

平成14年度 千葉大学 2次試験前期日程 (数学問題)

- 教育学部 (自然教育・技術教育・情報教育) [1] [2] [3] [4] (90分) 数I・II・A・B
- 文 (行動科学)・法経学部 [3] [5] ([13] (1)(2) [14] (1)(3) のうち1問)(90分)
数I・II・A・B
- 園芸学部 [3] [5] [6] ([13] (1)(2) [14] (1)(2) [15] のうち1問)(90分)
数I・II・A・B
- 理学部 (生物学科, 地球科学科), 工学部 (建築学科, 都市環境システム学科, デザイン学科) [5] [7] [8] [9] ([13] (1)(3) [14] (1)(2) [15] のうち1問)(120分)
数I・II・III・A・B・C
- 理学部 (物理学科, 化学科), 医学部, 薬学部, 工学部 (電子機械工学科, メディカルシステム工学科, 情報画像工学科, 共生応用化学科) [7] [9] [10] [11]
([13] (1)(3) [14] (1)(2) [15] のうち1問)(120分) 数I・II・III・A・B・C
- 理学部 (数学・情報数理) [7] [9] [10] [11] [12] ([13] (1)(3) [14] (1)(2) [15] のうち1問)
(180分) 数I・II・III・A・B・C

[1] k を実数とし, $f(x) = x^2 - kx + 3k$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数を調べよ.
- (2) 関数 $y = f(x)$ が表す放物線の頂点の y 座標が1以上となるような最大の整数 k を求めよ.

[2] 直角三角形 OP_1Q_1 , OP_2Q_2 , OP_3Q_3 , $\dots$ がある. ただし各 n について, $\angle O$ は直角で, $\angle OP_nQ_n$ は n に無関係で一定な角 θ である. 一辺 OP_n の長さを a_n とおくと, $\{a_n\}$ は初項1, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列をなすとする. このとき次の問いに答えよ.

- (1) 辺 P_nQ_n の長さを n と θ を用いて表せ.
- (2) 斜辺 P_nQ_n を一辺とする正方形の面積を S_n とするとき,

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

を n と θ を用いて表せ.

- (3) S_n を (2) のように定めるとき,

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 90$$

をみたす角 θ の値を求めよ.

- 3 座標平面上に、中心がそれぞれ点 $(0, 1)$ 、点 $(2, 1)$ で、同じ半径 1 をもつ 2 つの円 C_1 と C_2 がある。次の問いに答えよ。

- (1) 2 円 C_1 , C_2 と x 軸に接するように円 C_3 を描く。このとき円 C_3 の中心の座標を求めよ。
- (2) さらに、2 円 C_1 , C_3 と x 軸に接するように円 C_2 とは異なる円 C_4 を描く。このとき円 C_4 の中心の座標を求めよ。

- 4 1 から 9 までの番号が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。この 9 枚のカードをよくきって重ねた後、上から 3 枚のカードを順に左から並べて、3 桁の数を作る。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3 桁の数が 500 以上である確率を求めよ。
- (2) 3 桁の数が 500 以上の偶数である確率を求めよ。

- 5 次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし、空の箱があってもよいとする。

- (1) 赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。
- (2) 赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。
- (3) 赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

- 6 実数 t に対して、 $f(t)$ を

$$f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx| dx$$

と定める。 $0 \leq t \leq 1$ のとき、 $f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。

- 7 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し、

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$$

をみたしている。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。
- (2) 四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。

- 8 座標空間内に 2 点 $A(1, 0, 0)$ と $B(-1, 0, 0)$ がある。不等式

$$\angle APB \geq 135^\circ$$

をみたす空間内の点 P の全体の集合に、2 点 A, B をつけ加えてできる立体の体積を求めよ。

9 行列 E と A を

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく. 行列 $xE - A$ が逆行列をもたないような x の 2 つの値を α, β ($\alpha > \beta$) とし, 行列 P, Q を

$$P = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 3 \\ 2 & \alpha - 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta + 1 & 3 \\ 2 & \beta - 4 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列の積 PQ を計算せよ.
- (2) 自然数 n に対して, P^n を求めよ.
- (3) すべての自然数 n に対して,

$$A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$$

が成立することを示せ.

10 次の問いに答えよ.

- (1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ.
- (2) n が正の整数のとき, $\log_2 n$ が整数でない有理数となることはありえるかどうか調べよ.

11 n を 2 以上の整数とし,

$$I(x) = \int_0^x \sin t \sin nt \, dt \quad (x \geq 0)$$

と定める.

- (1) $n = 2$ のとき, $I(x)$ の最大値を求めよ.
- (2) $I(x)$ の最大値が

$$\frac{n}{n^2 - 1}$$

であるならば, n は偶数であることを証明せよ.

12 無限数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n} \quad (n \geq 1)$$

で定める．ここで c は定数とする．

- (1) $c = 2$ のとき，一般項 a_n を求めよ．
- (2) $c \geq 2$ ならば， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となることを示せ．
- (3) $c = \sqrt{2}$ のとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ．

13 次の問いに答えよ．

- (1) 複素数平面上で方程式

$$|z - 3i| = 2|z|$$

が表す図形を求め，図示せよ．

- (2) 複素数 z が (1) で求めた図形の上を動くとき，複素数

$$w = (-1 + i)z$$

が表す点の軌跡を求め，図示せよ．

- (3) 複素数 z が (1) で求めた図形から $z = i$ を除いた部分を動くとき，複素数 $w = \frac{z+i}{z-i}$ で表される点の軌跡を求め，図示せよ．

- 14** 配列 (添え字付き変数) a において, $a[0], a[1], a[2], \dots, a[n]$ には, 異なる整数の値が入っている. このとき, 次頁の流れ図は

$$a[0], a[1], a[2], \dots, a[n]$$

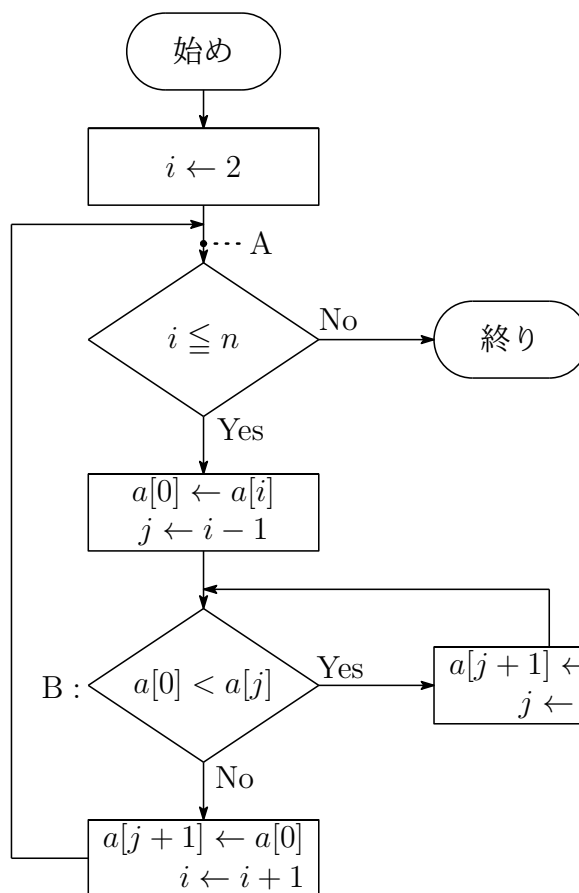
の値を小さい順に並べかえるプログラムに対応している. このプログラムについて以下の問いに答えよ. ただし, 長方形で囲まれた複数の処理は上から順に行われるものとする.

- (1) $n = 4$ とし, 「始め」 においては

$$a[0] = 0, a[1] = 5, a[2] = 2, a[3] = 7, a[4] = 3$$

であったとする. このプログラムの実行開始から終了までの, A 点における i の値と $a[k]$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) の値の表を完成せよ.

- (2) B 点の判定 $a[0] < a[j]$ の回数は, $a[k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の初期値により異なる. この判定回数がもっとも少ない場合と, 最も多い場合について, それぞれ判定の回数を自然数 n を用いて表せ. またそれぞれの場合に対応する $a[k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の初期値の例を示せ. ただし, いずれも証明を述べなくてもよい.
- (3) (2) において “判定回数がもっとも少ない場合” のみについて答えよ.



15 1 から 10 までの番号が書かれた札が 1 枚ずつある．この 10 枚の札から無作為に 5 枚の札を取り出す．このとき，取り出された札のうち，番号が 5 以下であるものの枚数を X とおく．次の問いに答えよ．

- (1) X の確率分布を求めよ．
- (2) X の平均 $E[X]$ および分散 $V[X]$ を求めよ．
- (3) $X = 5$ のときは 10,000 円， $X = 4$ のときは 1,000 円， $X = 3$ のときは 100 円の賞金がもらえるが，その他の場合はもらえないものとする．賞金の期待値を求めよ．

解答例

- 1** (1) 2次方程式 $x^2 - kx + 3k = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3k = k(k - 12)$$

よって $k < 0, 12 < k$ のとき 実数解 2 個

$k = 0, 12$ のとき 実数解 1 個

$0 < k < 12$ のとき 実数解 0 個

$$(2) f(x) = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + 3k$$

$$f(x) \geq 1 \text{ より } -\frac{k^2}{4} + 3k \geq 1 \quad \text{整理すると} \quad k^2 - 12k + 4 \leq 0$$

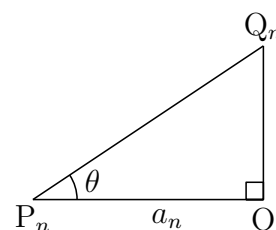
$$\text{これを解いて } 6 - 4\sqrt{2} \leq k \leq 6 + 4\sqrt{2} \quad \dots (*)$$

$$4\sqrt{2} = \sqrt{32} \text{ より, } 5 < 4\sqrt{2} < 6 \text{ であるから}$$

$$(*) \text{ を満たす最大の整数は } \quad \mathbf{11}$$

- 2** (1) $a_n = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2}, \cos \theta = \frac{a_n}{P_n Q_n}$ より

$$P_n Q_n = \frac{a_n}{\cos \theta} = \frac{n+1}{2 \cos \theta}$$



$$(2) S_n = P_n Q_n^2 = \frac{(n+1)^2}{4 \cos^2 \theta} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \dots + S_n &= \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \sum_{k=1}^n (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k + 1) \\ &= \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \left\{ \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \right\} \\ &= \frac{n(2n^2 + 9n + 13)}{24 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$(3) S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = \frac{5 \cdot 108}{24 \cos^2 \theta} = 90 \text{ より } \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$0 < \theta < 90^\circ \text{ より } \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \theta = 60^\circ$$

- 3** (1) C_n の中心を A_n とし, C_3 の半径を R する.

A_2A_3 を斜辺とし, 他の 2 辺が x 軸, y 軸に平行な直角三角形に三平方定理を適用すると

$$(1+R)^2 = 1^2 + (1-R)^2 \quad \text{これを解いて} \quad R = \frac{1}{4}$$

よって, C_3 の中心は $\left(1, \frac{1}{4}\right)$

- (2) C_4 の半径を r とし, $A_4(b, r)$ とする $\left(0 < b < 1, r < \frac{1}{4}\right)$.

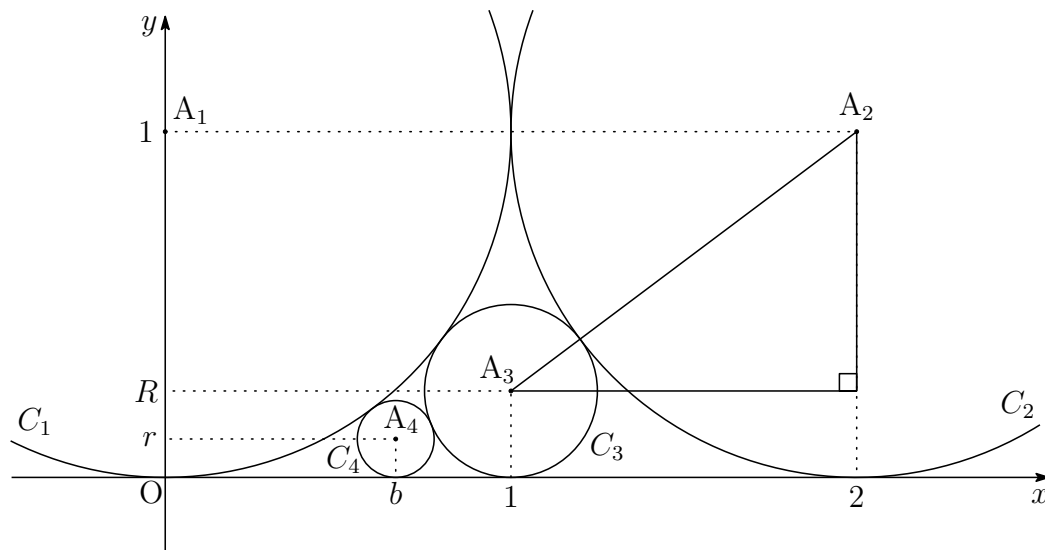
$A_1A_4 = 1+r$ より, (1) と同様に

$$b^2 + (1-r)^2 = (1+r)^2 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2\sqrt{r} \quad \dots \textcircled{1}$$

$A_3A_4 = \frac{1}{4} + r$ より, (1) と同様に

$$(1-b)^2 + \left(\frac{1}{4} - r\right)^2 = \left(\frac{1}{4} + r\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 1-b = \sqrt{r} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $b = \frac{2}{3}, r = \frac{1}{9}$ よって, C_4 の中心は $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$



4 (1) 百の位が5以上である確率であるから $\frac{5}{9}$

(2) (i) 一の位が2または4のとき,
百の位は5, 6, 7, 8, 9の5通り.

(ii) 一の位が6または8のとき,
百の位は5~9の数で一の位の数を除く4通り.

よって, 求める確率は $\frac{2 \times 5 + 2 \times 4}{9P_2} = \frac{18}{9 \cdot 8} = \frac{1}{4}$ ■

5 (1) a, b, c, d を $a + b + c + d = 10, 0 \leq a \leq b \leq c \leq d$ を満たす整数の組は,
次の **23** 通り

a	b	c	d
0	0	0	10
0	0	1	9
0	0	2	8
0	0	3	7
0	0	4	6
0	0	5	5
0	1	1	8
0	1	2	7
0	1	3	6
0	1	4	5
0	2	2	6
0	2	3	5
0	2	4	4
0	3	3	4

a	b	c	d
1	1	1	7
1	1	2	6
1	1	3	5
1	2	2	5
1	2	3	4
1	3	3	3
2	2	2	4
2	2	3	3

(2) 4個から10個取り出す重複組合せであるから

$${}_4H_{10} = {}_{4+10-1}C_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{286} \text{ (通り)}$$

(3) 赤玉6個を区別できる4個の箱に分ける方法は ${}_4H_6$

赤玉4個を区別できる4個の箱に分ける方法は ${}_4H_4$

$${}_4H_6 \times {}_4H_4 = {}_9C_6 \times {}_7C_4 = {}_9C_3 \times {}_7C_3 = 84 \times 35 = \mathbf{2940} \text{ 通り}$$

■

6 $f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx| dx$ より $(0 \leq t \leq 1)$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t (-x^2 + tx) dx + \int_t^1 (x^2 - tx) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{t}{2}x^2 \right]_0^t + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{t}{2}x^2 \right]_t^1 \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

したがって $f'(t) = t^2 - \frac{1}{2}$

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

よって 最大値 $f(0) = \frac{1}{3}$, 最小値 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$ ■

7 (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$ より,
BD の中点を M とすると

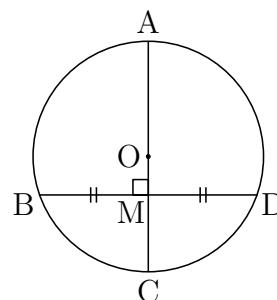
$$2\overrightarrow{AM} + 2 \cdot 2\overrightarrow{CM} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} \text{ より}$$

$$2\overrightarrow{AM} + 4(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

よって, 直線 AC は線分 BD の中点 M を通る.



(2) (1) の結果から $AM = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$, $CM = AC - AM = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$$\text{円の中心を } O \text{ とすると } OM = AM - AO = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに } BM^2 = OB^2 - OM^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$AB = AD = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$CB = CD = \sqrt{CM^2 + BM^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
 ■

- 8 xy 平面上において円 $C: x^2 + (y-1)^2 = 2$ と x 軸とで囲まれた部分を x 軸の回りに回転させた体積 V を求めればよい.

C の x 軸の上側の部分の面積は

$$\int_{-1}^1 y \, dx = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

C の方程式から

$$y^2 = (x+1)(1-x) - 2y$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^2 y^2 \, dx = \int_{-1}^1 (x+1)(1-x) \, dx - 2 \int_{-1}^1 y \, dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{10}{3} - \pi \end{aligned}$$

よって $V = \pi \left(\frac{10}{3} - \pi \right)$

別解 斜線部分の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2} - 1$$

斜線部分を l を軸に回転させた回転体の体積は

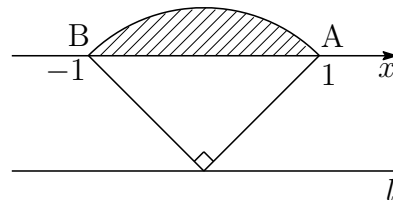
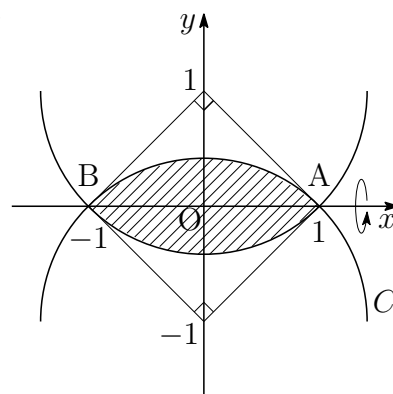
$$\frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$$

斜線部分の重心の x 軸からの距離 h は

$$h = \frac{\frac{4}{3}\pi}{2\pi S} - 1$$

よって、求める回転体の体積 V は¹

$$\begin{aligned} V &= 2\pi S h = 2\pi S \left(\frac{\frac{4}{3}\pi}{2\pi S} - 1 \right) = \frac{4}{3}\pi - 2\pi S \\ &= \frac{4}{3}\pi - 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi \left(\frac{10}{3} - \pi \right) \end{aligned}$$



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2018.pdf (pp.6-8 参照)

- 9** (1) $\det(xE - A) = 0$ より

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad \text{これを解いて } x = -2, 5$$

$$\alpha = 5, \beta = -2$$

$$P = \frac{A - \beta E}{\alpha - \beta}, \quad Q = \frac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}$$

$$\text{ゆえに } P + Q = E, \quad PQ = QP = \mathbf{O}, \quad A = \alpha P + \beta Q$$

$$(2) (1) \text{の結果から } P = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(P + Q) = P \text{ より } P^2 = P \quad \text{よって } P^n = P = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) Q^2 = Q \quad A^n = (\alpha P + \beta Q)^n = \alpha^n P + \beta^n Q$$

- 10** (1) $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ とおくと (p, q は互いに素な整数)

$$2^{\frac{p}{q}} = 3 \quad \text{ゆえに } 2^p = 3^q$$

素因数分解の一意性に反するので不適.

- (2) $\log_2 n$ は, $n = 1, 2$ のとき, $\log_2 n$ は整数である.

$$n > 2 \text{ とし, } \log_2 n = \frac{r}{s} \text{ とおくと } (r, s \text{ は互いに素な自然数})$$

$$2^{\frac{r}{s}} = n \quad \text{ゆえに } 2^r = n^s$$

$$n = 2^t \text{ とおくと } (t \text{ は自然数}) \quad 2^r = 2^{st} \quad \text{ゆえに } r = st$$

$$\text{よって, } \log_2 n = \frac{r}{s} = t \text{ は整数.}$$

11 (1) $n = 2$ のとき

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x \sin t \sin 2t \, dt = \int_0^x 2 \sin^2 t \cos t \, dt \\ &= \left[\frac{2}{3} \sin^3 t \right]_0^x = \frac{2}{3} \sin^3 x \end{aligned}$$

よって, $I(x)$ の最大値は $\frac{2}{3}$

(2) $I(x) = \int_0^x \sin t \sin nt \, dt$ より

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x \{\cos(n-1)t - \cos(n+1)t\} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-1)t}{n-1} - \frac{\sin(n+1)t}{n+1} \right]_0^x \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1} \right\} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{-1}{n+1} \right) = \frac{n}{n^2-1} \end{aligned}$$

上式において, 等号が成立するとき

$$(n-1)x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (n+1)x = \left(2l - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (k, l \text{ は整数})$$

上の 2 式から x を消去すると

$$(n+1) \left(2k + \frac{1}{2}\right) = (n-1) \left(2l - \frac{1}{2}\right)$$

したがって $n = -2\{k(n+1) - l(n-1)\} \cdots (*)$

(*) の右辺は偶数であるから, n は偶数. ■

12 (1) $a_1 = c = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n}$ より

$$a_1 = 1 + 1, \quad a_{n+1} - (n + 2) = \frac{1}{n} \{a_n^2 - (n + 1)^2\} \quad (*)$$

よって $a_n = n + 1$

(2) $a_1 = c = 2$ のとき, (1) の結果から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) = \infty$$

$a_1 = c > 2$ のとき, (*) より, $a_n > n + 1$ が成立する.

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

(3) $a_1 = c = \sqrt{2}$ のとき $a_2 = \frac{2 - 1}{1} = 1$

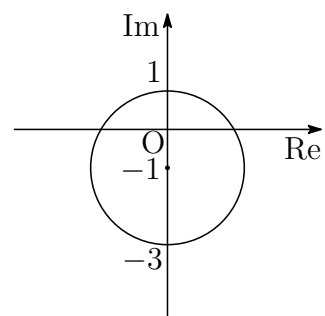
$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n}$ より, $n \geq 2$ のとき $|a_n| \leq 1$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}^2 - 1}{n - 1} = 0$ ■

13 (1) $|z - 3i| = 2|z|$ より $(z - 3i)(\bar{z} + 3i) = 4z\bar{z}$

$$z\bar{z} - iz + i\bar{z} - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |z + i|^2 = 4$$

よって $|z + i| = 2$

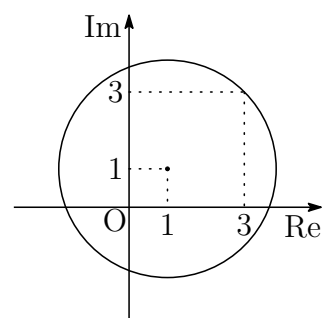


(2) $z = \frac{w}{-1+i}$ を $|z + i| = 2$ に代入すると

$$\left| \frac{w}{-1+i} + i \right| = 2$$

$$|-1+i| \left| \frac{w}{-1+i} + i \right| = 2|-1+i|$$

よって $|w - (1+i)| = 2\sqrt{2}$

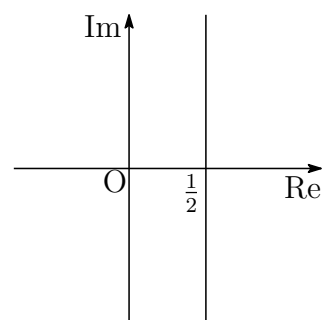


(3) $w = \frac{z+i}{z-i}$ より $z = \frac{(w+1)i}{w-1}$ ($w \neq 1$)
これを $|z + i| = 2$ に代入すると

$$\left| i \left(\frac{w+1}{w-1} + 1 \right) \right| = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \left| \frac{2w}{w-1} \right| = 2$$

$$|w| = |w-1| \quad \text{ゆえに} \quad |w|^2 = |w-1|^2$$

$$\frac{w + \bar{w}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \text{Re}(w) = \frac{1}{2}$$



- 14** (1) 変数推移表は、次のようになる.

i	$a[0]$	$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$	$a[4]$
2	0	5	2	7	3
3	2	2	5	7	3
4	7	2	5	7	3
5	3	2	3	5	7

- (2) 最も少ないときの判定回数は $n - 1$

$$a[k] = k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

最も多いときの判定回数は

$$2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}(n-1)(n+2)$$

$$a[k] = n + 1 - k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

- (3) 最も少ないときの判定回数は $n - 1$

$$a[k] = k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

- 15** (1) $P(X = k) = \frac{{}_5C_k \cdot {}_5C_{5-k}}{{}_{10}C_5}$ より ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

よって, X の確率分布表は, 次のようになる.

X	0	1	2	3	4	5	計
$P(X)$	$\frac{1}{252}$	$\frac{25}{252}$	$\frac{100}{252}$	$\frac{100}{252}$	$\frac{25}{252}$	$\frac{1}{252}$	1

$$E(X) = \sum_{k=0}^5 kP(X = k) = \frac{5}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^5 k^2P(X = k) = \frac{125}{18}$$

$$\text{よって } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{125}{18} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

- (2) 賞金の期待値は

$$10000 \times \frac{1}{252} + 1000 \times \frac{25}{252} + 100 \times \frac{100}{252} = \frac{45000}{252} = \frac{1250}{7} \quad (\text{円})$$