

平成 13 年度 千葉大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

- 文 (行動科学)・法経学部 [1] [2] [3] ([9] [10] のうち 1 問)(90 分)
数 I・II・A・B
- 教育 (中学 [自然教育・技術教育]) [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] (180 分)
数 I・II・A・B
- 教育 (情報教育) [12] [13] [14] [15] [16] [17] ([18] [19] のうち 1 問)(180 分)
数 I・II・A・B
- 理学部 (数学・情報数理) [4] [5] [6] [7] [8] ([9] [10] [11] のうち 1 問) (180 分)
数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (物理学科, 化学科), 医学部, 薬学部, 工学部 (電子機械工学科, 情報画像工学科, 物質工学科 [3] [4] [5] [6] ([9] [10] [11] のうち 1 問)(120 分)
数 I・II・III・A・B・C
- 理学部 (生物・地球科学), 工学部 (都市環境システム・デザイン工学部)
[1] [2] [3] [4] ([9] [10] [11] のうち 1 問)(120 分) 数 I・II・III・A・B・C
- 園芸学部 [1] [2] [3] ([9] [10] [11] のうち 1 問)(90 分) 数 I・II・A・B

1 以下の問いに答えよ.

(1) n を自然数とする. このとき, n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを証明せよ.

(2) 3 つの自然数 a, b, c が

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たしている. このとき, a, b の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ.

2 実数 a に対して

$$f(x) = ax^2 - 2ax + a^2 + 1$$

とおく.

(1) 定積分

$$I(a) = \int_1^2 f(x) dx$$

を a を用いて表せ.

(2) $f(x)$ が条件 $f(1) \leq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ.

(3) a が (2) の範囲を動くとき, $I(a)$ の最大値および最小値を求めよ.

3 a, b を整数とする. 3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$ が, $0 < x < 2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき, a, b の値を求めよ.

4 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d は実数) に対して, 実数 $f(A)$ を $f(A) = a + d$ と定義する. これについて性質

$$f(A \pm B) = f(A) \pm f(B) \quad (\text{複号同順})$$

は証明なしで使ってよい.

(1) 2 次正方行列 A, B に対して, $f(AB) = f(BA)$ を証明せよ.

(2) 2 次正方行列 P, Q が $P = PQ - QP$ を満たしているとする. このとき, $f(P) = 0$ を証明せよ.

(3) (2) の P に対して, $f(P^2) = 0$ を証明せよ.

(4) (2) の P に対して, $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を証明せよ.

5 C は, 2 次関数 $y = x^2$ のグラフを平行移動した放物線で, 頂点が円 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ 上にある. 原点から C に引いた接線で傾きが正のものを l とおく. このとき, C と l の接点の x 座標が最大および最小になるときの C の頂点の座標をそれぞれ求めよ.

6 a, b を実数, e を自然対数の底とする. すべての実数 x に対して $e^x \geq ax + b$ が成立するとき, 以下の問いに答えよ.

(1) a, b の満たすべき条件を求めよ.

(2) 次の定積分

$$\int_0^1 (e^x - ax - b) dx$$

の最小値と, そのときの a, b の値を求めよ.

7 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ を次のように定義する.

$$a_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 次の無限級数の和を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

8 30 の階乗 $30!$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 2^k が $30!$ を割り切るような最大の自然数 k を求めよ.

(2) $30!$ の一の位は 0 である. ここから始めて十の位, 百の位と順に左に見ていく. 最初に 0 でない数字が現れるまでに, 連続していくつの 0 が並ぶかを答えよ.

(3) (2) において, 最初に現れる 0 でない数字は何であることを理由とともに答えよ.

9 i を虚数単位とし、複素数 z に共役な複素数を $\bar{z}$ で表す.

(1) a を実数の定数とする. 条件

$$1 - \bar{z} = (a + i)(z - \bar{z})$$

を満たす複素数平面上の点 z の全体が直線であるとき, a の値を求めよ.

(2) 実軸上にない複素数 α に対して, 3 点 $0, 1, \alpha$ を通る複素数平面上の円の中心を β とする. このとき, β を α と $\bar{\alpha}$ を用いて表せ.

(3) α, β を (2) の複素数とする. 点 α が (1) の直線上を動くとき, $\frac{\beta}{\alpha}$ は一定であることを証明せよ.

10 正の整数 x と y が与えられたとき, 以下の手順による計算を行う.

1. $n \leftarrow x, m \leftarrow y, q \leftarrow 0$
2. $m > 0$ かつ $q \leq 2$ を満たしている限り, 次の計算を繰り返し実行する.
ただし, n を m で割った余りを $n \text{ div } m$, 余りを $n \text{ mod } m$ で表す.
 - 2-1. $q \leftarrow n \text{ div } m, r \leftarrow n \text{ mod } m$
 - 2-2. $n \leftarrow m, m \leftarrow r$
3. $q > 2$ ならば 0 を, そうでなければ n の値を出力する.

この手順に関して, 以下の問いに答えよ.

- (1) x を $95, y$ を 35 としたとき, 手順 2 の各繰り返しにおいて 2-1 を実行する直前での n, m, q の値の変化を示す表を作成し, 手順 3 で出力される数を示せ.
- (2) 変数 n, m の値をそれぞれ x_2, x_1 とし, その状態で 2-1 と 2-2 を続けて実行したところ, 変数 m, q の値がそれぞれ x_0, z になったとする. このとき, x_2 を x_1, x_0, z を使って表せ.
- (3) x と y の両方が 200 以上でかつ出力が 7 になるような x と y を 1 組あげ, その組について (1) と同様の表を作成せよ.

11 2 つの野球チーム A, B が繰り返し試合を行う. 各試合において, A が勝つ確率を p, B が勝つ確率を $q = 1 - p$ とする. ただし $0 < p < 1$ とする.

- (1) $p = \frac{1}{2}$ とする. A, B どちらかが 4 勝するまでに行う試合数を表す確率変数を X とする. X の確率分布を求めよ.
- (2) B より先に A が n 勝する確率を $P(n)$ とする. $P(3)$ と $P(4)$ の大小を比較せよ.

12 次の2つの2次関数

$$y = -x^2, \quad y = 8(x - a)(x - b)$$

のグラフが、ただ1つの共有点をもつとき、 $\frac{b}{a}$ の値を求めよ。ただし、 $ab \neq 0$ とする。

13 自然数 n の1の位の数を $f(n)$ で表す。たとえば、 $f(47) = 7$ である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(3^6) - f(3)$ を求めよ。
- (2) すべての自然数 n に対して $f(n^5) - f(n) = 0$ となることを証明せよ。

14 1 から 6 までの目の出る事象が同様に確からしい3つのさいころについて、次の問いに答えよ。

- (1) 3個のさいころを投げるとき、目の和が15となる確率 P を求めよ。
- (2) 2個のさいころを投げるとき、目の和の期待値 E を求めよ。

15 三角形 ABC が半径15の円に内接している。 $BC = 10$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \angle BAC$, AC , AB の長さを求めよ。
- (2) 三角形 ABC の面積 S , 三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ。

16 関数

$$f(x) = 2\sin^4 x - 4\sqrt{3}\sin^3 x - 3\cos 2x$$

について次の問いに答えよ。

- (1) $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ の範囲で、関数 $y = f(x)$ の増減を調べ、極大値、極小値を求めよ。
- (2) $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ の範囲で $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

17 曲線 $y = \log x$ と x 軸と、直線 $x = e$ で囲まれた図形を F とする。 F を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を V_1 , F を直線 $x = e$ のまわりに1回転してできる回転体の体積を V_2 とする。このとき次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底、 $\log x$ は自然対数とする。

- (1) V_1 と V_2 を求めよ。
- (2) V_1 と V_2 の大小を比べよ。

18 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) 行列 $\frac{2}{3}E - \frac{1}{2}J$ を求めよ.

(2) (1) で求めた行列を A とする. 行列 B を $A + B = \frac{7}{6}E + \frac{1}{2}J$ をみたすように定める. このとき AB を $\alpha E + bJ$ の形で表せ.

(3) $\left(AB - \frac{5}{12}J\right) = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とおくととき行列 $\begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n & \sum_{n=1}^{\infty} d_n \end{pmatrix}$

を求めよ.

19 ニュートン法により $\sqrt{3}$ の近似値を求めるために, 下の条件によって数列

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

を定める.

$$\text{条件} \begin{cases} \text{自然数 } n \text{ に対し, } 2 \text{ 次曲線 } y = x^2 - 3 \text{ の上の} \\ \text{点 } (x_n, x_n^2 - 3) \text{ においてこの曲線に引いた接線} \\ \text{は } x \text{ 軸と点 } (x_{n+1}, 0) \text{ で交わる.} \end{cases}$$

このとき, $x_1 = 2$ として, 次の問いに答えよ.

(1) すべての自然数 n に対し

$$x_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{x_n - \sqrt{3}}{2x_n} \cdot (x_n - \sqrt{3})$$

が成り立つことを説明せよ.

(2) 2 以上のすべての自然数 n に対し,

$$\sqrt{3} < x_{n+1} < x_n < 2$$

が成り立つことを説明せよ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$ を証明せよ.

解答例

- 1** (1) $n = 2k$ (k は整数) のとき $n^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod{4}$
 $n = 2k + 1$ (k は整数) のとき $n^2 = 4(k^2 + k) + 1 \equiv 1 \pmod{4}$
 よって, n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である.
 (2) (1) の結論から

$$n \text{ が偶数} \iff n^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$n \text{ が奇数} \iff n^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

(i) $c^2 \equiv 0 \pmod{4}$ のとき

$$a^2 \equiv 0, \quad b^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

(ii) $c^2 \equiv 1 \pmod{4}$ のとき

$$\begin{cases} a^2 \equiv 0 \\ b^2 \equiv 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a^2 \equiv 1 \\ b^2 \equiv 0 \end{cases} \pmod{4}$$

(1) の結論および (i), (ii) より, a, b の少なくとも一方は偶数である. ■

- 2** (1) $f(x) = ax^2 - 2ax + a^2 + 1 = a(x-1)^2 + a^2 - a + 1$ より

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_1^2 \{a(x-1)^2 + a^2 - a + 1\} dx \\ &= \left[\frac{a}{3}(x-1)^3 + (a^2 - a + 1)x \right]_1^2 \\ &= a^2 - \frac{2}{3}a + 1 \end{aligned}$$

(2) $f(1) \leq 1$ より $a^2 - a + 1 \leq 1$

$$a(a-1) \leq 0 \quad \text{これを解いて} \quad 0 \leq a \leq 1$$

(3) $I(a) = \left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9} \quad (0 \leq a \leq 1)$

よって, 最大値 $I(1) = \frac{4}{3}$, 最小値 $I\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$ ■

3 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$ より

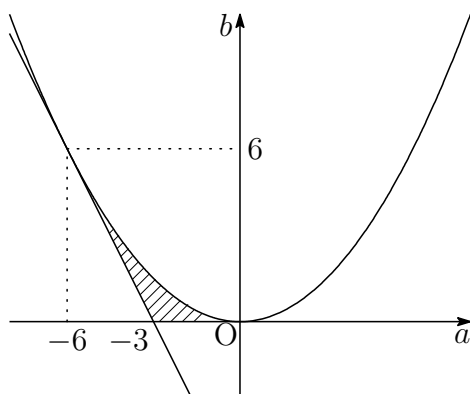
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2b = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + 2b - \frac{a^2}{3}$$

$0 < x < 2$ の範囲に $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつから

$$f'(0) > 0, \quad f'(2) > 0, \quad 0 < -\frac{a}{3} < 2, \quad 2b - \frac{a^2}{3} < 0$$

$f'(0) = 2b$, $f'(2) = 4a + 2b + 12$ であるから, 次を満たせばよい.

$$b > 0, \quad b > -2a - 6, \quad b < \frac{a^2}{6}, \quad -6 < a < 0$$



よって, 求める整数 a, b は $a = -3, b = 1$

4 (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とすると

$$AB = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} ap + cq & bp + dq \\ ar + cs & br + ds \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(AB) &= (ap + br) + (cq + ds) \\ &= (ap + cq) + (br + ds) = f(BA) \end{aligned}$$

(2) $P = PQ - QP$ より $P^2 = P(PQ) - (PQ)P$

上式および (1) の結果から $f(P^2) = 0$

P にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$P^2 - f(P)P + \det(P)E = 0$$

$$f(P) = 0 \text{ であるから } P^2 = \begin{pmatrix} -\det(P) & 0 \\ 0 & -\det(P) \end{pmatrix}$$

$f(P^2) = -2\det(P) = 0$ であるから $\det(P) = 0$ よって $P^2 = O$

5 C の頂点を (p, q) とすると $C : y = (x - p)^2 + q$

$f(x) = (x - p)^2 + q$ とすると $f'(x) = 2(x - p) \cdots (*)$

C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

これが原点を通るから $-f(t) = -f'(t)t$

$$-(t - p)^2 - q = -2(t - p)t \quad \text{整理すると} \quad t^2 = p^2 + q \cdots \textcircled{1}$$

点 (p, q) は円 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ 上の点であるから

$$p^2 + (q - 2)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 = -q^2 + 4q - 3 \cdots \textcircled{2}$$

② を ① に代入すると

$$\begin{aligned} t^2 &= -q^2 + 5q - 3 \quad (1 \leq q \leq 3) \\ &= -\left(q - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} \end{aligned}$$

t の最大値・最小値について、 $f'(t) = 2(t - p) > 0$ に注意して

$$q = \frac{5}{2}, p = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ で最大値 } \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$q = 1, p = 0 \text{ で最小値 } 1$$

よって 最大となる頂点は $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$

最小となる頂点は $(0, 1)$



- 6** (1) $f(x) = e^x - ax - b$ とおくと, $f(x) \geq 0$ が成立する a, b の満たすべき条件を求めればよい.

(i) $a < 0$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
これは, 条件に反する.

(ii) $a = 0$ のとき $f(x) = e^x - b \geq 0$ ゆえに $b \leq 0$

(iii) $a > 0$ のとき $f'(x) = e^x - a$

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$f(\log a) = a - a \log a - b \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b \leq a - a \log a$$

よって 「 $a = 0$ かつ $b \leq 0$ 」 または 「 $a > 0$ かつ $b \leq a - a \log a$ 」

(2) $I = \int_0^1 (e^x - ax - b) dx = \left[e^x - \frac{a}{2}x^2 - bx \right]_0^1 = e - 1 - \frac{a}{2} - b$

(i) $a = 0, b \leq 0$ のとき $I \geq e - 1$

(ii) $a > 0, b \leq a - a \log a$ のとき

$$\begin{aligned} I &\geq e - 1 - \frac{a}{2} - a + a \log a \\ &= a \log a - \frac{3}{2}a + e - 1 \end{aligned}$$

$$g(a) = a \log a - \frac{3}{2}a + e - 1 \text{ とすると}$$

$$g'(a) = \log a - \frac{1}{2}$$

a	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき $I \geq g(\sqrt{e}) = e - \sqrt{e} - 1$

等号は, $a = \sqrt{e}, b = \frac{\sqrt{e}}{2}$ のときに成立する.

よって, I は $a = \sqrt{e}, b = \frac{\sqrt{e}}{2}$ のとき, 最小値 $e - \sqrt{e} - 1$ ■

7 (1) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ より $\tan x = \frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x}$
 $x = \frac{\pi}{2^{n+2}}$ を代入すると $\tan \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2^{n+2}}} - \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2^{n+1}}}$

(*) $a_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$ より $a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$

(2) (1) の結果から $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}a_{n+1}} - \frac{1}{2^n a_n} \dots (**)$

(*) より $a_1 = \tan \frac{\pi}{4} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^{n+1}}{\pi} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \dots \textcircled{1}$

(**) より $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2^{n+1}a_{n+1}} - \frac{1}{2^n a_n} \right) = \frac{1}{2^N a_N} - \frac{1}{2a_1}$

$$\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2^N a_N} - \frac{1}{2a_1} + \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2^N a_N}$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{2^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^N a_N}$$

$\textcircled{1}$ より, $\lim_{N \rightarrow \infty} 2^N a_N = \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}$$



$$\boxed{8} \quad (1) \quad \left\lfloor \frac{30}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{2^4} \right\rfloor = 15 + 7 + 3 + 1 = \mathbf{26}$$

$$(2) \quad \left\lfloor \frac{30}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{5^2} \right\rfloor = 6 + 1 = 7 \quad \text{これと (1) の結果から} \quad \mathbf{7}$$

$$(3) \quad \left\lfloor \frac{30}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{3^3} \right\rfloor = 10 + 3 + 1 = 14$$

$$\left\lfloor \frac{30}{7} \right\rfloor = 4, \quad \left\lfloor \frac{30}{11} \right\rfloor = 2, \quad \left\lfloor \frac{30}{13} \right\rfloor = 2$$

17, 19, 23, 29 の因数は, それぞれ 1 個.

$$\begin{aligned} 30! &= 2^{26} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \\ &= 2^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \times 10^7 \end{aligned}$$

したがって, 法 10 について

$$\begin{aligned} 30! &= 2^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \\ &\equiv 2^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^4 \cdot 1^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \pmod{10} \end{aligned}$$

$$\text{ここで} \quad 2^{19} \equiv (2^5)^3 \cdot 2^4 \equiv 2^3 \cdot 2^4 \equiv 8 \cdot 6 \equiv 8 \pmod{10}$$

$$3^{14} = (3^2)^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \pmod{10}$$

$$7^4 = (7^2)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$\text{ゆえに} \quad 30! = 8 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-1) \equiv 8 \pmod{10}$$

よって, 求める数は $\mathbf{8}$



- 9** (1) $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$ とおくと, $1 - \bar{z} = (a + i)(z - \bar{z})$ より

$$1 - (x + yi) = (a + i) \cdot 2yi \quad \text{ゆえに} \quad 1 - x - yi = -2y - 2ayi$$

$$\text{したがって} \quad 1 - x = -2y, \quad (2a - 1)y = 0$$

$2a - 1 \neq 0$ とすると $y = 0$, $x = 1$ すなわち z は点 1 となり不適.

$a = \frac{1}{2}$ のとき, $x - 2y = 1$ となり, z は直線を表す. よって $a = \frac{1}{2}$

- (2) $|\beta| = |\beta - 1|$ より $|\beta|^2 = |\beta - 1|^2$

$$\beta\bar{\beta} = (\beta - 1)(\bar{\beta} - 1) \quad \text{ゆえに} \quad \bar{\beta} = 1 - \beta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } |\beta| = |\beta - \alpha| \text{ より } |\beta|^2 = |\beta - \alpha|^2$$

$$\beta\bar{\beta} = (\beta - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \quad \text{ゆえに} \quad \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} = \alpha\bar{\alpha} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると } \bar{\alpha}\beta + \alpha(1 - \beta) = \alpha\bar{\alpha}$$

$$(\bar{\alpha} - \alpha)\beta = \alpha(\bar{\alpha} - 1) \quad \text{よって} \quad \beta = \frac{\alpha(1 - \bar{\alpha})}{\alpha - \bar{\alpha}}$$

- (3) $a = \frac{1}{2}$, $z = \alpha$ を $1 - \bar{z} = (a + i)(z - \bar{z})$ に代入すると

$$1 - \bar{\alpha} = \left(\frac{1}{2} + i\right)(\alpha - \bar{\alpha})$$

$$\text{これと (2) の結果から} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 - \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}} = \frac{1}{2} + i$$

よって, $\frac{\beta}{\alpha}$ は一定である. ■

- 10** (1) 変数推移表は次のようになる.

n	m	q
95	35	0
35	25	2
25	10	1
10	5	2
5	0	2

よって, 出力される数は 5

(2) $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}_0$

- (3) 変数推移表は次のようになる.

n	m	q
287	203	0
203	84	1
84	35	2
35	14	2
14	7	2
7	0	2

- 11** (1) $X = 4$, すなわち, A または B が 4 連勝する

$$P(X = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$$

$X = 5$, すなわち, A または B が 3 勝 1 敗のあと勝つ

$$P(X = 5) = {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{4}$$

$X = 6$, すなわち, A または B が 3 勝 2 敗のあと勝つ

$$P(X = 6) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{5}{16}$$

以上の結果から

$$P(X = 7) = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

X	4	5	6	7	計
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	1

- (2) $P(3)$ は、A が 3 連勝、A が 2 勝 1 敗の後に A が勝つ、A が 2 勝 2 敗の後に A が勝つ場合の確率であるから

$$\begin{aligned} P(3) &= p^3 + {}_3C_2 p^2(1-p) \cdot p + {}_4C_2 p^2(1-p)^2 \cdot p \\ &= p^3 + 3p^2(1-p) + 6p^3(1-p)^2 \\ &= p^3\{1 + 3(1-p) + 6(1-p)^2\} \end{aligned}$$

- $P(4)$ は、A が 4 連勝、A が 3 勝 1 敗の後に A が勝つ、A が 3 勝 2 敗の後に A が勝つ、A が 3 勝 3 敗の後に A が勝つ場合の確率であるから

$$\begin{aligned} P(4) &= p^4 + {}_4C_4 p^3(1-p) \cdot p + {}_5C_3 p^3(1-p)^2 \cdot p + {}_6C_3 p^3(1-p)^3 \cdot p \\ &= p^4 + 4p^4(1-p) + 10p^4(1-p)^2 + 20p^4(1-p)^3 \\ &= p^4\{1 + 4(1-p) + 10(1-p)^2 + 20(1-p)^3\} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P(3) - P(4) &= p^3\{1 + 3(1-p) + 6(1-p)^2\} \\ &\quad - p^4\{1 + 4(1-p) + 10(1-p)^2 + 20(1-p)^3\} \\ &= p^3\{1 + 3(1-p) + 6(1-p)^2\} \\ &\quad - p^3\{p + 4p(1-p) + 10p(1-p)^2 + 20p(1-p)^3\} \\ &= p^3\{1 - p + 3(1-p) + 6(1-p)^2\} \\ &\quad - p^3\{4p(1-p) + 10p(1-p)^2 + 20p(1-p)^3\} \\ &= p^3(1-p)\{4 + 6(1-p)\} \\ &\quad - p^3(1-p)\{4p + 10p(1-p) + 20p(1-p)^2\} \\ &= p^3(1-p)\{4 - 4p + 6(1-p)\} \\ &\quad - p^3(1-p)\{10p(1-p) + 20p(1-p)^2\} \\ &= p^3(1-p)^2 \cdot 10 - p^3(1-p)^2\{10p + 20p(1-p)\} \\ &= p^3(1-p)^2(10 - 10p) - p^3(1-p)^2 \cdot 20p(1-p) \\ &= 10p^3(1-p)^3 - 20p^4(1-p)^3 \\ &= 10p^3(1-p)^3(1-2p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 0 < p < \frac{1}{2} \quad &\text{のとき} \quad P(3) > P(4) \\ p = \frac{1}{2} \quad &\text{のとき} \quad P(3) = P(4) \\ \frac{1}{2} < p < 1 \quad &\text{のとき} \quad P(3) < P(4) \end{aligned}$$



12 $y = -x^2$, $y = 8(x-a)(x-b)$ から y を消去すると

$$-x^2 = 8(x-a)(x-b) \quad \text{ゆえに} \quad 9x^2 - 8(a+b)x + 8ab = 0$$

これが重解をもつから、係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= 16(a+b)^2 - 9 \cdot 8ab \\ &= 8(2a^2 - 5ab + 2b^2) \\ &= 8(a-2b)(2a-b) = 0 \end{aligned}$$

よって $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, 2$ ■

13 (1) $f(3^6) - f(3) = f(729) - f(3) = 9 - 3 = 6$

$$\begin{aligned} (2) \quad n^5 - n &= n(n^4 - 1) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 - 4 + 5) \\ &= n(n+1)(n-1)\{(n+2)(n-2) + 5\} \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ は連続する 5 つの整数の積で 10 の倍数である．
 $(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積で 2 の倍数であるから、
 $5(n-1)n(n+1)$ は 10 の倍数である．

したがって、 n^5 と n を 10 で割った余りは等しい．

よって $f(n^5) - f(n) = 0$ ■

14 (1) 和が 15 となる組は

$$(6, 6, 3), (6, 5, 4), (5, 5, 5)$$

これらの順列は

$$\frac{3!}{2!}, \quad 3!, \quad 1 \quad \text{すなわち} \quad 3, \quad 6, \quad 1$$

よって、求める確率は $\frac{3+6+1}{6^3} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$

(2) 2 個のさいころの目をそれぞれ X, Y とすると、求める期待値は、2 変数 X, Y の独立性および期待値の線形性により

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

ここで $E(X) = E(Y) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$

よって $E(X+Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$ ■

15 (1) $a = 10$, $\cos B = \frac{3}{5}$, $R = 15$ より

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$ より

$$\frac{10}{\sin A} = \frac{b}{\frac{4}{5}} = 2 \cdot 15 \quad \text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{1}{3}, \quad b = 24$$

余弦定理 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ より

$$24^2 = c^2 + 10^2 - 2c \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} \quad \text{ゆえに} \quad c^2 - 12c - 475 = 0$$

$c > 0$ であるから $c = 6 + 16\sqrt{2}$

よって $\sin \angle BAC = \sin A = \frac{1}{3}$, $AC = b = \mathbf{24}$, $AB = c = \mathbf{6 + 16\sqrt{2}}$

(2) (1) の結果から

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 24(6 + 16\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{3} = \mathbf{8(3 + 8\sqrt{2})}$$

$S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$ より

$$8(3 + 8\sqrt{2}) = \frac{1}{2}r(10 + 24 + 6 + 16\sqrt{2})$$

よって $r = \frac{2(3 + 8\sqrt{2})}{5 + 2\sqrt{2}} = \mathbf{4\sqrt{2} - 2}$ ■

16 (1) $f(x) = 2\sin^4 x - 4\sqrt{3}\sin^3 x - 3\cos 2x$ より $(0 < x < \frac{3}{2}\pi)$

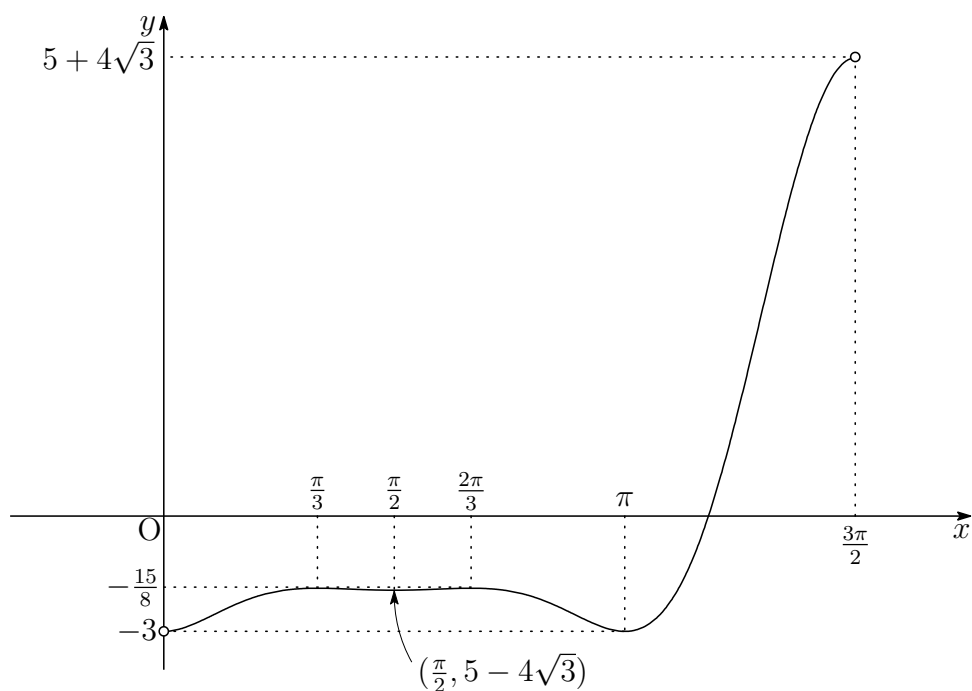
$$\begin{aligned} f'(x) &= 8\sin^3 x \cos x - 12\sqrt{3}\sin^2 x \cos x + 6\sin 2x \\ &= 4\sin x \cos x(2\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin x + 3) \\ &= 2\sin 2x(2\sin x - \sqrt{3})(\sin x - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

x	(0)	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	π	...	$(\frac{3\pi}{2})$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	

$$\text{極大値 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{15}{8}$$

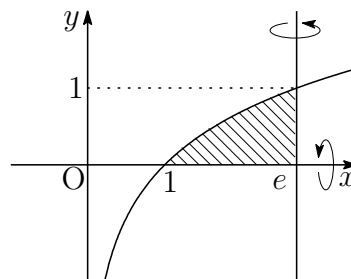
$$\text{極小値 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 - 4\sqrt{3}, \quad f(\pi) = -3$$

(2) (1) の結果からグラフの概形は次のようになる.



- 17** (1) V_1 は F を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_1^e (\log x)^2 dx \\ &= \pi \left[x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_1^e \\ &= \pi(e - 2) \end{aligned}$$



$y = \log x$ より, V_2 は $x = e^y$ を直線 $x = e$ のまわり 1 回転させてできる回転体の体積であるから

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^1 (e - e^y)^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 (e^2 - 2e^{y+1} + e^{2y}) dy \\ &= \pi \left[e^2 y - 2e^{y+1} + \frac{1}{2}e^{2y} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2}(4e - e^2 - 1) \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} V_2 - V_1 &= \frac{\pi}{2}(4e - e^2 - 1) - \pi(e - 2) \\ &= \frac{\pi}{2}(3 + 2e - e^2) \\ &= \frac{\pi}{2}(1 + e)(3 - e) > 0 \end{aligned}$$

よって $V_2 > V_1$

別解 (置換積分法) $x = e^t$ とおくと

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^1 t^2 e^t dt \\ &= \pi \left[e^t \{t^2 - (t^2)' + (t^2)''\} \right]_0^1 \\ &= \pi \left[e^t (t^2 - 2t + 2) \right]_0^1 \\ &= \pi(e - 2) \end{aligned}$$



18 (1) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ より

$$\frac{2}{3}E - \frac{1}{2}J = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(2) $E^2 = E, J^2 = -E$

$$A = \frac{2}{3}E - \frac{1}{2}J, \quad B = \frac{7}{6}E + \frac{1}{2}J - A = \frac{1}{2}E + J$$

したがって

$$\begin{aligned} AB &= \left(\frac{2}{3}E - \frac{1}{2}J \right) \left(\frac{1}{2}E + J \right) \\ &= \frac{1}{3}E + \frac{5}{12}J - \frac{1}{2}J^2 \\ &= \frac{5}{6}E + \frac{5}{12}J \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $AB - \frac{5}{12}J = \frac{5}{6}E$

$$\left(AB - \frac{5}{12}J \right)^n = \left(\frac{5}{6}E \right)^n = \left(\frac{5}{6} \right)^n E$$

よって、求める行列は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6} \right)^n E = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} E = 5E = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

■

19 (1) $y = x^2 - 3$ より $y' = 2x$

曲線 $y = x^2 - 3$ 上の点 $(x_n, x_n^2 - 3)$ における接線の方程式は

$$y - (x_n^2 - 3) = 2x_n(x - x_n)$$

これが点 $(x_{n+1}, 0)$ を通るから

$$-x_n^2 + 3 = 2x_n x_{n+1} - 2x_n^2 \quad \text{ゆえに} \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{2x_n}$$

したがって

$$x_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{x_n^2 + 3 - 2\sqrt{3}x_n}{2x_n} = \frac{x_n - \sqrt{3}}{2x_n} \cdot (x_n + \sqrt{3})$$

(2) (1) の結果から, $x_k > \sqrt{3}$ のとき, $x_{k+1} > 0$

$x_1 = 2 > \sqrt{3}$ より, すべての自然数 n について $x_n > \sqrt{3}$

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + 3}{2x_n} = \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} > 0$$

ゆえに, 2 以上のすべての自然数 n について

$$x_{n+1} < x_n < x_1 = 2$$

よって $\sqrt{3} < x_{n+1} < x_n < 2$ ($n = 2, 3, \dots$)

(3) $\sqrt{3} < x_n < 2$ より ($n = 2, 3, \dots$)

$$0 < \frac{x_n - \sqrt{3}}{2x_n} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2x_n} < \frac{1}{2}$$

上式および (1) の結果から

$$0 < x_{n+1} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{3}) \quad (x_n > \sqrt{3})$$

したがって

$$0 < x_n - \sqrt{3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \sqrt{3}) = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$$

