log x > 0, \quad x^{n-1} - 1 > 0$$

したがって, 関数 $f(x)$ の増減は ($a > 0$)

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-a$	$\nearrow$

$f(x)$ の最小値が -1 であるから $-a = -1$ ゆえに $a = 1$

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= \int_1^e (x^n \log x - x) dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1} \log x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{x^2}{2} \right]_1^e \\ &= \frac{n}{(n+1)^2} e^{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{e^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

■

11 2次方程式 (*) $px^2 + (5 - p^2)x - 3p = 0$ (p は素数) を解くと

$$x = \frac{p^2 - 5 \pm \sqrt{(5 - p^2)^2 - 4p(-3p)}}{2p} = \frac{p^2 - 5 \pm \sqrt{(p^2 + 1)^2 + 24}}{2p}$$

これが整数であるための必要条件は $(p^2 + 1)^2 + 24$ が平方数である.

これから, 正の整数 k を用いて

$$(p^2 + 1)^2 + 24 = k^2 \quad \text{ゆえに} \quad (k + p^2 + 1)(k - p^2 - 1) = 24$$

$k + p^2 + 1 = k - p^2 - 1 + 2(p^2 + 1)$ であるから, $k + p^2 + 1$ と $k - p^2 - 1$ の偶奇は一致し, 上式よりともに偶数である. またその差は 10 以上であるから

$$\begin{cases} k + p^2 + 1 = 12 \\ k - p^2 - 1 = 2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad k = 7, p = 2$$

実際, $p = 2$ を (*) に代入すると

$$2x^2 + x - 6 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 2)(2x - 3) = 0$$

このとき, (*) は整数解 -2 をもつ.

よって, 条件を満たす素数 p は $p = 2$ ■

12 (1) 変数推移表は次のようになる.

k	l	h
1	1	16
2	1	8
3	5	8
4	5	6
5	6	6

(2)

k	(l, h) の組
1	$(1, 2^p)$
2	$(1, 2^{p-1}), (2^{p-1} + 1, 2^p)$
3	$(1, 2^{p-2}), (2^{p-2} + 1, 2^{p-1}), (2^{p-1} + 1, 3 \cdot 2^{p-2}), (3 \cdot 2^{p-2} + 1, 2^p)$
$\vdots$	$\vdots$
p	$(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots, (2^p - 1, 2^p)$
$p + 1$	$(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (2^p, 2^p)$

求める関係式は $h - l + 1 = 2^{p-k+1}$

終了したとき $k = p + 1$

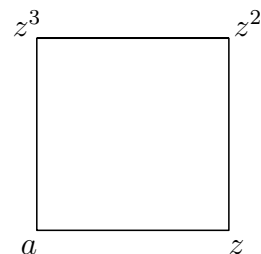
■

13 条件から

$$\frac{z^2 - z}{z - a} = \frac{z^3 - z^2}{z^2 - z} = \frac{a - z^3}{z^3 - z} = \pm i$$

$$\frac{z^3 - z^2}{z^2 - z} = \pm i \text{ より } z = \pm i$$

$$\text{したがって } \frac{z^2 - z}{z - a} = z \text{ これを解いて } a = 1$$



■

14 (1) **3** (2) と同じ

(2) **3** (3) と同じ

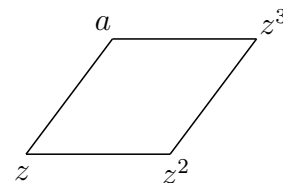
(3) n 個のモンモール数を M_n とすると, 求める条件付き確率は

$$\frac{{}_5C_1 \cdot M_4}{5!} \div \left(1 - \frac{M_5}{5!}\right) = \frac{5 \cdot 9}{5!} \div \frac{5! - 44}{5!} = \frac{45}{76}$$

■

15 複素数平面上の4点 a, z, z^2, z^3 がひし形である条件は

$$(*) \begin{cases} |z^2 - z| = |z^3 - z^2| \\ a - z = z^3 - z^2 \end{cases}$$



(*) の第1式から

$$|z||z-1| = |z|^2|z-1| \quad \text{ゆえに} \quad |z||z-1|(|z|-1) = 0$$

$|z||z-1| = 0$ のとき $z = 0, 1$

このとき, 3点 z, z^2, z^3 が一致するので, 不適.

したがって $|z|-1=0$ すなわち $|z|=1$... ①

(*) の第2式から $a = z^3 - z^2 + z$... ②

a は実数であるから, $a = \bar{a}$ より

$$z^3 - z^2 + z = \bar{z}^3 - \bar{z}^2 + \bar{z}$$

上式から $(z - \bar{z})(1 + z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2 - z - \bar{z})$

$z - \bar{z} = 0$, すなわち, $z = \bar{z}$ のとき, z は実数となり, このとき, 4点 a, z, z^2, z^3 が実軸上にあり, 条件に反する. したがって

$$1 + z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2 - z - \bar{z} = 0$$

① より, $z\bar{z} = 1$ であるから, $\bar{z} = \frac{1}{z}$ であるから

$$\left(z + \frac{1}{z}\right) \left(z + \frac{1}{z} - 1\right) = 0$$

(i) $z + \frac{1}{z} = 0$ のとき $z = \pm i$

これを ② に代入すると $a = z^2 \left(z + \frac{1}{z}\right) - z^2 = 1$

(ii) $z + \frac{1}{z} - 1 = 0$ のとき $z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

これを ② に代入すると $a = z^2 \left(z + \frac{1}{z} - 1\right) = 0$

(i), (ii) より $(a, z) = (1, \pm i), \left(0, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)$

■

16 (1)

X	0	1	2	3	計
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

A, B の賞金の期待値をそれぞれ a , b とすると

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{k=0}^3 (k+1)P(X=k) = \sum_{k=0}^3 kP(X=k) + \sum_{k=0}^3 P(X=k) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$a = b \text{ であるから } a = b = \frac{5}{4}$$

$$(i) \ k=0 \text{ のとき } b = 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot (1-q) = \frac{1}{8}(1-q) \leq \frac{1}{8} < \frac{5}{4}$$

$$(ii) \ k=1 \text{ のとき } b = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot (1-q) = \frac{1}{8}(7-6q) \leq \frac{7}{8} < \frac{5}{4}$$

$$(iii) \ k=2 \text{ のとき } a = 3 \cdot \frac{3}{8} \cdot q + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{9}{8}q$$

$$a = \frac{5}{4} \text{ より } \frac{1}{2} + \frac{9}{8}q = \frac{5}{4} \quad \text{ゆえに} \quad q = \frac{2}{3}$$

$$(iv) \ k=3 \text{ のとき } a = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot q = \frac{1}{2}q \leq \frac{1}{2} < \frac{5}{4}$$

$$(i) \sim (iv) \text{ より } \mathbf{k=2, q=\frac{2}{3}}$$

(2)

X	0	1	2	3
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}$
A の賞金	0	0	0	3
B の賞金	1	2	3	0

B の賞金総額が 3 円であるのは、B の賞金が次の場合である

$$1 + 2 = 2 + 1 = 0 + 3 = 3 + 0$$

B の賞金総額が 3 円となる確率は

$$\frac{1}{8} \times \frac{3}{8} \times 2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{8} \right) \times 2 = \frac{3}{16}$$

A, B の賞金がともに 3 円となる確率は

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} \times 2 = \frac{1}{16}$$

$$\text{よって、求める条件付き確率は } \frac{1}{16} \div \frac{3}{16} = \frac{1}{3}$$



17 (1) 三角形の相似比により

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{3} &= \frac{AP_1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{BS_1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 3 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 3(3 + 2\sqrt{2})$

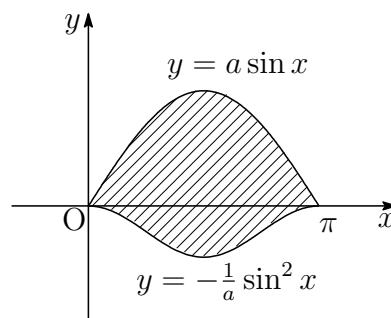
(2) 三角形の相似比により

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \triangle ABC + 3 \frac{\triangle AP_1 B}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin 60^\circ + 3 \times \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\end{aligned}$$

■

18 (1) 求める面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_0^\pi \left(a \sin x + \frac{1}{a} \sin^2 x \right) dx \\ &= \int_0^\pi \left\{ a \sin x + \frac{1}{2a} (1 - \cos 2x) \right\} dx \\ &= \left[-a \cos x + \frac{1}{2a} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_0^\pi \\ &= 2a + \frac{\pi}{2a}\end{aligned}$$



(2) $a > 0$ より, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$S(a) = 2\sqrt{2a \cdot \frac{\pi}{2a}} = 2\sqrt{\pi}$$

よって, $2a = \frac{\pi}{2a}$, すなわち, $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ のとき, $S(a)$ は最小値 $2\sqrt{\pi}$

■

19 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2 - A + \frac{1}{2}E = O \quad \text{ゆえに} \quad A^2 = A - \frac{1}{2}E$$

したがって

$$\begin{aligned} A^3 &= AA^2 = A \left(A - \frac{1}{2}E \right) = A^2 - \frac{1}{2}A \\ &= \left(A - \frac{1}{2}E \right) - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}E \\ A^4 &= AA^3 = A \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}E \right) = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A \\ &= \frac{1}{2} \left(A - \frac{1}{2}E \right) - \frac{1}{2}A = -\frac{1}{4}E = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{13} &= (A^4)^3 A = \left(-\frac{1}{4}E \right)^3 A = -\frac{1}{64}A = -\frac{1}{128} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} A + A^2 + A^3 + A^4 &= A + \left(A - \frac{1}{2}E \right) + \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}E \right) - \frac{1}{4}E \\ &= \frac{5}{4}(2A - E) = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4n} A^k &= (A + A^2 + A^3 + A^4) \sum_{k=0}^{n-1} A^{4k} \\ &= (A + A^2 + A^3 + A^4) \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{4}E \right)^{4k} \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)} \cdot \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right\} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

- 20** (1) $f(x) = x^3 - 3x - 6$ とすると $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$
 区間 $[2, 3]$ において, $f'(x) > 0$ より, $f(x)$ は単調増加
 $f(-2) = -4$, $f(3) = 12 > 0$ より, 区間 $[2, 3]$ において, $f(x) = 0$ を満たす x が唯一つ存在する.

- (2) (イ) **A = C ELSE B = C**
 (ロ) **B - A <= 0.0001 THEN 90**

- (3) $B - A = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0.001 \quad \text{ゆえに} \quad n \geq \frac{4}{\log_{10} 2} = 13.2 \dots$$

よって **14回**

- (4) $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{17}{8} > 0$ より, 1 回後の区間は $[2, 2.5]$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{87}{64} \text{ より, 2 回後の区間は } [2.25, 2.5]$$

よって **A₂ = 2.25, B₂ = 2.5** ■