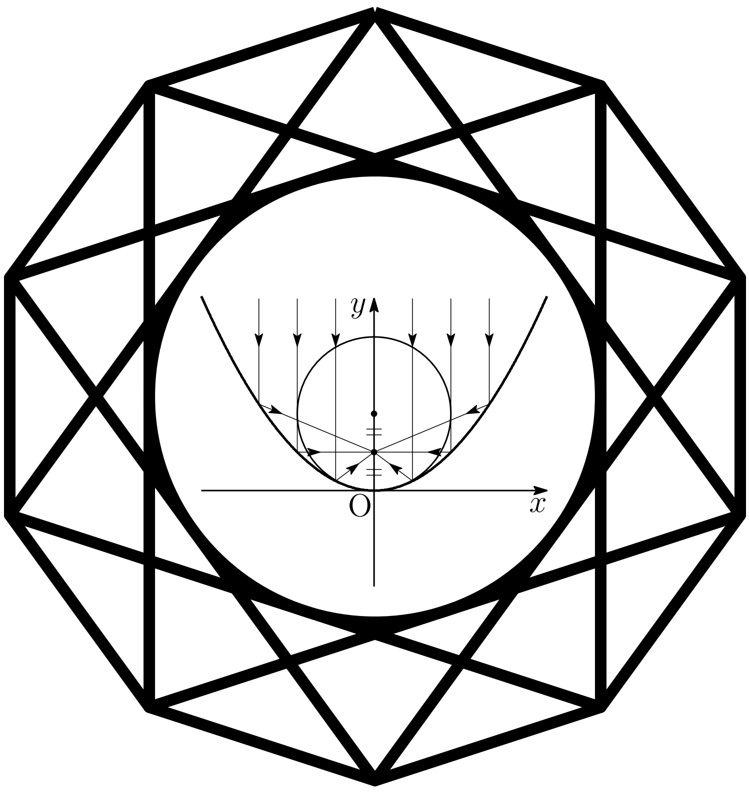
入試の軌跡

難関大学　文系

2015 − 2020

数　学



2020 年 10 月 17 日

Typed by LaTeX 2ε

序

本書には，主な難関国立大学 (文系)

北海道大学	東北大学	東京大学	一橋大学	名古屋大学
京都大学	大阪大学	神戸大学	広島大学	九州大学

が平成 27 年 (2015 年) 度から令和 2 年 (2020 年) 度までの一般前期試験問題 (数学) および解答例をすべて掲載した．

本書の作成にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．

2. ICT 教材として，電子黒板やプロジェクターでの使用を視野に入れており，この機能を利用する際には，全画面表示 (Ctrl+L) および描画領域に合わせる (Ctrl+3) と見やすくなる．ページスクロールには，(Ctrl+▲，Ctrl+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る (Alt+◀)，進む (Alt+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するにはESC.

3. スマートフォンでの使用も想定し，ページリンクの操作性を配慮した ICT 教材でもある．問題および解答には相互リンクを施した．各問の解答の終わりにある ■ をクリックすると，各大学の出題分野に戻る．また，出題分野の左上にある ◀ をクリックすると，最初のページに戻る．

上の 2，3 の機能をサポートする PDF ブラウザとして，Adobe Reader をご使用ください (フリーソフト)．スマートフォンには，同アプリがインストールされていない場合が多いので，同アプリをインストールされてからご使用ください．

令和 2 年 5 月　編者

目 次

第 1 章　北海道大学

出題分野 (2011-2020) 90 分

◀	北海道大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数	1							2		
	図形と計量								1		
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式	3									1
	三角関数			1						2	2
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	2	2·3	4	1	1	1·2	4	4	4	4
A	場合の数と確率	4	4	2	4	4		3	3		3
	整数の性質						4	1			
	図形の性質										
B	平面上のベクトル		1		3	3	3	2			
	空間のベクトル			3						1	
	数列				2	2				3	
	確率分布と統計										

数字は問題番号

1.1　2015 年 (90 分)

1 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = -(x-1)^2$$

がある．a は 0 でない実数とし，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を ℓ とする．

(1) ℓ の方程式を a で表せ．

(2) C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点 R，S をもつとする．線分 PQ の長さと線分 RS の長さが等しくなるとき，a の値を求めよ．

2 p は 0 でない実数とし

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{p}a_n - (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) $b_n = p^n a_n$ とする．b_{n+1} を b_n，n，p で表せ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

3 平面において，一直線上にない 3 点 O，A，B がある．O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる．O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする．ただし，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする．このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi - \alpha$ であることを示せ．

(3) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ．

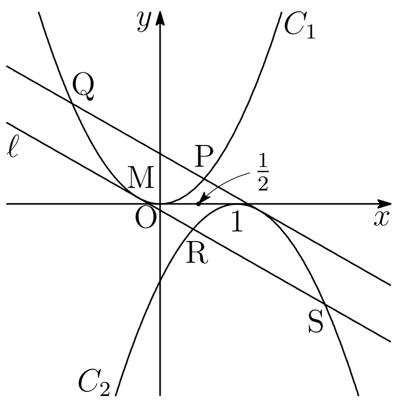
4 ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える．

(1) 番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ．

(2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い，4 枚連続しては並ばない確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線の傾きは



$$\frac{4a^2-a^2}{-2a-a}=-a$$

$C_1 : y=x^2$ より　$y'=2x$

C_1 と接線 ℓ の接点を M とすると，M の x 座標は (実は，P と Q の x 座標の中央)

$$2x=-a \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{a}{2}$$

ℓ は点 $\mathrm{M}\left(-\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{4}\right)$ を通り，傾き $-a$ の直線であるから

$$y-\frac{a^2}{4}=-a\left(x+\frac{a}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-ax-\frac{a^2}{4}}$$

(2) $C_2 : y=-(x-1)^2$ と ℓ の方程式から y を消去すると

$$-(x-1)^2=-ax-\frac{a^2}{4} \quad \text{ゆえに} \quad x^2-(a+2)x+1-\frac{a^2}{4}=0 \quad \cdots(*)$$

上の 2 次方程式 $(*)$ の判別式 D は

$$D=(a+2)^2-4\left(1-\frac{a^2}{4}\right)=2a(a+2)$$

C_2 と ℓ は異なる 2 つの共有点をもつから，$D>0$ より

$$2a(a+2)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a<-2,\ 0<a}$$

(3) $\mathrm{PQ}=\mathrm{RS}$ が成立するとき，2 点 P，Q の x 座標の差と 2 点 R，S の x 座標の差が等しいから

$$|-2a-a|=\frac{a+2+\sqrt{D}}{2}-\frac{a+2-\sqrt{D}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |3a|=\sqrt{D}$$

両辺を平方すると　$9a^2=2a(a+2)$　$a\neq 0$ に注意して　$\boldsymbol{a=\frac{4}{7}}$

補足 C_1 と C_2 は点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ に関して対称である．$\mathrm{PQ}=\mathrm{RS}$ が成立するとき，直線 $\mathrm{PQ} : y=-ax+2a^2$ と ℓ は点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ に関して対称となる．直線 PQ および ℓ の x 切片は，それぞれ $2a$，$-\frac{a}{4}$ で，その中央が $\frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{2a+\left(-\frac{a}{4}\right)}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\frac{4}{7}}$$

■

2 (1) $a_{n+1}=\dfrac{1}{p}a_n-(-1)^{n+1}$ より　　$p^{n+1}a_n=p^na_n-(-p)^{n+1}$

$b_n=p^na_n$ より　　$\boldsymbol{b_{n+1}=b_n-(-p)^{n+1}}$

(2) $b_1=pa_1=p\cdot 1=p$，(1) の結果から　$b_{n+1}-b_n=-(-p)^{n+1}$

(i) $-p\neq 1$，すなわち，$p\neq -1$ のとき，$n\geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)&=-\sum_{k=1}^{n-1}(-p)^{k+1}\\ b_n-p&=-\frac{(-p)^2\{1-(-p)^{n-1}\}}{1-(-p)}\\ b_n&=\frac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$b_n=\dfrac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}$

(ii) $-p=1$，すなわち，$p=-1$ のとき，$n\geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)&=-\sum_{k=1}^{n-1}\\ b_n-(-1)&=-(n-1)\\ b_n&=-n\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$b_n=-n$

(i),(ii) から，一般項 a_n は

$$a_n=\frac{b_n}{p^n}=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{1-(-p)^n}{(1+p)p^{n-1}}} & \boldsymbol{(p\neq -1)}\\ \boldsymbol{(-1)^{n-1}n} & \boldsymbol{(p=-1)}\end{cases}$$

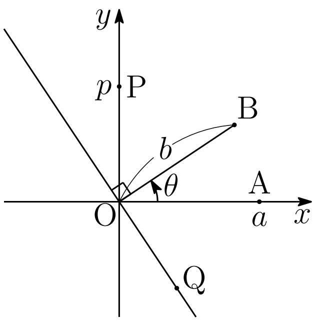
■

3　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$

(2) $a,b,p>0,\ q\neq0$ とし，$\alpha=|\theta|$ を満たす θ をとる．条件から，一般性を失うことなく



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ p),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b\cos\theta,\ b\sin\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(q\sin\theta,-q\cos\theta)$$

とおくことができる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=bp\sin\theta,\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=aq\sin\theta$$

これを (1) の結果に代入すると　$bp\sin\theta=aq\sin\theta$

$0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$bp=aq\quad\cdots(*)$

$a,b,p>0$ であるから，$(*)$ より　$q>0$

$p=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$，$q=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$，$0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=-pq\cos\theta=-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos|\theta|\\&=-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\alpha\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos(\pi-\alpha)\end{aligned}$$

上式より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角は　$\pi-\alpha$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-q'\sin\theta,\ q'\cos\theta)$ とおいて (1) の結果に代入すると

$$bp\sin\theta=-aq'\sin\theta\quad ゆえに\quad bp=-aq'\quad これより\quad q'=-|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=pq'\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|(-|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|)\cos|\theta|=-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\alpha$

(3) $(*)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$　よって　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$　■

$\boxed{4}$ (1) 52 枚のカードの並べ方は 52! 通り．番号 7 のカードをひとまとめにすると，番号 7 以外の 48 枚のカードとひとまとめにしたカードの並べ方は

$$(48+1)! = 49! \quad (\text{通り})$$

ひとまとめにした番号 7 のカードの並べ方は　4!　(通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{49!\cdot4!}{52!} = \dfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{52\cdot51\cdot50} = \mathbf{\dfrac{1}{5525}}$

(2) 4 枚の番号 7 のカードを 2 枚ずつ 2 組に分ける方法は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!} = 3$　(通り)

番号 7 のカードを 2 枚ずつにした 2 組のカードの並べ方は

$$2!\cdot2! = 4 \quad (\text{通り})$$

番号 7 以外の 48 枚のカードと 2 組のカードの並べ方は

$$(48+2)! = 50! \quad (\text{通り})$$

このとき，番号 7 の 4 枚が連続して並ばないので，(1) の結果を用いて

$$\frac{50!\cdot3\cdot4 - 49!\cdot4!}{52!} = \frac{50\cdot3\cdot4 - 4!}{52\cdot51\cdot50} = \frac{(25-1)4!}{52\cdot51\cdot50} = \mathbf{\frac{24}{5525}}$$

■

1.2　2016 年 (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a, b, c を実数とし，

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とおく．曲線 $C : y = f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある．

(1) P における C の接線の方程式を求めよ．

(2) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を s, t, a の関係式として求めよ．

(3) (2) の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x) = |x(x-2)| + |(x-1)(x-4)| + 3x - 10 \quad (-2 \leqq x \leqq 4)$ とおく．

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ．グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標 α, β $(\alpha < \beta)$ の値も求めよ．

(2) (1) の α, β に対して，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB} = 2$，$\mathrm{AC} = 1 + \sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ をみたすとする．

(1) $\beta = \angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ．

(2) (1) の β の値をすべて求めよ．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす実数 s, t を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ x, y を自然数とする．

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ．

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ より $f'(x)=3x^2+2ax+b$

曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$ における接線の方程式は

$$y-f(s)=f'(s)(x-s)$$

ゆえに $y-(s^3+as^2+bs+c)=(3s^2+2as+b)(x-s)$

よって $\boldsymbol{y=(3s^2+2as+b)x-2s^3-as^2+c}$

(2) $f'(s)=f'(t)$ より $3s^2+2as+b=3t^2+2at+b$

ゆえに $(s-t)(3s+3t+2a)=0$

$s\neq t$ より，$s-t\neq 0$ であるから $\boldsymbol{3s+3t+2a=0}$

(3) (2) の結果から，$s+t=-\dfrac{2a}{3}$ より

$$\begin{aligned}
f(s)+f(t)&=s^3+as^2+bs+c+t^3+at^2+bt+c\\
&=s^3+t^3+a(s^2+t^2)+b(s+t)+2c\\
&=(s+t)^3-3st(s+t)+a\{(s+t)^2-2st\}+b(s+t)+2c\\
&=\left(-\frac{2a}{3}\right)^3-3st\left(-\frac{2a}{3}\right)+a\left\{\left(-\frac{2a}{3}\right)^2-2st\right\}+b\left(-\frac{2a}{3}\right)+2c\\
&=\frac{4a^3}{27}-\frac{2}{3}ab+2c,\\
f\left(-\frac{a}{3}\right)&=\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c\\
&=\frac{2a^3}{27}-\frac{1}{3}ab+c
\end{aligned}$$

したがって $\dfrac{s+t}{2}=-\dfrac{a}{3}$，$\dfrac{f(s)+f(t)}{2}=f\left(-\dfrac{a}{3}\right)$

よって，$\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ の中点は，C 上の点 $\left(-\dfrac{a}{3},\ f\left(-\dfrac{a}{3}\right)\right)$ と一致する． ■

2　(1)　$f(x) = |x(x-2)| + |(x-1)(x-4)| + 3x - 10 \quad (-2 \leqq x \leqq 4)$

(i)　$-2 \leqq x \leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-2) + (x-1)(x-4) + 3x - 10 = 2x^2 - 4x - 6 \\ &= 2(x+1)(x-3) = 2(x-1)^2 - 8 \end{aligned}$$

(ii)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$f(x) = -x(x-2) + (x-1)(x-4) + 3x - 10 = -6$$

(iii)　$1 \leqq x \leqq 2$ のとき

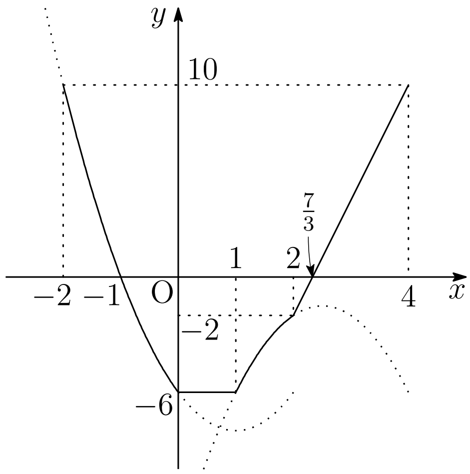
$$\begin{aligned} f(x) &= -x(x-2) - (x-1)(x-4) + 3x - 10 = -2x^2 + 10x - 14 \\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(iv)　$2 \leqq x \leqq 4$ のとき

$$f(x) = x(x-2) - (x-1)(x-4) + 3x - 10 = 6x - 14$$

(i)〜(iv) より，$y = f(x)$ のグラフは下の図のようになる．

グラフと x 軸との交点の x 座標 α, β $(\alpha < \beta)$ は　$\boldsymbol{\alpha = -1,\ \beta = \dfrac{7}{3}}$



(2)

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx &= \int_{-1}^0 (2x^2 - 4x - 6)\,dx + \int_0^1 (-6)\,dx \\ &\quad + \int_1^2 (-2x^2 + 10x - 14)\,dx + \int_2^{\frac{7}{3}} (6x - 14)\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right]_{-1}^0 - 6 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 14x\right]_1^2 \\ &\quad + \left[3x^2 - 14x\right]_2^{\frac{7}{3}} = -\frac{10}{3} - 6 - \frac{11}{3} - \frac{1}{3} = \boldsymbol{-\frac{40}{3}} \end{aligned}$$

■

3 (1) $b=1+\sqrt{3}$，$c=2$，$B=\beta$，$C=45^\circ$ を正弦定理を適用すると

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta}=\frac{2}{\sin 45^\circ} \quad ゆえに \quad \sin\beta=\frac{(1+\sqrt{3})\sin 45^\circ}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$したがって \quad \cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) (1) の結果から，$0<\beta<180^\circ$ に注意して $\boldsymbol{\beta=75^\circ，105^\circ}$

(3) $\triangle$ABC は鋭角三角形であるから，(2) の結果から $B=75^\circ$

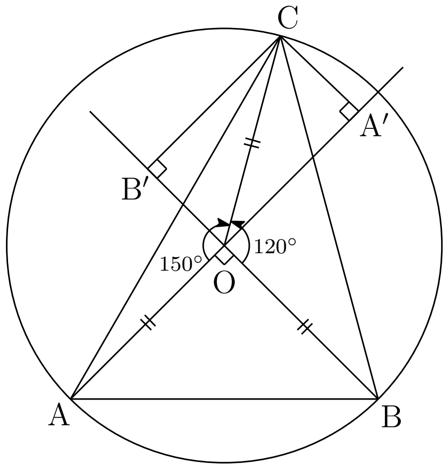
ゆえに $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{OB}$.

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となす角はそれぞれ 150°，120° である．

点 C から直線 OA，OB に垂線 CA', CB' を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}=(\cos 150^\circ)\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}'}=(\cos 120^\circ)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}'}+\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\cos 150^\circ)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\cos 120^\circ)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$よって \quad s=\cos 150^\circ=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad t=\cos 120^\circ=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

補足 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ であるから [1]

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\cos 150^\circ)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/HKdai/HKdai_ri_2016.pdf $\boxed{5}$ の補足を参照．

4 (1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ は自然数であるから

$$\frac{3x}{x^2+2} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x-2) \leqq 0$$

x は自然数であるから，$x=1,\ 2$．このとき，$\dfrac{3x}{x^2+2}=1$

よって，求める自然数 x は　　$\boldsymbol{x=1,\ 2}$

(2) (1) の結果から，自然数 x について，$0 < \dfrac{3x}{x^2+2} \leqq 1$

また，自然数 y について，$0 < \dfrac{1}{y} \leqq 1$　 ゆえに　$0 < \dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y} \leqq 2$

(i) $\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y} = 2$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2} = 1,\quad \dfrac{1}{y} = 1$

(1) の結果を利用して　$(x,\ y) = (1,\ 1),\ (2,\ 1)$

(ii) $\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y} = 1$ のとき　$\dfrac{1}{y} = 1 - \dfrac{3x}{x^2+2}$　　$\cdots(*)$

$0 < \dfrac{1}{y} < 1$ であるから，$0 < \dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{3x}{x^2+2} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} (x-1)(x-2) > 0 \\ (x-3)^2 \leqq 7 \end{cases}$$

これを満たす自然数 x は　$x=3,\ 4,\ 5$
これらを $(*)$ に代入して

x	3	4	5
y	$\frac{11}{2}$	3	$\frac{9}{4}$

(i)，(ii) より，求める自然数 $(x,\ y)$ の組は

$$\boldsymbol{(x,\ y) = (1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (4,\ 3)}$$

■

1.3　2017 年 (90 分)

1 自然数の 2 乗となる数を平方数という．

(1) 自然数 a，n，k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ．

2 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする．円 C の内部に点 A がある．点 C の周上を 2 点 P，Q が条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く．線分 PQ の中点を R とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$|\vec{a}|=r$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とする．ただし，$0<r<1$ とする．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を用いて表せ．

(2) 直線 OA 上の点 B で，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が 2 点 P，Q の位置によらず一定であるものを求めよ．また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ の値を r を用いて表せ．

3 正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある．点 P は，1 秒ごとに，隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる．初め頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする．ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする．

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ．

(2) 確率 p_n を求めよ．

4 a，b を実数とし，関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

を満たすとする．

(1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値を持つとする．このような a，b が満たす条件を求めよ．また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $n(n+1)+a=(n+k)^2 \quad \cdots(*)$ より

$$\begin{aligned} a &= (n+k)^2 - n(n+1) \\ &= k^2 + n(2k-1) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

n，k は自然数であるから，$n \geqq 1$，$2k-1>0$ より

$$a \geqq k^2 + 1(2k-1) \quad \text{ゆえに} \quad a \geqq k^2+2k-1 \quad \cdots(**)$$

(2) $(*)$ において，$a=7$ であるから，このとき，$(**)$ により

$$7 \geqq k^2+2k-1 \quad \text{ゆえに} \quad (k+4)(k-2) \leqq 0$$

これを満たす自然数 k は　1，2

① より，$n=\dfrac{7-k^2}{2k-1}$ であるから

$$k=1 \text{ のとき } n=6, \quad k=2 \text{ のとき } n=1$$

よって，求める自然数 n は　**1，6**　■

2　(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\vec{q}-\vec{a}$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$|\vec{a}|=r$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{q}-\vec{a})\\&=\vec{p}\cdot\vec{q}-(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+r^2=0\quad\cdots①\end{aligned}$$

R は 2 点 P，Q の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})$ より $(|\vec{p}|=|\vec{q}|=1)$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})-\vec{a}\right|^2\\&=\frac{1}{4}|\vec{p}+\vec{q}|^2-(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2\\&=\frac{1}{4}(|\vec{p}|^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2)-(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+r^2\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}-(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+r^2\end{aligned}$$

① から，$-(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+r^2=-\vec{p}\cdot\vec{q}$ を上式に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}-\vec{p}\cdot\vec{q}=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}}$$

(2) 点 B は直線 OA 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t\vec{a}$ とおくと (t は実数)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=\left|\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})-t\vec{a}\right|^2\\&=\frac{1}{4}|\vec{p}+\vec{q}|^2-t(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+t^2|\vec{a}|^2\\&=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})-t(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}+r^2t^2\end{aligned}$$

① より，$(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{a}=\vec{p}\cdot\vec{q}+r^2$ を上式に代入すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2&=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})-t(\vec{p}\cdot\vec{q}+r^2)+r^2t^2\\&=\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{p}\cdot\vec{q}+\frac{1}{2}+(t^2-t)r^2\end{aligned}$$

上式が，2 点 P，Q の位置によらず一定であるとき

$$\frac{1}{2}-t=0\quad\text{ゆえに}\quad t=\frac{1}{2}$$

よって，**B は線分 OA の中点で，**$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{r^2}{4}}$　■

3 (1) 点 P が n 秒後に頂点 A にいる確率が p_n であるから，点 P が n 秒後に頂点 B，C，D いる確率は等しく

$$\frac{1-p_n}{3}$$

であるから，点 P が $n+1$ 秒後に A にいる確率は

$$p_{n+1}=(1-a)p_n+3\times\frac{a}{3}\cdot\frac{1-p_n}{3}$$

よって　$\boldsymbol{p_{n+1}=\left(1-\frac{4}{3}a\right)p_n+\frac{a}{3}}$

(2) (1) の結果から　$p_{n+1}-\dfrac{1}{4}=\left(1-\dfrac{4}{3}a\right)\left(p_n-\dfrac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{4}\right\}$ は初項 $p_1-\dfrac{1}{4}$，公比 $1-\dfrac{4}{3}a$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned}p_n-\frac{1}{4}&=\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{4}\right)\\ p_n&=\frac{1}{4}+\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n-1}\left(1-a-\frac{1}{4}\right)\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $k=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ とおくと，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+k$ より

$$\begin{aligned}k&=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}t^3-at^2+(a^2-b)t+k\right)dx\\&=\left[\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{3}at^3+\frac{1}{2}(a^2-b)t^2+kt\right]_{-1}^{1}\\&=-\frac{2}{3}a+2k\end{aligned}$$

ゆえに　$k=\dfrac{2}{3}a$　したがって　$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\dfrac{2}{3}a\cdots(*)$

よって　　$f(0)=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}a}$

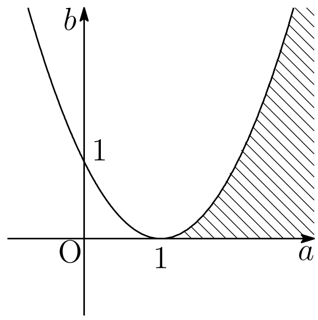
(2) $(*)$ から　$f'(x)=x^2-2ax+a^2-b=(x-a)^2-b$

2次方程式 $f'(x)=0$ が $x>1$ において，異なる2つの実数解をもつから

$$a>1,\quad f'(a)=-b<0,\quad f'(1)=(1-a)^2-b>0$$

ゆえに　　$a>1,\quad b>0,\quad b<(a-1)^2$

よって，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲は，下図の斜線部分で境界線を含まない．



■

1.4　2018 年 (90 分)

$\boxed{1}$ $t > 1$ とする．$\triangle$ABC において AB $= \sqrt{t^2+1}$，BC $= t-1$，AC $= \sqrt{2}$ とし，点 O を $\triangle$ABC の外心とする．

(1) $\angle$ACB の大きさを求めよ．

(2) 直線 CO と直線 AB が垂直に交わるときの t の値を求めよ．

$\boxed{2}$ a と b は実数とし，関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を m とする．

(1) m を a と b で表せ．

(2) $a + 2b \leqq 2$ を満たす a と b で m を最大にするものを求めよ．また，このときの m の値を求めよ．

$\boxed{3}$ 赤色，青色，黄色のサイコロが 1 つずつある．この 3 つのサイコロを同時に投げる．赤色，青色，黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R，B，Y とし，自然数 s，t，u を $s = 100R + 10B + Y$，$t = 100B + 10Y + R$，$u = 100Y + 10R + B$ で定める．

(1) s，t，u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率を求めよ．

(2) $s > t > u$ となる確率を求めよ．

$\boxed{4}$ p を実数とする．関数 $y = x^3 + px^2 + x$ のグラフ C_1 と関数 $y = x^2$ のグラフ C_2 は，$x > 0$ の範囲に共有点を 2 個もつとする．

(1) このような p の値の範囲を求めよ．

(2) C_1 と C_2 の $x > 0$ の範囲にある共有点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha < \beta)$ とし，$0 \leqq x \leqq \alpha$ と $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．$S_1 = S_2$ となるような p の値を求めよ．また，このときの S_1 の値を求めよ．

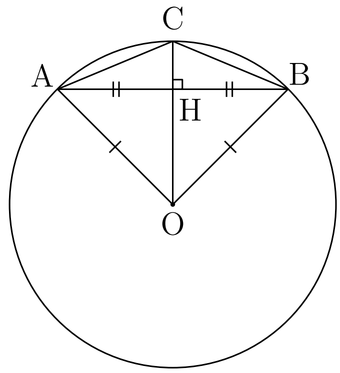
解答例

$\boxed{1}$ (1) △ABC に余弦定理を適用すると，$a=t-1$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{t^2+1}$ より

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(t-1)^2+2-(t^2+1)}{2(t-1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{-2(t-1)}{2\sqrt{2}(t-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$\boldsymbol{\angle \mathrm{ACB}=135^\circ}$

(2) 直線 CO と直線 AB が垂直であるとき，その交点を H とすると，H は線分 AB の中点であるから，右の図から



$$\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\quad ゆえに\quad t-1=\sqrt{2}$$

よって　$\boldsymbol{t=1+\sqrt{2}}$

■

$\boxed{2}$ (1) $f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b\ \ (0\leqq x\leqq 1)$

(i) $1\leqq -\dfrac{a}{2}$　すなわち　$a\leqq -2$ のとき，$m=f(1)=a+b+1$

(ii) $0\leqq -\dfrac{a}{2}\leqq 1$　すなわち　$-2\leqq a\leqq 0$ のとき，$m=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+b$

(iii) $-\dfrac{a}{2}\leqq 0$　すなわち　$0\leqq a$ のとき，$m=f(0)=b$

(i)〜(iii) より

$$\boldsymbol{m=\begin{cases} a+b+1 & (a\leqq -2)\\ -\dfrac{a^2}{4}+b & (-2\leqq a\leqq 0)\\ b & (0\leqq a)\end{cases}}$$

(2) $a+2b\leqq 2$ より，$t=2-a-2b$ とおくと $(t\geqq 0)$　$b=-\dfrac{a}{2}+1-\dfrac{t}{2}$　$\cdots$①

これを (1) の結果に代入し，整理すると

$$m=\begin{cases} \dfrac{a}{2}+1-\dfrac{t}{2} & (a\leqq -2)\\ -\dfrac{1}{4}(a+1)^2+\dfrac{5}{4}-\dfrac{t}{2} & (-2\leqq a\leqq 0)\\ -\dfrac{a}{2}+1-\dfrac{t}{2} & (0\leqq a)\end{cases}$$

t を固定すると，m は a の関数で，$a=-1$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}-\dfrac{t}{2}$ をとる．

これがさらに最大となるのは，$t=0$ のときで最大値 $\dfrac{5}{4}$.

このとき，① から $b=\dfrac{3}{2}$.　よって　$\boldsymbol{a=-1,\ b=\dfrac{3}{2},\ m=\dfrac{5}{4}}$　■

3 (1) $s=100R+10B+Y$ について，s が 500 以上であることと R が 5 または 6 であることは同値．同様に，t，u がそれぞれ 500 以上であることと，B，Y がそれぞれ 5 または 6 であることは同値である．

s，t，u のうち丁度 2 つが 500 以上である確率は ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\frac{4}{6}=\frac{2}{9}$

s，t，u の 3 つが 500 以上である確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{1}{27}$

よって，求める確率は $\frac{2}{9}+\frac{1}{27}=\boldsymbol{\frac{7}{27}}$

(2) $s>t$ となるとき　$s-t=100(R-B)+10(B-Y)+Y-R>0$　$\cdots$①

$t>u$ となるとき　$t-u=100(B-Y)+10(Y-R)+R-B>0$　$\cdots$②

上の 2 式の百の位の係数に注目すると，$R-B\geqq 0$ かつ $B-Y\geqq 0$ であることが ①，② を満たすための必要条件である．

(i) $R-B>0$，$B-Y>0$，すなわち，$R>B>Y$ のとき，①，② を満たす．このときの確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{6^3}=\frac{20}{6^3}$$

(ii) $R-B=0$，$B-Y>0$，すなわち，$R=B>Y$ のとき，①，② を満たす．このときの確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^3}=\frac{15}{6^3}$$

(iii) $R-B>0$，$B-Y=0$，すなわち，$R>B=Y$ のとき，② を満たさない．

(iv) $R-B=0$，$B-Y=0$，すなわち，$R=B=Y$ のとき，①，② を満たさない．

(i)〜(iv) より，求める確率は $\frac{20}{6^3}+\frac{15}{6^3}=\boldsymbol{\frac{35}{216}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $C_1 : y = x^3 + px^2 + x$，$C_2 : y = x^2$ の 2 式から，y を消去して整理すると

$$x\{x^2 + (p-1)x + 1\} = 0$$

条件を満たすとき，2 次方程式

$$x^2 + (p-1)x + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

の係数について

$$D = (p-1)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}1 = (p+1)(p-3) > 0 \quad \cdots ①$$

2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$

$$\alpha + \beta = -p + 1 > 0, \quad \alpha\beta = 1 \quad \cdots (**)$$

① および上式から　　$\boldsymbol{p < -1}$

(2) $S_1 = \displaystyle\int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$，$S_2 = -\displaystyle\int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$S_1 = S_2$ より，$S_1 - S_2 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx + \int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \int_0^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\,dx \\ &= -\int_0^\beta x^2(\beta - x)\,dx + \alpha\int_0^\beta x(\beta - x)\,dx \\ &= -\frac{1}{12}\beta^4 + \alpha{\cdot}\frac{1}{6}\beta^3 = \frac{\beta^3}{12}(2\alpha - \beta) = 0 \end{aligned}$$

$0 < \alpha < \beta$ であるから　$\beta = 2\alpha$　$(**)$ の第 2 式により　$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \beta = \sqrt{2}$

さらに $(**)$ の第 1 式により　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = -p + 1$　ゆえに　$\boldsymbol{p = 1 - \dfrac{3}{2}\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-2\alpha)\,dx \\ &= -\int_0^\alpha x^2(\alpha - x)\,dx + 2\alpha\int_0^\alpha x(\alpha - x)\,dx \\ &= -\frac{1}{12}\alpha^4 + 2\alpha{\cdot}\frac{1}{6}\alpha^3 = \frac{1}{4}\alpha^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{16}} \end{aligned}$$

補足 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}$ ■

1.5　2019 年 (90 分)

$\boxed{1}$ p を負の実数とする．座標空間に原点 O と 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2, -2,\ 1)$，$\mathrm{P}(p, -1,\ 2)$ があり，3 点 O，A，B が定める平面を α とする．また，点 P から平面 α に垂線を下ろし，α との交点を Q とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 a，b を p を用いて表せ．

(2) 点 Q が $\triangle\mathrm{OAB}$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ．

$\boxed{2}$ x を正の実数とし，座標平面上に 3 点 $\mathrm{A}(x,\ 0)$，$\mathrm{B}(-2,\ 2)$，$\mathrm{C}(-3,\ 3)$ をとる．直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) $\tan\theta$ を x で表せ．

(2) $x > 0$ における $\tan\theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ．

$\boxed{3}$ n を自然数とする．数列 2, 1, 2, 1, 1 のように各項が 1 または 2 の有限数列 (項の個数が有限である数列) を考える．各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする．例えば，$n = 1$ のときは，1 項からなる数列 1 のみである．したがって，$s_1 = 1$ となる．$n = 2$ のときは，1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列 1, 1 の 2 つである．したがって，$s_2 = 2$ となる

(1) s_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 3$ のとき，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ．

(3) 3 以上のすべての n に対して $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α，β の組 $(\alpha,\ \beta)$ を 1 組求めよ．

(4) s_n を求めよ．

$\boxed{4}$ 実数 a，b，c に対し，関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ を考える．1 次関数 $g(x)$ があり，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は，すべての x に対し等式 $f(x) = f'(x)g(x) - 6x$ を満たしているとする．

(1) b と c を a で表せ．

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 2,\ 0)$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2, -2,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(2,\ 1, -2)$$

とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\vec{n}$ とすると ($a,\ b,\ c$ は実数)

$$\begin{pmatrix} p \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

したがって $\begin{cases} -a+2b+2c=p \\ 2a-2b+c=-1 \\ b-2c=2 \end{cases}$

よって $\boldsymbol{a=\dfrac{p+2}{3},}\quad \boldsymbol{b=\dfrac{4(p+2)}{9}},\quad c=\dfrac{2p-5}{9}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，条件を満たすとき

$$a \geqq 0,\quad b \geqq 0,\quad a+b \leqq 1$$

(1) の結果から $\dfrac{p+2}{3} \geqq 0,\quad \dfrac{4(p+2)}{9} \geqq 0,\quad \dfrac{p+2}{3}+\dfrac{4(p+2)}{9} \leqq 1$

これを解いて $\boldsymbol{-2 \leqq p \leqq -\dfrac{5}{7}}$

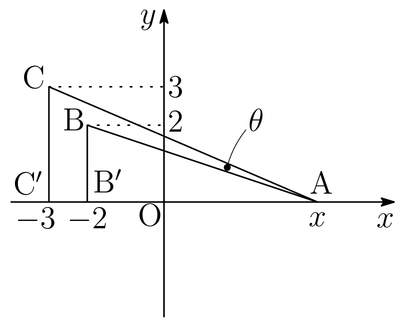
補足 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表す [2]． ■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

2　(1) 2 点 B，C から x 軸にそれぞれ垂線 BB$'$，CC$'$ を下ろし，$\beta = \angle \mathrm{BAB}'$，$\gamma = \angle \mathrm{CAC}'$ とすると



$$\tan\beta = \frac{2}{x+2},\quad \tan\gamma = \frac{3}{x+3},$$
$$\theta = \gamma - \beta$$

したがって

$$\tan\theta = \tan(\gamma-\beta) = \frac{\tan\gamma - \tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta} = \frac{\dfrac{3}{x+3} - \dfrac{2}{x+2}}{1 + \dfrac{3}{x+3}\cdot\dfrac{2}{x+2}}$$
$$= \frac{3(x+2)-2(x+3)}{(x+2)(x+3)+6} = \boldsymbol{\frac{x}{x^2+5x+12}}$$

(2) (1) の結果から　$f(x) = \dfrac{1}{x + \dfrac{12}{x} + 5}$　$(x > 0)$　$\cdots$①

$x > 0$，$\dfrac{12}{x} > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$x + \frac{12}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{12}{x}} = 4\sqrt{3}\quad\cdots②$$

② において，等号が成立するとき

$$x = \frac{12}{x}\quad すなわち\quad x = 2\sqrt{3}$$

①，② から　$f(x) \leqq \dfrac{1}{4\sqrt{3}+5} = \dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}$

よって，$\boldsymbol{x = 2\sqrt{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}}$ をとる．■

3 (1) 条件を満たす数列は，次の3通り．

$$\{1,\ 1,\ 1\},\quad \{1,\ 2\},\quad \{2,\ 1\}$$

よって $\boldsymbol{s_3 = 3}$

(2) 数列の和が n となる数列の個数 s_n は，その数列の末項が1となる個数は s_{n-1} であり，末項が2となる個数は s_{n-2} であるから

$$\boldsymbol{s_n = s_{n-1} + s_{n-2}}$$

(3) $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2}) \cdots (*)$ より

$$s_n - (\alpha+\beta)s_{n-1} + \alpha\beta s_{n-2} = 0 \quad \cdots ①$$

(2) の結果から $s_n - s_{n-1} - s_{n-2} = 0 \quad \cdots ②$

①，② の係数を比較して $\alpha+\beta = 1,\ \alpha\beta = -1 \quad \cdots (**)$

$\alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$ を解とする2次方程式は $x^2 - x - 1 = 0 \quad \cdots ③$

これを解いて $\boldsymbol{\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(4) $(*)$ より $s_{n+1} - \alpha s_n = \beta^{n-1}(s_2 - \alpha s_1) = \beta^{n-1}(2-\alpha)$

ここで，β は，方程式 ③ の解であるから $\beta^2 - \beta - 1 = 0$

上式および $(**)$ により $2 - \alpha = 1 + \beta = \beta^2$

したがって $s_{n+1} - \alpha s_n = \beta^{n+1}$

同様にして $s_{n+1} - \beta s_n = \alpha^{n+1}$

上の2式から

$$s_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$，$f'(x) = 3x^2 - 6ax + b$ について

$$f(x) = f'(x)g(x) - 6x \quad \cdots (*)$$

を満たす 1 次関数 $g(x)$ は，$f(x)$ の x^3 の項の係数に注意して

$$g(x) = \frac{x}{3} + k \quad (k \text{ は定数})$$

とおける．上の諸式を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} x^3 - 3ax^2 + bx + c &= (3x^2 - 6ax + b)\left(\frac{x}{3} + k\right) - 6x \\ &= x^3 + (3k - 2a)x^2 + \left(\frac{b}{3} - 6ak - 6\right)x + bk \end{aligned}$$

上式の両辺の x^2，x の項の係数および定数項を比較して

$$-3a = 3k - 2a, \quad b = \frac{b}{3} - 6ak - 6, \quad c = bk$$

整理すると　$k = -\dfrac{a}{3} \cdots ①$，$b = -9ak - 9 \cdots ②$，$c = bk \cdots ③$

① を ② に代入すると　$\boldsymbol{b = 3a^2 - 9}$

これと ① を ③ に代入すると　$\boldsymbol{c = -a^3 + 3a}$

(2) (1) の結果から　$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2 - 9 = 3(x - a)^2 - 9$

上式より，$f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもち，それらを α, β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{3a^2 - 9}{3} = a^2 - 3$$

このとき，$(*)$ より　$f(\alpha) = -6\alpha$，$f(\beta) = -6\beta$

3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，

$$f(\alpha)f(\beta) < 0$$

を満たせばよいから

$$-6\alpha\cdot(-6\beta) = 36\alpha\beta = 36(a^2 - 3) < 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}}$　■

1.6　2020年(90分)

1 k を正の実数とする．座標平面上に直線 $\ell : y = kx + 1$ と放物線 $C : y = x^2$ がある．ℓ と C の交点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする．さらに，線分 PQ の垂直二等分線を m とし，m と C の交点のうち x 座標の小さい方を R，大きい方を S とする．

(1) 線分 PQ の中点 M の座標を k を用いて表せ．

(2) k が正の実数を動くとき，線分 RS の中点 N の y 座標が最小となる k の値を求めよ．また，そのときの P と Q の座標を求めよ．

2 関数

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta - \sin\theta + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

を考える．

(1) $t = \sin\theta - \cos\theta$ とおく．$f(\theta)$ を t の式で表せ．

(2) $f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ．

(3) a を実数の定数とする．$f(\theta) = a$ となる θ がちょうど2個であるような a の範囲を求めよ．

3 n を2以上の自然数とする．1個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．

(1) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が3となる確率を n の式で表せ．

(2) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が1となる確率を n の式で表せ．

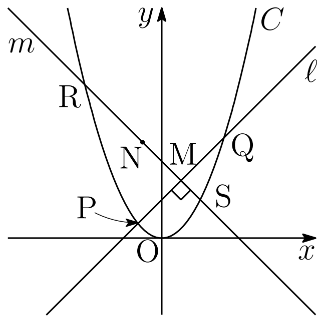
4 座標平面上に2つの放物線 $C_1 : y = 2x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2x - \dfrac{19}{8}$ がある．

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた直線のうち傾きが負であるものを ℓ とする．C_1，x 軸および ℓ が囲む部分の面積を求めよ．

解答例

1 (1) $\ell : y = kx + 1$ と $C : y = x^2$ の方程式から y を消去して，整理すると



$$x^2 - kx - 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = k^2 + 4 > 0$$

したがって，2 次方程式 $(*)$ の異なる 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\alpha + \beta = k \quad \text{ゆえに点 M の } x \text{ 座標} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{k}{2}$$

点 M は ℓ 上であるから，その y 座標は　$y = k\cdot\frac{k}{2} + 1 = \frac{k^2}{2} + 1$

よって，点 M の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{k}{2},\ \frac{k^2+2}{2}\right)}$

(2) P，Q の垂直二等分線 m は，点 $\mathrm{M}\left(\frac{k}{2},\ \frac{k^2+2}{2}\right)$ を通り，傾き $-\frac{1}{k}$ の直線であるから，その方程式は

$$y - \frac{k^2+2}{2} = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{k}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad m : y = -\frac{1}{k}x + \frac{k^2+3}{2}$$

上の第 2 式と C の方程式から y を消去して，整理すると

$$x^2 + \frac{1}{k}x - \frac{k^2+3}{2} = 0 \quad \cdots (**)$$

この方程式の判別式を D' とすると

$$D' = \left(\frac{1}{k}\right)^2 - 4\cdot1\left(-\frac{k^2+3}{2}\right) = \frac{1}{k^2} + 2(k^2+3) > 0$$

したがって，2 次方程式 $(**)$ の異なる 2 つの実数解を $x_1,\ x_2$ とすると

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{k} \quad \text{ゆえに N の } x \text{ 座標は} \quad \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{1}{2k}$$

点 N は m 上であるから，その y 座標は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{k}\left(-\frac{1}{2k}\right)+\frac{k^2+3}{2}=\frac{1}{2k^2}+\frac{k^2+3}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+k^2+3\right) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{k^2}+k^2 \geqq 2\sqrt{\frac{1}{k^2}\cdot k^2}=2 \quad \cdots ②$$

② において，等号が成立するとき $(k>0)$

$$\frac{1}{k^2}=k^2 \quad \text{すなわち} \quad k=1$$

上式および ①，② より，$\boldsymbol{k=1}$ のとき，点 N の y 座標は，最小値

$$\frac{1}{2}(2+3)=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

をとる．このとき，$(*)$ は　$x^2-x-1=0$　これを解いて

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

P，Q は直線 $\ell : y=x+1$ 上の点であるから，P，Q の条件により

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{5}}{2}},\ \boldsymbol{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right),\quad \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},\ \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

■

2 (1) $t=\sin\theta-\cos\theta$ の両辺を平方すると

$$t^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\sin 2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2\theta=1-t^2$$

よって　$f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-t^2)-t=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t^2-t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(2) $t=\sin\theta-\cos\theta$ より $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$$t=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{ゆえに} \quad -1\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

(1) の結果から　$f(t)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{12}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$

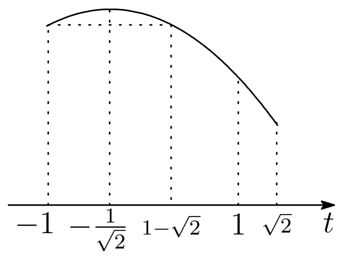
$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{3\pi}{4}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$

(3) $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

$$1 \leqq t < \sqrt{2} \text{ に対する } \theta \text{は 2 個}$$

$g(t)=f(\theta)$ とおくと $(-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$

$$g(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{3\sqrt{2}}{4}$$



$g(-1)=g(1-\sqrt{2})=1$，$g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$,

$g(1)=-1$，$g(\sqrt{2})=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

よって，求める a の範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{3\sqrt{2}}{2} < a \leqq -1,\ 1 \leqq a < \dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$ ■

3 (1) 出る目が $\{3,\ 6\}$ である確率は　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^n=\dfrac{2^n}{6^n}$

出る目が $\{6\}$ である確率は　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\dfrac{1}{6^n}$

3 または 6 である確率からすべて 6 である確率を引けばよいから

$$\frac{2^n}{6^n}-\frac{1}{6^n}=\boldsymbol{\frac{2^n-1}{6^n}}$$

(2) 最大公約数が偶数である確率は　$\left(\dfrac{3}{6}\right)^n=\dfrac{3^n}{6^n}$

最大公約数が 3 である確率は　$\dfrac{2^n-1}{6^n}$

最大公約数が 5 である確率は　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\dfrac{1}{6^n}$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1-\left(\frac{3^n}{6^n}+\frac{2^n-1}{6^n}+\frac{1}{6^n}\right)=\boldsymbol{\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $C_1 : y = 2x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2x - \dfrac{19}{8}$ に接する直線を $y = ax + b$ とおく．この直線と C_1，C_2 のそれぞれの方程式と y を消去して整理すると

$$2x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 + (a-2)x + b + \frac{19}{8} = 0$$

このとき，これらの方程式の係数について

$$a^2 + 8b = 0, \quad (a-2)^2 - 4\left(b + \frac{19}{8}\right) = 0 \qquad \text{(A)}$$

上の 2 式から b を消去して整理すると　$3a^2 - 8a - 11 = 0$

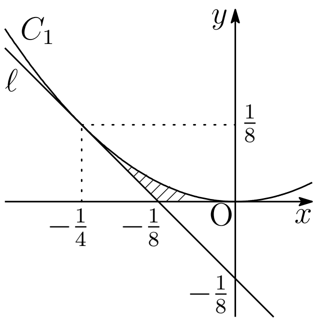
ゆえに　$(a+1)(3a-11) = 0$　これを解いて　$a = -1,\ a = \dfrac{11}{3}$

(A) の第 1 式より　$(a,\ b) = \left(-1, -\dfrac{1}{8}\right),\ \left(\dfrac{11}{3}, -\dfrac{121}{72}\right)$

よって，求める直線は　$\boldsymbol{y = -x - \dfrac{1}{8}},\quad \boldsymbol{y = \dfrac{11}{3}x - \dfrac{121}{72}}$

(2) (1) の結果から，直線 ℓ の方程式は

$$y = -x - \frac{1}{8}$$



これと $C_1 : y = 2x^2$ の共有点の x 座標は

$$2x^2 = -x - \frac{1}{8} \quad ゆえに \quad (4x+1)^2 = 0$$

これを解いて　$x = -\dfrac{1}{4}$

3 点 $\left(-\dfrac{1}{4},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{1}{8},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{128}$$

よって，求める面積は[3]

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} 2x^2\,dx - \frac{1}{128} = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{4}}^{0} - \frac{1}{128} = \boldsymbol{\frac{1}{384}}$$

■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 の補足)

第 2 章　東北大学

出題分野 (2011-2020) 100 分

◀	東北大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数			1							
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式									1	
	図形と方程式					2			1		3
	三角関数		2		4						
	指数関数と対数関数	1								2	
	微分法と積分法	4	1	4	1	4	2	2	3		1
A	場合の数と確率	3	3	3	2	3		4	2	4	
	整数の性質						3	3			
	図形の性質						4				
B	平面上のベクトル	2	4		3		1	1			4
	空間のベクトル			2					4		
	数列					1				3	2
	確率分布と統計										

数字は問題番号

2.1 2015年(100分)

1 次の性質をもつ数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = 3$$
$$a_{n+1} > a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$${a_n}^2 - 2a_na_{n+1} + {a_{n+1}}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$a_n + a_{n+2}$ を a_{n+1} を用いて表せ．

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ により定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

2 $t > 0$ を実数とする．座標平面において，3点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}\,t)$ を頂点とする三角形ABPを考える．

(1) 三角形ABPが鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ．

(2) 三角形ABPの垂心の座標を求めよ．

(3) 辺AB，BP，PAの中点をそれぞれM，Q，Rとおく．t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形ABPを線分MQ，QR，RMで折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

3 サイコロを3回投げて出た目の数を順に p_1，p_2，p_3 とし，x の2次方程式

$$2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \qquad \cdots(*)$$

を考える．

(1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ が実数でない2つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ．

4 $a > 0$ を実数とする．関数 $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする．

(1) $M(a)$ を求めよ．

(2) 実数 $x > 0$ に対し，$g(x) = M(x)^2$ とおく．xy 平面において，関数 $y = g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s > 0$ とその接線の傾きを求めよ．

(3) a が正の実数全体を動くとき，

$$k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$$

の最小値を求めよ．

解答例

1 (1)

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} > a_n$$

$$a_n{}^2 - 2a_na_{n+1} + a_{n+1}{}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \qquad \cdots ①$$

①から　$a_{n+1}{}^2 - 2a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+2}{}^2 = 3(a_{n+1} + a_{n+2}) \qquad \cdots ②$

② − ① より

$$a_{n+2}{}^2 - a_n{}^2 - 2a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 3(a_{n+2} - a_n)$$
$$(a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} - 3) = 0$$

$a_{n+2} > a_{n+1} > a_n$ より，$a_{n+2} - a_n \neq 0$ であるから

$$a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} - 3 = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} + 3}$$

別解　① より　$a_{n+1}{}^2 - (2a_n + 3)a_{n+1} + a^2 - 3a_n = 0$

これを a_{n+1} について解くと　$a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3 \pm \sqrt{24a_n + 9}}{2}$

① は a_{n+1}，a_n の対称式より　$a_n = \dfrac{2a_{n+1} + 3 \pm \sqrt{24a_{n+1} + 9}}{2}$

$a_{n+1} > a_n \geqq 3$ であるから

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 3 + \sqrt{24a_n + 9}}{2}, \quad a_n = \frac{2a_{n+1} + 3 - \sqrt{24a_{n+1} + 9}}{2}$$

第 1 式から $a_{n+2} = \dfrac{2a_{n+1} + 3 + \sqrt{24a_{n+1} + 9}}{2}$．これと第 2 式を加える．

(2) (1) の結果から　$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 3$　ゆえに　$b_{n+1} = b_n + 3$

① に $n = 1$ を代入すると

$$9 - 6a_2 + a_2{}^2 = 3(3 + a_2) \quad \text{ゆえに} \quad a_2(a_2 - 9) = 0$$

$a_2 > a_1 = 3$ に注意して，これを解くと　$a_2 = 9$

$\{b_n\}$ は $b_1 = a_2 - a_1 = 9 - 3 = 6$，公差 3 の等差数列であるから

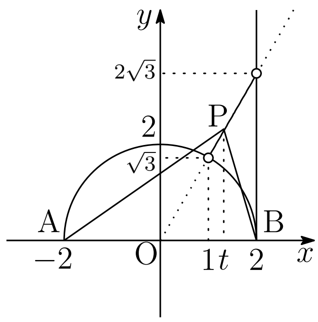
$$b_n = 6 + 3(n - 1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b_n = 3n + 3}$$

(3) (2) の結果から　$a_{n+1} - a_n = 3n + 3$

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(3k + 3)$　ゆえに　$a_n = \dfrac{3}{2}n(n + 1)$

これは，$n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{3}{2}n(n + 1)}$　■

2 (1) $t>0$ より，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ は直線 $y=\sqrt{3}x$ の第 1 象限の点である．右の図のように $\angle\mathrm{PAB}$ は鋭角．$\angle\mathrm{APB}$ が鋭角となるとき P は原点を中心とする半径 2 の円の外部にあるから



$$\mathrm{OP}>2 \quad ゆえに \quad \sqrt{t^2+(\sqrt{3}\,t)^2}>2$$

これを解いて $(t>0)$ 　　$t>1$ 　$\cdots$①

$\angle\mathrm{PBA}$ が鋭角となるのは，P の x 座標に注目して　　$t<2$ 　$\cdots$②

①, ② より，$\triangle\mathrm{ABP}$ が鋭角三角形となる t の範囲は　　$\boldsymbol{1<t<2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(t+2,\ \sqrt{3}\,t)$ に垂直で点 $\mathrm{B}(2,\ 0)$ を通る直線の方程式は

$$(t+2)(x-2)+\sqrt{3}\,ty=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}\,t)$ に垂直で点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ を通る直線の方程式は

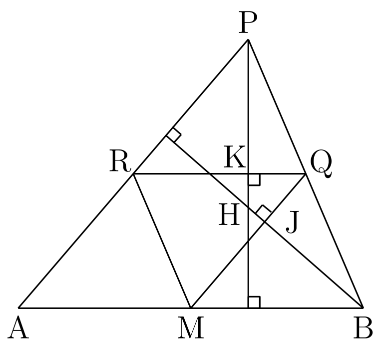
$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}\,ty=0$$

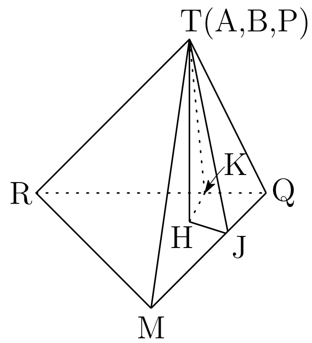
$\triangle\mathrm{ABP}$ の垂心は上の 2 本の直線の交点であるから　　$\boldsymbol{\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}\,t}\right)}$

(3) (2) で求めた $\triangle\mathrm{PAB}$ の垂心を H，直線 BH と直線 QM の交点を J，直線 PH と直線 QR の交点を K とおく．M，Q，R はそれぞれ辺 AB，BP，PA の中点であるから，中点連結定理により

$$\mathrm{MQ}/\!/\mathrm{PA},\quad \mathrm{QR}/\!/\mathrm{AB}\quad ゆえに\quad \mathrm{HJ}\perp\mathrm{MQ},\quad \mathrm{HK}\perp\mathrm{QR}$$

A，B，P が重なる四面体の頂点を T とすると，平面 THJ は直線 MQ と垂直，平面 THK は直線 QR と垂直である．これら 2 平面の交線 TH は，直線 MQ および直線 QR に垂直であるから，TH は平面 MQR と垂直である．





$\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}\,t)$ の中点 R の座標は $\left(\dfrac{-2+t}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$

K の x 座標は P の x 座標と等しく，y 座標は R の y 座標と等しいから

$$\mathrm{K}\left(t,\ \frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{TK} = \mathrm{PK} = \frac{\sqrt{3}\,t}{2}$$

$1 < t < 2$ に注意して

$$\begin{aligned}
\mathrm{HK} &= \left|\frac{\sqrt{3}\,t}{2} - \frac{4-t^2}{\sqrt{3}\,t}\right| = \frac{|5t^2-8|}{2\sqrt{3}\,t},\\
\mathrm{TH} &= \sqrt{\mathrm{TK}^2 - \mathrm{HK}^2}\\
&= \sqrt{\frac{3t^2}{4} - \frac{(5t^2-8)^2}{12t^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}\,t}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}
\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}\,t = 2\sqrt{3}\,t$　　ゆえに　$\triangle\mathrm{MQR} = \dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}$

四面体 TMQR の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{MQR}\cdot\mathrm{TH} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}\,t}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}\\
&= \frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}
\end{aligned}$$

よって，$t^2 = \dfrac{5}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{t = \dfrac{\sqrt{10}}{2}}$ のとき，V は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．■

3 (1) 2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0\cdots(*)$ が実数解をもつとき，

$$p_2{}^2-4\cdot 2p_1\cdot 2p_3=p_2{}^2-16p_1p_3 \geqq 0$$

p_1，p_2，p_3 はそれぞれ 6 以下の自然数であるから，上式を満たすとき

$p_2=4,\ 5$ のとき　$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

$p_2=6$ のとき　$(p_1,\ p_2)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

よって，求める確率は　$\dfrac{2\times 1+3}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{216}}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解 $\alpha,\ \beta$ と係数の関係により

$$\alpha\beta=\frac{2p_3}{2p_1}=\frac{p_3}{p_1}=1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3=p_1$$

このとき，2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_1=0$ が複素数解をもつとき

$$p_2{}^2-4\cdot 2p_1\cdot 2p_1<0 \quad \text{ゆえに} \quad p_2<4p_1$$

上式を満たすとき

$p_1=p_3=1$ のとき　$p_2=1,\ 2,\ 3$

$p_1=p_3=2,3,4,5,6$ のとき　$p_2=1,2,3,4,5,6$

よって，求める確率は　$\dfrac{3+5\cdot 6}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{11}{72}}$　■

4 (1) $a>0$，$f(t)=-4t^3+(a+3)t\ (0\leqq t\leqq 1)$ より $(a>0)$

$$f'(t)=-12t^2+a+3=-12\left(t+\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right)\left(t-\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right)$$

$b=\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ とおくと　$f(t)=-4t^3+12b^2t$，$f'(t)=-12(t+b)(t-b)$

t	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$8b^3$	$\searrow$

(i) $b\leqq 1$，すなわち，$0<a\leqq 9$ のとき

$$M(a)=8b^3=8\left(\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}}$$

(ii) $1\leqq b$，すなわち，$9\leqq a$ のとき

$$M(a)=f(1)=a-1$$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{M(a)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}} & (0<a\leqq 9)\\ a-1 & (9\leqq a)\end{cases}}$

(2) (1) の結果から　$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{27}(x+3)^3 & (0<x\leqq 9)\\ (x-1)^2 & (9\leqq x)\end{cases}$

$y=g(x)$ 上の点 $(s,\ g(s))$ における接線の方程式は

$$y-g(s)=g'(s)(x-s)$$

この直線が原点を通るとき　$g(s)=sg'(s)$

(i) $0<s\leqq 9$ のとき，$g'(s)=\dfrac{1}{9}(s+3)^2$ であるから

$$\frac{1}{27}(s+3)^3=s\cdot\frac{1}{9}(s+3)^2\quad ゆえに\quad s=\frac{3}{2}$$

(ii) $9\leqq s$ のとき，$g'(s)=2(s-1)$ であるから

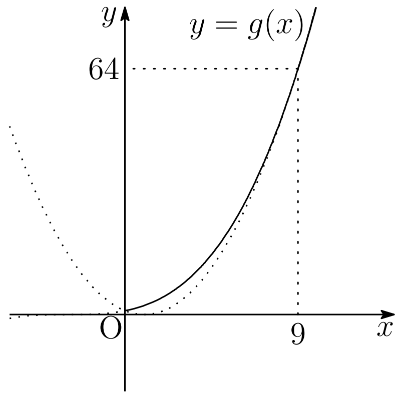
$$(s-1)^2=s\cdot 2(s-1)\quad ゆえに\quad s=-1$$

これは，$9\leqq s$ に反するので，不適

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{s=\dfrac{3}{2}}$，　接線の傾きは　$g'\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{2}+3\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$

(3)　$$k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{M(a)^2}{a}} = \sqrt{\frac{g(a)}{a}}$$

$\dfrac{g(a)}{a}$ は $y = g(x)$ 上の点 $(a,\ g(a))$ と原点を結ぶ直線の傾きを表す.



(2) の結果および $y = g(x)$ のグラフの概形から，k の最小値は

$$k = \sqrt{g'\left(\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

別解　$$\frac{g(a)}{a} = \begin{cases} \dfrac{1}{27a}(a+3)^3 & (0 < a \leqq 9) \\ \dfrac{1}{a}(a-1)^2 & (9 \leqq a) \end{cases}$$

(i) $0 < a \leqq 9$ のとき，$a = b^3$ とおくと，$0 < b \leqq 3^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{1}{27a}(a+3)^3 = \frac{1}{27b^3}(b^3+3)^3 = \left(\frac{b^3+3}{3b}\right)^3 = \left(\frac{b^2}{3} + \frac{1}{b}\right)^3$$

ここで，$b > 0$ のとき，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{b^2}{3} + \frac{1}{b} = \frac{b^2}{3} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{3}\cdot\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{2b}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

上式において，等号が成立するとき，$0 < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{2}{3}}$ に注意して

$$\frac{b^2}{3} = \frac{1}{2b} \quad \text{すなわち} \quad b = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

したがって，$a = \dfrac{3}{2}$ のとき，k は最小値 $\sqrt{\dfrac{g\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3}{2}$ をとる.

(ii) $9 \leqq a$ のとき

$$\frac{1}{a}(a-1)^2 = a + \frac{1}{a} - 2 > a - 2 \geqq 7 \quad \text{ゆえに} \quad k > \sqrt{7}$$

(i)，(ii) より，求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$　■

2.2　2016 年 (100 分)

1 平面上で原点 O と 3 点 A(3, 1)，B(1, 2)，C(−1, 1) を考える．実数 s, t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) s, t が条件

$$-1 \leqq s \leqq 1, \quad -1 \leqq t \leqq 1, \quad -1 \leqq s+t \leqq 1$$

を満たすとき，点 P$(x,\ y)$ の存在する範囲 D を図示せよ．

(2) 点 P が (1) で求めた範囲 D を動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の最大値を求め，そのときの P の座標を求めよ．

2 放物線 $C : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = -2|x| + k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ．

(2) a, b を実数とする．関数 $y = -2|x-a|+b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 $(a,\ b)$ 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ．

(3) (2) で求めた領域 D の面積を求めよ．

3 ある工場で作る部品 A，B，C はネジをそれぞれ 7 個，9 個，12 個使っている．出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ，ネジが全部で 54 個あった．残った部品 A，B，C の個数をそれぞれ l, m, n として，可能性のある組 $(l,\ m,\ n)$ をすべて求めよ．

4 鋭角三角形 △ABC において，頂点 A，B，C から各対辺に垂線 AD，BE，CF を下ろす．これらの垂線は垂心 H で交わる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ．

(2) ∠ADE = ∠ADF であることを示せ．

解答例

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より　$(x,\ y) = s(3,\ 1) + t(1,\ 2) = (3s+t,\ s+2t)$

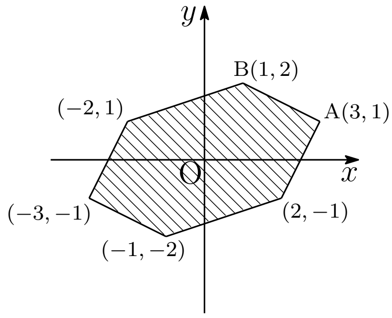
$$x = 3s+t,\quad y = s+2t \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{2x-y}{5},\quad t = \frac{-x+3y}{5}$$

これらを $-1 \leqq s \leqq 1$，$-1 \leqq t \leqq 1$，$-1 \leqq s+t \leqq 1$ に代入すると

$$-1 \leqq \frac{2x-y}{5} \leqq 1,\quad -1 \leqq \frac{-x+3y}{5} \leqq 1,\quad -1 \leqq \frac{2x-y}{5} + \frac{-x+3y}{5} \leqq 1$$

それぞれの式を整理すると

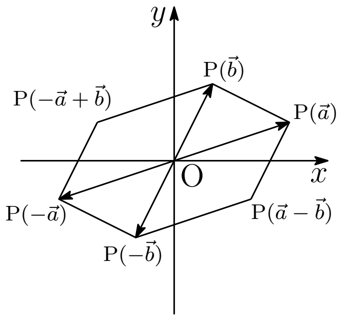
$$\begin{cases} 2x-5 \leqq y \leqq 2x+5 \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{5}{3} \leqq y \leqq \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2} \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} \end{cases}$$



領域 D は右の図の斜線部分で境界線を含む．

補足 $-1 \leqq s \leqq 1$，$-1 \leqq t \leqq 1$，$-1 \leqq s+t \leqq 1$ より

$$\begin{array}{lll} s,\ t \geqq 0 & \text{のとき} & 0 \leqq s+t \leqq 1 \\ s,\ t \leqq 0 & \text{のとき} & -1 \leqq s+t \leqq 0 \\ st \leqq 0 & \Longrightarrow & -1 \leqq s+t \leqq 1 \end{array}$$



に注意して次の場合分けにより，$\mathrm{P}(s\vec{a}+t\vec{b})$ の描く領域を求めることもできる．

(i) $0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$0 \leqq s+t \leqq 1$ であるから，3 点 O，$\mathrm{P}(\vec{a})$，$\mathrm{P}(\vec{b})$ を頂点する三角形の周および内部．

(ii) $0 \leqq s \leqq 1$，$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき，4 点 O，$\mathrm{P}(\vec{a})$，$\mathrm{P}(-\vec{b})$，$\mathrm{P}(\vec{a}-\vec{b})$ を頂点する平行四辺形の周および内部．

(iii) $-1 \leqq s \leqq 0$，$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，4 点 O，$\mathrm{P}(-\vec{a})$，$\mathrm{P}(\vec{b})$，$\mathrm{P}(-\vec{a}+\vec{b})$ を頂点する平行四辺形の周および内部．

(iv) $-1 \leqq s \leqq 0$，$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき，$-1 \leqq s+t \leqq 0$ であるから，3 点 O，$\mathrm{P}(-\vec{a})$，$\mathrm{P}(-\vec{b})$ を頂点する三角形の周および内部．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = k$ とおくと　$-x+y = k$

ゆえに，直線 $y = x+k$ が領域 D と共有点をもつとき，切片 k のとり得る値の最大値を求めればよい．したがって

点 $\mathbf{P(-2,\ 1)}$ において，最大値 $\mathbf{3}$

■

2 (1) 放物線 $C: y=-\frac{1}{2}x^2$ と関数 $y=-2|x|+k$ のグラフは，ともに y 軸に関して対称である．したがって，C と直線 $y=-2x+k$ が $x \geqq 0$ において共有点をもてばよい．2 式から y を消去して

$$-\frac{1}{2}x^2=-2x+k \quad \text{これを解いて} \quad x=2\pm\sqrt{4-2k}$$

$4-2k \geqq 0$，すなわち，$k \leqq 2$ のとき，解 $2+\sqrt{4-2k} \geqq 0$ をもつ．
よって，求める実数 k の範囲は $\boldsymbol{k \leqq 2}$

(2) $y=-2|x-a|+b=\begin{cases} -2(x-a)+b & (x \geqq a) \\ 2(x-a)+b & (x \leqq a) \end{cases}$

関数 $y=-2|x-a|+b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつとき，$x<a$ および $a<x$ の範囲でそれぞれ 2 個ずつ共有点をもつ．

(i) $x>a$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2=-2(x-a)+b \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)^2+4a+2b-4=0$$

$g(x)=(x-2)^2+4a+2b-4$ とおくと，$g(x)=0$ が $x>a$ の範囲に異なる 2 つ実数解をもつとき，$a<2$，$g(a)>0$，$g(2)<0$ より

$$\begin{cases} a<2 \\ (a-2)^2+4a+2b-4>0 \\ 4a+2b-4<0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} a<2 \\ b>-\frac{1}{2}a^2 \\ b<-2a+2 \end{cases}$$

(ii) $x<a$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2=2(x-a)+b \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)^2-4a+2b-4=0$$

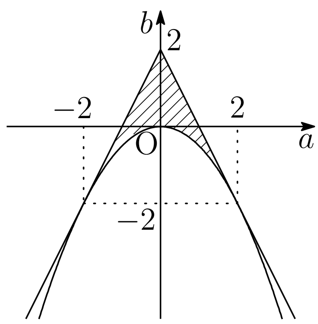
$h(x)=(x+2)^2-4a+2b-4$ とおくと，$h(x)=0$ が $x<a$ の範囲に異なる 2 つ実数解をもつとき，$a>-2$，$h(a)>0$，$h(-2)<0$ より

$$\begin{cases} a>-2 \\ (a+2)^2-4a+2b-4>0 \\ -4a+2b-4<0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} a>-2 \\ b>-\frac{1}{2}a^2 \\ b<2a+2 \end{cases}$$

(i)，(ii) の結果から，領域 D は下の図の斜線部分で境界線を含まない．

(3) 領域 D の面積を S とすると

$$S=2\int_0^2\left\{-2a+2-\left(-\frac{1}{2}a^2\right)\right\}da$$
$$=\int_0^2(a-2)^2\,da=\left[\frac{1}{3}(a-2)^3\right]_0^2=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$



■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $l,\ m,\ n$ は非負の整数．$7l+9m+12n=54 \quad \cdots(*)$

$7\equiv 1,\ 9\equiv 12\equiv 54\equiv 0 \pmod 3$ であるから，$(*)$ より

$$l\equiv 0 \pmod 3$$

上式および $(*)$ から　　$l=0,\ 3,\ 6$

(i) $l=0$ を $(*)$ に代入して簡単にすると　$3m+4n=18 \quad \cdots①$

$3\equiv 18\equiv 0,\ 4\equiv 1 \pmod 3$ であるから

$$n\equiv 0 \pmod 3$$

上式および①から　$n=0,\ 3$　ゆえに　$(m,\ n)=(6,\ 0),\ (2,\ 3)$

(ii) $l=3$ を $(*)$ に代入して簡単にすると　$3m+4n=11 \quad \cdots②$

$3\equiv 0,\ 4\equiv 1,\ 11\equiv 2 \pmod 3$ であるから

$$n\equiv 2 \pmod 3$$

上式および②から　$n=2$　ゆえに　$(m,\ n)=(1,\ 2)$

(iii) $l=6$ を $(*)$ に代入して簡単にすると　$3m+4n=4 \quad \cdots③$

$3\equiv 0,\ 4\equiv 1 \pmod 3$ であるから

$$n\equiv 1 \pmod 3$$

上式および③から　$n=1$　ゆえに　$(m,\ n)=(0,\ 1)$

(i)～(iii) より　$\boldsymbol{(l,\ m,\ n)=(0,\ 6,\ 0),\ (0,\ 2,\ 3),\ (3,\ 1,\ 2),\ (6,\ 0,\ 1)}$ ■

4　(1) $\angle\mathrm{BEC} = \angle\mathrm{BFC}$ より，四角形 BCEF は BC を直径とする円に内接する．
$\angle\mathrm{AEH} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{AFH}\ 90^\circ$ であるから，$\angle\mathrm{AEH} + \angle\mathrm{AFH} = 180$ より，四角形 AFHE は AH を直径とする円に内接する．

(2) $\triangle\mathrm{HCE}$ と $\triangle\mathrm{HBF}$ において

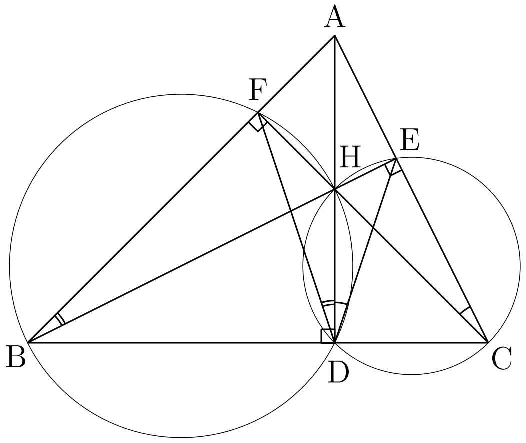
$$\begin{aligned}&\angle\mathrm{CHE} = \angle\mathrm{BHF} \quad (\text{対頂角}),\\ &\angle\mathrm{HEC} = \angle\mathrm{HFB} \quad (\mathrm{H}\ \text{は}\ \triangle\mathrm{ABC}\ \text{の垂心})\end{aligned}$$

したがって　$\triangle\mathrm{HCE} \backsim \triangle\mathrm{HBF}$　ゆえに　$\angle\mathrm{HCE} = \angle\mathrm{HBF}$　$\cdots$ ①

四角形 ECDH の対角の和が 180° であるから四角形 ECDH は円に内接し，円周角の定理により　$\angle\mathrm{HCE} = \angle\mathrm{HDE}$　$\cdots$ ②

四角形 FBDH の対角の和が 180° であるから四角形 FBDH は円に内接し，円周角の定理により　$\angle\mathrm{HBF} = \angle\mathrm{HDF}$　$\cdots$ ③

①，②，③ より　$\angle\mathrm{HDE} = \angle\mathrm{HDF}$　よって　$\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{ADF}$



2.3　2017年(100分)

1 sを正の実数とする．鋭角三角形ABCにおいて，辺ABを$s:1$に内分する点をDとし，辺BCを$s:3$に内分する点をEとする．線分CDと線分AEの交点をFとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$とするとき，$\alpha$と$\beta$を求めよ．

(2) Fから辺ACに下ろした垂線をFGとする．FGの長さが最大となるときのsを求めよ．

2 p，qを実数とする．関数$f(x) = x^2 + px + q$の$-1 \leqq x \leqq 2$における最小値が0以上となる点$(p,\ q)$全体からなる領域をDとする．以下の問いに答えよ．

(1) pq平面上に領域Dを図示せよ．

(2) Dの点$(p,\ q)$で$q \leqq 5$を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ．

3 aを3で割り切れない正の整数とする．aを3で割ったときの商をb，余りをcとする．次の問いに答えよ．

(1) $c = 2$のとき，$2a + 1 = as + 3t$を満たす負でない整数s，tをbを用いて表せ．

(2) nを$n \geqq 2a - 2$を満たす整数とする．このとき$n = as + 3t$を満たす負でない整数s，tが存在することを示せ．

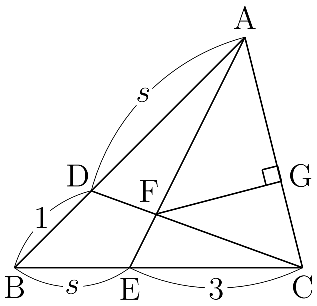
4 A君とB君はそれぞれ，0から5までの数字が1つずつ書かれた6枚のカードが入った箱を1つもっている．2人は，自分の箱の中から無作為に3枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする．取り出された3枚のカードに0が含まれていない場合の得点は3枚のカードに書かれた数の平均値とし，0が含まれている場合は残りの2枚のカードに書かれた数の合計とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A君，B君の少なくとも一方が0を取り出して，しかも双方とも得点が3点となる確率を求めよ．

(2) A君の得点が整数でなく，かつ，B君の得点より大きい確率を求めよ．

解答例

1 (1) △ABEと直線CDについて，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1$$

したがって　$\mathrm{AF}:\mathrm{FE}=s(s+3):3$

点Eは線分BCを $s:3$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}}&=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}\\&=\frac{s}{s^2+3s+3}(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=\frac{3s}{s^2+3s+3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{s^2}{s^2+3s+3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3s}{s^2+3s+3},\quad \beta=\dfrac{s^2}{s^2+3s+3}}$

(2) $\triangle\mathrm{AFC}:\triangle\mathrm{AEC}=\mathrm{AF}:\mathrm{AE}$，$\triangle\mathrm{AEC}:\triangle\mathrm{ABC}=\mathrm{EC}:\mathrm{BC}$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{AFC}&=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}}\triangle\mathrm{AEC}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\triangle\mathrm{AEC},\\\triangle\mathrm{AEC}&=\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BC}}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}\end{aligned}$$

上の2式から　$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\dfrac{3}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3s}{s^2+3s+3}\triangle\mathrm{ABC}$

$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}$ であるから

$$\mathrm{FG}=\frac{2\triangle\mathrm{AFC}}{\mathrm{AC}}=\frac{6s}{s^2+3s+3}\cdot\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}$$

$s>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係を用いて

$$\frac{s^2+3s+3}{s}=s+\frac{3}{s}+3\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}+3=2\sqrt{3}+3$$

したがって　$\mathrm{FG}=\dfrac{6s}{s^2+3s+3}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{3}+3}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AC}}$

FGが最大となる，すなわち，上式において等号が成立するとき

$$s=\frac{3}{s}\quad よって\quad \boldsymbol{s=\sqrt{3}}$$

■

2　(1)
$$f(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

$-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を m とする．

(i) $2 \leqq -\dfrac{p}{2}$，すなわち，$p \leqq -4$ のとき

$$m = f(2) = 2p + q + 4 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geqq -2p - 4$$

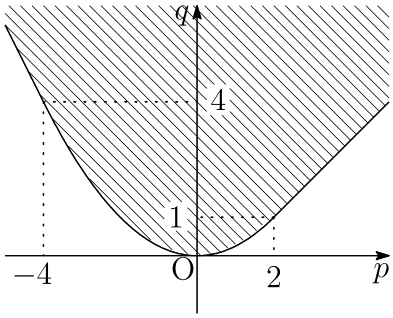
(ii) $-1 \leqq -\dfrac{p}{2} \leqq 2$，すなわち，$-4 \leqq p \leqq 2$ のとき

$$m = f\left(-\frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2}{4} + q \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geqq \frac{p^2}{4}$$

(iii) $-\dfrac{p}{2} \leqq -1$，すなわち，$2 \geqq p$ のとき

$$m = f(-1) = -p + q + 1 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geqq p - 1$$

よって，点 $(p,\ q)$ の満たす領域 D は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) (1) の境界線 $q = -2p - 4$ および $q = p - 1$ 上で $q = 5$ となるとき，それぞれの座標は $\left(-\dfrac{9}{2},\ 5\right)$，$(6,\ 5)$ である．3 点 $\left(-\dfrac{9}{2},\ 5\right)$，$(-4,\ 5)$，$(-4,\ 4)$ を頂点とする直角三角形の面積を S_1，3 点 $(6,\ 5)$，$(2,\ 5)$，$(2,\ 1)$ を頂点とする直角三角形の面積を S_2 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{4}, \quad S_2 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^{2} \left(5 - \frac{p^2}{4}\right) dp + S_1 + S_2 \\ &= \left[\, 5p - \frac{p^3}{12} \,\right]_{-4}^{2} + \frac{1}{4} + 8 = \mathbf{\frac{129}{4}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{3}$ (1)
$$2a+1=as+3t \quad \cdots ①$$
$c=2$ のとき，$a \geqq 2$ であるから (s，t は非負整数)
$$2a+1=as+3t \geqq as \quad ゆえに \quad s \leqq 2+\frac{1}{a}<3$$
すなわち　$s=0,\ 1,\ 2 \quad \cdots ②$

$c=2$ より，$a \equiv 2 \pmod 3$ であるから，これを ① に適用すると
$$2{\cdot}2+1 \equiv 2s \quad ゆえに \quad 2s \equiv 5 \quad すなわち \quad s \equiv 1 \pmod 3$$
上式と ② より，$\boldsymbol{s=1}$．これを ① に代入して整理すると
$$3t=a+1 \quad 右辺は 3 の倍数であるから \quad t=\frac{a+1}{3}$$
$a=3b+2$ であるから　$t=\dfrac{(3b+2)+1}{3}=\boldsymbol{b+1}$

補足 $2s \equiv 5 \pmod 3$ の両辺を 2 倍すると ($4 \equiv 1,\ \ 10 \equiv 1 \pmod 3$)
$$4s \equiv 10 \quad ゆえに \quad s \equiv 1 \pmod 3$$

(2)
$$n=as+3t \quad \cdots (*)$$
$(*)$ を満たす非負整数 $s,\ t$ が存在するとき
$$n+3=as+3(t+1)$$
を満たす非負整数 s，$t+1$ が存在する．したがって，$n=2a-2,\ 2a-1,\ 2a$ について，$(*)$ を満たす非負整数 $s,\ t$ を示せばよい．

(i) $a \equiv 1 \pmod 3$ のとき
$$2a-2=a{\cdot}0+3{\cdot}\frac{2(a-1)}{3},$$
$$2a-1=a{\cdot}1+3{\cdot}\frac{a-1}{3},$$
$$2a=a{\cdot}2+3{\cdot}0$$

(ii) $a \equiv 2 \pmod 3$ のとき
$$2a-2=a{\cdot}1+3{\cdot}\frac{a-2}{3},$$
$$2a-1=a{\cdot}0+3{\cdot}\frac{2(a-2)+3}{3},$$
$$2a=a{\cdot}2+3{\cdot}0$$

(i)，(ii) より，$n \geqq 2a-2$ について，$(*)$ を満たす非負整数 s，t は存在する．

■

4 (1) 得点が 3 点となるのは，$\{0,1,2\},\{1,3,5\},\{2,3,4\}$ の 3 通り．
このうち，0 を取り出さないのが 2 通り．
よって，A，B の少なくとも一方が 0 を取り出す確率は

$$\left(\frac{3}{20}\right)^2-\left(\frac{2}{20}\right)^2=\frac{9-4}{400}=\boldsymbol{\frac{1}{80}}$$

(2) 0 から 5 の 6 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき，次の 20 通り．

得点	組合せ	場合の数
2	$\{1,2,3\}$	1
$\frac{7}{3}$	$\{1,2,4\}$	1
$\frac{8}{3}$	$\{1,2,5\}$，$\{1,3,4\}$	2
3	$\{0,1,2\}$，$\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$	3
$\frac{10}{3}$	$\{1,4,5\}$，$\{2,3,5\}$	2
$\frac{11}{3}$	$\{2,4,5\}$	1
4	$\{0,1,3\}$，$\{3,4,5\}$	2
5	$\{0,1,4\}$，$\{0,2,3\}$	2
6	$\{0,1,5\}$，$\{0,2,4\}$	2
7	$\{0,2,5\}$，$\{0,3,4\}$	2
8	$\{0,3,5\}$	1
9	$\{0,4,5\}$	1

A 君が B 君の得点より大きくなる (勝つ) のは，次の場合である．

A 君が $\dfrac{7}{3}$ 点で勝つ確率は　$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{400}$

A 君が $\dfrac{8}{3}$ 点で勝つ確率は　$\dfrac{2}{20}\times\dfrac{1+1}{20}=\dfrac{4}{400}$

A 君が $\dfrac{10}{3}$ 点で勝つ確率は　$\dfrac{2}{20}\times\dfrac{1+1+2+3}{20}=\dfrac{14}{400}$

A 君が $\dfrac{11}{3}$ 点で勝つ確率は　$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1+1+2+3+2}{20}=\dfrac{9}{400}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{400}+\frac{4}{400}+\frac{14}{400}+\frac{9}{400}=\frac{28}{400}=\boldsymbol{\frac{7}{100}}$$

■

2.4　2018年(100分)

1 xy平面における2つの放物線 $C: y=(x-a)^2+b$，$D: y=-x^2$ を考える．

(1) C と D が2点で交わり，その2交点の x 座標の差が1となるように実数 a，b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ．

(2) 実数 a，b が(1)の条件を満たすとき，C と D の2交点を結ぶ直線は，放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ に接することを示せ．

2 n を2以上，a を1以上の整数とする．箱の中に，1から n までの番号札がそれぞれ1枚ずつ，合計 n 枚入っている．この箱から，1枚の札を無作為に取り出して元に戻す，という試行を a 回繰り返す．ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする．

(1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ．

(2) $p(2)$ を求めよ．

(3) $p(n-1)$ を求めよ．

3 実数 a は $0<a<4$ を満たすとする．xy平面の直線 $l: y=ax$ と曲線

$$C: y=\begin{cases} -x^2+4x & (x<4 \text{のとき}) \\ 9a(x-4) & (x \geqq 4 \text{のとき}) \end{cases}$$

を考える．C と l で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とおく．

(1) C と l の交点の座標を求めよ．

(2) $S(a)$ を求めよ．

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ．

4 空間内に四面体ABCDがある．辺ABの中点をM，辺CDの中点をNとする．t を0でない実数とし，点Gを

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{GC}}+t\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\vec{0}$$

を満たす点とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ で表せ．

(2) 点Gは点Nと一致しないことを示せ．

(3) 直線NGと直線MCは平行であることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) C と D の方程式から y を消去して整理すると　$2x^2-2ax+a^2+b=0$

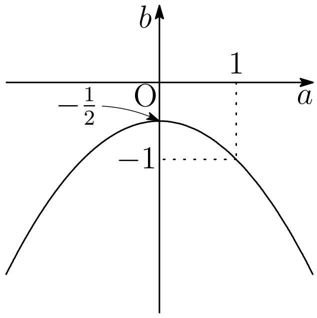
2 交点の x 座標は　$x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$　$\cdots$①

2 交点の x 座標の差が 1 であるから

$$\frac{a+\sqrt{-a^2-2b}}{2}-\frac{a-\sqrt{-a^2-2b}}{2}=1$$

ゆえに　$\sqrt{-a^2-2b}=1$　$\cdots$②

よって　$\boldsymbol{b=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}}$　(右図)



(2) 2 交点の x 座標を α，β とすると $(\alpha<\beta)$ とすると，①，② より

$$\alpha=\frac{a-1}{2},\quad \beta=\frac{a+1}{2}\quad\cdots(*)$$

2 交点は D 上の点であるから，$\mathrm{A}(\alpha,-\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,-\beta^2)$ とする．

2 点 A，B を通る直線 l の方程式は　$y-\alpha^2=\dfrac{-\beta^2+\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$

ゆえに　$y=-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$　$(*)$ により　$l: y=-ax+\dfrac{a^2-1}{4}$

直線 l と放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ の方程式から y を消去すると

$$-ax+\frac{a^2-1}{4}=-x^2-\frac{1}{4}\quad\text{ゆえに}\quad\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0$$

よって，C と D の 2 交点を結ぶ直線は，放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ に接する．

補足 C，D の交点を通る放物線・直線の方程式は (k は定数)

$$(x-a)^2-y+b+k(x^2+y)=0$$

$k\neq-1$ のとき放物線，$k=-1$ のとき直線となるから，$k=-1$ より

$$(x-a)^2-y+b-(x^2+y)=0\quad\text{すなわち}\quad y=-ax+\frac{a^2}{2}+\frac{b}{2}$$

これに (1) の結果を代入すると，直線 l の方程式を得る．■

$\boxed{2}$ (1) $p(1)$ は，1 回で札の和が n 以上になる，すなわち，1 回目に n の番号札を取り出す確率であるから

$$p(1) = \boldsymbol{\frac{1}{n}}$$

$p(n)$ は，n 回目で初めて札の和が n 以上になる，すなわち，1 回目から $n-1$ 回目まで 1 の番号札を取り出す確率であるから (n 回目は任意の札)

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{n^{n-1}}}$$

(2) 1 回目が k の札を取り出すとすると $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$，2 回目が $n-k$ 以上の札取り出す $k+1$ 通り．したがって

$$\begin{aligned} p(2) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}n(n-1) + (n-1)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2n^2}(n-1)(n+2)} \end{aligned}$$

(3) $n-2$ 回目まですべて 1 の番号札または 1 回だけ 2 の番号札である．

(i) $n-2$ 回目まですべて 1 の番号札で，$n-1$ 回目に 2 以上の番号札を取り出す確率は

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^{n-1}}$$

(ii) $n-2$ 回目までに k 回目だけが 2 の番号札 $(k = 1, 2, \cdots, n-2)$，それ以外は 1 の目である確率は ($n-1$ 回目は任意の札)

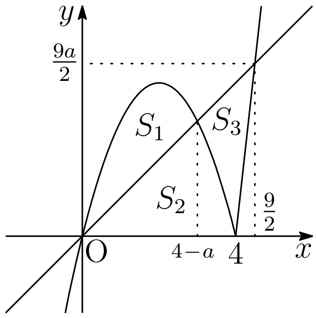
$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} \times (n-2) = \frac{n-2}{n^{n-2}}$$

(i)，(ii) より，求める確率は

$$\frac{n-1}{n^{n-1}} + \frac{n-2}{n^{n-2}} = \boldsymbol{\frac{n^2-n-1}{n^{n-1}}}$$

■

3 (1) $x<4$ のとき $\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=ax \end{cases}$



$0<a<4$ により，$4-a<0$ に注意して

$$\mathbf{(0,\ 0)\ (4-\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}(4-\boldsymbol{a}))}$$

$x \geqq 4$ のとき $\begin{cases} y=9a(x-4) \\ y=ax \end{cases}$

これを解いて $\boldsymbol{\left(\frac{9}{2},\ \frac{9a}{2}\right)}$

(2) (1) の図の面積を S_1，S_2，S_3 とすると，交点の x 座標に注意して

$$S_1=\frac{1}{6}(4-a)^3,\quad S_1+S_2=\frac{1}{6}\cdot 4^3=\frac{32}{3},\quad S_2+S_3=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{9a}{2}=9a$$

よって，求める面積は

$$\begin{aligned} S(a) &= S_1+S_3=2S_1-(S_1+S_2)+(S_2+S_3) \\ &= 2\cdot\frac{1}{6}(4-a)^3-\frac{32}{3}+9a \\ &= \boldsymbol{-\frac{a^3}{3}+4a^2-7a+\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$S'(a)=-a^2+8a-7=-(a-1)(a-7)$$

したがって，$0<a<4$ における増減表は次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

よって，求める最小値は $S(1)=\boldsymbol{\frac{22}{3}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{GC}}+t\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\vec{0}$ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{DA}}-\overrightarrow{\mathrm{DG}})+(\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DG}})+(t-2)(\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DG}})-t\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\vec{0}$$

整理すると　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{DC}}-2t\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\vec{0}$

$t \neq 0$ に注意して　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2t}}$

(2) N は辺 CD の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2}$

これと (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}-\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2t}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{NG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}-2\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2t}\quad\cdots①$

点 G と点 N が一致すると仮定すると

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}-2\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{0}\quad ゆえに\quad \overrightarrow{\mathrm{DC}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}}{2}$$

このとき，点 C は辺 AB の中点となり，不適．

(3) 点 M は辺 AB の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}}{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}}{2}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}}}{2}$$

上式および ① より　$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=-t\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}-2\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{2t}=-t\overrightarrow{\mathrm{NG}}$

よって，直線 NG と直線 MC は平行である．■

2.5　2019 年 (100 分)

$\boxed{1}$ $a,\ b,\ c$ を実数とし，a は 0 でないとする．xy 平面上の直線 $y = ax$ と放物線 $y = x^2 + a$ が相異なる 2 点 $\mathrm{P}(b,\ ab)$，$\mathrm{Q}(c,\ ac)$ で交わっているとする．$c = b^2$, $b < 0$ のとき，a と b を求めよ．

$\boxed{2}$ a を 1 ではない正の実数とし，n を正の整数とする．次の不等式を考える．

$$\log_a(x - n) > \frac{1}{2}\log_a(2n - x)$$

(1) $n = 6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ．

(2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ．

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式によって定める．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2}a_n = 2{a_{n+1}}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) すべての正の整数 n について，a_n は正であることを示せ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{4}$ n を 2 以上の整数とする．金貨と銀貨を含む n 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た金貨は取り去り，取り去った金貨と同じ枚数の銀貨を加えるという試行の繰り返しを考える．初めは n 枚すべてが金貨であり，n 枚すべてが銀貨になった後も試行を繰り返す．k 回目の試行の直後に，n 枚の硬貨のなかに金貨が j 枚だけ残る確率を $P_k(j)$ $(0 \leqq j \leqq n)$ で表す．

(1) $P_1(j)$ を求めよ．

(2) $P_k(j)$ $(k \geqq 2)$ を求めよ．

(3) $n = 3$ とする．2 回目の試行の直後では金貨が少なくとも 1 枚残るが，3 回目の試行の直後には 3 枚すべてが銀貨になる確率を求めよ．

解答例

1 $y=ax$ と $y=x^2+a$ から y を消去して整理すると　$x^2-ax+a=0$

この2次方程式の解が b，c であるから，解と係数の関係により

$$b+c=a,\quad bc=a\quad \cdots(*)$$

$c=b^2$ を上の2式に代入すると

$$b+b^2=a,\quad b^3=a\quad \cdots(**)$$

$(**)$ から a を消去して整理すると　$b(b^2-b-1)=0$

$b<0$ であるから　　$b^2-b-1=0\quad \cdots$①

$b<0$ に注意して ① を解くと　$\boldsymbol{b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$

① より，$b^2=b+1$．これを $(**)$ の第1式に代入して

$$a=b+(b+1)=2b+1=2\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1=\boldsymbol{2-\sqrt{5}}$$

■

2 (1) $n=6$ より　　$\log_a(x-6) > \dfrac{1}{2}\log_a(12-x)$　$\cdots(*)$

真数は正であるから

$$x-6>0,\ 12-x>0 \quad \text{すなわち} \quad 6<x<12 \quad \cdots ①$$

(i) $a>1$ のとき，$(*)$ より　　$(x-6)^2 > 12-x$

ゆえに　$(x-3)(x-8)>0$　すなわち　$x<3,\ 8<x$　$\cdots ②$

よって，①，② を同時に満たす整数 x は　　**9，10，11**

(ii) $0<a<1$ のとき，$(*)$ より　　$(x-6)^2 < 12-x$

ゆえに　$(x-3)(x-8)<0$　すなわち　$3<x<8$　$\cdots ③$

よって，①，③ を同時に満たす整数 x は　　**7**

(2)　　$\log_a(x-n) > \dfrac{1}{2}\log_a(2n-x)$　$\cdots(**)$

真数は正であるから

$$x-n>0,\ 2n-x>0 \quad \text{すなわち} \quad n<x<2n \quad \cdots ④$$

(i) $a>1$ のとき，$(**)$ より　$(x-n)^2 > (2n-x)$

ゆえに　　$x^2+(1-2n)x+n^2-2n>0$

$f(x)=x^2+(1-2n)x+n^2-2n$ とおくと

$$f(x)=\left(x-n+\frac{1}{2}\right)^2-n-\frac{1}{4}$$

$$f(n)=-n<0, \quad f(2n)=n^2>0 \qquad (n\ \text{は正の整数})$$

これから，④ と 2 次不等式 $f(x)>0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(2n-1)=n(n-2)>0 \quad \text{すなわち} \quad n>2$$

(ii) $0<a<1$ のとき，$(**)$ より　$(x-n)^2 < 2n-x$

ゆえに　　$x^2+(1-2n)x+n^2-2n<0$

同様に，④ と 2 次不等式 $f(x)<0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(n+1)=-n+2<0 \quad \text{すなわち} \quad n>2$$

(i)，(ii) より，求める n についての必要十分条件は　　$\boldsymbol{n>2}$　■

$\boxed{3}$ (1)　　(*)　$a_{n+2}a_n = 2{a_{n+1}}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

自然数 n について，$a_n > 0$，$a_{n+1} > 0$ と仮定すると，(*) より

$$a_{n+2} = \frac{2{a_{n+1}}^2}{a_n} > 0$$

$a_1 = 1 > 0$，$a_2 = 3 > 0$ より，すべての自然数 n について，a_n は正である．

(2) (*) より　$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2\cdot\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_2}{a_1}$，公比 2 の等比数列であるから

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{n-1}\cdot\frac{a_2}{a_1} = 3\cdot2^{n-1}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=1}^{n-1}3\cdot2^{k-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 3^{n-1}\cdot2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = 3^{n-1}\cdot2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $P_1(j)$ は，n 枚の金貨を同時に投げ，j 枚が裏である確率により

$$P_1(j) = {}_n\mathrm{C}_j \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \boldsymbol{\frac{{}_n\mathrm{C}_j}{2^n}}$$

(2) 1 枚の硬貨が k 回の試行で，金貨である確率を p とすると

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k}$$

$P_k(j)$ は k 回の試行で，n 枚の金貨のうち丁度 j 枚が金貨となる確率

$$P_k(j) = {}_n\mathrm{C}_j p^j (1-p)^{n-j} = \boldsymbol{\frac{{}_n\mathrm{C}_j}{2^{kj}}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-j}}$$

(3) 次の場合に分けて求める．

(i) 2 回目の試行の直後に金貨が 3 枚残り，3 回目の試行で残り 3 枚の金貨がすべて裏である確率は

$$P_2(3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{{}_3\mathrm{C}_3}{2^{2\cdot3}}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^{3-3} \times \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^9}$$

(ii) 2 回目の試行の直後に金貨が 2 枚残り，3 回目の試行で残り 2 枚の金貨がすべて裏である確率は

$$P_2(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^{2\cdot2}}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^{3-2} \times \frac{1}{2^2} = \frac{9}{2^8}$$

(iii) 2 回目の試行の直後に金貨が 1 枚残り，3 回目の試行で残り 1 枚の金貨が裏である確率は

$$P_2(1) \times \frac{1}{2} = \frac{{}_3\mathrm{C}_1}{2^{2\cdot1}}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^{3-1} \times \frac{1}{2} = \frac{27}{2^7}$$

(i)〜(iii) により，求める確率は

$$\frac{1}{2^9} + \frac{9}{2^8} + \frac{27}{2^7} = \boldsymbol{\frac{127}{512}}$$

■

2.6　2020年 (100分)

1 a を $-2 \leqq a \leqq 3$ を満たす実数とする．次の性質をもつ関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < -2 \text{ のとき}) \\ (x-a)(x+2) & (-2 \leqq x \leqq a \text{ のとき}) \\ 2(x-a)(x-3) & (a \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x > 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とおく．

(1) $S(a)$ を求めよ．

(2) $S(a)$ が最大となる a の値を求めよ．また，$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ．

2 n を正の整数，a，b を 0 以上の整数とする．

(1) $n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ．

(3) 等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす a, b, n の組 $(a,\ b,\ n)$ をすべて求めよ．

3 a を 0 でない実数とする．xy 平面において，円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$，直線 $L : -4x + 3y + a = 0$，直線 $M : 3x + 4y - 7a = 0$ を考える．

(1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ．

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3) 集合 $\{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と L の共有点 $\} \cup \{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ．

4 6枚の硬貨を同時に投げて，表がでた硬貨が s 枚，裏がでた硬貨が t 枚であったとき，ベクトル $\vec{p} = (x,\ y)$ を $\vec{p} = s(2,\ 1) + t(-1,\ 2)$ で定める．

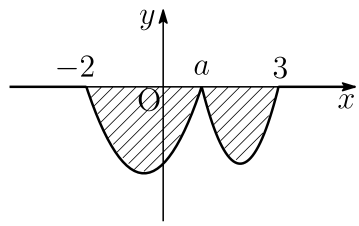
(1) $x + y$ の値を求めよ．

(2) $\vec{p} = (0,\ 6)$ となる確率を求めよ．

(3) $\vec{p}$ と $\vec{q} = (3,\ 1)$ のなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ 以下となる確率を求めよ．

解答例

1　(1) $S(a)$ は右の図の斜線部分の面積であるから



$$\begin{aligned} S(a) &= -\int_{-2}^{a}(x-a)(x+2)\,dx \\ &\qquad -\int_{a}^{3}2(x-a)(x-3)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(a+2)^3+\frac{1}{3}(3-a)^3 \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{6}a^3+4a^2-7a+\frac{31}{3}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$S'(a)=-\dfrac{1}{2}a^2+8a-7$

$S'(a)=0$ とすると　$a=8\pm5\sqrt{2}$

a	-2	$\cdots$	$8-5\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$\frac{125}{3}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\frac{125}{6}$

よって　$S(a)$ が最大となる a の値は　$\boldsymbol{a=-2}$

$S(a)$ が最小となる a の値は　$\boldsymbol{a=8-5\sqrt{2}}$

2 (1) $$2^n + n^2 + 8 < 3^n \quad \cdots (*)$$

［1］$n = 3$ のとき

$$(*)\text{ の左辺} = 2^3 + 3^2 + 8 = 25, \quad (*)\text{ の右辺} = 3^3 = 27$$

したがって，このとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，すなわち，$2^k + k^2 + 8 < 3^k$ であると仮定すると

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - \{2^{k+1} + (k+1)^2 + 8\} &> 3(2^k + k^2 + 8) - 2^{k+1} - (k+1)^2 - 8 \\ &= 2^k + 2k^2 - 2k + 15 \\ &= 2^k + k^2 + (k-1)^2 + 14 > 0 \end{aligned}$$

ゆえに　$2^{k+1} + (k+1)^2 + 8 < 3^{k+1}$

したがって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，$n \geqq 3$ に対して，$(*)$ が成立する．

(2) (1) の結果に注意すると

$$2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n \quad \cdots (**)$$

を満たす $n \geqq 3$ の整数は存在しないから，$n = 1,\ 2$ について調べればよい．

- $n = 1$ のとき，$2^1 + 1^2 + 8 \geqq 3^1$ より，$(**)$ は成立する．
- $n = 2$ のとき，$2^2 + 2^2 + 8 \geqq 3^2$ より，$(**)$ は成立する．

よって　$\boldsymbol{n = 1,\ 2}$

(3) (1) の結果から，$n \geqq 3$ のとき　$3^n - (2^n + n^2 + 8) > 0$

また，与えられた等式から　$3^n - (2^n + n^2 + 8) = -an - b$

上の2式から　$-an - b > 0$　ゆえに　$an + b < 0 \quad \cdots (\mathrm{A})$

$a,\ b$ は0以上の整数であるから，$n \geqq 3$ のとき，(A) を満たす $(a,\ b,\ n)$ は存在しない．したがって，$n = 1,\ 2$ について調べればよい．

(i) $n = 1$ のとき　$2^1 + 1^2 + 8 = 3^1 + a + b$　ゆえに　$a + b = 8 \quad \cdots ①$

(ii) $n = 2$ のとき　$2^2 + 2^2 + 8 = 3^2 + 2a + b$　ゆえに　$2a + b = 7 \quad \cdots ②$

①，② より　$\boldsymbol{(a,\ b,\ n) = (j,\ 8 - j,\ 1)\ \ (j = 0, 1, 2, \cdots, 8)}$，

$\boldsymbol{(a,\ b,\ n) = (k,\ 7 - 2k,\ 2)\ \ (k = 0, 1, 2, 3)}$

■

3 (1) 円 $C : x^2-2ax+y^2-4y+4=0$ より　$(x-a)^2+(y-2)^2=a^2$
円 C は，中心 $(a,\ 2)$，半径 $|a|$ の円である．
$L : -4x+3y+a=0$，$M : 3x+4y-7a=0$ の交点は
これらの 2 式を連立して解くと　$(a,\ a)$
これが円 $C : x^2-2ax+y^2-4y+4=0$ 上にあるから

$$(a-a)^2+(a-2)^2=a^2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=1}$$

(2) C の中心 $(a,\ 2)$ から直線 $L : -4x+3y+a=0$ の距離を d_1 とすると

$$d_1=\frac{|-4a+6+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\frac{|-3a+6|}{5}$$

C と L が異なる 2 つの共有点をもつとき，$d_1<|a|$ であるから

$$\frac{|-3a+6|}{5}<|a| \quad \text{ゆえに} \quad (3a-6)^2<(5a)^2$$

したがって　$(a+3)(4a-3)>0$　これを解いて　$\boldsymbol{a<-3,\ \dfrac{3}{4}<a}$

(3) C の中心 $(a,\ 2)$ から直線 $M : 3x+4y-7a=0$ の距離を d_2 とすると

$$d_2=\frac{|3a+8-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-4a+8|}{5}$$

C と M が異なる 2 つの共有点をもつとき，$d_2<|a|$ であるから

$$\frac{|-4a+8|}{5}<|a| \quad \text{ゆえに} \quad (4a-8)^2<(5a)^2$$

したがって　$(a+8)(9a-8)>0$　これを解いて　$a<-8,\ \dfrac{8}{9}<a$

(2) の結果および上式の不等号を等号にした，すなわち，$a=-3,\ \dfrac{3}{4},-8,\ \dfrac{8}{9}$ のとき，それぞれ円と直線が 1 点を共有する (1 点で接する)．

(i) C と L が 2 点を共有し，C と M が 1 点を共有するのは　$a=-8,\ \dfrac{8}{9}$
(ii) C と L が 1 点を共有し，C と M が 2 点を共有する a は存在しない．
(iii) (1) の結果から，$a=1$ のとき，C と L は 2 点を共有し，同時に C と M も 2 点を共有する．このとき，その 1 点は C，L，M によって共有されるので，$a=1$ は条件を満たす．

(i)～(iii) から，求める a の値は　$\boldsymbol{a=-8,\ \dfrac{8}{9},\ 1}$ ■

4 (1) $\vec{p}=(x,\ y)$，$\vec{p}=s(2,-1)+t(-1,\ 2)$ より

$$\vec{p}=(2s-t,-s+2t) \quad \text{よって} \quad x+y=s+t=\mathbf{6}$$

(2) $\vec{p}=(0,\ 6)$ のとき

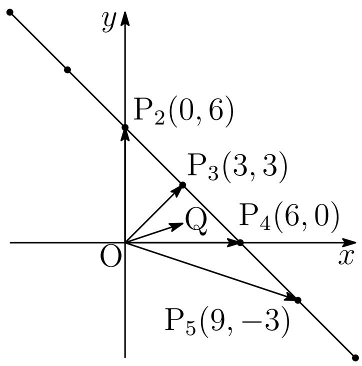
$$2s-t=0,\quad -s+2t=6 \quad \text{これを解いて} \quad s=2,\ t=4$$

表が 2 枚，裏が 4 枚でる確率であるから

$$\frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\mathbf{\frac{15}{64}}$$

(3) $t=6-s$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{p}&=s(2,-1)+(6-s)(-1,\ 2)\\&=(3s-6,\ 12-3s)\end{aligned}$$



$0 \leqq s \leqq 6$ に対する $\vec{p}$ の終点を P_s とし，
O を始点とする $\vec{q}$ の終点を Q とすると

$P_0(-6,\ 12)$，$P_1(-3,\ 9)$，$P_2(0,\ 6)$，
$P_3(3,\ 3)$，$P_4(6,\ 0)$，$P_5(9,-3)$，
$P_6(12,-6)$，$Q(3,-1)$

$\vec{q}=(3,\ 1)$ の偏角を θ とすると $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$

$\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$，$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから $\dfrac{\pi}{12}<\theta<\dfrac{\pi}{6}$

P_2，P_3，P_4，P_5 の偏角は順に $\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{4}$，0，$-\theta$

ゆえに $\angle QOP_2=\dfrac{\pi}{2}-\theta>\dfrac{\pi}{3}$，$\angle QOP_3=\dfrac{\pi}{4}-\theta<\dfrac{\pi}{6}$

$\angle QOP_4=\theta<\dfrac{\pi}{6}$，$\angle QOP_5=2\theta>\dfrac{\pi}{2}$

$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ 以下となる点は P_3，P_4

したがって，$s=3$ と $s=4$ となる確率であるから

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{6!}{4!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\mathbf{\frac{35}{64}}$$

■

第 3 章　東京大学

出題分野 (2011-2020) 100 分

◀	東京大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	数と式										
I	2 次関数		1								
	図形と計量										
	データの分析										
	式と証明										
	複素数と方程式										
II	図形と方程式	4	2	2·3		3	1		1	4	
	三角関数										3
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	1	4	1	1·3	1·2	3	1	3·4	1·2	1
	場合の数と確率		3	4				3		3	2
A	整数の性質	2			4	1	4	4			
	図形の性質										
	平面上のベクトル							2		2	
B	空間のベクトル										
	数列	3			2	4	2		2		4
	確率分布と統計										

数字は問題番号

3.1　2015年(100分)

1 以下の命題A，Bそれぞれに対し，その真偽を調べよ．また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ．

命題A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ．

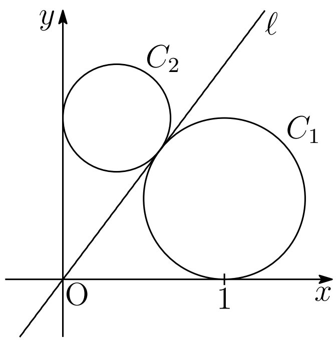
命題B　整数 n，m，ℓ が $5n+5m+3\ell=1$ をみたすならば，$10nm+3m\ell+3n\ell<0$ が成り立つ．

2 座標平面上の2点 A$(-1,\ 1)$，B$(1, -1)$ を考える．また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は1以下であるとする．次の条件 (i) または (ii) をみたす点Pの範囲を図示し，その面積を求めよ．

(i) 頂点の x 座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで，点A，P，Bをすべて通るものがある．

(ii) 点A，P，Bは同一直線上にある．

3 ℓ を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする．さらに，以下の3条件 (i)，(ii)，(iii) で定まる円 C_1，C_2 を考える．



(i) 円 C_1，C_2 は2つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる．

(ii) 円 C_1，C_2 は直線 ℓ と同一点で接する．

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する．

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする．$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ．

4 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く．コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く．さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく．たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は

AABBAAB

となる．このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である．

(1) n を正の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ．

(2) n を 2 以上の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ．

解答例

1 命題 A：$f(x)=\dfrac{x^3}{26}-x^2+100\ (x>0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{3}{26}x^2-2x=\frac{3}{26}x\left(x-\frac{52}{3}\right)$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$17<\dfrac{52}{3}<18$ より　$f(17)=17^2\left(\dfrac{17}{26}-1\right)+100=-\dfrac{2601}{26}+100<0$

したがって，$n=17$ のとき，不等式 $\dfrac{n^3}{26}+100\geqq n^2$ は成立しない．

よって，命題 A は　**偽**

命題 B：$5n+5m+3\ell=1$ より，$3\ell=1-5(m+n)$ であるから

$$\begin{aligned}10nm+3m\ell+3n\ell&=10mn+3\ell(m+n)\\&=10mn+\{1-5(m+n)\}(m+n)\\&=10mn+(m+n)-5(m+n)^2\\&=-5m^2-5n^2+m+n\\&=-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\end{aligned}$$

m，n は整数なので

$$-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\leqq 0\quad(\text{等号は } m=n=0 \text{ のとき})$$

$m=n=0$ のとき，$3\ell=1$ を満たす整数 ℓ は存在しないから

$$10nm+3m\ell+3n\ell=-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}<0$$

よって，命題 B は　**真**　■

2 点 P の x 座標 ($|x| \leqq 1$) および条件 (ii) より，点 P は線分 AB 上にあるから

$$x + y = 0 \quad (-1 \leqq x \leqq 1) \quad \cdots (*)$$

条件 (i) について，点 A，B，P$(x,\ y)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ が満たす 2 次関数を

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおくと，このグラフは，2 点 A$(-1,\ 1)$，B$(1, -1)$ を通るから

$$a - b + c = 1, \quad a + b + c = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b = -1,\ c = -a$$

したがって　$y = ax^2 - x - a \quad \cdots ①$

すなわち　$y = a\left(x - \dfrac{1}{2a}\right)^2 - a - \dfrac{1}{4a}$

頂点の x 座標の絶対値が 1 以上であるから

$$\left|\frac{1}{2a}\right| \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < |a| \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

① により，$x = -1$ のとき点 A，$x = 1$ のとき点 B にある．

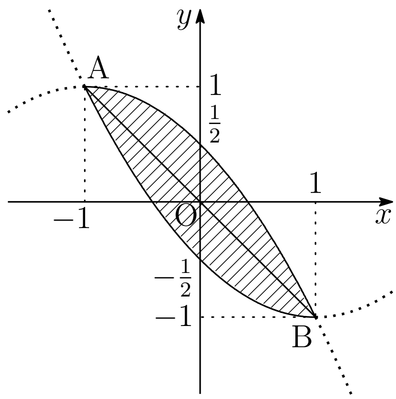
$-1 < x < 1$ のとき，$a = \dfrac{x+y}{x^2-1}$ を ② に代入すると　$0 < \left|\dfrac{x+y}{x^2-1}\right| \leqq \dfrac{1}{2}$

したがって　$0 < |x+y| \leqq \dfrac{1}{2}(1-x^2) \quad (-1 < x < 1)$

これに $(*)$ を含めると　$|x+y| \leqq \dfrac{1}{2}(1-x^2) \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

すなわち　$\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{2} \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{1}{2}$

よって，点 P の表す領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．その面積を S とすると



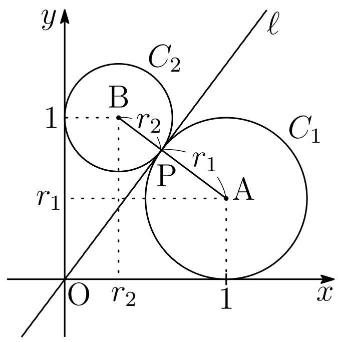
$$S = \int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$= -\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

■

$\boxed{3}$ 円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ A，B とし，C_1，C_2 が外接する点を P とすると，右の図から，$\mathrm{OP}=1$ である．これから，B の y 座標は 1 であるから，$\mathrm{A}(1,\ r_1)$，$\mathrm{B}(r_2,\ 1)$ とおくと，$\mathrm{AB}=r_1+r_2$ より



$$(r_1+r_2)^2=(r_2-1)^2+(1-r_1)^2$$

整理すると　$r_1r_2+r_1+r_2=1$

$r_2=\dfrac{1-r_1}{1+r_1}=\dfrac{2}{1+r_1}-1$ であるから

$$\begin{aligned}8r_1+9r_2&=8r_1+9\left(\frac{2}{1+r_1}-1\right)\\&=8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17\\&\geqq 2\sqrt{8(1+r_1)\cdot\frac{18}{1+r_1}}-17=7\end{aligned}$$

上式において，等号が成立するとき

$$8(1+r_1)=\frac{18}{1+r_1}\quad \text{すなわち}\quad r_1=\frac{1}{2},\ \ r_2=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

このとき，点 P は 2 点 $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ を $r_1:r_2=3:2$ に内分するから，その座標は

$$\left(\frac{2\cdot1+3\cdot\frac{1}{3}}{3+2},\ \frac{2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot1}{3+2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

よって，ℓ の方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{4}{3}x}$，　最小値は　**7**　■

4 (1) 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n とすると，p_{n+2} は最初に裏が出た場合と表が場合により

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots(*)$$

このとき　$p_1 = \frac{1}{2}$，$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$(*)$ より

$$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n),$$

$$p_{n+2} + \frac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$$

第 1 式から　$p_{n+1} - p_n = (p_2 - p_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

第 2 式から　$p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = p_2 + \frac{1}{2}p_1 = 1$

上の 2 式から　$\boldsymbol{p_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad (n \geqq 1)}$

(2) 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字列が B となる確率を q_n とすると，q_{n+2} は，(1) と同様に

$$q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n \quad (n \geqq 2) \quad \cdots(**)$$

このとき　$q_2 = 0$，$q_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$(**)$ より

$$q_{n+2} - q_{n+1} = -\frac{1}{2}(q_{n+1} - q_n),$$

$$q_{n+2} + \frac{1}{2}q_{n+1} = q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$$

第 1 式から　$q_{n+1} - q_n = (q_3 - q_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

第 2 式から　$q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n = q_3 + \frac{1}{2}q_2 = \frac{1}{4}$

上の 2 式から　$\boldsymbol{q_n = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \quad (n \geqq 2)}$ ■

3.2　2016 年 (100 分)

1 座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x, -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ．また，その条件をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ．

2 A，B，C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する．以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する．

(a) 1 試合目で A と B が対戦する．

(b) 2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する．

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する．ここで k は 2 以上の整数とする．

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．

(1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(2) n を 2 以上の整数とする．ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(3) m を正の整数とする．総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ．

3 座標平面上の 2 つの放物線

$$A:\ y = x^2$$
$$B:\ y = -x^2 + px + q$$

が点 $(-1,\ 1)$ で接している．ここで，p と q は実数である．さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする．

(1) p と q の値を求めよ．

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする．ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める．$S(t)$ を求めよ．

(3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ．

4 以下の問いに答えよ．ただし，(1) については，結論のみを書けばよい．

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする．a_n を求めよ．

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする．b_n を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $\triangle$PQR が鋭角三角形であるとき，次の条件式をみたせばよい．

$$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2>\mathrm{RP}^2,\quad \mathrm{QR}^2+\mathrm{RP}^2>\mathrm{PQ}^2,\quad \mathrm{RP}^2+\mathrm{PQ}^2>\mathrm{QR}^2$$

3点 P$(x,\ y)$，Q$(-x, -y)$，R$(1,\ 0)$ から

$$\mathrm{PQ}^2=4x^2+4y^2,\quad \mathrm{QR}^2=(x+1)^2+y^2,\quad \mathrm{RP}^2=(x-1)^2+y^2$$

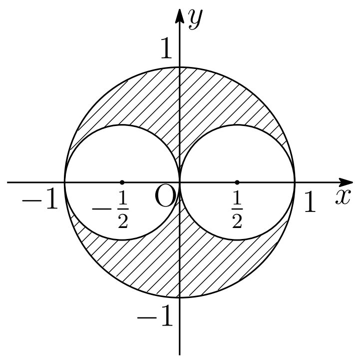
これらを条件式に代入すると

$$\begin{aligned}&4x^2+4y^2+(x+1)^2+y^2>(x-1)^2+y^2,\\&(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2>4x^2+4y^2,\\&(x-1)^2+y^2+4x^2+4y^2>(x+1)^2+y^2\end{aligned}$$

整理すると　$x^2+y^2+x>0,\quad x^2+y^2<1,\quad x^2+y^2-x>0$

すなわち　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4},\quad x^2+y^2<1,\quad \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4}$

よって，P$(x,\ y)$ のみたす領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含まない．



■

$\boxed{2}$ (1) ちょうど5試合目でAが優勝するときの勝敗は次のようになる．

回数	1	2	3	4	5
勝者	A	C	B	A	A
敗者	B	A	C	B	C
控え	C	B	A	C	B

求める確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$

(2) $n_1 \equiv 1 \pmod 3$, $n_2 = n_1 + 1$, $n_3 = n_1 + 2$ とする．
優勝チームが決まらず対戦が続くとき，勝者・敗者・控えは 3 順ごとに，次の (i),(ii) のように繰り返す．

(i) 初戦で A が B に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	A	C	B	$\cdots$	A	C	B	$\cdots$
敗者	B	A	C	$\cdots$	B	A	C	$\cdots$
控え	C	B	A	$\cdots$	C	B	A	$\cdots$

(ii) 初戦で B が A に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	B	C	A	$\cdots$	B	C	A	$\cdots$
敗者	A	B	C	$\cdots$	A	B	C	$\cdots$
控え	C	A	B	$\cdots$	C	A	B	$\cdots$

n 試合目に A が優勝するのは，(i) の場合，$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき，A は最後に C に勝って優勝し，(ii) の場合，$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，A は最後に B に勝って優勝する．これらの場合の確率は，ともに $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$．

よって，求める確率は

$$\boldsymbol{n \not\equiv 0} \text{ **のとき** } \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^n}, \quad \boldsymbol{n \equiv 0} \text{ **のとき** } \boldsymbol{0} \qquad \mathbf{(mod\ 3)}$$

(3) (2) の結果から，A が最後に C に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

また，A が最後に B に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\} + \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\} = \boldsymbol{\frac{1}{14}\left\{5 - 12\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}}$$

補足 初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和は　$\boldsymbol{\dfrac{a - rl}{1 - r}}$ ■

3　(1) $f(x)=x^2$，$g(x)=-x^2+px+q$ とおくと，$f'(x)=2x$，$g'(x)=-2x+p$.
A，B が点 $(-1,\ 1)$ で接するとき

$$f(-1)=g(-1),\quad f'(-1)=g'(-1)$$

ゆえに　$1=-1-p+q,\ -2=2+p$　よって　$\boldsymbol{p=-4,\ q=-2}$

(2) (1) の結果から　$g(x)=-x^2-4x-2$
B を x 軸方向に $2t$，y 軸方向に t だけ平行移動した C の方程式は

$$\begin{aligned} y &= g(x-2t)+t = -(x-2t)^2-4(x-2t)-2+t \\ &= -x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2 \end{aligned}$$

$h(x)=-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2$ とおくと

$$h(x)-f(x)=-2x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2$$

$h(x)-f(x)=0$ とすると

$$2x^2-4(t-1)x+4t^2-9t+2=0 \quad \cdots(*)$$

2 次方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=\{-2(t-1)\}^2-2(4t^2-9t+2)=-4t^2+10t=-2t(2t-5)$$

$D>0$ のとき，$t>0$ に注意して　$0<t<\dfrac{5}{2}$
このとき，2 次方程式 $(*)$ の異なる 2 つの解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\beta-\alpha=\frac{2(t-1)+\sqrt{D/4}}{2}-\frac{2(t-1)-\sqrt{D/4}}{2}=\sqrt{D/4},$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_\alpha^\beta \{h(x)-f(x)\}dx = -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{3}(D/4)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}} & \left(0<t<\dfrac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(t \geqq \dfrac{5}{2}\right) \end{cases}}$

(3) $0<t<\dfrac{5}{2}$ のとき　$-4t^2+10t=-4\left(t-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{25}{4}$

よって，最大値　$S\left(\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{125}{24}}$　■

4 (1) $3^1 \equiv 3,\quad 3^2 \equiv 9,\quad 3^3 \equiv 7,\quad 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$

したがって　$3^{n+4} \equiv 3^n \pmod{10}$

よって　$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} 3 & (n \equiv 1 \pmod 4) \\ 9 & (n \equiv 2 \pmod 4) \\ 7 & (n \equiv 3 \pmod 4) \\ 1 & (n \equiv 0 \pmod 4) \end{cases}}$$

(2) $3^1 \equiv 3,\quad 3^2 \equiv 1 \pmod 4$

したがって　$3^{n+2} \equiv 3^n \pmod 4$

よって　$$\boldsymbol{b_n = \begin{cases} 3 & (n \equiv 1 \pmod 2) \\ 1 & (n \equiv 0 \pmod 2) \end{cases}}$$

(3) $x_1 = 1,\quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

この漸化式で定められた数列 $\{x_n\}$ は奇数からなるから，x_8 は奇数

したがって，(2) の結果から　$3^{x_8} \equiv 3 \pmod 4$　ゆえに　$x_9 \equiv 3 \pmod 4$

さらに，(1) の結果から　$3^{x_9} \equiv 7 \pmod{10}$　ゆえに　$x_{10} \equiv 7 \pmod{10}$

よって，求める余りは　**7**

補足 正の整数 m について，x_m は奇数

したがって，(2) の結果から　$3^{x_m} \equiv 3 \pmod 4$　ゆえに　$x_{m+1} \equiv 3 \pmod 4$

さらに，(1) の結果から　$3^{x_{m+1}} \equiv 7 \pmod{10}$　ゆえに　$x_{m+2} \equiv 7 \pmod{10}$

よって，$l \geqq 3$ の整数について　$x_l \equiv 7 \pmod{10}$　■

3.3　2017 年 (100 分)

1 座標平面において 2 つの放物線 $A : y = s(x-1)^2$ と $B : y = -x^2 + t^2$ を考える．ただし，s，t は実数で，$0 < s$，$0 < t < 1$ をみたすとする．放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする．A と B がただ 1 点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ．

2 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている．点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ．

3 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という．格子点上を次の規則 (a)，(b) に従って動く点 P を考える．

(a) 最初に，点 P は原点 O にある．

(b) ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(1) 最初から 1 秒後の点 P の座標を $(s,\ t)$ とする．$t - s = -1$ となる確率を求めよ．

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ．

4 $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める．以下の問いに答えよ．ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい．

(1) a_1，a_2 の値を求めよ．

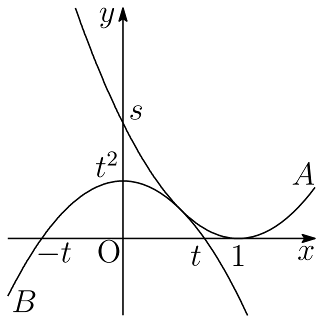
(2) $n \geqq 2$ とする．積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ．

(3) a_n は自然数であることを示せ．

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

解答例

1 (1) $A: y = s(x-1)^2$ と $B: y = -x^2 + t^2$ から y を消去して，整理すると



$$(s+1)x^2 - 2sx + s - t^2 = 0$$

A と B は接するので，上式の係数について

$$(-s)^2 - (s+1)(s-t^2) = 0$$

これを s について解くと $s = \dfrac{t^2}{1-t^2}$

ゆえに $P = \displaystyle\int_0^1 s(x-1)^2\,dx = \left[\frac{s}{3}(x-1)^3\right]_0^1 = \frac{s}{3} = \frac{t^2}{3(1-t^2)}$

$Q = \displaystyle\int_0^t (-x^2+t^2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + t^2x\right]_0^t = \frac{2t^3}{3}$

したがって $\dfrac{Q}{P} = \dfrac{2t^3}{3}\cdot\dfrac{3(1-t^2)}{t^2} = 2t - 2t^3$

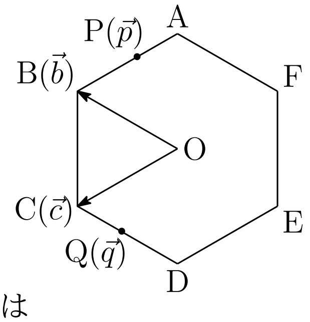
$f(t) = 2t - 2t^3$ $(0 < t < 1)$ とおくと

$$f'(t) = 2 - 6t^2 = -6\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) = -6\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める最大値は $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}}$ ■

2 正六角形の中心 O に関する 4 点 B，C，P，Q の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$ とする．このとき実数 s，t を用いて $(0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1)$



$$\vec{p} = \vec{b} + s(-\vec{c}) = \vec{b} - s\vec{c}$$
$$\vec{q} = \vec{c} + t(-\vec{b}) = -t\vec{b} + \vec{c}$$

線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R($\vec{r}$) の位置ベクトルは

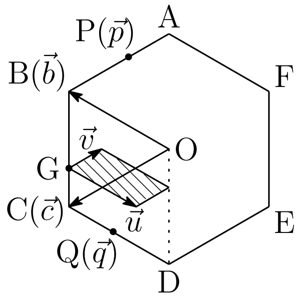
$$\begin{aligned}\vec{r} &= \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q} = \frac{1}{3}(\vec{b} - s\vec{c}) + \frac{2}{3}(-t\vec{b} + \vec{c})\\ &= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{2t}{3}(-\vec{b}) + \frac{s}{3}(-\vec{c})\end{aligned}$$

2 つのベクトル $-\vec{b}$，$-\vec{c}$ の大きさはともに 1 で，そのなす角は 60° である．

$0 \leqq \dfrac{2t}{3} \leqq \dfrac{2}{3}$，$0 \leqq \dfrac{s}{3} \leqq \dfrac{1}{3}$ であるから，R が通る図形の面積は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 60^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c}$，$\vec{u} = -\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\vec{v} = -\dfrac{1}{3}\vec{c}$ とおくと，G を始点とする 2 つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ で張られた平行四辺形の内部または周上を点 R は動く．
(右の図の斜線部分)



■

3 (1) 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は原点 O から 1 秒後に格子点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(-1,\ 0)$，$(0,-1)$ に確率 $\dfrac{1}{4}$ で移動し，このとき，$t-s$ はそれぞれ -1，1，1，-1 となるから，求める確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) x 軸方向に 1，-1，y 軸方向に 1，-1 だけ平行移動する回数をそれぞれ i，j，k，l とすると $(0 \leqq i,\ j,\ k,\ l \leqq 6)$，その確率は

$$\sum_{\substack{i+j+k+l=6\\0\leqq i,j,k,l\leqq 6}}\frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

このとき　$i+j+k+l=6$,　$i-j=k-l$　すなわち　$i+l=j+k=3$

よって，求める確率は,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i+l=j+k=3\\0\leqq i,j,k,l\leqq 3}}\frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6&=\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6\sum_{\substack{i+l=3\\0\leqq i,l\leqq 3}}\frac{3!}{i!l!}\sum_{\substack{j+k=3\\0\leqq j,k\leqq 3}}\frac{3!}{j!k!}\\&=\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6\cdot 2^3\cdot 2^3=\boldsymbol{\frac{5}{16}}\end{aligned}$$

■

4 (1) $a_1=p-\dfrac{1}{p}=2+\sqrt{5}-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2)=\mathbf{4}$

$a_2=p^2+\dfrac{1}{p^2}=\left(p-\dfrac{1}{p}\right)^2+2=4^2+2=\mathbf{18}$

(2) $p^{n+1}+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n+1}=\left(p-\dfrac{1}{p}\right)\left\{p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n\right\}+p^{n-1}+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}$ より

$$a_{n+1}=a_1a_n+a_{n-1}\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}}$$

補足 $\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$

(3) (1)，(2) の結果から　$a_1=4$，$a_2=18$，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}$　$\cdots(*)$

よって，すべての自然数 n について，a_n は自然数である．

(4) 2 つの自然数 k，l の最大公約数を $\gcd(k,\ l)$ とする．

$(*)$ にユークリッドの互除法を順次適用することにより

$$\gcd(a_{n+1},\ a_n)=\gcd(a_n,\ a_{n-1})=\cdots=\gcd(a_2,\ a_1)=\mathbf{2}$$

■

3.4 2018年(100分)

1 座標平面上に放物線 C を

$$y = x^2 - 3x + 4$$

で定め，領域 D を

$$y \geqq x^2 - 3x + 4$$

で定める．原点をとおる2直線 l，m は C に接するものとする．

(1) 放物線 C 上を動く点Aと直線 l，m の距離をそれぞれ L，M とする．$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小値をとるときの点Aの座標を求めよ．

(2) 次の条件をみたす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px + qy \leqq 0$ がなりたつ．

2 数列 a_1，a_2，$\cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める．

(1) a_7 と1の大小を調べよ．

(2) $n \geqq 2$ とする．$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲を求めよ．

(3) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ．

3 $a > 0$ とし，

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく．

(1) $x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ．

(2) 次の2条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる3実数解をもつ．
条件2：さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である．

4 放物線 $y=x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす部分を C とする．座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える．

(1) 点 P が C 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

をみたす点 Q の軌跡を求めよ．

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

をみたす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ．

解答例

1 (1) $C: y=x^2-3x+4$ より $y'=2x-3$

C 上の点 $(t,\ t^2-3t+4)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2-3t+4)=(2t-3)(x-t) \quad ゆえに \quad y=(2t-3)x-t^2+4$$

この接線が原点を通るとき $-t^2+4=0$ これを解いて $t=\pm 2$

したがって，2 直線 l，m の方程式は $x-y=0,\ \ 7x+y=0$

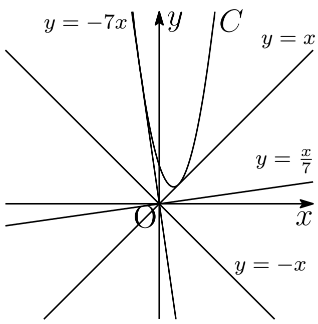
C 上の点 A の座標を $(a,\ a^2-3a+4)$ とすると

$$\begin{aligned}\sqrt{L}+\sqrt{M}&=\sqrt{\frac{|a-(a^2-3a+4)|}{\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{|7a+(a^2-3a+4)|}{5\sqrt{2}}}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}(\sqrt{5}\,|a-2|+|a+2|)\end{aligned}$$

このとき $\sqrt{5}\,|a-2|+|a+2|=\begin{cases}-(1+\sqrt{5})a-2+2\sqrt{5} & (a<-2)\\(1-\sqrt{5})a+2+2\sqrt{5} & (-2\leqq a\leqq 2)\\(1+\sqrt{5})a+2-2\sqrt{5} & (2<a)\end{cases}$

したがって，$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ が最小となるのは，$-2\leqq a\leqq 2$ の範囲であり，$a=2$ のときである．このとき，点 A の座標は **(2, 2)**

(2) 領域 D 内の点 $(x,\ y)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(x,\ y)$ とすると

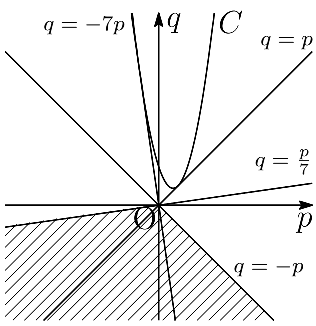


$$px+qy=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}\geqq 0 \quad \cdots(*)$$

l，m に垂直な 2 直線は

$$y=-x, \quad y=\frac{x}{7}$$

$(*)$ を満たす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は



$$\begin{cases}q\leqq -p\\ q\leqq \dfrac{p}{7}\end{cases}$$

よって，その領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

■

2 (1) $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!}$ より $(n = 1, 2, \cdots)$

$$a_7 = \frac{{}_{14}\mathrm{C}_7}{7!} = \frac{14{\cdot}13{\cdot}12{\cdot}11{\cdot}10{\cdot}9{\cdot}8}{(7!)^2} = \frac{2^4{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4 \times 13{\cdot}11{\cdot}9}{(7!)^2}$$
$$= \frac{2^4{\cdot}13{\cdot}11{\cdot}9}{3!{\cdot}7!} = \frac{13{\cdot}11}{7{\cdot}6{\cdot}5} = \frac{143}{210} < 1$$

(2) $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^3}$ より $(n = 1, 2, \cdots)$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^3}{\cdot}\frac{\{(n-1)!\}^3}{(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{n^3} = \frac{2(2n-1)}{n^2}$$

ゆえに　$1 - \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1 - \dfrac{2(2n-1)}{n^2} = \dfrac{(n-2)^2 - 2}{n^2} > 0$

上式をみたす n の値の範囲は　$\boldsymbol{n \geqq 4}$

(3)　$a_1 = \dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{1!} = 2$，$a_2 = \dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!} = 3$，

また　$a_3 = \dfrac{6!}{(3!)^3}$，　$a_4 = \dfrac{8!}{(4!)^3}$，　$a_5 = \dfrac{10!}{(5!)^3}$，　$a_6 = \dfrac{12!}{(6!)^3}$

a_3，a_4 の既約分数は，その分母に素因数 3 がある．

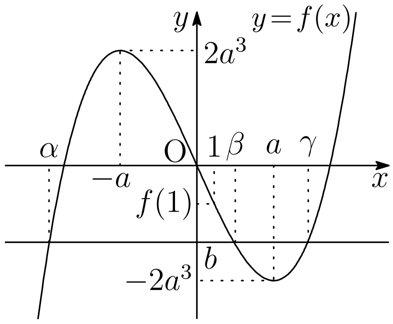
a_5，a_6 の既約分数は，その分母に素因数 5 がある．

(1)，(2) の結果から，$n \geqq 7$ のとき　$0 < a_n < 1$

よって，a_n が整数となる $n \geqq 1$ は　$\boldsymbol{n = 1,\ 2}$　■

3 (1) $f(x) = x^3 - 3a^2x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$



$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するから，$a > 0$ に注意して $\boldsymbol{0 < a \leqq 1}$

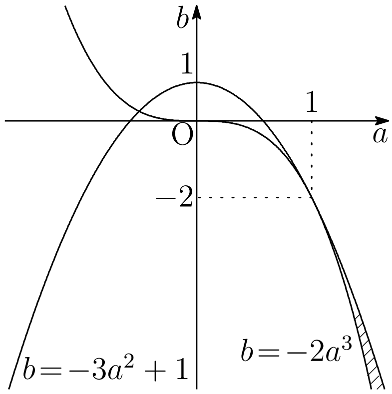
(2) $f(x) = b$ の解 $\alpha < \beta < \gamma$ について，$\beta > 1$ であるから，右上の図より

$$1 < a, \quad -2a^3 < b < f(1)$$

したがって

$$\boldsymbol{-2a^3 < b < -3a^2 + 1 \quad (a > 1)}$$

点 $(a,\ b)$ の満たす領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含まない．



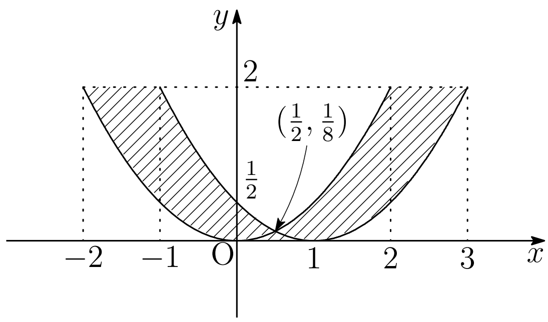
4 (1) C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ に対して $(-1 \leqq t \leqq 1)$，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より

$$(x,\ y) = 2(t,\ t^2) \quad \text{ゆえに} \quad x = 2t,\ y = 2t^2$$

上の 2 式から t を消去すると　$\boldsymbol{y = \dfrac{x^2}{2}\ \ (-2 \leqq x \leqq 2)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$

したがって，点 S が動く領域は，(1) で求めた Q の軌跡を x 軸方向に 1 だけ平行移動するときに描く図形であるから，次の図の斜線部分である．

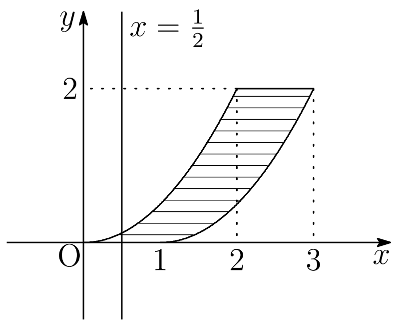


右の図の斜線部分の面積は，カバリエリの原理により

$$1\cdot 2 = 2$$

斜線部分の $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ における面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\,\frac{x^3}{6}\,\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{48}$$



図形は直線 $x = \dfrac{1}{2}$ に関して対称であるから，求める図形の面積は

$$2\left(2 - \frac{1}{48}\right) = \boldsymbol{\frac{95}{24}}$$

■

3.5　2019 年 (100 分)

1 座標平面の原点を O とし，O，A(1, 0)，B(1, 1)，C(0, 1) を辺の長さが 1 の正方形の頂点とする．3 点 P(p, 0)，Q(0, q)，R(r, 1) はそれぞれ辺 OA，OC，BC 上にあり，3 点 O，P，Q および 3 点 P，Q，R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする．

(1) q と r を p で表し，p，q，r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値，最小値を求めよ．

2 O を原点とする座標平面において，点 A(2, 2) を通り，線分 OA と垂直な直線を l とする．座標平面上を点 P(p, q) が次の 2 つの条件をみたしながら動く．

条件 1： $8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$

条件 2： 点 O と直線 l の距離を c とし，点 P(p, q) と直線 l の距離を d とするとき $cd \geqq (p-1)^2$

このとき，P が動く領域を D とする．さらに，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする．

(1) D を図示し，その面積を求めよ．

(2) $\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 正八角形の頂点を反時計回りに A，B，C，D，E，F，G，H とする．また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある．点 P が最初に点 A にある．次の操作を 10 回繰り返す．

操作：コインを投げ，表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる．

例えば，点 P が点 H にある状態で，投げたコインの表が出れば点 A に移動させ，裏が出れば点 G に移動させる．以下の事象を考える．

事象 S：操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある．

事象 T：1 回目から 10 回目の操作によって，点 P は少なくとも 1 回，点 F に移動する．

(1) 事象 S が起こる確率を求めよ．

(2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ O を原点とする座標平面を考える．不等式

$$|x| + |y| \leqq 1$$

が表す領域を D とする．また，点 P，Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R が動く範囲を E とする．

(1) D，E をそれぞれ図示せよ．

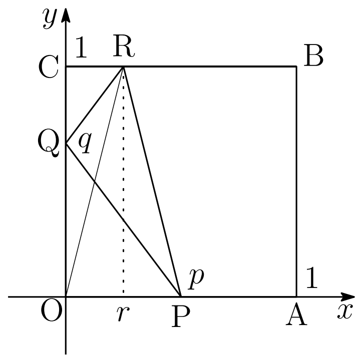
(2) a，b を実数とし，不等式

$$|x - a| + |y - b| \leqq 1$$

が表す領域を F とする．また，点 S，T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}}$ をみたす点 U が動く範囲を G とする．G は E と一致することを示せ．

解答例

1　(1)　$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}pq = \dfrac{1}{3}$ より　$p = \dfrac{2}{3q}$,　$q = \dfrac{2}{3p}$



$0 < p \leqq 1$,　$0 < q \leqq 1$ より

$$0 < \frac{2}{3q} \leqq 1,\quad 0 < \frac{2}{3p} \leqq 1$$

よって　$\boldsymbol{q = \dfrac{2}{3p}}$**,**　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1}$**,**　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3} \leqq q \leqq 1}$

$\triangle\mathrm{OPR} + \triangle\mathrm{OQR} = \triangle\mathrm{OPQ} + \triangle\mathrm{PQR}$ より

$$\frac{1}{2}p\cdot 1 + \frac{1}{2}qr = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\quad \text{ゆえに}\quad p + qr = \frac{4}{3}$$

上の第 2 式に $q = \dfrac{2}{3p}$ を代入すると

$$p + \frac{2}{3p}\cdot r = \frac{4}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{r = -\frac{3}{2}p^2 + 2p} = -\frac{3}{2}\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

$\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ であるから　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} \leqq r \leqq \dfrac{2}{3}}$

(2)　(1) の結果から

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}} = \frac{r}{q} = \frac{3p}{2}\left(-\frac{3}{2}p^2 + 2p\right) = -\frac{9}{4}p^3 + 3p^2$$

$f(p) = -\dfrac{9}{4}p^3 + 3p^2$ とおくと $\left(\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1\right)$

$$f'(p) = -\frac{27}{4}p^2 + 6p = -\frac{27}{4}p\left(p - \frac{8}{9}\right)$$

したがって，$f(p)$ の増減表は，次のようになる．

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{64}{81}$	↘	$\frac{3}{4}$

よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$　■

2 (1) A(2, 2)，P$(p,\ q)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(p,\ q)$
これらを条件 1 に適用すると

$$8 \leqq 2p+2q \leqq 17 \quad ゆえに \quad 4 \leqq p+q \leqq \frac{17}{2} \quad \cdots ①$$

線分 OA に垂直な直線の傾きは　-1
直線 l は点 A(2, 2) を通り傾き -1 であるから

$$y-2=-1(x-2) \quad すなわち \quad x+y=4$$

$c=\mathrm{OA}$ であるから　$c=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$
P$(p,\ q)$ から直線 l までの距離 d は，① に注意して

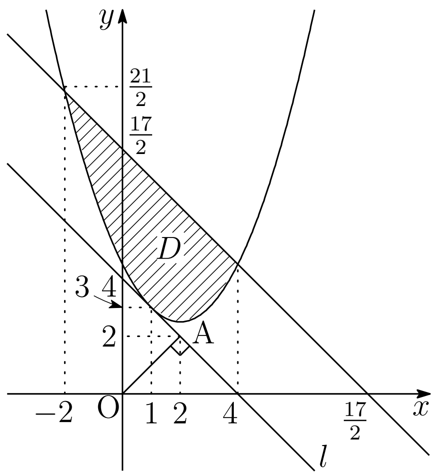
$$d=\frac{|p+q-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{p+q-4}{\sqrt{2}}$$

$cd \geqq (p-1)^2$ より

$$2\sqrt{2}\cdot\frac{p+q-4}{\sqrt{2}} \geqq (p-1)^2 \quad ゆえに \quad q \geqq \frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}$$

D の表す領域は，上式および ① より

$$\begin{cases} y \leqq -x+\dfrac{17}{2} \\ y \geqq \dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2} \end{cases}$$



上の 2 式の境界線は

$$\begin{cases} y = -x+\dfrac{17}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

上の 2 式から y を消去すると

$$-x+\frac{17}{2}=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2} \quad これを解いて \quad x=-2,\ 4$$

領域 D の面積を S とすると

$$S=\int_{-2}^{4}\left\{\left(-x+\frac{17}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)\,dx=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(4+2)^3=\mathbf{18}$$

(2) 直線 $y = kx$ および放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$ の共有点について

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} = kx \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2(k+2)x + 9 = 0 \quad \cdots ②$$

これらの直線と放物線が接するとき，係数について

$$(k+2)^2 - 9 = 0 \quad \text{すなわち} \quad k = 1, -5$$

共有点の x 座標は，$x = k + 2$ より　$x = \pm 3$

θ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (p,\ q)$ とベクトル $(1,\ 0)$ のなす角であるから

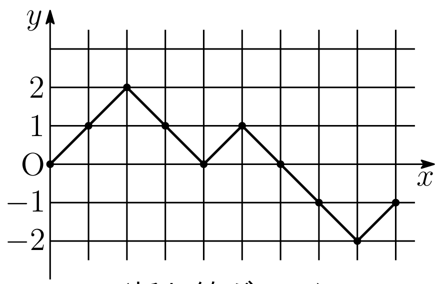
$$\cos\theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

$\cos\theta$ は $\mathrm{P}(3,\ 3)$ で最大となり，$\mathrm{P}\left(-2, \frac{21}{2}\right)$ で最小となるから

$$\frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2}} \leqq \cos\theta \leqq \frac{3}{\sqrt{3^2 + 3^2}}$$

よって　$$-\frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{457}}} \leqq \boldsymbol{\cos\theta} \leqq \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$ ■

3 座標平面上の原点 O から右斜め 45°，または右斜め $-45°$ の方向に最も近い第 1 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ．同様にして第 1 番目の格子点から第 2 番目の格子点をとり，第 1 番目と第 2 番目を線分で結ぶ．以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする．右図は原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例である．



(折れ線グラフ)

n を自然数，k を $|k| \leqq n$ を満たす整数とする．原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき ($n + k$ が偶数)，右斜め 45° の方向に $\frac{n+k}{2}$ 回，右斜め $-45°$ の方向に $\frac{n-k}{2}$ 回進む．原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ であるから，格子点 $(n,\ k)$ にある確率は

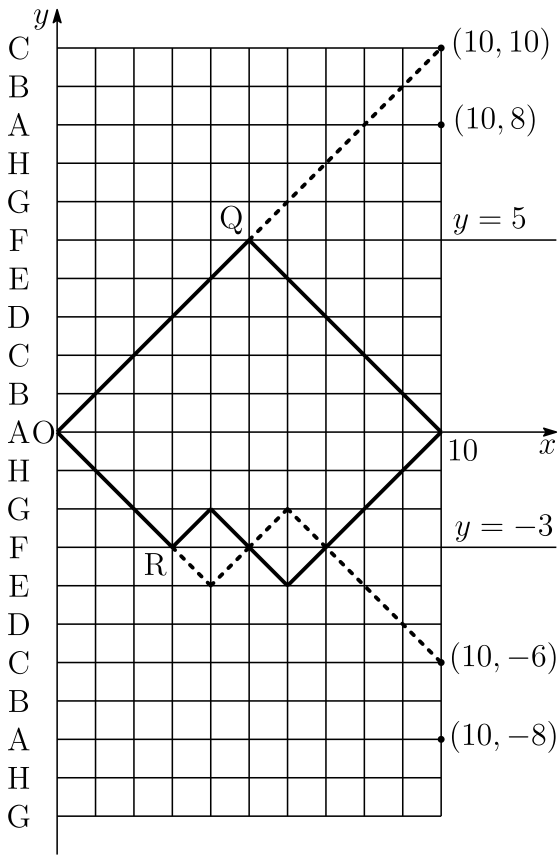
$$P_n(k) = \frac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}}{2^n}$$

(1) コインの表，裏により，格子点上の点 P がそれぞれ右斜め 45°，右斜め −45° 方向の最も近い格子点に移動するものとする．格子点 $(n,\ k)$ にあるとき，$k \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \pmod 8$ を，それぞれ，A，B，C，D，E，F，G，H に対応させせる．操作を 10 回行って点 P が点 A にあるとき，$k = 0, \pm 8$ であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} P_{10}(0) + P_{10}(8) + P_{10}(-8) &= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+0}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+8}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10-8}{2}}}{2^{10}} \\ &= \frac{1}{2^{10}}({}_{10}\mathrm{C}_5 + {}_{10}\mathrm{C}_9 + {}_{10}\mathrm{C}_1) \\ &= \frac{1}{2^{10}}(252 + 10 + 10) = \boldsymbol{\frac{17}{64}} \end{aligned}$$

(2) 原点 O と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = 5$ と交わる点を Q とすると，点 Q と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 Q と点 $(10, 10)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい (鏡像原理)．同様に，原点 O と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = -3$ と交わる点を R とすると，点 R と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 R と点 $(10, -6)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい．よって，求める確率は

$$\begin{aligned} &P_{10}(8) + P_{10}(-8) \\ &\qquad + P_{10}(10) + P_{10}(-6) \\ &= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_9}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_1}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{10}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{2^{10}} \\ &= \frac{10 + 10 + 1 + 45}{2^{10}} = \boldsymbol{\frac{33}{512}} \end{aligned}$$



補足 操作を 10 回行った後に点 P が点 E にあるとき，10 回目ではじめて点 E に達する条件付き確率について考えてみる．

8 回目以前ですでに点 E を通過する折れ線グラフは，点 $(9, \pm 5)$ または点 $(9, \pm 3)$ と点 $(10, \pm 4)$ を結ぶ (複号同順)．原点 O と点 $(10, \pm 4)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に $y = \pm 4$ と交わる点を S とすると，点 S と点 $(10, \pm 5)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 S と点 $(10, \pm 3)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は鏡像原理により等しい (複号同順)．したがって，10 回目で初めて点 E に達する折れ線グラフの本数は

$$\left({}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+4}{2}} - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{\frac{9+5}{2}}\right) + \left({}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10-4}{2}} - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{\frac{9-5}{2}}\right) = 2\left({}_{10}\mathrm{C}_7 - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_7\right) \quad (\text{本})$$

求める確率は $\quad \dfrac{2\left({}_{10}\mathrm{C}_7 - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_7\right)}{2\cdot{}_{10}\mathrm{C}_7} = \dfrac{2}{5}$

一般に，原点 O と点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，n 回目で初めて $y = k$ に達する折れ線グラフの本数は

$${}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = {}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n}\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$$

これは，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの本数の $\dfrac{k}{n}$ 倍．

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{k}{n}$ となる． ■

4 (1) 領域 D にある 2 点 P，Q の座標を，それぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると

$$|x_1| + |y_1| \leqq 1, \quad |x_2| + |y_2| \leqq 1$$

したがって

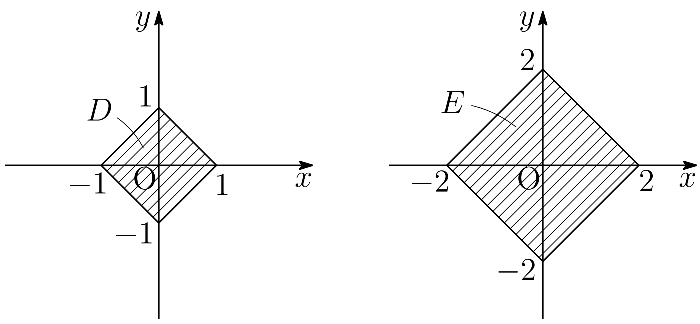
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$$

$\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと

$$|x| + |y| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leqq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \leqq 2$$

したがって，領域 E の表す不等式は　$|x| + |y| \leqq 2$

よって，D，E の表す領域を図示すると



(2) 領域 F にある 2 点 S，T の座標を，それぞれ $(x_3,\ y_3)$，$(x_4,\ y_4)$ とすると

$$|x_3 - a| + |y_3 - b| \leqq 1, \quad |x_4 - a| + |y_4 - b| \leqq 1$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}} = (x_3,\ y_3) - (x_4,\ y_4) = (x_3 - x_4,\ y_3 - y_4)$$

$\mathrm{U}(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= |x_3 - x_4| + |y_3 - y_4| \\ &= |(x_3 - a) - (x_4 - a)| + |(y_3 - b) - (y_4 - b)| \\ &\leqq |x_3 - a| + |y_3 - b| + |x_4 - a| + |y_4 - b| \leqq 2 \end{aligned}$$

よって，$G : |x| + |y| \leqq 2$ の表す領域は E と一致する．　■

3.6 2020 年 (100 分)

1 $a > 0$，$b > 0$ とする．座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 - 3ax^2 + b$$

が，以下の 2 条件を満たすとする．

条件 1：C は x 軸に接する．
条件 2：x 軸と C で囲まれた領域 (境界は含まない) に，x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある．

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ．

2 座標平面上に 8 本の直線

$$x = a \quad (a = 1, 2, 3, 4), \qquad y = b \quad (b = 1, 2, 3, 4)$$

がある．以下，16 個の点

$$(a,\ b) \quad (a = 1, 2, 3, 4, \quad b = 1, 2, 3, 4)$$

から異なる 5 個の点を選ぶことを考える．

(1) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか．

上の 8 本の直線のうち，選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある．

(2) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか．

上の 8 本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む．

$\boxed{\mathbf{3}}$ O を原点とする座標平面において，放物線

$$y = x^2 - 2x + 4$$

のうち $x \geqq 0$ を満たす部分を C とする．

(1) 点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ．

(2) 実数 a に対して，直線

$$l : y = ax$$

を考える．次の条件を満たす a の範囲を求めよ．

C 上の点 A と l 上の点 B で，3 点 O，A，B が正三角形の 3 頂点となるものがある．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n，k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする．n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる．k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく．例えば，

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である．

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ．

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える．$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ．

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n，k で表せ．

解答例

$\boxed{1}$ $f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 - 6ax$

$C : y = f(x)$ の x 軸との接点の x 座標を t とすると，$f(t) = 0$，$f'(t) = 0$ より

$$(*)\begin{cases} t^3 - 3at^2 + b = 0 \\ 3t^2 - 6at = 0 \end{cases}$$

$(*)$ の第2式から　$3t(t - 2a) = 0$　ゆえに　$t = 0,\ 2a$

$t = 0$ を $(*)$ の第1式に代入すると，$b = 0$ となり，条件 $b > 0$ に反し，不適.

$t = 2a$ であるから，これを $(*)$ の第1式に代入すると

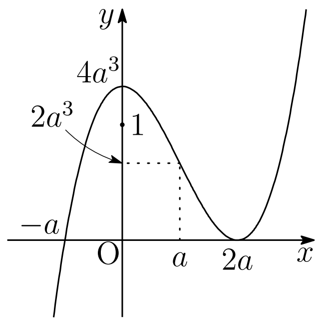
$$(2a)^3 - 3a\cdot(2a)^2 + b = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = 4a^3}$$

$$f(x) = (x + a)(x - 2a)^2$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$	0	$\nearrow$

x 軸と C で囲まれる区間は

$$-a \leqq x \leqq 2a$$



y 軸上の格子点 $(0,\ 1)$ に注目し，これが条件2の格子点でないと仮定すると，この区間において

$$0 \leqq f(x) \leqq 1$$

となり，条件2を満たす格子点は存在しない.

ゆえに，条件2を満たす格子点は $(0,\ 1)$ である．したがって

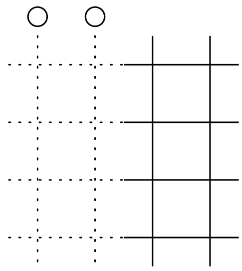
$$1 < 4a^3 \leqq 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt[3]{4}} < a \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$$

■

$\boxed{2}$ 問題の直線をここでは簡単に行・列と呼び，交点を格子点と呼ぶことにする．

(1) (i) 選んだ点を 1 個も含まない直線 2 本 (○印) が (縦と横に) 平行なとき，この直線上にない 8 個の格子点から 5 個の格子点を次のように選ぶ．

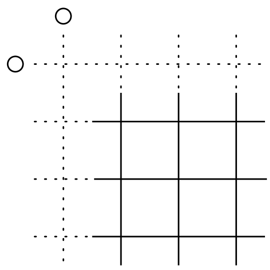
平行な 2 本の直線 (${}_4C_2 \cdot 2$ 通り) に垂直な 4 本の直線に，1 本には 2 個の点を置き (${}_4C_1$ 通り)，残り 3 本の直線には 1 個ずつ点を置く (2^3 通り) 並べ方は



$$ {}_4C_2 \cdot 2 \times {}_4C_1 \times 2^3 = 384 \text{ (通り)} $$

(ii) 選んだ点を 1 個も含まない直線 2 本 (○印) が垂直なとき，この直線上にない 9 個の格子点から 5 個の格子点を次のように選ぶ．

垂直な 2 本の直線 (4^2 通り) 上にない 9 個の格子点から 5 個を選ぶとき，5 個の格子点が特定の 2 本の直線上にある場合を除くから，その総数は



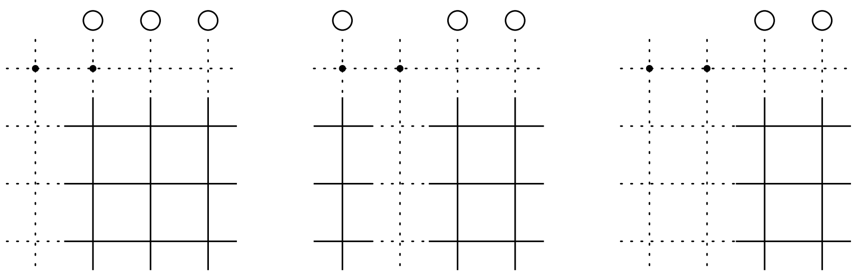
$$ 4^2 \times ({}_9C_5 - 6 \times {}_6C_5) = 1440 \text{(通り)} $$

(i)，(ii) より，求める場合の数は　$384 + 1440 = \mathbf{1824}$ (通り)

(2) 4 行のうち 1 行は 2 個の格子点があり (${}_4C_1 \cdot {}_4C_2$ 通り)，残りの 3 行には 1 個の格子点がある．2 個の格子点がある直線に対して，残り 3 個の格子点を下の図の 3 列 (○印) または 2 列 (○印) に格子点を並べる場合である．

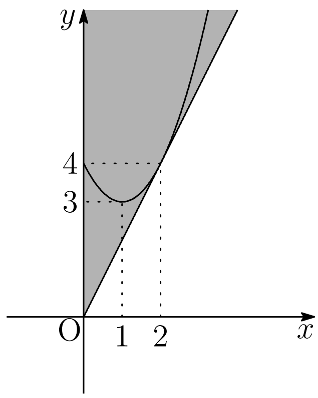
残り 3 個の格子点が 3 列に並ぶ場合の数は　$3! = 6$ (通り)

残り 3 個の格子点が 2 列に並ぶ場合の数は　$2^3 - 2 = 6$ (通り)



よって求める総数は　${}_4C_1 \cdot {}_4C_2 \times (6 + 6 + 6) = \mathbf{432}$ (通り)　■

3 (1) $y=x^2-2x+4$ に接する直線を $y=kx$ とおいて，2 式から y を消去すると



$$x^2-2x+4=kx$$

ゆえに　$x^2-(k+2)x+4=0$

この方程式の係数について

$$(k+2)^2-4{\cdot}1{\cdot}4=0$$

したがって　$(k+6)(k-2)=0$　$k>0$ に注意して　$k=2$

よって　$\boldsymbol{x \geqq 0,\ y \geqq 2x}$　図の灰色の部分で境界を含む.

(2) (1) の結果から，$\tan\theta=2$ とおくと

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) \leqq a \leqq \tan\frac{\pi}{6},\quad \tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \leqq a \leqq \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

ここで

$$\tan\left(\theta\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\theta\pm\tan\frac{\pi}{3}}{1\mp\tan\theta\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{1\mp2\sqrt{3}}=\frac{(2\pm\sqrt{3})(1\pm2\sqrt{3})}{(1\mp2\sqrt{3})(1\pm2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{8\pm5\sqrt{3}}{-11}=\frac{-8\mp5\sqrt{3}}{11}\quad(\text{複号同順})$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{-8+5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}},\quad \dfrac{-8-5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) 等式 $(x_0+x_1+\cdots+x_{n-1})^2 = \sum_{k=0}^{n-1} {x_k}^2 + 2\sum_{0\leqq i<j\leqq n-1} x_i x_j$

において，$x_m = 2^m$ とすると $(m=0,1,\ldots,n-1)$

$$(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(2^k)^2 + 2\sum_{0\leqq i<j\leqq n-1} 2^i{\cdot}2^j$$
$$\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2 = \frac{4^n-1}{4-1} + 2a_{n,2}$$
$$4^n - 2{\cdot}2^n + 1 = \frac{1}{3}{\cdot}4^n - \frac{1}{3} + 2a_{n,2}$$

ゆえに　$a_{n,2} = \frac{1}{3}{\cdot}4^n - 2^n + \frac{2}{3}$　　よって　$\boldsymbol{a_{n,2} = \frac{1}{3}(2^n-1)(2^n-2)}$

(2) $f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$ の定義により，次式が成立する．

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}x^k = \prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}x) \quad \cdots (*)$$

したがって

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \prod_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}x) = (1+2^n x)\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}x) \\
&= (1+2^n x)f_n(x), \\
f_{n+1}(x) &= \prod_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}x) = (1+x)\prod_{k=2}^{n+1}(1+2^{k-1}x) \\
&= (1+x)\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}{\cdot}2x) = (1+x)f_n(2x)
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1 + 2^n x}$，　$\boldsymbol{\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = 1 + x}$

(3) (2) で示した

$$(**)\begin{cases} f_{n+1}(x)=(1+2^nx)f_n(x) \\ f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x) \end{cases}$$

の第1式から $f_{n+1}(2x)=(1+2^{n+1}x)f_n(2x)$

これと $(**)$ の第2式の辺々の差をとると

$$f_{n+1}(2x)-f_{n+1}(x)=(2^{n+1}-1)xf_n(2x) \tag{A}$$

$(*)$ より

$$\begin{aligned} f_{n+1}(2x)-f_{n+1}(x) &= 1+\sum_{k=1}^{n+1}a_{n+1,k}(2x)^k-\left\{1+\sum_{k=1}^{n+1}a_{n+1,k}x^k\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(2^k-1)a_{n+1,k}x^k \\ &= a_{n+1,1}x+\sum_{k=2}^{n+1}(2^k-1)a_{n+1,k}x^k \\ &= (2^{n+1}-1)x+\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}x^{k+1} \qquad \text{(B)} \\ (2^{n+1}-1)xf_n(2x) &= (2^{n+1}-1)x\left\{1+\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}(2x)^k\right\} \\ &= (2^{n+1}-1)x+(2^{n+1}-1)\sum_{k=1}^{n}2^ka_{n,k}x^{k+1} \qquad \text{(C)} \end{aligned}$$

(B), (C) を (A) に代入して，整理すると

$$\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}x^{k+1}=(2^{n+1}-1)\sum_{k=1}^{n}2^ka_{n,k}x^{k+1}$$

上式の同じ次数の項の係数は等しいから

$$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=(2^{n+1}-1)2^ka_{n,k}$$

よって $$\boldsymbol{\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{(2^{n+1}-1)2^k}{2^{k+1}-1}}$$ ■

第 4 章　一橋大学

出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	一橋大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量	2									
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式							3			
	図形と方程式					2		4		2·4	
	三角関数				3·4						2
	指数関数と対数関数							1			
	微分法と積分法	3	2·3	3	2		4		2·5	3	4
A	場合の数と確率				5	3	3		3	5	5
	整数の性質	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
	図形の性質										
B	平面上のベクトル			2			5*				3
	空間のベクトル	4	4	4		4		5	4		
	数列	5		5		5*	2				
	確率分布と統計		5			6*	6*				

数字は問題番号 (5*，6*の 2 題から 1 題選択)

4.1　2015 年 (120 分)

- $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から 1 題選択．

$\boxed{1}$ n を 2 以上の整数とする．n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す．たとえば

$$E(2)=1,\quad E(3)=2,\quad E(4)=2,\quad \cdots,\quad E(10)=4,\quad \cdots$$

である．

(1) $E(1024)$ を求めよ．

(2) $E(2015)$ を求めよ．

(3) m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする．$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{2}$ 座標平面上の原点を O とする．点 A$(a,\ 0)$，点 B$(0,\ b)$ および点 C が

$$\mathrm{OC}=1,\quad \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$$

を満たしながら動く．

(1) $s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする．s と t の関係を表す等式を求めよ．

(2) △ABC の面積のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{3}$ n を 4 以上の整数とする．正 n 角形の 2 つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を l とする．さらに，残りの $n-2$ 個の頂点から 2 つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を m とする．直線 l と m が平行になる確率を求めよ．

$\boxed{4}$ xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く．

(1) 線分 PQ の長さの最小値と，そのときの点 P，Q の座標を求めよ．

(2) 線分 PQ の長さの最大値と，そのときの点 P，Q の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_k = k + \cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ で定める．n を正の整数とする．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} a_k$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ a，b，c は異なる 3 つの正の整数とする．次のデータは 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 10 人の得点をまとめたものである．

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
科目 X の得点	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
科目 Y の得点	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a

科目 X の得点の平均値と科目 Y の得点の平均値とは等しいとする．

(1) 科目 X の得点の分散を ${s_{\mathrm{X}}}^2$，科目 Y の得点の分散を ${s_{\mathrm{Y}}}^2$ とする．$\dfrac{{s_{\mathrm{X}}}^2}{{s_{\mathrm{Y}}}^2}$ を求めよ．

(2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数を，四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．

(3) 科目 X の得点の中央値が 65，科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるとき，a，b，c の組を求めよ，

解答例

$\boxed{1}$ (1) $1024=2^{10}$ であるから $E(1024)=1024\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{512}$

(2) $2015=5\times13\times31$ であるから

$$\begin{aligned}E(2015)&=2015-\left(\frac{2015}{5}+\frac{2015}{13}+\frac{2015}{31}\right.\\&\qquad\left.-\frac{2015}{5\cdot13}-\frac{2015}{13\cdot31}-\frac{2015}{31\cdot5}+\frac{2015}{5\cdot13\cdot31}\right)\\&=2015\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\left(1-\frac{1}{31}\right)\\&=4\times12\times30=\mathbf{1440}\end{aligned}$$

(3) $n=p^mq^m$ であるから

$$E(n)=n-\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}-\frac{n}{p\cdot q}\right)=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

したがって $\dfrac{E(n)}{n}=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$

p，q は異なる素数であるから，一般性を失うことなく $p<q$ とすると

$$p\geqq2,\quad q\geqq3$$

であるから

$$1-\frac{1}{p}\geqq\frac{1}{2},\quad 1-\frac{1}{q}\geqq\frac{2}{3}$$

よって $\dfrac{E(n)}{n}=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\left(1-\dfrac{1}{q}\right)\geqq\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

補足 p_1，$p_2,\cdots,p_l$ を素数，k_1，$k_2,\cdots,k_l$ を正の整数とすると

$$n={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$E(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

本題の $E(n)$ はオイラー (Euler) の $\varphi(n)$ 関数である [1]． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf $\boxed{1}$ を参照．

2 (1) $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$．点 C の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{OC}^2 = 1, \quad \mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2$$

であるから

$$x^2 + y^2 = 1, \quad a^2 + b^2 = x^2 + (y-b)^2 = (x-a)^2 + y^2$$

整理すると　$2by = 1 - a^2$，$2ax = 1 - b^2$

ゆえに　$2aby = a(1-a^2)$，$2abx = b(1-b^2)$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}\{a(1-a^2)\}^2 + \{b(1-b^2)\}^2 &= (2aby)^2 + (2abx)^2 \\ &= 4a^2b^2(x^2+y^2) = 4a^2b^2\end{aligned}$$

整理すると　$a^6 + b^6 - 2(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + a^2 + b^2 = 0$

したがって　$(a^2+b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2+b^2) - 2(a^2+b^2)^2 + (a^2+b^2) = 0$

$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 \neq 0$ であるから

$$(a^2+b^2)^2 - 3(ab)^2 - 2(a^2+b^2) + 1 = 0$$

$s = a^2 + b^2$，$t = ab$ であるから

$$s^2 - 3t^2 - 2s + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{(s-1)^2 = 3t^2}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}^2 \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s$

ここで　$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = s + 2t \geqq 0$

　　　　$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = s - 2t \geqq 0$

したがって　$-\dfrac{s}{2} \leqq t \leqq \dfrac{s}{2}$　ゆえに　$t^2 \leqq \dfrac{s^2}{4}$

これを (1) の結果に代入すると

$$(s-1)^2 \leqq \frac{3}{4}s^2 \quad \text{ゆえに} \quad s^2 - 8s + 4 \leqq 0$$

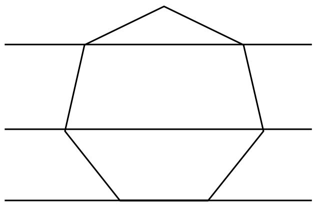
これを解いて　$4 - 2\sqrt{3} \leqq s \leqq 4 + 2\sqrt{3}$

よって　$\boldsymbol{\sqrt{3} - \dfrac{3}{2} \leqq \triangle\mathrm{ABC} \leqq \sqrt{3} + \dfrac{3}{2}}$　■

3 直線 l および m の選び方の総数は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2 \times {}_{n-2}\mathrm{C}_2}{2!} = \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$
$$= \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)\quad (\text{通り})$$

(i) n が奇数のとき，直線 l を含めた平行な直線群には正 n 角形の辺が1本だけ存在し，この直線群の本数は $\dfrac{n-1}{2}$ であるから，直線 l と m が平行になる場合の総数は

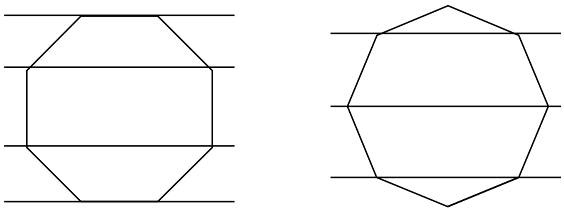


$$n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2 = n \times \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}$$
$$= \frac{1}{8}n(n-1)(n-3)$$

このとき，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)} = \boldsymbol{\frac{1}{n-2}}$$

(ii) n が偶数のとき，直線 l を含めた平行な直線群には正 n 角形の辺が2本存在する場合と辺が1本も存在しない場合がある．



それぞれの直線群の本数は $\dfrac{n}{2}$，$\dfrac{n-2}{2}$ であるから，直線 l と m が平行になる場合の総数は

$$\frac{n}{2!} \times {}_{\frac{n}{2}}\mathrm{C}_2 + \frac{n}{2!} \times {}_{\frac{n-2}{2}}\mathrm{C}_2 = \frac{n}{2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n-2}{2} + \frac{n}{2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}$$
$$= \frac{1}{8}n(n-2)^2$$

このとき，求める確率は

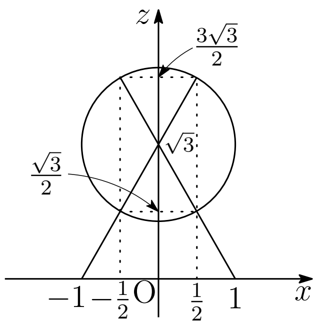
$$\frac{\frac{1}{8}n(n-2)^2}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)} = \boldsymbol{\frac{n-2}{(n-1)(n-3)}}$$

■

4 (1) 線分PQの長さが最小となるとき，P，Qは zx 平面上にある．右の図から

$$\mathbf{P}(\pm\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0}),\quad \mathbf{Q}\left(\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0},\ \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)$$

のとき (複号同順)，PQは最小値 **1** をとる．



(2) 線分PQの長さが最大となるとき，P，Qは zx 平面上にある．上の図から

$$\mathbf{P}(\pm\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0}),\quad \mathbf{Q}\left(\mp\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0},\ \frac{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)$$

のとき (複号同順)，PQは最大値 **3** をとる． ■

5 (1) $a_k = k + \cos\dfrac{k\pi}{6}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n} a_k &= \sum_{k=1}^{12n} k + \sum_{k=1}^{12n} \cos\frac{k\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 12n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12} \cos\frac{12j+k}{6}\pi \\ &= 6n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12} \cos\frac{k}{6}\pi \\ &= 6n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1} 0 = \boldsymbol{6n(12n+1)}\end{aligned}$$

(2) ${a_k}^2 = k^2 + 2k\cos\dfrac{k\pi}{6} + \cos^2\dfrac{k\pi}{6} = k^2 + \dfrac{1}{2} + 2k\cos\dfrac{k\pi}{6} + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{k\pi}{3}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n}\left(k^2 + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{6}\cdot 12n(12n+1)(2\cdot 12n+1) + \frac{1}{2}\cdot 12n \\ &= 2n(12n+1)(24n+1) + 6n \\ &= 8n(72n^2+9n+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n} k\cos\frac{k\pi}{6} &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12}(12j+k)\cos\frac{12j+k}{6}\pi \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 12j\sum_{k=1}^{12}\cos\frac{k\pi}{6} + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12} k\cos\frac{k\pi}{6} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 12j \times 0 + \sum_{j=0}^{n-1} 6 = 6n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n} \cos\frac{k\pi}{3} &= \sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{k=1}^{6}\cos\frac{6j+k}{3}\pi \\ &= \sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{k=1}^{6}\cos\frac{k}{3}\pi = \sum_{j=0}^{2n-1}\times 0 = 0\end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2 &= 8n(72n^2+9n+1) + 2\times 6n + 0 \\ &= \boldsymbol{4n(144n^2+18n+5)}\end{aligned}$$

■

6 (1) X と Y の平均をそれぞれ $\overline{X}$，$\overline{Y}$ とすると

$$\overline{X}=\frac{1}{10}(3a+3b+4c),\quad \overline{Y}=\frac{1}{10}(5a+5b)=\frac{1}{2}(a+b)$$

$\overline{X}=\overline{Y}$ であるから

$$3a+3b+4c=5a+5b \quad \text{すなわち} \quad \overline{X}=\overline{Y}=c=\frac{a+b}{2} \quad \cdots①$$

したがって

$$\begin{aligned}{s_\mathrm{X}}^2&=\frac{1}{10}(3a^2+3b^2+4c^2)-c^2=\frac{3}{10}(a^2+b^2-2c^2)\\&=\frac{3}{10}\left\{a^2+b^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}=\frac{3}{20}(a-b)^2,\\{s_\mathrm{Y}}^2&=\frac{1}{10}(5a^2+5b^2)-c^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2c^2)\\&=\frac{1}{2}\left\{a^2+b^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}=\frac{1}{4}(a-b)^2 \quad \cdots②\end{aligned}$$

よって

$$\frac{{s_\mathrm{X}}^2}{{s_\mathrm{Y}}^2}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

(2) 科目 X と Y の共分散を s_XY とすると

$$\begin{aligned}s_\mathrm{XY}&=\frac{1}{10}(2a^2+2b^2+2ab+2bc+2ca)-\overline{X}\cdot\overline{Y}\\&=\frac{1}{10}\{2a^2+2b^2+2ab+2c(a+b)\}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{10}\{2a^2+2b^2+2ab+(a+b)^2\}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{20}(a-b)^2\end{aligned}$$

(1) の結果から　${s_\mathrm{X}}^2{s_\mathrm{Y}}^2=\dfrac{3}{80}(a-b)^4$　ゆえに　$s_\mathrm{X}s_\mathrm{Y}=\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}(a-b)^2$

したがって．相関係数は　$\dfrac{s_\mathrm{XY}}{s_\mathrm{X}s_\mathrm{Y}}=\dfrac{\frac{1}{20}(a-b)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}(a-b)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

$3<\sqrt{15}<4$ より，$0.25=\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{\sqrt{15}}<\dfrac{1}{3}<0.34$ であるから

よって，求める相関係数は　**0.3**

(3) $a < c$，$b < c$ と仮定すると $\dfrac{a+b}{2} < c$ となり，① に反する．

また，$a > c$，$b > c$ と仮定すると $\dfrac{a+b}{2} > c$ となり，① に反する．

よって，c は科目 X の最大値でもなく，最小値でもない．a 点が 3 人，b 点が 3 人，c 点が 4 人であるから，科目 X の中央値は c である．

したがって　　$c = 65$　① より　$a + b = 130$　$\cdots$③

科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるから，② より

$$\frac{1}{2}|a-b| = 11 \quad \text{ゆえに} \quad |a-b| = 22 \quad \cdots ④$$

③，④ を解いて　$(a,\ b) = (54,\ 76),\ (76,\ 54)$

よって　　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (54,\ 76,\ 65),\ (76,\ 54,\ 65)}$　■

4.2　2016 年 (120 分)

- $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から 1 題選択.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $6{\cdot}3^{3x}+1=7{\cdot}5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ θ を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_2=\cos\theta,\quad a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．すべての n について $a_n=\cos(n-1)\theta$ が成り立つとき，$\cos\theta$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 硬貨が 2 枚ある．最初は 2 枚とも表の状態で置かれている．次の操作を n 回行ったあと，硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ．

［操作］2 枚とも表，または 2 枚とも裏のときには，2 枚の硬貨両方を投げる．
表と裏が 1 枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする．区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする．M の最小値とそのときの a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は零ベクトルではなく，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度は 60° である．このとき

$$r=\frac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}$$

のとりうる値の範囲を求めよ．

6 x は 0 以上の整数である．次の表は 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 5 人の得点をまとめたものである．

	①	②	③	④	⑤
科目 X の得点	x	6	4	7	4
科目 Y の得点	9	7	5	10	9

(1) $2n$ 個の実数 $a_1,\ a_2,\ ,\cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ について，

$a=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k,\ b=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab$$

が成り立つことを示せ．

(2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ．

(3) x の値を 2 増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった．このとき，r_{XY} の値を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．

解答例

1　$6{\cdot}3^{3x}+1=7{\cdot}5^{2x} \quad \cdots(*)$

$(*)$ において

x	0	1	2
$6{\cdot}3^{3x}+1$	7	163	4375
$7{\cdot}5^{2x}$	7	175	4375

$x \geqq 3$ のとき

$$\frac{3^{3x}}{5^{2x}}=\left(\frac{27}{25}\right)^x \geqq \left(1+\frac{2}{25}\right)^3>1+3{\cdot}\frac{2}{25}=1+\frac{6}{25}>1+\frac{6}{36}=\frac{7}{6}$$

したがって　$x \geqq 3$ のとき　$6{\cdot}3^{3x}>7{\cdot}5^{2x}$　すなわち　$6{\cdot}3^{3x}+1>7{\cdot}5^{2x}$

$x \geqq 3$ において，$(*)$ を満たす整数 x は存在しない．

よって，$(*)$ を満たす 0 以上の整数 x は　**0，2**　■

2　$a_1=1$，$a_2=\cos\theta$，$a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$ が

$$a_n=\cos(n-1) \qquad \cdots(*)$$

を満たすから

$n=1$ のとき　$\cos 2\theta=\dfrac{3}{2}\cos\theta-1 \quad \cdots$①

$n=2$ のとき　$\cos 3\theta=\dfrac{3}{2}\cos 2\theta-\cos\theta \quad \cdots$②

① より　$2\cos^2\theta-1=\dfrac{3}{2}\cos\theta-1$　ゆえに　$\cos\theta\left(\cos\theta-\dfrac{3}{4}\right)=0$

② より　$2\cos 2\theta\cos\theta=\dfrac{3}{2}\cos 2\theta$　ゆえに　$(2\cos^2\theta-1)\left(\cos\theta-\dfrac{3}{4}\right)=0$

上の 2 式を同時に満たすとき　$\cos\theta=\dfrac{3}{4} \quad \cdots$③

$n \leqq 2$ のとき，$(*)$ は定義より成立する．

$n \leqq k+1$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，③ より

$$a_{k+2}=\frac{3}{2}a_{k+1}-a_k=2\cos\theta\cos k\theta-\cos(k-1)\theta$$

$\cos(k+1)\theta+\cos(k-1)\theta=2\cos\theta\cos k\theta$ であるから　$a_{k+2}=\cos(k+1)\theta$

ゆえに，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．よって　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{3}{4}}$

補足　漸化式 $a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_n$ の特性方程式

$$x^2=\frac{3}{2}x-1 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$$

$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{4}$，$\beta=\dfrac{3-\sqrt{7}i}{4}$ とおくと，$a_0=1$，$a_1=\dfrac{3}{4}$ より

$$a_n=\frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{2}$$

$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ とおくと

$$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta,\quad \beta=\cos\theta-i\sin\theta$$

したがって

$$a_n=\frac{1}{2}\left\{(\cos\theta+i\sin\theta)^{n-1}+(\cos\theta-i\sin\theta)^{n-1}\right\}=\cos(n-1)\theta$$

■

3　硬貨を n 回投げたあと，表の硬貨の枚数が 0，1，2 である確率をそれぞ p_n，q_n，r_n とすると

$$p_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\quad q=1={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},\quad r_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

操作により，次の確率漸化式が成り立つ．

$$(*)\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{4}r_n \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{2}r_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{1}{4}r_n \end{cases}\qquad (n\geqq 1)$$

$(*)$ により　$p_2=\dfrac{3}{8}$，$q_2=\dfrac{1}{2}$，$r_2=\dfrac{1}{8}$　さらに　$p_3=\dfrac{3}{8}$，$q_3=\dfrac{1}{2}$，$r_3=\dfrac{1}{8}$

したがって　$n\geqq 2$ のとき　$p_n=\dfrac{3}{8}$，$q_n=\dfrac{1}{2}$，$r_n=\dfrac{1}{8}$

よって，求める確率は　$p_n=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{1}{4}} & \boldsymbol{(n=1)} \\ \boldsymbol{\dfrac{3}{8}} & \boldsymbol{(n\geqq 2)}\end{cases}$

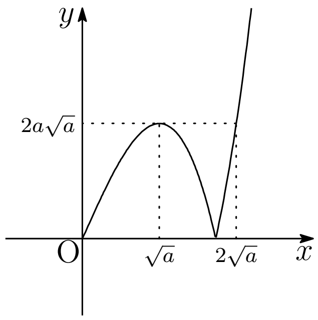
■

4 $f(x)=x^3-3ax$ より

$$f(-x)=-(x^3-3ax)=-f(x)\quad ゆえに\quad |f(-x)|=|f(x)|$$

したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を求めればよい．
$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$ であるから，$a \leqq 0$ のとき $f(x)$ は単調増加．
$a<0$ のとき，$f(x)$ の増減および $y=|f(x)|$ のグラフは

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2a\sqrt{a}$	$\nearrow$



(i) $a \leqq 0$ のとき　$M=|f(1)|=|1-3a|=-3a+1$

(ii) $0<2\sqrt{a} \leqq 1$，すなわち，$0<a \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき

$$M=|f(1)|=|1-3a|=-3a+1$$

(iii) $\sqrt{a} \leqq 1 < 2\sqrt{a}$，すなわち，$\dfrac{1}{4}<a \leqq 1$ のとき

$$M=|f(\sqrt{a})|=2a\sqrt{a}$$

(iv) $1<\sqrt{a}$，すなわち，$1<a$ のとき

$$M=|f(1)|=|1-3a|=3a-1$$

(i)〜(iv) より　$M=\begin{cases} -3a+1 & \left(a \leqq \frac{1}{4}\right) \\ 2a\sqrt{a} & \left(\frac{1}{4}<a \leqq 1\right) \\ 3a-1 & (1<a) \end{cases}$

M は a の関数で，$a \leqq \dfrac{1}{4}$ で単調減少，$\dfrac{1}{4} \leqq a$ で単調増加である．

よって，M は $a=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる．■

5 $r=\dfrac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}$ および $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$ より

$$r^2=\frac{|\vec{a}+2\vec{b}|^2}{|2\vec{a}+\vec{b}|^2}=\frac{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\frac{|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2}$$

$x=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ とおくと $(x>0)$　　$r^2=\dfrac{1+2x+4x^2}{4+2x+x^2}$

したがって　　$(r^2-4)x^2+2(r^2-1)x+4r^2-1=0$　　$\cdots(*)$

方程式 $(*)$ は，$r^2-4=0$，すなわち，$r=2$ のとき　$6x+15=0$

これは正の解をもたないので不適．

$r\neq 2$ のとき，$(*)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{2(r^2-1)}{r^2-4},\quad \alpha\beta=\frac{4r^2-1}{r^2-4}$$

(i) $r=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta=0$ より，$(*)$ は正の解をもたない．

(ii) $0<r<\dfrac{1}{2}$，$2<r$ のとき　$\alpha+\beta<0$，　$\alpha\beta>0$ より，
$(*)$ は正の解をもたない．

(iii) $\dfrac{1}{2}<r<2$ のとき　$\alpha\beta<0$ より，$(*)$ は正の解をもつ．

(i)～(iii) から，求める r の値の範囲は　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}<r<2}$

補足 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β とすると，$\alpha\beta<0$ のとき

$$b^2-4ac=b^2-4a^2\cdot\frac{c}{a}=b^2-4a^2\alpha\beta>0$$

別解 $f(x)=r^2=\dfrac{1+2x+4x^2}{4+2x+x^2}$ とおくと $(x>0)$

$$f'(x)=\frac{(1+2x+4x^2)'(4+2x+x^2)-(1+2x+4x^2)(4+2x+x^2)'}{(4+2x+x^2)^2}$$

$$=\frac{6(1+5x+x^2)}{(4+2x+x^2)^2}>0$$

$f(x)$ は単調増加．$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\frac{1}{4}$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=4$

したがって　$\dfrac{1}{4}<r^2<4$　よって　$\dfrac{1}{2}<r<2$　■

6　(1) $na = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$nb = \sum_{k=1}^{n} b_k$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)(b_k - b) &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - a\sum_{k=1}^{n} b_k - b\sum_{k=1}^{n} a_k + ab\sum_{k=1}^{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - a\cdot nb - b\cdot na + nab \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - nab\end{aligned}$$

(2) 科目 X と科目 Y の得点の平均をそれぞれ a，b とすると

$$a = \frac{1}{5}(x+6+4+7+4) = \frac{x+21}{5}, \quad b = \frac{1}{5}(9+7+5+10+9) = 8$$

科目 X と科目 Y の得点の分散をそれぞれ ${s_\mathrm{X}}^2$，${s_\mathrm{Y}}^2$ とすると

$$\begin{aligned}{s_\mathrm{X}}^2 &= \frac{1}{5}(x^2+6^2+4^2+7^2+4^2) - a^2 = \frac{2}{25}(2x^2-21x+72) \\ {s_\mathrm{Y}}^2 &= \frac{1}{5}(9^2+7^2+5^2+10^2+9^2) - b^2 = \frac{16}{5}\end{aligned}$$

科目 X と科目 Y の得点の共分散を s_XY とすると

$$s_\mathrm{XY} = \frac{1}{5}(x\cdot 9+6\cdot 7+4\cdot 5+7\cdot 10+4\cdot 9) - ab = \frac{x}{5}$$

よって　$r_\mathrm{XY} = \dfrac{s_\mathrm{XY}}{s_\mathrm{X}s_\mathrm{Y}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}x}{4\sqrt{2(2x^2-21x+72)}}}$

(3) r_XY は x の値を 2 増やしても値は同じであるから，(2) の結果から

$$\frac{\sqrt{5}(x+2)}{4\sqrt{2}\sqrt{2(x+2)^2-21(x+2)+72}} = \frac{\sqrt{5}x}{4\sqrt{2}\sqrt{2x^2-21x+72}}$$

ゆえに　$x\sqrt{2x^2-13x+38} = (x+2)\sqrt{2x^2-21x+72}$

両辺を平方して整理すると　$7x^2-34x-48=0$

したがって　$(x-6)(7x+8)=0$　x は 0 以上の整数であるから　$x=6$

ゆえに　$r_\mathrm{XY} = \dfrac{\sqrt{5}\cdot 6}{4\sqrt{2(2\cdot 6^2-21\cdot 6+72)}} = \dfrac{\sqrt{5}}{4} = \dfrac{2.236\cdots}{4} = 0.559\cdots$

よって　$\boldsymbol{r_\mathrm{XY} = 0.6}$　■

4.3 2017年(120分)

1 実数 a，b は $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たす．

(1) $\log_3 a + \log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) $\log_2 a + \log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ．

2 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 \\ y^2 = zx + 7 \\ z^2 = xy + 7 \end{cases}$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ．

3 $P(0)=1$，$P(x+1)-P(x)=2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ．

4 正の実数 a，b，c は $a+b+c=1$ を満たす．連立方程式

$$|ax+by| \leqq 1, \qquad |cx-by| \leqq 1$$

の表す xy 平面の領域を D とする．D の面積の最小値を求めよ．

5 xy 平面上の直線 $x=y+1$ を k，yz 平面上の直線 $y=z+1$ を l，xz 平面上の直線 $z=x+1$ を m とする．直線 k 上に点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 0)$ をとる．l 上の点 P_2 を $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \perp l$ となるように定め，m 上の点 P_3 を $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 \perp m$ となるように定め，k 上の点 P_4 を $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4 \perp k$ となるように定める．以下，同様の手順で $l,\ m,\ k,\ l,\ m,\ k, \cdots$ 上の点 P_5，P_6，P_7，P_8，P_9，$\mathrm{P}_{10}, \cdots$ を定める．

(1) 点 P_2，P_3 の座標を求めよ．

(2) 線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを n を用いて表せ．

解答例

1 (1) $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たすとき

$$b = 9 - a \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq a \leqq 8$$

このとき　$\log_3 a + \log_3 b = \log_3 ab = \log_3 a(9-a)$

$f(a) = a(9-a)$ $(1 \leqq a \leqq 8)$ とおくと　$f(a) = -\left(a - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \dfrac{81}{4}$

したがって　$8 \leqq f(a) \leqq \dfrac{81}{4}$

よって　最大値 $\log_3 \dfrac{81}{4} = \mathbf{4 - 2\log_3 2}$，最小値 $\log_3 8 = \mathbf{3\log_3 2}$

(2) (1) と同様に　$\log_2 a + \log_4 b = \log_4 a^2 b = \log_4 a^2(9-a)$

$g(a) = a^2(9-a) = -a^3 + 9a^2$ $(1 \leqq a \leqq 8)$ とおくと

$$g'(a) = -3a^2 + 18a = -3a(a-6)$$

a	1	$\cdots$	6	$\cdots$	8
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	8	$\nearrow$	極大 108	$\searrow$	64

したがって　$8 \leqq g(a) \leqq 108$

よって　最大値 $\log_4 108 = \mathbf{1 + 3\log_4 3}$，最小値 $\log_4 8 = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$ ■

2

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 & \cdots ① \\ y^2 = zx + 7 & \cdots ② \\ z^2 = xy + 7 & \cdots ③ \end{cases}$$

① − ② より　$x^2 - y^2 = z(y - x)$　ゆえに　$(x - y)(x + y + z) = 0$

② − ③ より　$y^2 - z^2 = x(z - y)$　ゆえに　$(y - z)(x + y + z) = 0$

上の 2 式の結果において，$x + y + z \neq 0$ とすると　$x - y = 0,\quad y - z = 0$

すなわち　$x = y = z$　これは，①〜③ を満たさない．

したがって　$x + y + z = 0$　$\cdots$④

条件より，$x \leqq y \leqq z$ であるから，$z < 0$ とすると

$x \leqq y \leqq z < 0$　これは④に反するから　$z \geqq 0$

④ から，$x = -(y + z)$ を ① に代入すると

$$(y + z)^2 = yz + 7 \quad ゆえに \quad (2y + z)^2 = 28 - 3z^2$$

第 2 式の左辺が平方数であるから，$z \geqq 0$ に注意して　$z = 1,\ 2,\ 3$

③，④ より，x，y を解とする t に関する 2 次方程式は

$$t^2 - (x + y)t + xy = 0 \quad すなわち \quad t^2 + zt + z^2 - 7 = 0 \quad \cdots (*)$$

(i)　$z = 1$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + t - 6 = 0 \quad ゆえに \quad (t + 3)(t - 2) = 0$$

$x \leqq y$ に注意して　$x = -3,\ y = 2$　これは，$y \leqq z$ に反するので不適．

(ii)　$z = 2$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad ゆえに \quad (t + 3)(t - 1) = 0$$

$x \leqq y$ に注意して　$x = -3,\ y = 1$

(iii)　$z = 3$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \quad ゆえに \quad (t + 2)(t + 1) = 0$$

$x \leqq y$ に注意して　$x = -2,\ y = -1$

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-3,\ 1,\ 2),\ (-2, -1,\ 3)}$　■

3 $P(x+1)-P(x)=2x$ より，n を自然数とすると

$$\sum_{k=0}^{n-1}\{P(k+1)-P(k)\}=2\sum_{k=0}^{n-1}k$$

したがって　$P(n)-P(0)=2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$

$P(0)=1$ であるから　$P(n)=n^2-n+1$

$f(x)=P(x)-(x^2-x+1)\cdots(*)$ とおくと

$$f(1)=0,\ f(2)=0,\ \cdots,\ f(n)=0,\cdots$$

$f(x)$ は整式であるから，因数定理により

$$f(x)=g(x)(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\cdots \qquad (g(x)\text{ は整式})$$

$f(x)$ の次数は有限であるから

$$g(x)=0 \quad \text{すなわち} \quad f(x)=0$$

$(*)$ より　$\boldsymbol{P(x)=x^2-x+1}$ ■

4 $|ax+by| \leqq 1$，$|cx-by| \leqq 1$ より

$$-1 \leqq ax+by \leqq 1, \quad -1 \leqq cx-by \leqq 1$$

4本の直線を

$$l_1 : ax+by=1, \qquad m_1 : cx-by=1,$$
$$l_2 : ax+by=-1, \qquad m_2 : cx-by=-1$$

とすると，$l_1 // l_2$，$m_1 // m_2$．D はこれら4本の直線で囲まれた平行四辺形の内部および周からなる領域である．

l_1 の点 $(x_1,\ y_1)$ から l_2 へ下ろした垂線の長さを d とすると，$ax_1+by_1=1$ より

$$d=\frac{|ax_1+by_1+1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

l_1 と m_1 の交点を P をとすると，P の座標は

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx-by=1 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad \mathrm{P}\left(\frac{2}{a+c},\ \frac{-a+c}{b(a+c)}\right)$$

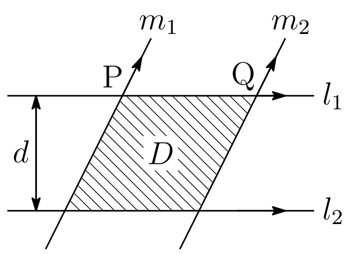
l_1 と m_2 の交点を Q をとすると，Q の座標は

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx-by=-1 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{1}{b}\right)$$

したがって　　$\mathrm{PQ}=\dfrac{2\sqrt{a^2+b^2}}{b(a+c)}$

D の面積を S とすると

$$S=\mathrm{PQ}\cdot d=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{b(a+c)}\cdot\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{4}{b(a+c)}$$



$a+b+c=1$ より，$a+c=1-b$ であるから　$S=\dfrac{4}{b(1-b)}$

$0<b<1$ であるから　$b(1-b)=-b^2+b=-\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4} \leqq \dfrac{1}{4}$

よって　$b=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $S=\dfrac{4}{\frac{1}{4}}=\mathbf{16}$ ■

$\boxed{5}$ (1) 直線 k，l，m を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned} k:\ (x,\ y,\ z) &= (1,\ 0,\ 0)+t(1,\ 1,\ 0) \\ l:\ (x,\ y,\ z) &= (0,\ 1,\ 0)+t(0,\ 1,\ 1) \\ m:\ (x,\ y,\ z) &= (0,\ 0,\ 1)+t(1,\ 0,\ 1) \end{aligned}$$

P_2，P_3 はそれぞれ l，m 上にあるから，a_2，a_3 を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} &= (0,\ 1,\ 0)+a_2(0,\ 1,\ 1)=(0,\ 1+a_2,\ a_2) \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_3} &= (0,\ 0,\ 1)+a_3(1,\ 0,\ 1)=(a_3,\ 0,\ 1+a_3) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=(1,\ 0,\ 0)$ および上の 2 式から

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=(-1,\ 1+a_2,\ a_2),\quad \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}=(a_3, -1-a_2,\ 1-a_2+a_3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\perp l$ より

$$0\cdot(-1)+1\cdot(1+a_2)+1\cdot a_2=0 \quad ゆえに \quad 1+2a_2=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\perp m$ より

$$1\cdot a_3+0\cdot(-1-a_2)+1(1-a_2+a_3)=0 \quad ゆえに \quad 1-a_2+2a_3=0$$

これを解いて　$a_2=-\dfrac{1}{2}$，$a_3=-\dfrac{3}{4}$

よって　$\mathbf{P_2}\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$，$\mathbf{P_3}\left(-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}},\ \mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$

(2) P_n が k 上にあるとき，$\mathrm{P}_n(1+a_n,\ a_n,\ 0)$，$\mathrm{P}_{n+1}(0,\ 1+a_{n+1},\ a_{n+1})$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=(-1-a_n,\ 1-a_n+a_{n+1},\ a_{n+1})\perp l$ であるから

$$(-1-a_n)\cdot 0+(1-a_n+a_{n+1})\cdot 1+a_{n+1}\cdot 1=0 \quad \cdots ①$$

P_n が l 上にあるとき，$\mathrm{P}_n(0,\ 1+a_n,\ a_n)$，$\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ 0,\ 1+a_{n+1})$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=(a_{n+1}, -1-a_n,\ 1-a_n+a_{n+1})\perp m$ であるから

$$a_{n+1}\cdot 1+(-1-a_n)\cdot 0+(1-a_n+a_{n+1})\cdot 1=0 \quad \cdots ②$$

P_n が m 上にあるとき，$\mathrm{P}_n(a_n,\ 0,\ 1+a_n)$，$\mathrm{P}_{n+1}(1+a_{n+1},\ a_{n+1},\ 0)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=(1-a_n+a_{n+1},\ a_{n+1}, -1-a_n)\perp k$ であるから

$$(1-a_n+a_{n+1})\cdot 1+a_{n+1}\cdot 1+(-1-a_n)\cdot 0=0 \quad \cdots ③$$

①〜③ をそれぞれ整理すると，すべて次式となる．

$$2a_{n+1} - a_n + 1 = 0$$

$a_1 = 0$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n - \dfrac{1}{2}$ であるから

$$a_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(a_n + 1) \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1$$

したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}{}^2 &= (-1 - a_n)^2 + (1 - a_n + a_{n+1})^2 + a_{n+1}{}^2 \\
&= \{-1 - (2^{1-n} - 1)\}^2 \\
&\qquad + \{1 - (2^{1-n} - 1) + (2^{-n} - 1)\}^2 + (2^{-n} - 1)^2 \\
&= 4{\cdot}2^{-2n} + (1 - 2^{-n})^2 + (2^{-n} - 1)^2 \\
&= 6{\cdot}2^{-2n} - 4{\cdot}2^{-n} + 2
\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{P}_{\boldsymbol{n}}\mathbf{P}_{\boldsymbol{n+1}} = \sqrt{\mathbf{6{\cdot}2^{-2\boldsymbol{n}} - 4{\cdot}2^{-\boldsymbol{n}} + 2}}$ ■

4.4　2018 年 (120 分)

1 正の整数 n の各位の数の和を $S(n)$ で表す．たとえば

$$S(3)=3,\quad S(10)=1+0=1,\quad S(516)=5+1+6=12$$

である．

(1) $n \geqq 10000$ のとき，不等式 $n > 30S(n)+2018$ を示せ．

(2) $n = 30S(n)+2018$ を満たす n を求めよ．

2 $-1 \leqq t \leqq 1$ とし，曲線 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{2}\right)$ における接線を l とする．半円 $x^2+y^2=1\ (y \leqq 0)$ と l で囲まれた部分の面積を S とする．S のとりうる値の範囲を求めよ．

3 3 個のさいころを投げる．

(1) 出た目の積が 6 となる確率を求めよ．

(2) 出た目の積が k となる確率が $\dfrac{1}{36}$ であるような k をすべて求めよ．

4 p，q を正の実数とする．原点を O とする座標空間内の 3 点 $\mathrm{P}(p,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ q,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 1)$ は $\angle \mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{6}$ を満たす．四面体 OPQR の体積の最大値を求めよ．

5 a を実数とし，$f(x)=x-x^3$，$g(x)=a(x-x^2)$ とする．2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は $0<x<1$ の範囲に共有点を持つ．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $10^k \leqq n < 10^{k+1}$ とすると $(k \geqq 4)$

$$n \geqq 10^k = (9+1)^k > 9^k + {}_k\mathrm{C}_1 \cdot 9^{k-1} > 9^4 + {}_k\mathrm{C}_1 \cdot 9^3 = 6561 + 729k$$
$$> 30(9k+9) + 2018 \geqq 30S(n) + 2018$$

よって　$n \geqq 10000$ のとき　$n > 30S(n) + 2018$

(2) (1) の結果から

$$n = 30S(n) + 2018 \quad \cdots (*)$$

を満たす正の整数 n の必要条件は

$$n < 10000$$

また，$(*)$ から，n の一位の数が 8 であることに注意すると，9 以下の負でない整数 a，b，c を用いて

$$n = 1000a + 100b + 10c + 8$$

とおき，$(*)$ に代入すると

$$1000a + 100b + 10c + 8 = 30(a + b + c + 8) + 2018$$

整理すると　　$7b - 2c = 225 - 97a \quad \cdots ①$

$-18 \leqq 7b - 2c \leqq 63$ であるから

$$-18 \leqq 225 - 97a \leqq 63 \qquad \text{ゆえに} \quad a = 2$$

これを ① に代入して　　$7b - 2c = 31$

b，c の条件に注意してこれを解くと　$(b,\ c) = (5,\ 2),\ (7,\ 9)$

よって，求める n は　　**2528，2798**　■

2 $y = \dfrac{x^2-1}{2}$ より　$y' = x$

曲線 $y = \dfrac{x^2-1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{2}\right)$ における接線 l の方程式は

$$y - \frac{t^2-1}{2} = t\,(x-t) + \frac{t^2-1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad tx - y - \frac{t^2+1}{2} = 0$$

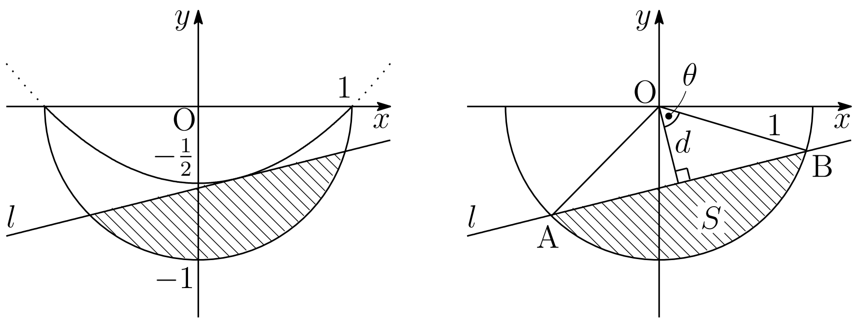
原点 O と直線 l の距離を d とすると

$$d = \frac{\left|-\frac{t^2+1}{2}\right|}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{2} \qquad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

l と半円 $x^2+y^2=1$ $(y \leqq 0)$ との交点を A，B とし，$2\theta = \angle\mathrm{AOB}$ とすると

$$\cos\theta = d = \frac{\sqrt{t^2+1}}{2} \quad \cdots①$$

したがって　$S = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta - \dfrac{1}{2}\cdot 1^2 \sin 2\theta = \theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots②$



S は d が最大のとき最小となり，d が最小のとき最大となるから ①，② より，

$$t = \pm 1 \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき} \quad S \text{ は最小値 } \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

$$t = 0 \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき} \quad S \text{ は最大値 } \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} \leqq S \leqq \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}}$ ■

3 (1) 出た目の積が 6 となる 3 個のサイコロの目の組合せは

$$\{1,\ 2,\ 3\},\quad \{1,\ 1,\ 6\}$$

よって，求める確率は $\dfrac{3!+{}_3\mathrm{C}_1}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{24}}$

(2) 3 個のさいころの出た目を $a,\ b,\ c$ とすると $k=abc$

k となる確率が $\dfrac{1}{36}$ となるのは，次の (A)，(B) の場合である．

(A) k が 3 数 $a,\ a,\ ar^2$ または $ar, ar,\ ar^2$ の積として表される $(r\neq 1)$，すなわち，1, 1, 4 または 2, 2, 4 の積であるから $k=4,\ 16$

(B) k が相異なる 3 数 $a,\ b,\ c$ の積として一意的に表される．

ここで，$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $Y=\{5\}$ とする．

(i) $a,\ b,\ c$ が X の要素であるとき，k は

$$1{\cdot}2{\cdot}3,\quad 1{\cdot}2{\cdot}4,\quad 1{\cdot}2{\cdot}6=1{\cdot}3{\cdot}4,\quad 1{\cdot}3{\cdot}6,$$
$$1{\cdot}4{\cdot}6=2{\cdot}3{\cdot}4,\quad 2{\cdot}3{\cdot}6,\quad 2{\cdot}4{\cdot}6,\quad 3{\cdot}4{\cdot}6$$

これらは，(B) を満たさない．

(ii) $a,\ b,\ c$ の 1 つが Y の要素であるとき，$c=5$ とすると，$a,\ b$ は X の要素である．このとき

$$4=1{\cdot}4=2{\cdot}2,\quad 6=1{\cdot}6=2{\cdot}3,\quad 12=2{\cdot}6=3{\cdot}4$$

であることに注意すると，(B) を満たす $\{a,\ b\}$ の組合せは

$$\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{3,\ 6\},\ \{4,\ 6\}$$

したがって，(B) を満たす k の値は

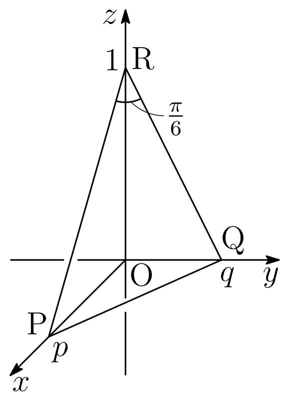
$$k=1{\cdot}2{\cdot}5,\ 1{\cdot}3{\cdot}5,\ 2{\cdot}4{\cdot}5,\ 3{\cdot}5{\cdot}6,\ 4{\cdot}5{\cdot}6$$

(A) および (ii) から

$$\boldsymbol{k=4,\ 10,\ 15,\ 16,\ 40,\ 90,\ 120}$$

■

4 P$(p,\ 0,\ 0)$，Q$(0,\ q,\ 0)$，R$(0,\ 0,\ 1)$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(p,\ 0,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(0,\ q,-1)$$

$\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{6}$，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{RP}}||\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|\cos\dfrac{\pi}{6}$ より

$$1=\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに　$(p^2+1)(q^2+1)=\dfrac{4}{3}$　$\cdots$①

四面体 OPQR の体積を V とすると　$V=\dfrac{1}{6}pq$　$\cdots$②

① より　$p^2q^2+p^2+q^2=\dfrac{1}{3}$　ゆえに　$(p-q)^2=-p^2q^2-2pq+\dfrac{1}{3}$　$\cdots$①$'$

したがって　$-p^2q^2-2pq+\dfrac{1}{3}\geqq 0$　ゆえに　$(pq)^2+2pq-\dfrac{1}{3}\leqq 0$

$p>0,\ q>0$ に注意して　$0<pq\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1$

上式において等号が成立するのは，①$'$ より　$p=q=\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1}$

② より，このとき V は最大値

$$\frac{1}{6}pq=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}-3}{18}}$$

をとる．■

$\boxed{5}$ (1) $f(x) = x(1-x)(1+x)$,

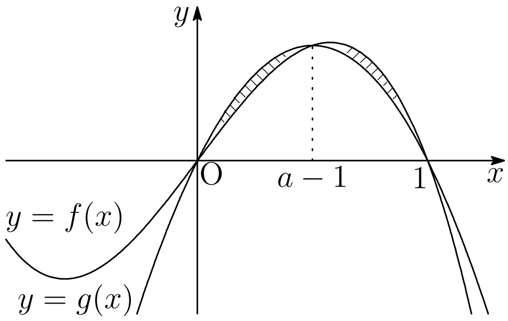
$g(x) = ax(1-x)$ より

$f(x) - g(x) = x(1-x)(x-a+1)$

$f(x) = g(x)$ の解は $x = 0,\ 1,\ a-1$

$0 < x < 1$ に解があるから

$0 < a-1 < 1$ よって $\boldsymbol{1 < a < 2}$



(2) $f(x) - g(x) = x(1-x)(x-a+1)$ より

$0 \leqq x \leqq a-1$ のとき $f(x) \leqq g(x)$, $a-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $f(x) \geqq g(x)$

$$S_1 = \int_0^{a-1} \{g(x) - f(x)\}\,dx, \quad S_2 = \int_{a-1}^{1} \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

とおくと

$$\begin{aligned}
S_2 - S_1 &= \int_{a-1}^{1} \{f(x) - g(x)\}\,dx - \int_0^{a-1} \{g(x) - f(x)\}\,dx \\
&= \int_0^1 \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_0^1 x(1-x)(x-a+1)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2(1-x)\,dx + (1-a)\int_0^1 x(1-x)\,dx \\
&= \frac{1}{12} + (1-a)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}(3-2a)
\end{aligned}$$

$S_2 - S_1 = 0$ であるから $\quad \boldsymbol{a = \dfrac{3}{2}}$

補足 積分公式[2]

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用する. ■

[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照.

4.5　2019 年 (120 分)

1 p を自然数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_2=p^2,\quad a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+13\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ．

2 原点を O とする座標平面上の点 Q は円 $x^2+y^2=1$ 上の $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ の部分を動く．点 Q と点 A(2, 2) に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

を満たす点 P の軌跡を求め，図示せよ．

3 $f(x)=x^3-3x+2$ とする．また，α は 1 より大きい実数とする．曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線と x 軸の交点を Q とする．点 Q を通る C の接線の中で傾きが最小のものを ℓ とする．

(1) ℓ と C の接点の x 座標を α の式で表せ．

(2) $\alpha=2$ とする．ℓ と C で囲まれた部分の面積を求めよ．

4 原点を O とする座標平面上に，点 (2, 0) を中心とする半径 2 の円 C_1 と，点 (1, 0) を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．点 P を中心とする円 C_3 は C_1 に内接し，かつ C_2 に外接する．ただし，P は x 軸上にないものとする．P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を Q とするとき，三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ．

5 左下の図のような縦3列横3列の9個のマスがある．異なる3個のマスを選び，それぞれに1枚ずつコインを置く．マスの選び方は，どれも同様に確からしいものとする．縦と横の各列について，点数を次のように定める．

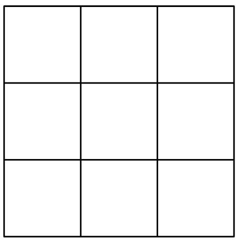
- その列に置かれているコインが1枚以下のとき，0点
- その列に置かれているコインがちょうど2枚のとき，1点
- その列に置かれているコインが3枚のとき，3点

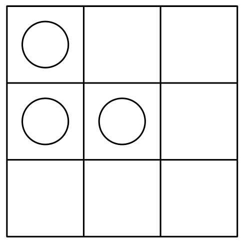
縦と横のすべての列の点数の合計を S とする．たとえば，右下の図のようにコインが置かれている場合，縦の1列目と横の2列目の点数が1点，他の列の点数が0点であるから，$S=2$ となる．

(1) $S=3$ となる確率を求めよ．

(2) $S=1$ となる確率を求めよ．

(3) $S=2$ となる確率を求めよ．





解答例

1 $a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

ゆえに　$a_3 = a_2 - a_1 + 13 = p^2 - 1 + 13 = p^2 + 12$

$a_4 = a_3 - a_2 + 13 = (p^2 + 12) - p^2 + 13 = 25$

$a_5 = a_4 - a_3 + 13 = 25 - (p^2 + 12) + 13 = 26 - p^2$

数列 $\{a_n\}$ が平方数からなると仮定すると，$a_5 = 26 - p^2$ より，p が自然数であるから，条件を満たす p は

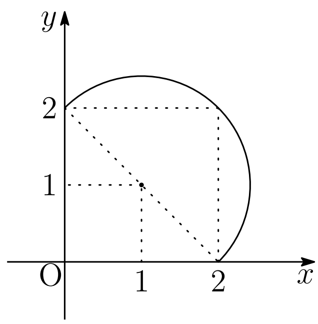
$$p = 1,\ 5$$

このとき，a_3 は平方数ではないので矛盾を生じる．
よって，数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在する．■

2 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より

$$\begin{aligned}(x,\ y) &= (2\cos\theta + 2\sin\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)\\ &= (2\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta)\\ &= (\cos 2\theta + \sin 2\theta + 1,\ \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1)\\ &= \left(\sqrt{2}\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 1,\ \sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 1\right)\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ であるから，点 P の描く軌跡は，次のようになる．



■

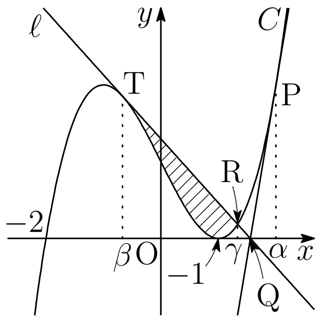
3 (1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ より　$f'(x) = 3x^2 - 3$
C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線は

$$y - (\alpha^3 - 3\alpha + 2) = (3\alpha^2 - 3)(x - \alpha)$$

すなわち　$y = 3(\alpha^2 - 1)x - 2\alpha^3 + 2 \quad \cdots(*)$

これに $y = 0$ を代入して整理すると

$$(\alpha - 1)\{3(\alpha + 1)x - 2(\alpha^2 + \alpha + 1)\} = 0$$



点Qの x 座標は，$\alpha > 1$ に注意して $x = \dfrac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)}$

ℓ と C の接点をTとし，その x 座標を β とすると，ℓ と x 軸の交点の x 座標は，$\beta \neq -1$ に注意して

$$\frac{2(\beta^2+\beta+1)}{3(\beta+1)}$$

これが点Qの x 座標と一致するから

$$\frac{2(\beta^2+\beta+1)}{3(\beta+1)} = \frac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\beta^2}{\beta+1} = \frac{\alpha^2}{\alpha+1}$$

これを整理すると $(\alpha-\beta)(\alpha\beta+\alpha+\beta)=0$

$\alpha \neq \beta$ であるから $\beta = -\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\alpha+1}}$

(2) C 上の点 $\mathrm{T}(\beta,\ f(\beta))$ における接線の方程式は，$(*)$ と同様に

$$y = 3(\beta^2-1)x - 2\beta^3 + 2$$

C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^3 - 3x + 2 = 3(\beta^2-1)x - 2\beta^3 + 2$$

整理すると $(x-\beta)^2(x+2\beta)=0$

T以外の共有点をRとし，その x 座標を γ とすると $\gamma = -2\beta$

ℓ と C で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_\beta^\gamma \{3(\beta^2-1)x - 2\beta^3 + 2 - (x^3-3x+2)\}dx \\ &= -\int_\beta^\gamma (x-\beta)^2(x+2\beta)\,dx \\ &= \int_\beta^\gamma (x-\beta)^2(\gamma-x)\,dx = \frac{1}{12}(\gamma-\beta)^4 \end{aligned}$$

$\alpha = 2$ のとき，$\beta = -\dfrac{2}{3}$，$\gamma = \dfrac{4}{3}$，$\gamma-\beta = 2$ よって $S = \dfrac{1}{12}\cdot 2^4 = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

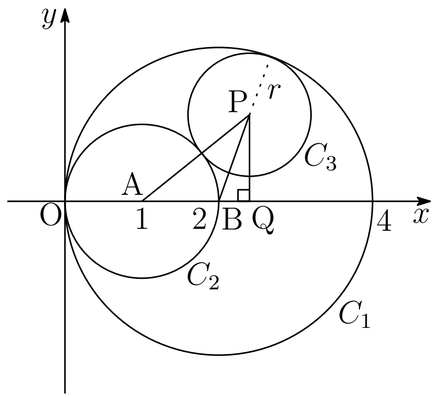
補足 積分公式[3]

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用する． ■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

4 C_1，C_2 の中心をそれぞれ A(1, 0)，B(2, 0) とし，C_3 の半径を r，中心 P の座標を $(x,\ y)$ とすると $\mathrm{AP}=1+r$, $\mathrm{BP}=2-r$ であるから



$$(x-1)^2+y^2=(1+r)^2 \quad \cdots ①$$
$$(x-2)^2+y^2=(2-r)^2 \quad \cdots ②$$

① − ② より　$2x=6r$　ゆえに　$x=3r$
これを ① に代入すると　$y^2=8r(1-r)$
△OPQ の面積を S とすると

$$S^2=\frac{1}{4}x^2y^2=\frac{1}{4}(3r)^2\cdot 8r(1-r)=18r^3(1-r)$$

$0<r<1$ より，4 正数 $r,\ r,\ r,\ 3(1-r)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{r+r+r+3(1-r)}{4} \geqq \sqrt[4]{r\cdot r\cdot r\cdot 3(1-r)} \quad ゆえに \quad r^3(1-r) \leqq \frac{27}{256}$$

上式において，等号が成立する条件は

$$r=3(1-r) \quad すなわち \quad r=\frac{3}{4}$$

したがって　$S^2 \leqq 18\times\frac{27}{256}$　ゆえに　$S \leqq \frac{9\sqrt{6}}{16}$

よって，求める △OPQ の面積の最大値は　$\boldsymbol{\frac{9\sqrt{6}}{16}}$ ■

$\boxed{5}$ (1) 3枚のコインを配置する場合の総数は　${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$ (通り)

$S = 3$ となるのは，3枚のコインが縦1列に並ぶ3通りと横1列に並ぶ3通りの計6通り

よって，求める確率は　$P(S = 3) = \dfrac{6}{84} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{14}}$

(2) 縦1列に丁度2枚のコインが並ぶ場合の数は，1列に並ぶ列の選び方が ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り，その配置法が ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りあり，さらに残り1枚の配置法が2通りであるから

$$ {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times 2 = 18 \ (\text{通り}) $$

同様に，横1列に丁度2枚のコインが並ぶ場合の数は　18 (通り)

よって，求める確率は　$P(S = 1) = \dfrac{18 + 18}{84} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$

(3) まず，$S = 0$ となる場合は，3枚のコインのうちどの2枚も同じ縦の列または横の列にない場合であるから，その確率は

$$ P(S = 0) = \frac{3!}{84} = \frac{1}{14} $$

$P(S = 2) = 1 - P(S = 0) - P(S = 1) - P(S = 3)$ であるから

求める確率は　$1 - \dfrac{1}{14} - \dfrac{3}{7} - \dfrac{1}{14} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$　■

4.6　2020 年 (120 分)

1 以下の問いに答えよ．

(1) 10^{10} を 2020 で割った余りを求めよ．

(2) 100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるもののうち，2020 で割り切れるものの個数を求めよ．

2 a を定数とし，$0 \leqq \theta < \pi$ とする．方程式

$$\tan 2\theta + a \tan\theta = 0$$

を満たす θ の個数を求めよ．

3 半径 1 の円周上に 3 点 A，B，C がある．内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の最大値と最小値を求めよ．

4 $x > 0$ に対し

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x} |t - x|\, dt$$

と定める．$F(x)$ の最小値を求めよ．

5 n を正の整数とする．1 枚の硬貨を投げ，表が出れば 1 点，裏が出れば 2 点を得る．この試行を繰り返し，点の合計が n 以上になったらやめる．点の合計がちょうど n になる確率を p_n で表す．

(1) p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ．

(2) $|p_{n+1} - p_n| < 0.01$ を満たす最小の n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $2020 \times 5 = 10100$ より，$10100 \equiv 0 \pmod{2020}$ であるから

$$10000 \equiv -100 \quad ゆえに \quad 10^4 \equiv -10^2 \pmod{2020}$$

したがって $10^6 \equiv -10^2 \cdot 10^2 \equiv -10^4 \equiv -(-10^2) \equiv 10^2 \pmod{2020}$

$10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$ の両辺に 10^4 を掛けると $10^{10} \equiv 10^6 \pmod{2020}$

ゆえに $10^{10} \equiv 10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$ よって，求める余りは **100**

(2) $10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$ の両辺に順次 10^4 を掛けると，法 2020 について

$$10^{98} \equiv 10^{94} \equiv 10^{90} \equiv \cdots \equiv 10^{10} \equiv 10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$$

さらに，上式の辺々に 10 を掛けると

$$\begin{aligned} 10^{99} \equiv 10^{95} \equiv 10^{91} \equiv \cdots \equiv 10^{11} \equiv 10^7 \equiv 10^3 \pmod{2020} \\ 10^{96} \equiv 10^{92} \equiv \cdots \equiv 10^{12} \equiv 10^8 \equiv 10^4 \pmod{2020} \\ 10^{97} \equiv 10^{93} \equiv \cdots \equiv 10^{13} \equiv 10^9 \equiv 10^5 \pmod{2020} \end{aligned}$$

$10^4 \equiv -10^2$, $10^5 \equiv -10^3 \pmod{2020}$ であるから，100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 で，2020 で割り切れるものは

$$10^{99} + 10^n \quad (n = 5, 9, 13, \cdots, 93, 97)$$

よって，求める個数は **24** (個) ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\tan 2\theta + a\tan\theta = 0$ より $(0 \leqq \theta < \pi)$

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + a\tan\theta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \tan\theta\left(\frac{2}{1-\tan^2\theta} + a\right) = 0$$

$x = \tan\theta$ $(0 \leqq \theta < \pi)$ とおくと

$$x\left(\frac{2}{1-x^2} + a\right) = 0 \quad \cdots (*)$$

- $a = 0$ のとき，原方程式は　$\tan 2\theta = 0$　これを解いて　$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$
- $a \neq 0$ のとき，$(*)$ より　$x = 0$　または　$x^2 = \dfrac{a+2}{a}$

(i) $\dfrac{a+2}{a} \leqq 0$，すなわち，$-2 \leqq a < 0$ のとき　$x = 0$

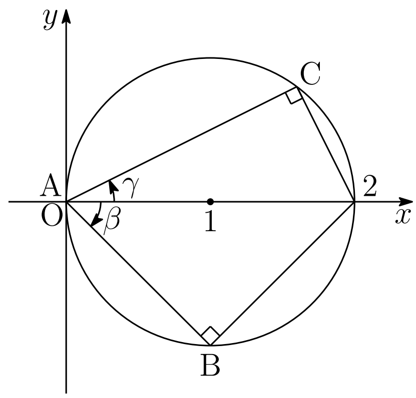
(ii) $\dfrac{a+2}{a} > 0$，すなわち，$a < -2,\ 0 < a$ のとき　$x = 0,\ \pm\sqrt{\dfrac{a+2}{a}}$

(i),(ii) に示した x と θ は 1 対 1 に対応するから，求める θ の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-2 \leqq a < 0} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a = 0} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a < -2,\ 0 < a} \text{ のとき} & \textbf{3 個} \end{cases}$$

■

3 点 A を極 O におき，点 (1, 0) を中心とする円周上に 2 点 B，C をおき，それぞれの偏角を β, γ とすると $(-\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2})$



$$\mathrm{AB} = 2\cos\beta, \quad \mathrm{AC} = 2\cos\gamma$$

$\angle\mathrm{BAC} = \gamma - \beta$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos(\gamma-\beta)\\ &= 2\cos\beta\cdot 2\cos\gamma\cos(\gamma-\beta)\\ &= 4\cos\beta\cos\gamma\cos(\gamma-\beta) \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

$4\cos\beta\cos\gamma\cos(\gamma-\beta) \leqq 4$ であるから (等号が成立するとき $\beta = \gamma = 0$)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \leqq 4$$

$2\cos\beta\cos\gamma = \cos(\gamma-\beta) + \cos(\gamma+\beta)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= 2\{\cos(\gamma-\beta)+\cos(\gamma+\beta)\}\cos(\gamma-\beta)\\ &= 2\cos^2(\gamma-\beta) + 2\cos(\gamma+\beta)\cos(\gamma-\beta)\\ &= 2\left\{\cos(\gamma-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\gamma+\beta)\right\}^2 - \frac{1}{2}\cos^2(\gamma+\beta) \geqq -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

上式で等号が成立するとき

$$\begin{cases}\cos(\gamma-\beta)+\dfrac{1}{2}\cos(\gamma+\beta) = 0\\ \cos(\beta+\gamma) = 1\end{cases} \qquad \text{すなわち} \quad \beta = -\frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{\pi}{3}$$

よって　**最大値 4，最小値 $-\dfrac{1}{2}$**　■

$\boxed{4}$ $F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2-x}^{2+x}|t-x|\,dt$ について $(x>0)$

(i) $x \leqq 2-x$　すなわち　$x \leqq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x}|t-x|\,dt = \frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x}(t-x)\,dt \\
&= \frac{1}{2x}\Big[\ (t-x)^2\ \Big]_{2-x}^{2+x} = 4-2x
\end{aligned}
$$

したがって　　$F(x) \geqq F(1) = 2$

(ii) $2-x \leqq x$　すなわち　$1 \leqq x$ のとき

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x}|t-x|\,dt \\
&= -\frac{1}{x}\int_{2-x}^{x}(t-x)\,dt + \frac{1}{x}\int_{x}^{2+x}(t-x)\,dt \\
&= -\frac{1}{2x}\Big[\ (t-x)^2\ \Big]_{2-x}^{x} + \frac{1}{2x}\Big[\ (t-x)^2\ \Big]_{x}^{2+x} \\
&= 2x + \frac{4}{x} - 4
\end{aligned}
$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

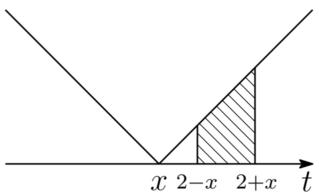
$$2x+\frac{4}{x} \geqq 2\sqrt{2x\cdot\frac{4}{x}} = 4\sqrt{2}$$

上式において，等号が成立するとき

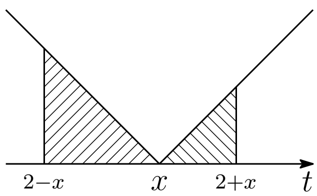
$$2x = \frac{4}{x}\quad\text{すなわち}\quad x=\sqrt{2}$$

したがって　$F(x) \geqq F(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}-4$

i) $x \leqq 1$ のとき



ii) $1 \leqq x$ のとき



よって　最小値 $\boldsymbol{F(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}-4}$ ■

5 点の合計が 1 点になるのは，1 回目に表が出る確率であるから

$$p_1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

点の合計が 2 点になるのは，1 回目に裏が出るか，または 2 回続けて表が出る確率であるから

$$p_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

また，次の確率漸化式が成立する．

$$(*) \quad p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

上式に $n = 1$，2 を代入すると

$$p_3 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{8}}$$
$$p_4 = \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \boldsymbol{\frac{11}{16}}$$

$(*)$ より

$$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$$

数列 $\{p_{n+1} - p_n\}$ は初項 $p_2 - p_1 = \frac{1}{4}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_{n+1} - p_n = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad |p_{n+1} - p_n| = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$|p_{n+1} - p_n| = \frac{1}{2^{n+1}} < 0.01$ のとき

$$\frac{1}{2^{n+1}} < 0.01 \quad \text{したがって} \quad 2^{n+1} > 100$$

$2^6 = 64$，$2^7 = 128$ より，上式を満たす最小の n は

$$n + 1 = 7 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{n = 6}$$

■

第 5 章　名古屋大学

出題分野 (2011-2020) 90 分

◀	名古屋大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数						1				
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式					3					
	図形と方程式	3	1		1	1			1		
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	1		2	3			1		1	1
A	場合の数と確率	2	2				2			3	
	整数の性質		3	3			3	3	2		
	図形の性質										
B	平面上のベクトル										
	空間のベクトル										2
	数列			1		2		2	3	2	3
	確率分布と統計				2						

数字は問題番号

5.1　2015年(90分)

1 座標平面上の円 $C : x^2+(y-1)^2=1$ と，x 軸上の2点 $\mathrm{P}(-a,\ 0)$，$\mathrm{Q}(b,\ 0)$ を考える．ただし，$a>0$，$b>0$，$ab \neq 1$ とする．点P，Qのそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き，その2つの接線の交点をRとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 直線QRの方程式を求めよ．

(2) Rの座標を a，b で表せ．

(3) Rの y 座標が正であるとき，△PQRの周の長さを T とする．T を a，b で表せ．

(4) 2点P，Qが，条件「$\mathrm{PQ}=4$ であり，Rの y 座標は正である」を満たしながら動くとき，T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ．

2 数直線上にある1，2，3，4，5の5つの点と1つの石を考える．石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点}1\text{にあるならば，確率}1\text{で点}2\text{に移動する} \\ \text{石が点}k\ (k=2,3,4)\text{にあるならば，} \\ \qquad\text{確率}\dfrac{1}{2}\text{で点}k-1\text{に，確率}\dfrac{1}{2}\text{で点}k+1\text{に移動する} \\ \text{石が点}5\text{にあるならば，確率}1\text{で}4\text{に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う．石が点1にある状態から始め，この試行を繰り返す．試行を n 回繰り返した後に，石が点 k $(k=1,2,3,4,5)$ にある確率を $P_n(k)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $n=6$ のときの確率 $P_6(k)$ $(k=1,2,3,4,5)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 石が移動した先の点に印をつける(点1には初めから印がついているものとする)．試行を6回繰り返した後に，5つの点全てに印がついている確率を求めよ．

(3) $n \geqq 1$ のとき，$P_n(3)$ を求めよ．

3 次の問に答えよ．

(1) $\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2$ を計算し，2重根号を用いない形で表せ．

(2) $\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の4次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，x^4 の係数が1であるものを求めよ．

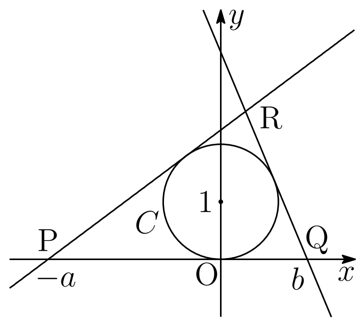
(3) 8つの実数

$$\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

(ただし，複号 $\pm$ はすべての可能性にわたる) の中で，(2) で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 点 Q$(b,\ 0)$ を通り $(b \neq 1)$，傾き m の直線は



$$y = m(x-b) \quad \text{ゆえに} \quad mx - y - bm = 0$$

これが円 $C : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と接するから

$$\frac{|-1-bm|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

平方して整理すると $\quad m\{(b^2-1)m + 2b\} = 0$

$m \neq 0$ であるから $\quad m = \dfrac{2b}{1-b^2}$

したがって，直線 QR の方程式は $\quad y = \dfrac{2b}{1-b^2}(x-b)$

よって，$b = 1$ のときも成立することに注意して

$$\boldsymbol{2bx + (b^2-1)y - 2b^2 = 0}$$

(2) (1) の結果から直線 PR の方程式は $\quad -2ax + (a^2-1)y - 2a^2 = 0$

点 R の座標は，次の連立方程式の解である．

$$\begin{cases} -2ax + (a^2-1)y - 2a^2 = 0 & \cdots ① \\ \quad 2bx + (b^2-1)y - 2b^2 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より $\quad -2(a+b)x + (a^2-b^2)y - 2(a^2-b^2) = 0$

$$(a+b)\{-2x + (a-b)y - 2(a-b)\} = 0$$

$a + b \neq 0$ であるから $\quad 2x = (a-b)(y-2) \quad \cdots ③$

②，③ から x を消去して，整理すると

$$b(a-b)(y-2) + (b^2-1)y - 2b^2 = 0$$
$$(ab-1)y - 2ab = 0$$

$ab \neq 1$ であるから $\quad y = \dfrac{2ab}{ab-1} \quad$ これを ③ に代入して

$$2x = (a-b)\left(\frac{2ab}{ab-1} - 2\right) \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a-b}{ab-1}$$

よって，点 R の座標は $\quad \boldsymbol{\left(\dfrac{a-b}{ab-1},\ \dfrac{2ab}{ab-1}\right)}$

(3) $\triangle$PQR の面積は，PQ の長さと点 R の y 座標により

$$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{2ab}{ab-1} = \frac{ab(a+b)}{ab-1}$$

また，$\triangle$PQR の面積は，T と $\triangle$PQR の内接円の半径により

$$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\cdot T\cdot 1 = \frac{T}{2}$$

したがって　$\dfrac{T}{2} = \dfrac{ab(a+b)}{ab-1}$　　よって　$\boldsymbol{T = \dfrac{2ab(a+b)}{ab-1}}$

(4) R の y 座標は，正であるから　　$\dfrac{2ab}{ab-1} > 0$

$a,\ b > 0$ であるから　　$ab > 1$

正の 2 数 a，b の相加平均・相乗平均の関係により　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

$a+b=4$ であるから　$2 \geqq \sqrt{ab}$　すなわち　$1 < ab \leqq 4$

$$\begin{aligned} T &= \frac{8ab}{ab-1} = \frac{8(ab-1)+8}{ab-1} = 8 + \frac{8}{ab-1} \\ &\geqq 8 + \frac{8}{4-1} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

上式で等号が成立するのは，$a=b$，すなわち，$a=b=2$

よって，T は $\boldsymbol{a=2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{32}{3}}$ をとる． ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) n が奇数のとき　$P_n(1) = P_n(3) = P_n(5) = 0$

n が偶数のとき　$P_n(2) = P_n(4) = 0$

n が奇数のとき，石は点 2 または 4 にある．このとき

$$P_{2j+1}(2) = p_{2j-1}(2) \times \left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + P_{2j-1}(4) \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$P_{2j+1}(4) = P_{2j-1}(2) \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + P_{2j-1}(4) \times \left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

したがって，j を自然数とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$P_1(2) = 1,\ P_1(4) = 0$$
$$(*) \begin{cases} P_{2j+1}(2) = \dfrac{3}{4}P_{2j-1}(2) + \dfrac{1}{4}P_{2j-1}(4) \\ P_{2j+1}(4) = \dfrac{1}{4}P_{2j-1}(2) + \dfrac{3}{4}P_{2j-1}(4) \end{cases}$$

$(*)$ に $j = 1$ を代入すると

$$P_3(2) = \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{3}{4},\quad P_3(4) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 0 = \frac{1}{4}$$

さらに，$(*)$ に $j = 2$ を代入すると

$$P_5(2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{8},\quad P_5(4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

したがって

$$P_6(1) = P_5(2) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{5}{16}}$$
$$P_6(3) = P_5(2) \times \frac{1}{2} + P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$P_6(5) = P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{16}}$$
$$P_6(2) = P_6(4) = \mathbf{0}$$

(2) 4 回繰り返した後に，点 5，点 3 にある確率は

$$P_4(5) = P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$
$$P_4(3) = P_3(2) \times \frac{1}{2} + P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

よって，6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がつく確率は

$$P_4(5) + P_4(3) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

(3) $(*)$ の辺々を加えると

$$P_{2j+1}(2) + P_{2j+1}(4) = P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4)$$

ゆえに
$$\begin{aligned} P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4) &= P_1(2) + P_1(4) \\ &= 1 + 0 = 1 \quad (j \geqq 1) \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned} P_{2j}(3) &= P_{2j-1}(2) \times \frac{1}{2} + P_{2j-1}(4) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\{P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4)\} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって
$$\boldsymbol{P_n(3) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ \dfrac{1}{2} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}}$$

補足 $(*)$ を解くと[1] $P_{2j-1}(2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^j}$，$P_{2j-1}(4) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^j}$

ゆえに $P_{2j}(1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2^{j+1}}$，$P_{2j}(3) = \dfrac{1}{2}$，$P_{2j}(5) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2^{j+1}}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Ndai/Ndai_ri_2015.pdf $\boxed{4}$ 参照

3 (1) $p=\sqrt{9+2\sqrt{17}}$，$q=\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とおくと

$$p^2+q^2=18,\quad pq=\sqrt{13}$$

よって
$$\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2=(p+q)^2=p^2+q^2+2pq$$
$$=\mathbf{18+2\sqrt{13}}$$

(2) $\alpha=pq+p+q$ であるから

$$(\alpha-pq)^2=(p+q)^2\quad \text{ゆえに}\quad \alpha^2-2pq\alpha+(pq)^2=p^2+q^2+2pq$$

したがって
$$\alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=18+2\sqrt{13}$$
$$\alpha^2-5=2\sqrt{13}(\alpha+1)$$

この両辺を平方すると

$$(\alpha^2-5)^2=52(\alpha+1)^2\quad \text{すなわち}\quad \alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^4-62x^2-104x-27}$

(3) (1) の式変形に注意すると，$f(x)=0$ は　$(x^2-5)^2=52(x+1)^2$

(i) $x^2-5=2\sqrt{13}(x+1)$ のとき

$$x^2-2\sqrt{13}x+13=18+2\sqrt{13}\quad \text{ゆえに}\quad (x-pq)^2=(p+q)^2$$

したがって　$x-pq=\pm(p+q)$　すなわち　$x=pq+p+q,\ pq-p-q$

(ii) $x^2-5=-2\sqrt{13}(x+1)$ のとき

$$x^2+2\sqrt{13}x+13=18-2\sqrt{13}\quad \text{ゆえに}\quad (x+pq)^2=(p-q)^2$$

したがって　$x+pq=\pm(p-q)$　すなわち　$x=-pq+p-q,-pq-p+q$

(i)，(ii) から，$f(x)=0$ の解は

$$\mathbf{\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}},$$
$$\mathbf{\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},$$
$$\mathbf{-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},$$
$$\mathbf{-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}}$$

■

5.2　2016 年 (90 分)

1 曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる．ただし $b>-1$ とする．このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ．

条件：$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-1<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する．

2 n を正の整数とし，k を $1 \leqq k \leqq n+2$ を満たす整数とする．$n+2$ 枚のカードがあり，そのうちの 1 枚には数字 0 が，他の 1 枚には数字 2 が，残りの n 枚には数字 1 が書かれている．この $n+2$ 枚のカードのうちから無作為に k 枚のカードを取り出すとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 1 以上になる確率を求めよ．

(2) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 2 となる確率 $Q_n(k)$ を求めよ．

(3) 与えられた n に対して，確率 $Q_n(k)$ が最大となる k の値と，その最大値を求めよ．

3 正の整数 n に対して，その (1 と自分自身を含めた) すべての正の約数の和を $s(n)$ と書くことにする．このとき，次の問に答えよ．

(1) k を正の整数，p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^kp)$ を求めよ．

(2) $s(2016)$ を求めよ．

(3) 2016 の正の約数 n で，$s(n)=2016$ となるものをすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ 直線 AT の傾きは $\dfrac{t^2-1}{t+1}=t-1$,　　直線 BT の傾きは $\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

∠ATB が直角であるから

$$(t-1)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-1)t-b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ が，$-1<t<b$ に解をもつ条件を求めればよい．ここで

$$f(t)=t^2+(b-1)t-b+1=\left(t+\frac{b-1}{2}\right)^2-\frac{(b+3)(b-1)}{4} \quad (-1 \leqq t \leqq b)$$

の最大値を M，最小値を m とすると

$$M=\begin{cases} f(-1) & (-1<b<1) \\ f(b) & (1 \leqq b) \end{cases}, \quad m=\begin{cases} f(b) & (-1<b<\frac{1}{3}) \\ f\left(\frac{1-b}{2}\right) & (\frac{1}{3} \leqq b \leqq 3) \\ f(-1) & (3<b) \end{cases}$$

$$f(-1)=-2b+3, \quad f(b)=2b^2-2b+1, \quad f\left(\frac{1-b}{2}\right)=-\frac{(b+3)(b-1)}{4}$$

方程式 $(*)$ が $-1<t<b$ に解をもつことから

(i) $-1<b<\dfrac{1}{3}$ のとき $\begin{cases} -2b+3>0 \\ 2b^2-2b+1<0 \end{cases}$ 　ゆえに　解なし

(ii) $\dfrac{1}{3} \leqq b<1$ のとき $\begin{cases} -2b+3>0 \\ -\dfrac{(b+3)(b-1)}{4} \leqq 0 \end{cases}$ 　ゆえに　解なし

(iii) $1 \leqq b \leqq 3$ のとき $\begin{cases} 2b^2-2b+1>0 \\ -\dfrac{(b+3)(b-1)}{4} \leqq 0 \end{cases}$ 　ゆえに　$1 \leqq b \leqq 3$

(iv) $3<b$ のとき $\begin{cases} 2b^2-2b+1>0 \\ -2b+3<0 \end{cases}$ 　ゆえに　$3<b$

(i)〜(iv) より　　$\boldsymbol{b \geqq 1}$

別解 直線 AT の傾きは　$\dfrac{t^2-1}{t+1}=t-1$,　　直線 BT の傾きは　$\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-1)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-1)t-b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ は，実数解をもつから

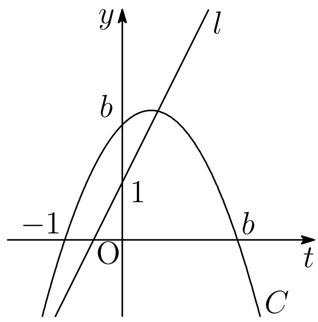
$$(b-1)^2-4{\cdot}1(-b+1) \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (b+3)(b-1) \geqq 0$$

$b>-1$ に注意すると，$b \geqq 1$ の範囲について調べればよい．

$(*)$ を変形すると　　$2(b-1)t+1=-(t+1)(t-b)$

直線 $l: y=2(b-1)t+1$ と放物線 $C: y=-(t+1)(t-b)$ が $-1<t<b$ で共有点をもつ b の値の範囲を求めればよい．

$b \geqq 1$ のとき，C と l は共有点を持つ．
とくに，$b=1$ のとき，C と l は，$t=0$ で接する．
$b>1$ のとき，C および l が y 軸とそれぞれ b，1 で交わるので，このとき，C と l は常に $-1<t<b$ に共有点をもつ．よって　$\boldsymbol{b \geqq 1}$



2 (1) 0 以外の $n+1$ 枚のカードから k 枚取り出す場合の確率であるから

$$\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}{{}_{n+2}\mathrm{C}_k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\cdot\frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!} = \boldsymbol{\frac{n+2-k}{n+2}}$$

(2) 2 のカードを 1 枚，1 のカードを $k-1$ 枚取り出す場合の確率であるから

$$\begin{aligned} Q_n(k) &= \frac{1\cdot{}_n\mathrm{C}_{k-1}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\cdot\frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!} \\ &= \boldsymbol{\frac{k(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$Q_n(k) = -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(k-\dfrac{n+2}{2}\right)^2 + \dfrac{n+2}{4(n+1)}$

(i) n が偶数のとき，$\boldsymbol{k = \dfrac{n+2}{2}}$ で，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{n+2}{4(n+1)}}$

(ii) n が奇数のとき，$\boldsymbol{k = \dfrac{n+1}{2},\ \dfrac{n+3}{2}}$ で，

最大値 $-\dfrac{1}{4(n+1)(n+2)} + \dfrac{n+2}{4(n+1)} = \boldsymbol{\dfrac{n+3}{4(n+2)}}$

別解 (2) の結果から

$$\frac{Q_n(k+1)}{Q_n(k)} - 1 = \frac{(k+1)(n+1-k)}{k(n+2-k)} - 1 = \frac{n+1-2k}{k(n+2-k)}$$

(i) n が偶数のとき

$$Q_n(1) < Q_n(2) < \cdots < Q_n(\tfrac{n}{2}) < Q_n(\tfrac{n+2}{2}) > \cdots > Q_n(n+2)$$

よって　最大値 $Q_n\left(\dfrac{n+2}{2}\right) = \dfrac{n+2}{4(n+1)}$

(ii) n が奇数のとき

$$Q_n(1) < Q_n(2) < \cdots < Q_n(\tfrac{n+1}{2}) = Q_n(\tfrac{n+3}{2}) > \cdots > Q_n(n+2)$$

よって　最大値 $Q_n\left(\dfrac{n+1}{2}\right) = Q_n\left(\dfrac{n+3}{2}\right) = \dfrac{n+3}{4(n+2)}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $s(2^kp)=(1+2+\cdots+2^k)(1+p)$

$$=\frac{2^{k+1}-1}{2-1}(1+p)=\boldsymbol{(2^{k+1}-1)(p+1)}$$

(2) $2016=2^5{\cdot}3^2{\cdot}7$ より

$$\begin{aligned} s(2016)&=s(2^5)s(3^2)s(7)\\ &=\frac{2^6-1}{2-1}(1+3+3^2)(1+7)\\ &=63{\cdot}13{\cdot}8=\mathbf{6552}\end{aligned}$$

(3) n は 2016 の正の約数であるから

$$n=2^i{\cdot}3^j{\cdot}7^k\quad(0\leqq i\leqq 5,\ 0\leqq j\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 1)$$

とおくと，$s(n)=2016$ となるとき

$$s(2^i)s(3^j)s(7^k)=2^5{\cdot}3^2{\cdot}7\quad\cdots(*)$$

ここで

$s(2^0)=1$	$s(3^0)=1$	$s(7^0)=1$
$s(2^1)=3$	$s(3^1)=2^2$	$s(7^1)=2^3$
$s(2^2)=7$	$s(3^2)=13$	
$s(2^3)=3{\cdot}5$		
$s(2^4)=31$		
$s(2^5)=3^2{\cdot}7$		

$(*)$ の $3^2{\cdot}7$ に注目すると　$i=5$
さらに，2^5 に注目すると　$j=k=1$
よって　$n=2^5{\cdot}3^1{\cdot}7^1=\mathbf{672}$ ■

5.3　2017年(90分)

1 a を正の定数とする．2次関数 $f(x) = ax^2$ と3次関数 $g(x) = x(x-4)^2$ について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $y = g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け．

(2) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は相異なる3点で交わることを示せ．

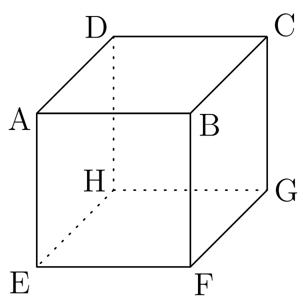
(3) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた2つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ．またそのとき，2つの曲線の交点の x 座標を求めよ．

2 下図のような立方体を考える．この立方体の8つの頂点の上を点Pが次の規則で移動する．時刻0では点Pは頂点Aにいる．時刻が1増えるごとに点Pは，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．例えば時刻 n で点Pが頂点Hにいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点D，E，Gのいずれかにいる．自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点Pが時刻 n までの間一度も頂点Aに戻らず，かつ時刻 n で頂点B，D，Eのいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点Pが時刻 n までの間一度も頂点Aに戻らず，かつ時刻 n で頂点C，F，Hのいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点Pが時刻 n までの間一度も頂点Aに戻らず，かつ時刻 n で頂点Gにいる確率を r_n，とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ．

(3) 自然数 $m \geqq 1$ に対して，点Pが時刻 $2m$ で頂点Aに初めて戻る確率 s_m を求めよ．



3 次の問に答えよ．

(1) 次の条件 $(*)$ を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

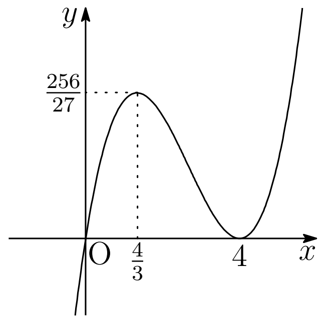
$$(*)\quad a<b<c \text{ かつ } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \text{ である．}$$

(2) 偶数 $2n$ $(n \geqq 1)$ の 3 つの正の約数 p，q，r で，$p>q>r$ と $p+q+r=n$ を満たす組 $(p,\ q,\ r)$ の個数を $f(n)$ とする．ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n)=0$ とする．n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ．また，$f(n)=M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ．

解答例

1 (1) $g(x)=x(x-4)^2=x^3-8x^2+16x$ より

$$\begin{aligned} g'(x)&=3x^2-16x+16\\ &=(x-4)(3x-4)\end{aligned}$$



$g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　極大値 $g\left(\dfrac{4}{3}\right)=\mathbf{\dfrac{256}{27}}$，　極小値 $g(4)=\mathbf{0}$

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ から y を消去すると

$$ax^2=x(x-4)^2 \quad ゆえに \quad x\{x^2-(a+8)x+16\}=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $x^2-(a+8)x+16=0$ の係数について，$a>0$ であるから

$$D=(a+8)^2-4\cdot1\cdot16=a(a+16)>0$$

方程式 $x^2-(a+8)x+16=0$ は 0 でない異なる 2 つの実数解をもつので，方程式 $(*)$ は異なる 3 つの解をもつ．

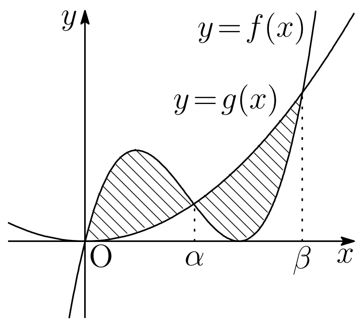
よって　$y=f(x)$，$y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わる

(3) (2) の結果から，方程式 $(*)$ の 3 つの解を 0，α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=a+8>0,\quad \alpha\beta=16 \quad \cdots(**) \quad ゆえに \quad 0<\alpha<\beta$$

条件より

$$\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$



ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\beta}\{g(x)-f(x)\}\,dx=0$

ここで　$$\begin{aligned} g(x)-f(x)&=x\{x^2-(a+8)x+16\}\\ &=x(x-\alpha)(x-\beta)\\ &=-x^2(\beta-x)+\alpha x(\beta-x)\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle -\int_0^\beta x^2(\beta-x)\,dx+\alpha\int_0^\beta x(\beta-x)\,dx=0$

$$-\frac{1}{12}\beta^4+\alpha\cdot\frac{1}{6}\beta^3=0$$

$$\beta=2\alpha$$

これを $(**)$ に代入すると

$$\alpha+2\alpha=a+8,\quad \alpha\cdot 2\alpha=16$$

$\alpha>0$ に注意して $\alpha=2\sqrt{2}$，$\beta=4\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a=6\sqrt{2}-8}$

2 つの曲線の交点の x 座標は $\boldsymbol{0,\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}}$

補足 次の公式[2]を利用するとよい．

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

■

$\boxed{2}$ (1) 与えられた規則により，次の確率漸化式が成立する．

$$p_1=1,\ q_1=0,\ r_1=0$$

$$(*)\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+r_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{3}q_n \end{cases}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると

$$p_2=\frac{2}{3}q_1=\boldsymbol{0},\quad q_2=\frac{2}{3}p_1+r_1=\boldsymbol{\frac{2}{3}},\quad r_2=\frac{1}{3}q_1=\boldsymbol{0}$$

$(*)$ に $n=2$ を代入すると，上の結果により

$$p_3=\frac{2}{3}q_2=\boldsymbol{\frac{4}{9}},\quad q_3=\frac{2}{3}p_2+r_2=\boldsymbol{0},\quad r_3=\frac{1}{3}q_2=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

---

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

(2) $(*)$ の第2式から　$q_{n+2}=\dfrac{2}{3}p_{n+1}+r_{n+1}$

これに $(*)$ の第1式，第3式を代入すると

$$q_{n+2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_n+\frac{1}{3}q_n \quad \text{すなわち} \quad q_{n+2}=\frac{7}{9}q_n$$

(i) n が奇数のとき $(n \geqq 1)$　$q_n=q_1\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}=0$

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n=0,\quad r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n=0$$

(ii) n が偶数のとき $(n \geqq 2)$　$q_n=q_2\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

(i)，(ii) の結果から

n が偶数のとき　$\boldsymbol{p_n=0,\ q_n=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}},\ r_n=0}$

n が奇数のとき　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}},\ q_n=0,\ r_n=\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\neq 1)}$

(3) $s_m=\dfrac{1}{3}p_{2m-1}$ であるから

$$s_1=\frac{1}{3}p_1=\boldsymbol{\frac{1}{3}},$$

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{(2m-1)-3}{2}}=\boldsymbol{\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}}\quad \boldsymbol{(m\geqq 2)}$$

■

3 (1) $0 < a < b < c$ より，$\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$ であるから

$\dfrac{3}{c} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < \dfrac{3}{a}$ ゆえに $\dfrac{3}{c} < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{a}$ すなわち $a < 6 < c$

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} > 0$ より $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{2}$ ゆえに $a > 2$

a は自然数であるから $a = 3,\ 4,\ 5$

(i) $a = 3$ のとき $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{6}$

ゆえに $(b-6)(c-6) = 36$

$b < c$，$c > 6$ に注意して

$$(b-6,\ c-6) = (1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9)$$

すなわち $(b,\ c) = (7,\ 42),\ (8,\ 24),\ (9,\ 18),\ (10,\ 15)$

(ii) $a = 4$ のとき $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{4}$

ゆえに $(b-4)(c-4) = 16$

$b < c$，$c > 6$ に注意して

$$(b-4,\ c-4) = (1,\ 16),\ (2,\ 8)$$

すなわち $(b,\ c) = (5,\ 20),\ (6,\ 12)$

(iii) $a = 5$ のとき $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{3}{10}$

ゆえに $(3b-10)(3c-10) = 100$

$a < b < c$ より，$b \geqq 6$，$c \geqq 7$ であるから，$3b - 10 \geqq 8$，$3c - 10 \geqq 11$

このとき，自然数 $(b,\ c)$ の組は存在しない．

(i)〜(iii) から

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (3,\ 7,\ 42),\ (3,\ 8,\ 24),\ (3,\ 9,\ 18),\ (3,\ 10,\ 15),}$$
$$\boldsymbol{(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12)}$$

(2) $p,\ q,\ r\ (p>q>r)$ は偶数 $2n\ (n \geqq 1)$ の正の約数であるから

$$\frac{2n}{p}=a,\quad \frac{2n}{q}=b,\quad \frac{2n}{r}=c$$

をみたす自然数 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$ が存在する．上式より

$$p=\frac{2n}{a},\quad q=\frac{2n}{b},\quad r=\frac{2n}{c}\quad \cdots(*)$$

$p+q+r=n$ より

$$\frac{2n}{a}+\frac{2n}{b}+\frac{2n}{c}=n \quad \text{ゆえに}\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$

上式を満たす自然数 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$ の組は (1) の結果である．
これらの自然数の組を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}(p,\ q,\ r)=&\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{7},\ \frac{2n}{42}\right),\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{8},\ \frac{2n}{24}\right),\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{9},\ \frac{2n}{18}\right),\\ &\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{10},\ \frac{2n}{15}\right),\left(\frac{2n}{4},\ \frac{2n}{5},\ \frac{2n}{20}\right),\left(\frac{2n}{4},\ \frac{2n}{6},\ \frac{2n}{12}\right)\end{aligned}$$

p，q，r が自然数となるのは，n がそれぞれ 21，12，9，15，10，6 の倍数のときである．とくに

$$21=3\cdot7,\quad 12=2^2\cdot3,\quad 9=3^2,\quad 15=3\cdot5,\quad 10=2\cdot5,\quad 6=2\cdot3$$

の最小公倍数が $2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7=1260$ であるから，n が 1260 の倍数のとき，$f(n)$ は最大値 6 をとる．よって　$\boldsymbol{M=6}$，最小の n は **1260** ■

5.4　2018 年 (90 分)

1 a，b を実数とし，少なくとも一方は 0 でないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 連立不等式

$$3x+2y+4 \geqq 0, \quad x-2y+4 \geqq 0, \quad ax+by \geqq 0$$

の表す領域，または連立不等式

$$3x+2y+4 \geqq 0, \quad x-2y+4 \geqq 0, \quad ax+by \leqq 0$$

の表す領域が三角形であるために a，b がみたすべき条件を求めよ．さらに，その条件をみたす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

(2) (1) の三角形の面積を S とするとき，S を a，b を用いて表せ．

(3) $S \geqq 4$ を示せ．

2 次の問に答えよ．

(1) 整数 α，β の少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ は奇数であることを示せ．

(2) n を奇数とする．このとき $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$ をみたす整数 α，β は存在しないことを示せ．

(3) c を実数とする．このとき 3 次方程式 $x^3-2018x+c=0$ の解のうち整数であるものは 1 個以下であることを示せ．

3 図1のように2つの正方形ABCDとCDEFを並べた図形を考える．2点P，Qが6個の頂点A，B，C，D，E，Fを以下の規則(a)，(b)に従って移動する．

(a) 時刻0では図2のように点Pは頂点Aに，点Qは頂点Cにいる．

(b) 点P，Qは時刻が1増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．

時刻nまで2点P，Qが同時に同じ頂点にいることが一度もない確率をp_nと表す．また時刻nまで2点P，Qが同時に同じに頂点にいることが一度もなく，かつ時刻nに2点P，Qがともに同じ正方形上にいる確率をa_nと表し，$b_n = p_n - a_n$と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 時刻1での点P，Qの可能な配置を，図2にならってすべて図示せよ．

(2) a_1，b_1，a_2，b_2を求めよ．

(3) a_{n+1}，b_{n+1}をa_n，b_nで表せ．

(4) $p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$を示せ．

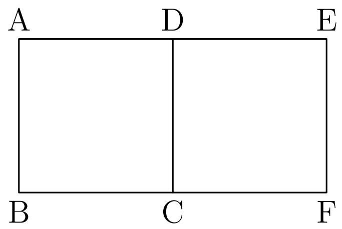


図1

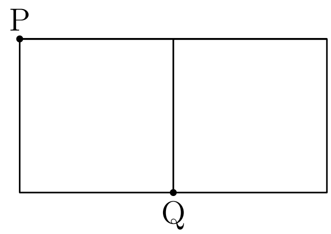
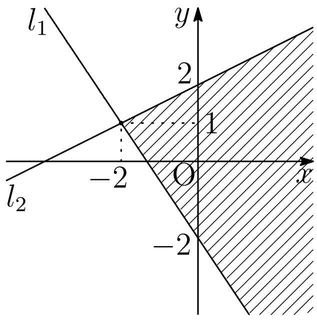


図2

解答例

1　(1) 連立不等式



$$3x+2y+4 \geqq 0,\quad x-2y+4 \geqq 0$$

の表す領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．
2 直線

$$l_1 : 3x+2y+4=0,\quad l_2 : x-2y+4=0$$

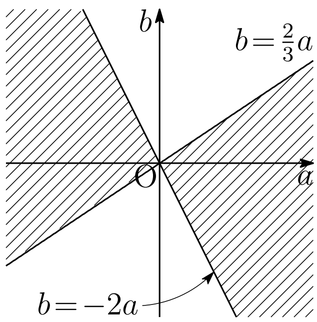
の傾きはそれぞれ $-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}$ である．

$b \neq 0$ のとき，直線 $l : ax+by=0$ の傾きを m とすると，l によって領域が三角形となるのは

$$(*)\quad m < -\frac{3}{2},\quad \frac{1}{2} < m \quad \text{すなわち} \quad -\frac{a}{b} < -\frac{3}{2},\quad \frac{1}{2} < -\frac{a}{b}$$

ゆえに　$\dfrac{a}{b} < -\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2} < \dfrac{a}{b}$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{3}{2}\right) > 0$$



上式より $a \neq 0$ であることに注意して

$$\left(\frac{b}{a}+2\right)\left(\frac{b}{a}-\frac{2}{3}\right) < 0 \quad \cdots①$$

したがって　$-2 < \dfrac{b}{a} < \dfrac{2}{3}$

$b=0$ のとき，条件より $a \neq 0$ であるから，l は直線 $x=0$ となる．このときも，l により領域は三角形となる．よって，点 $(a,\ b)$ の満たす不等式は

$$-2 < \frac{b}{a} < \frac{3}{2}$$

その領域は，右の図の斜線部分で境界を含まない．

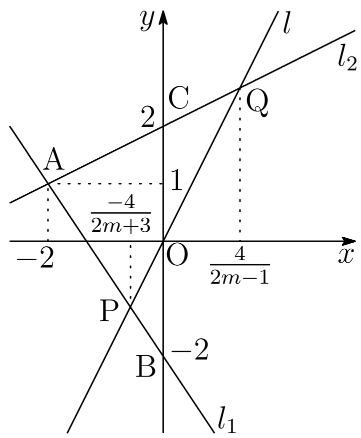
(2) $(*)$ を満たすとき，$l : y = mx$ と

$$l_1 : 3x + 2y + 4 = 0,\quad l_2 : x - 2y + 4 = 0$$

との交点をそれぞれ P，Q とすると，2 点 P，Q の x 座標は，それぞれ

$$-\frac{4}{2m+3},\quad \frac{4}{2m-1}$$

また，l_1 と l_2 の交点 A の x 座標は -2 であり，l_1，l_2 の y 軸との交点をそれぞれ B$(0, -2)$，C$(0,\ 2)$ とすると



$$\triangle\text{ABC} = 4,\quad \triangle\text{OBP} = \frac{4}{|2m+3|},\quad \triangle\text{OCQ} = \frac{4}{|2m-1|}$$

(i) $\dfrac{1}{2} < m$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \triangle\text{APQ} = \triangle\text{ABC} + \triangle\text{OCQ} - \triangle\text{OBP} \\ &= 4 + \frac{4}{|2m-1|} - \frac{4}{|2m+3|} = 4 + \frac{4}{2m-1} - \frac{4}{2m+3} \end{aligned}$$

(ii) $m < -\dfrac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \triangle\text{APQ} = \triangle\text{ABC} - \triangle\text{OCQ} + \triangle\text{OBP} \\ &= 4 - \frac{4}{|2m-1|} + \frac{4}{|2m+3|} = 4 + \frac{4}{2m-1} - \frac{4}{2m+3} \end{aligned}$$

(i)，(ii) から，$(*)$ を満たすとき

$$\begin{aligned} S &= 4 + \frac{16}{(2m-1)(2m+3)} = 4 + \frac{16}{\left(-\frac{2a}{b} - 1\right)\left(-\frac{2a}{b} + 3\right)} \\ &= 4 + \frac{16b^2}{(2a+b)(2a-3b)} \end{aligned}$$

$b = 0$ のとき，$l : ax + by = 0$ は，直線 $x = 0$ であるから，$S = \triangle\text{ABC} = 4$ より，上式を満たす．よって

$$\boldsymbol{S = 4 + \frac{16b^2}{(2a+b)(2a-3b)}}$$

(3) ① より，$(2a+b)(2a-3b) > 0$ であるから，(2) の結果より　$S \geqq 4$　■

2 (1) α，β の一方が奇数で他方が偶数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ の偶奇は

$$(\text{奇数})^2+(\text{奇数})(\text{偶数})+(\text{偶数})^2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{奇数}$$

α，β がともに奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ の偶奇は

$$(\text{奇数})^2+(\text{奇数})(\text{奇数})+(\text{奇数})^2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{奇数}$$

よって，α，β の少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ は奇数．

(2) $2n$ は偶数であるから

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n \quad \cdots(*)$$

を満たすとき，(1) の結果から，α，β はともに偶数で

$$\alpha=2k, \quad \beta=2l$$

とおくと (k, l は整数)

$$(2k)^2+2k\cdot2l+(2l)^2=2n \qquad 2(k^2+kl+l^2)=n$$

上の第 2 式の左辺は偶数であるから，n が奇数であることに反する．
よって，$(*)$ を満たす α，β は存在しない．

(3) 3 次方程式

$$x^3-2018x+c=0 \quad \cdots(**)$$

の解を α, β, γ すると (c は実数)，解と係数の関係により

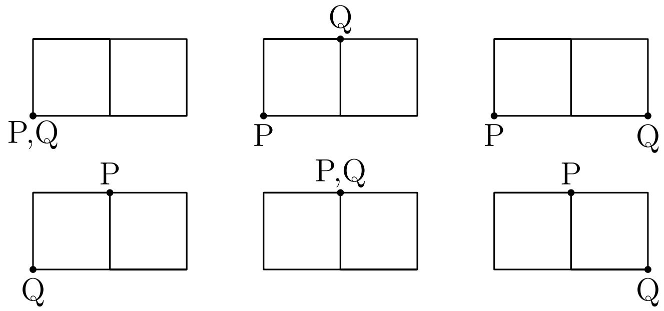
$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2018$$

α, β が整数であると仮定し，上の 2 式から γ を消去すると

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2\cdot1009$$

(2) の結果から，上式を満たす整数 α, β は存在しないので，仮定に反する．
よって，3 次方程式 $(*)$ の整数解の個数は 1 個以下である．　■

3　(1) 時刻 1 で動点 P，Q の可能な配置は，次の 6 通り



(2) (1) の 6 通りの配置は同様に確からしい．

a_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある，すなわち，

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = (\mathrm{B}, \mathrm{D}),\ (\mathrm{D}, \mathrm{B}),\ (\mathrm{D}, \mathrm{F})$$

にある確率であるから　　$a_1 = \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

b_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上にない，すなわち，$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = (\mathrm{B}, \mathrm{F})$ にある確率であるから　　$b_1 = \mathbf{\frac{1}{6}}$

動点 P，Q が頂点 B，D，F 上にあるのは偶数時刻で，頂点 A，C，E 上にあるのは奇数時刻である．動点 P，Q が時刻 n まで同じ頂点にないという条件を満たしながら時刻 n において，動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある確率 a_n，動点 P，Q が A と E または B と F にある確率 b_n について次の確率漸化式が成立する．

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n \quad \cdots (*)$$

したがって　　$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

$$b_2 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

(3) $(*)$ より　　$\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n}$

(4) $a_0 = 1$，$b_0 = 0$，$(*)$ より，$a_n \geqq 0$，$b_n \geqq 0$ であるから

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \leqq \frac{3}{4}(a_n + b_n)$$

ゆえに　$p_0 = 1$，$p_{n+1} \leqq \frac{3}{4}p_n$　よって　$p_n \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^n p_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n$　■

5.5　2019 年 (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax-a$ と $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を考える．関数 $y=F(x)-f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 非負の整数 n に対して P_n を xy 平面上の点とする．P_0 の座標を $(1,\ 0)$ とし，P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ と P_{n+1} の座標 $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ は

$$x_{n+1}=x_n-k(y_n+y_{n+1})$$
$$y_{n+1}=y_n+k(x_n+x_{n+1})$$

をみたすとする．ただし k を正の実数とする．

(1) $k=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ とする．ただし $0<\alpha<\pi$ とする．このとき P_1，P_2 の座標 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を α を用いて表せ．

(2) P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ を (1) の α と n を用いて表せ．

(3) O を xy 平面の原点とするとき，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ の面積を k を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1 つのサイコロを 3 回投げる．1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする．なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

(1) 2 次方程式 $x^2-bx+c=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ．

(2) 2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$ のすべての解が整数である確率を求めよ．

(3) 2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x (t^2+at-a)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-at\right]_0^x=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-ax$

$g(x)=F(x)-f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x)&=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-ax-(x^2+ax-a)\\ &=\frac{1}{3}x^3+\frac{a-2}{2}x^2-2ax+a,\\ g'(x)&=x^2+(a-2)x-2a=(x+a)(x-2) \end{aligned}$$

したがって，3 次関数 $y=g(x)$ の極値は

$$\begin{aligned} g(-a)&=\frac{1}{3}(-a)^3+\frac{a-2}{2}\cdot(-a)^2-2a\cdot(-a)+a=\frac{1}{6}a(a^2+6a+6),\\ g(2)&=\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{a-2}{2}\cdot 2^2-2a\cdot 2+a=-a-\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$y=g(x)$ のグラフが，x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件は，

$$g(-a)g(2)<0$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}a(a^2+6a+6)\left(-a-\frac{4}{3}\right)&<0\\ a\left(a+\frac{4}{3}\right)(a^2+6a+6)&>0\\ a\left(a+\frac{4}{3}\right)(a+3+\sqrt{3})(a+3-\sqrt{3})&>0 \end{aligned}$$

よって，$-3-\sqrt{3}<-\dfrac{4}{3}<-3+\sqrt{3}<0$ に注意して

$$\boldsymbol{a<-3-\sqrt{3},\quad -\frac{4}{3}<a<-3+\sqrt{3},\quad 0<a}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた漸化式から

$$x_{n+1} + ky_{n+1} = x_n - ky_n,\quad -kx_{n+1} + y_{n+1} = kx_n + y_n$$

ゆえに
$$x_{n+1} = \frac{1-k^2}{1+k^2}x_n - \frac{2k}{1+k^2}y_n,$$
$$y_{n+1} = \frac{2k}{1+k^2}x_n + \frac{1-k^2}{1+k^2}y_n$$

$k = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ より $\dfrac{1-k^2}{1+k^2} = \cos\alpha$，$\dfrac{2k}{1+k^2} = \sin\alpha$

したがって
$$(*)\begin{cases} x_{n+1} = x_n\cos\alpha - y_n\sin\alpha \\ y_{n+1} = x_n\sin\alpha + y_n\cos\alpha \end{cases}$$

$(x_0,\ y_0) = (1,\ 0)$ であるから，$(*)$ より

$$(x_1,\ y_1) = (\boldsymbol{\cos\alpha,\ \sin\alpha}),$$
$$(x_2,\ y_2) = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\ 2\sin\alpha\cos\alpha)$$
$$= (\boldsymbol{\cos 2\alpha,\ \sin 2\alpha})$$

(2) (1) の結果から
$$\begin{cases} x_n = \cos n\alpha, \\ y_n = \sin n\alpha \end{cases} \quad \cdots(\mathrm{A})$$

であると推測し，これを数学的帰納法により示す．

［1］ $n = 0$ のとき，(A) は成立する．

［2］ $n = k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，$(*)$ より

$$x_{k+1} = \cos k\alpha\cos\alpha - \sin k\alpha\sin\alpha = \cos(k+1)\alpha$$
$$y_{k+1} = \cos k\alpha\sin\alpha + \sin k\alpha\cos\alpha = \sin(k+1)\alpha$$

したがって，$n = k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］，［2］ より，すべての非負の整数 n について，(A) は成立する．

よって　$\boldsymbol{x_n = \cos n\alpha,\ \ y_n = \sin n\alpha}$

(3) (2) の結果から，$\mathrm{OP}_n = \mathrm{OP}_{n+1} = 1$，$\angle \mathrm{P_nOP_{n+1}} = \alpha$

よって　$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2k}{1+k^2} = \boldsymbol{\dfrac{k}{1+k^2}}$ ■

$\boxed{3}$ (1) 2 次方程式 $x^2-bx+c=0$ の解を α, β とすると ($\alpha \leqq \beta$)，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=b, \quad \alpha\beta=c$$

上の第 1 式から，解の一方が整数であるとき，他の解も整数である．b，c は 1 から 6 までの整数であるから，条件を満たすのは次の 7 通り．

$c=1$ のとき $(\alpha,\ \beta)=(1,\ 1)$ ゆえに $b=2$
$c=2$ のとき $(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2)$ ゆえに $b=3$
$c=3$ のとき $(\alpha,\ \beta)=(1,\ 3)$ ゆえに $b=4$
$c=4$ のとき $(\alpha,\ \beta)=(2,\ 2),\ (1,\ 4)$ ゆえに $b=4,\ 5$
$c=5$ のとき $(\alpha,\ \beta)=(1,\ 5)$ ゆえに $b=6$
$c=6$ のとき $(\alpha,\ \beta)=(2,\ 3)$ ゆえに $b=5$

よって，求める確率は $\dfrac{7}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{7}{36}}$

(2) 2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$，すなわち，2 次方程式

$$x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \cdots (*)$$

のすべての解が整数であるから，解と係数の関係により，$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{c}{a}$ は整数で，これらは 1 以上 6 以下の整数であるから，2 次方程式 $(*)$ は，(1) で示した 2 次方程式

$$x^2-2x+1=0, \quad x^2-3x+2=0, \quad x^2-4x+3=0,$$
$$x^2-4x+4=0, \quad x^2-5x+4=0, \quad x^2-6x+5=0,$$
$$x^2-5x+6=0$$

と一致する．すなわち，2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$ は，これらと同型 (monic) であるから，上の第 1 式を 2, 3 倍および第 2 式を 2 倍した次の 3 つの 2 次方程式も含む．

$$2x^2-4x+2=0, \quad 3x^2-6x+3=0, \quad 2x^2-6x+4=0$$

よって，求める確率は $\dfrac{7+3}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{108}}$

(3) 2 次方程式

$$ax^2 - bx + c = 0 \quad \cdots (**)$$

が少なくとも 1 つ整数解をもつとき，$a=1$ の場合については (1) で調べているので，$a \geqq 2$ の場合について調べる．2 次方程式 $(**)$ の解を $p,\ q$ とすると，解と係数の関係により

$$p+q = \frac{b}{a}, \quad pq = \frac{c}{a}$$

このとき，$0 < \dfrac{b}{a} \leqq 3$，$0 < \dfrac{c}{a} \leqq 3$ であるから，整数解は　1　または　2

(i) 方程式 $(**)$ が 1 を解にもつとき　$a + c = b \quad \cdots ①$
これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の 10 組．

a	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
b	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
c	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1

(ii) 方程式 $(**)$ が 2 を解にもつとき　$c = 2(b-2a) \quad \cdots ②$
これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の 2 組．

$$(a,\ b,\ c) = (2,\ 5,\ 2),\ (2,\ 6,\ 4)$$

(iii) 方程式 $(**)$ が 1 と 2 を解にもつ，すなわち，①，② を同時に満たす $(a,\ b,\ c)$ は次の 1 組である．

$$(a,\ b,\ c) = (2,\ 6,\ 4)$$

よって，求める確率は (1) および (i)〜(iii) により

$$\frac{7+10+2-1}{6^3} = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

補足 整数を係数とする2次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が有理数を解に持つための必要十分条件は

$$b^2-4ac \text{ が平方数}$$

$b=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について，これを満たす ac の値を求める．

(i) $b=2$ のとき，$ac=1$ であるから，次の1組．

$$x^2-2x+1=0$$

(ii) $b=3$ のとき，$ac=2$ であるから，次の2組．

$$x^2-3x+2=0, \qquad 2x^2-3x+1=0$$

(iii) $b=4$ のとき，$ac=3,\ 4$ であるから，次の5組．

$$x^2-4x+3=0, \qquad 3x^2-4x+1=0, \qquad x^2-4x+4=0,$$
$$2x^2-4x+2=0, \qquad \underline{4x^2-4x+1=0}$$

(iv) $b=5$ のとき，$ac=4,\ 6$ であるから，次の7組．

$$x^2-5x+4=0, \qquad 2x^2-5x+2=0, \qquad 4x^2-5x+1=0,$$
$$x^2-5x+6=0, \qquad 2x^2-5x+3=0, \qquad 3x^2-5x+2=0,$$
$$\underline{6x^2-5x+1=0}$$

(v) $b=6$ のとき，$ac=5,\ 8,\ 9$ であるから，次の5組．

$$x^2-6x+5=0, \qquad 5x^2-6x+1=0, \qquad 2x^2-6x+4=0,$$
$$4x^2-6x+2=0, \qquad 3x^2-6x+3=0$$

2次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が有理数を解にもつのは，(i)〜(v) の20組あり，そのうち，整数解を持たないのは，次の2組である．

$$4x^2-4x+1=0, \qquad 6x^2-5x+1=0$$

したがって，少なくとも1つ整数解を持つのは　$20-2=18$ (組)

実際，設問 (1) についても，$a=1$ であるものを数えるとよい．また，設問 (2) については，上に示した20個の方程式のうち，ともに整数解であるものを確認すればよい． ■

5.6　2020 年 (90 分)

1 a を実数として $f(x) = 2x^2 - 2ax - a^2$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の解 t が，必ず $-1 \leqq t \leqq 1$ をみたすための a の条件を求めよ．

(2) (1) で求めた条件をみたす a に対して

$$S(a) = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx$$

とおく．$S(a)$ の値を求めよ．

(3) $S(a)$ の値が最小となる a を求めよ．

2 (1) 平面上に $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 1$ をみたす相異なる 4 点 O，P，Q，R がある．このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 0$ ならば，三角形 PQR は正三角形であることを示せ．

(2) 空間内に $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = 1$ をみたす相異なる 5 点 O，A，B，C，D がある．また O から A，B，C を含む平面におろした垂線の足を H とする．このとき，以下の 2 つの命題を示せ．

命題 (i) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 3|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ ならば，三角形 ABC は正三角形である．

命題 (ii) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}| = 0$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \dfrac{1}{3}$ ならば，四面体 ABCD は正四面体である．

3 xy 平面において x，y がともに整数となる点 $(x,\ y)$ を格子点という．正の整数 n に対して

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x + y \leqq n$$

で定まる領域を D とする．4 つの頂点がすべて D に含まれる格子点であり，x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を $R(n)$ とする．また，そのなかで特に 1 つの辺が x 軸上にある長方形の数を $S(n)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $R(3)$ と $R(4)$ を求めよ．

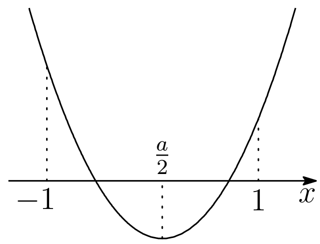
(2) $S(n)$ を求めよ．

(3) $R(n)$ を求めよ．

(4) $R(n) = 1001$ となる n を求めよ．

解答例

1　(1) $f(x)=2x^2-2ax-a^2$ より



$$f(x)=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{3a^2}{2}$$

方程式 $f(x)=0$ は実数解をもつ．実数解 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ をみたす条件は

$$-1 \leqq \frac{a}{2} \leqq 1, \quad f(-1) \geqq 0, \quad f(1) \geqq 0$$

したがって　$-2 \leqq a \leqq 2, \quad 2+2a-a^2 \geqq 0, \quad 2-2a-a^2 \geqq 0$

ゆえに　$\begin{cases} -2 \leqq a \leqq 2 \\ 1-\sqrt{3} \leqq a \leqq 1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \leqq a \leqq -1+\sqrt{3} \end{cases}$

よって　$\boldsymbol{1-\sqrt{3} \leqq a \leqq -1+\sqrt{3}}$

(2) $f(x)=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とおくと $(\alpha \leqq \beta)$

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - 2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (2x^2-2ax-a^2)\,dx - 2\int_{\alpha}^{\beta} 2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \left[\,\frac{2x^3}{3}-ax^2-a^2x\,\right]_{-1}^{1} - 4\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{4}{3}-2a^2+\frac{2}{3}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

ここで，$f(x)=0$ の解は　$x=\dfrac{a\pm\sqrt{3}|a|}{2}$　ゆえに　$\beta-\alpha=\sqrt{3}|a|$

よって　$S(a)=\dfrac{4}{3}-2a^2+\dfrac{2}{3}(\sqrt{3}|a|)^3=\boldsymbol{2\sqrt{3}|a|^3-2a^2+\dfrac{4}{3}}$

(3) (1),(2) の結果から

$$S(a) = 2\sqrt{3}|a|^3 - 2|a|^2 + \frac{4}{3} \quad (|a| \leqq \sqrt{3} - 1)$$

$u = |a|$ とし，$g(u) = 2\sqrt{3}u^3 - 2u^2 + \dfrac{4}{3}$ とおくと $(0 \leqq u \leqq \sqrt{3} - 1)$

$$g'(u) = 6\sqrt{3}u^2 - 4u = 6\sqrt{3}u\left(u - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$

このとき，$\sqrt{3} - 1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{9} = \dfrac{7\sqrt{3} - 9}{9} = \dfrac{\sqrt{147} - \sqrt{81}}{9} > 0$ に注意して

u	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\cdots$	$\sqrt{3}-1$
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$u = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，すなわち，$\boldsymbol{a = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$ のとき，$S(a)$ は最小となる． ■

2 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{0}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{OR}} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 1$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{POQ} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \angle\mathrm{POQ} = \frac{2\pi}{3}$$

同様に　$\angle\mathrm{QOR} = \angle\mathrm{ROP} = \dfrac{2\pi}{3}$

したがって　$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ} = \mathrm{OR} = 1$，$\angle\mathrm{POQ} = \angle\mathrm{QOR} = \angle\mathrm{ROP} = \dfrac{2\pi}{3}$

P，Q，R は相異なる点であるから，△PQR は正三角形である．

(2) 命題 (i) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ より $\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OBH}\equiv\triangle\mathrm{OCH}$

したがって $|\overrightarrow{\mathrm{HA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HC}}|$ $\cdots$①

$\triangle$ABC の重心を G とすると $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

上式を $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ に代入すると $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$

O から平面 ABC 上の点 G までの距離が OH に等しいから G = H

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{HA}}+\overrightarrow{\mathrm{HB}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\vec{0} \quad \cdots②$$

①，② から，(1) と同様の計算により

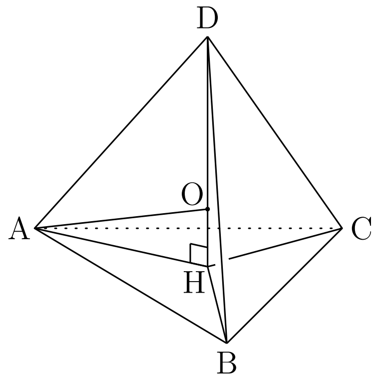
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{HA}}||\overrightarrow{\mathrm{HB}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{HB}}||\overrightarrow{\mathrm{HC}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{HC}}||\overrightarrow{\mathrm{HA}}|}=-\frac{1}{2}$$

したがって $\angle\mathrm{AHB}=\angle\mathrm{BHC}=\angle\mathrm{CHA}=\dfrac{2\pi}{3}$ $\cdots$③

①，③ および A，B，C は相異なる点より，$\triangle$ABC は正三角形である．

命題 (ii) 条件から

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$$



H は $\triangle$ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

上の 2 式から $3\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$

ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=3\cdot\dfrac{1}{3}=1$

直角三角形 OAH において $\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OH}^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\triangle$ABH において $\mathrm{AB}=\sqrt{3}\mathrm{AH}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$\triangle$ABC は正三角形であるから $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ $\cdots$④

$\triangle$ADH において $\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AH}^2+\mathrm{DH}^2}=\sqrt{\dfrac{8}{9}+\dfrac{16}{9}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

これと ① より $\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ $\cdots$⑤

④，⑤ および A，B，C，D は相異なる点より，四面体 ABCD は正四面体．

■

3 (1) 横の長さが a，縦の長さが b の長方形を $(a,\ b)$ 型とよぶことにする．

$n=3$ のとき，領域 D に含まれる長方形は，$(1,\ 1)$ 型が 3 個，$(2,\ 1)$ 型が 1 個，$(1,\ 2)$ 型が 1 個であるから

$$R(3)=3+1+1=\mathbf{5}$$

$n=4$ のとき，領域 D に含まれる長方形は，$(1,\ 1)$ 型が 6 個，$(2,\ 1)$ 型が 3 個，$(1,\ 2)$ 型が 3 個，$(2,\ 2)$ 型が 1 個，$(3,\ 1)$ 型が 1 個，$(1,\ 3)$ 型が 1 個

$$R(4)=6+3+3+1+1+1=\mathbf{15}$$

(2) 領域 D において，1 辺が x 軸上にある長方形の個数について

$(1,\ k)$ 型の総数は $(k=1,2,\cdots,n-1)$　$1+2+3+\cdots+(n-1)$ 個
$(2,\ k)$ 型の総数は $(k=1,2,\cdots,n-2)$　$1+2+3+\cdots+(n-2)$ 個
$\vdots$
$(n-2,\ k)$ 型の総数は $(k=1,2)$　$1+2$ 個
$(n-1,\ k)$ 型の総数は $(k=1)$　1 個

したがって
$$\begin{aligned}S(n)&=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}j=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}i(i+1)\\&=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n-1}\{i(i+1)(i+2)-(i-1)i(i+1)\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}R(n)&=\sum_{k=1}^{n}S(k)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)\\&=\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)k(k+1)(k+2)-(k-2)(k-1)k(k+1)\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

(4) $R(n)=1001$ より　$\dfrac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)=7\cdot 11\cdot 13$

$$(n-1)n(n+1)(n+2)=11\cdot 12\cdot 13\cdot 14$$

$n \geqq 1$ において，$R(n)$ は単調増加であるから　$\boldsymbol{n=12}$ ■

第 6 章　京都大学

出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	京都大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	数と式										
I	2 次関数			1						2	
	図形と計量		2			2					
	データの分析										
	式と証明					5				1·5	
	複素数と方程式				1		5				
II	図形と方程式									3	
	三角関数		5					4			
	指数関数と対数関数	5			4			2		1	
	微分法と積分法	3·4	1·3	4	2	1	1	1	1·2		1·2
	場合の数と確率	1		5		3	2	5	5	4	5
A	整数の性質			3			3		3		3
	図形の性質		4						4		
	平面上のベクトル			2							
B	空間のベクトル	2			3	4	4	3			4
	数列										
	確率分布と統計				5						

数字は問題番号

6.1　2015 年 (120 分)

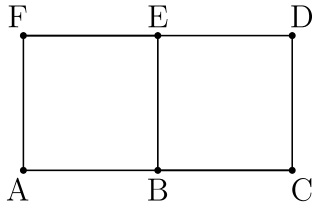
1 直線 $y = px + q$ が，$y = x^2 - x$ のグラフとは交わるが，$y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフとは交わらないような $(p,\ q)$ の範囲を図示し，その面積を求めよ．

2 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものを求めよ．

(a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である．

(b) 半径 1 の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう．

3 6 個の点 A，B，C，D，E，F が右図のように長さ 1 の線分で結ばれているとする．各線分をそれぞれ独立に確率 $\dfrac{1}{2}$ で赤または黒で塗る．赤く塗られた線分だけを通って点 A から点 E に至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする．そのような経路がない場合は X を 0 とする．このとき，$n = 0, 2, 4$ について，$X = n$ となる確率を求めよ．



4 xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える．点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 ℓ と平面 $z = 0$ との交点を R とおく．R の動く範囲を求め，図示せよ．

5 a，b，c，d，e を正の有理数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$g(x) = dx + e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

解答例

1 $y = px + q$ と $y = x^2 - x$ から y を消去すると

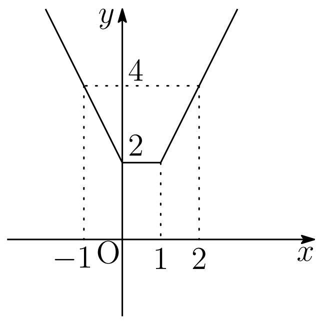
$$px + q = x^2 - x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - (p+1)x - q = 0$$

判別式を D とすると，このとき，$D \geqq 0$ であるから

$$(p+1)^2 + 4q \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2$$

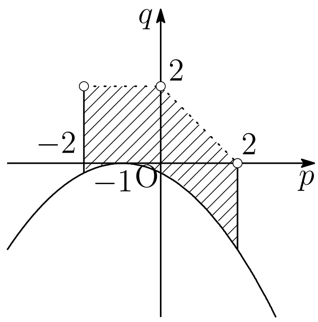
$y = |x| + |x-1| + 1$ は

$$y = \begin{cases} -2x + 2 & (x < 0) \\ 2 & (0 \leqq x < 1) \\ 2x & (1 \leqq x) \end{cases}$$



$f(x) = px + q$ とおくと，直線 $y = f(x)$ が上のグラフと共有点を持たないとき，傾き p に注意して

$$-2 \leqq p \leqq 2$$



上のグラフから，$f(0) < 2$，$f(1) < 2$ であるから

$$q < 2, \quad p + q < 2$$

したがって，$(p,\ q)$ の満たす領域は

$$-2 \leqq p \leqq 2,\ q < 2,\ q < -p + 2,\ q \geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2$$

右の図の斜線分で，点線および ∘ は除く．

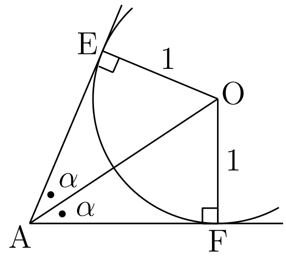
よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2+4)\cdot 2 + \int_{-2}^{2} \frac{1}{4}(p+1)^2\,dp \\ &= 6 + \left[\ \frac{1}{12}(p+1)^3\ \right]_{-2}^{2} = 6 + \frac{1}{12}(3^3 + 1) = \mathbf{\frac{25}{3}} \end{aligned}$$

■

2 右の図の四角形 OEAF について

$$\mathrm{AE}=\mathrm{AF}=\frac{1}{\tan\alpha}$$



四角形 OEAF の面積は　$\dfrac{1}{\tan\alpha}$

条件 (a)，(b) を満たす四角形の 4 つの角の大きさを 2α，2β，2γ，2δ とし，その面積を S とすると

$$S=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}+\frac{1}{\tan\gamma}+\frac{1}{\tan\delta}\quad\cdots(*)$$

一般性を失うことなく　$2\gamma=2\delta=90°$，$2\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta=360°$

上の 2 式から　$\beta=90°-\alpha$，$\gamma=\delta=45°$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan(90°-\alpha)}+\frac{1}{\tan 45°}+\frac{1}{\tan 45°}\\&=\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}+2=\frac{(\tan\alpha-1)^2}{\tan\alpha}+4\geqq 4\end{aligned}$$

よって，S は $\alpha=45°$，すなわち，四角形 ABCD が正方形のとき，最小値　**4**

■

3 $X=2$ となるのは，A → B → E または A → F → E の経路があるときで，それぞれの事象を R，S とすると

$$\begin{aligned}P(X=2)&=P(R\cup S)=P(R)+P(S)-P(R\cap S)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\mathbf{\frac{7}{16}}\end{aligned}$$

A → B → C → D → E，B → E の経路がある事象をそれぞれ Y，Z とすると

$$\begin{aligned}P(X=4)&=P(Y\cap\overline{Z}\cap\overline{S})=P(Y)P(\overline{Z})P(\overline{S})\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\mathbf{\frac{3}{128}}\end{aligned}$$

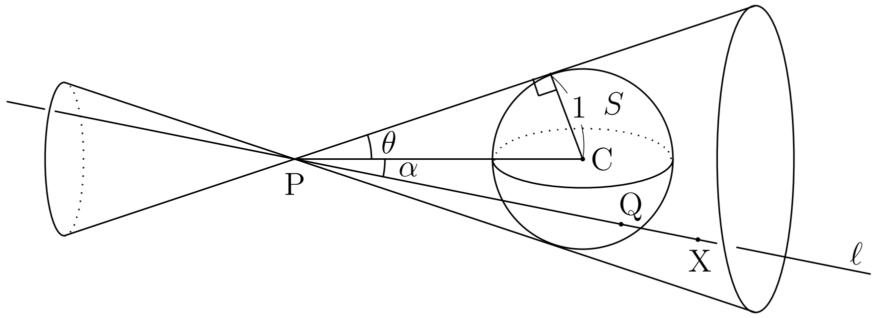
$P(X=0)+P(X=2)+P(X=4)=1$ であるから

$$\begin{aligned}P(X=0)&=1-P(X=2)-P(X=4)\\&=1-\frac{7}{16}-\frac{3}{128}=\mathbf{\frac{69}{128}}\end{aligned}$$

■

4 球面 S の中心 $(0,\ 0,\ 1)$ を C とし，S に接する P を頂点とする円錐面の母線と PC のなす角を θ とする．直線 ℓ 上の点を $\mathrm{X}(x,\ y,\ z)$ とし，PC と PX のなす角を α とすると

$$0 \leqq \alpha \leqq \theta, \quad \pi - \theta \leqq \alpha \leqq \pi \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\alpha \geqq \cos^2\theta$$



$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ より　$\mathrm{PC} = \sqrt{2}$　ゆえに　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = (-1,\ 0, -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PX}} = (x-1,\ y,\ z-2)$，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PX}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PX}}|} = \cos\alpha$ より

$$\frac{3-x-z}{\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2}} = \cos\alpha$$

したがって　$\dfrac{(3-x-z)^2}{2\{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2\}} = \cos^2\alpha \geqq \cos^2\theta = \dfrac{1}{2}$

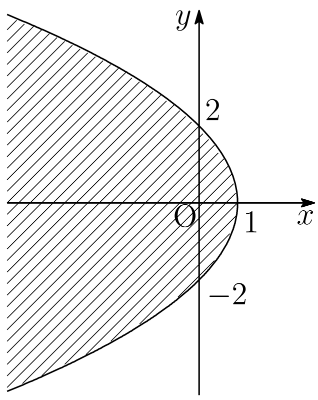
ゆえに　$(3-x-z)^2 - \{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2\} \geqq 0$

この図形の xy 平面 $(z=0)$ 上の領域は

$$(3-x)^2 - \{(x-1)^2+y^2+(-2)^2\} \geqq 0$$

よって　$\boldsymbol{x \leqq -\dfrac{1}{4}y^2 + 1}$

R の動く範囲は，右の図の斜線部分で，境界を含む．



別解 R$(X,\ Y,\ 0)$ とおくと，Q は直線 PR 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OR}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= t(X,\ Y,\ 0) + (1-t)(1,\ 0,\ 2) \\ &= (tx+1-t,\ tY,\ 2-2t)\end{aligned}$$

また，Q は球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 上の点であるから

$$\begin{aligned}\{t(X-1)+1\}^2+(tY)^2+(1-2t)^2=1 \\ \{(X-1)^2+Y^2+4\}t^2+2(X-3)t+1=0\end{aligned}$$

$t \neq 0$，$(X-1)^2+Y^2+4 \neq 0$ に注意して，上式の t に関する係数について

$$(X-3)^2-\{(X-1)^2+Y^2+4\}\cdot 1 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad X \leqq -\frac{1}{4}Y^2+1$$

よって，R の動く範囲は　$x \leqq -\dfrac{1}{4}y^2+1$ ■

$\boxed{5}$ $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を $px+q$，余りを $r \neq 0$ (p，q，r は有理数) とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = px+q+\frac{r}{g(x)}, \quad p=\frac{a}{d}>0$$

したがって　$\dfrac{f(n)}{g(n)} = pn+q+\dfrac{r}{g(n)}$

$p=\dfrac{A}{B}$，$q=\dfrac{C}{D}$ とおくと ($A,\ B,\ C,\ D$ は整数)

$$\left|BD\cdot\frac{f(n)}{g(n)}-ADn-BC\right| = \left|\frac{rBD}{g(n)}\right| \quad \cdots (*)$$

$d>0$ より，$g(n)=dn+e$ は十分大きな n に対し，

$$0<\left|\frac{rBD}{g(n)}\right|<1$$

となり，$(*)$ の左辺が整数であることに反する．

よって，$r=0$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる． ■

6.2　2016 年 (120 分)

1 xy 平面内の領域

$$x^2+y^2 \leqq 2, \quad |x| \leqq 1$$

で，曲線 $C: y=x^3+x^2-x$ の上側にある部分の面積を求めよ．

2 ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある．「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする．この装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は 36%である．1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには，このボタンを最低何回押せばよいか．必要なら $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を用いてよい．

3 n を 4 以上の自然数とする．数 2，12，1331 がすべて n 進法で表記されているとして，

$$2^{12}=1331$$

が成り立っている．このとき n はいくつか．十進法で答えよ．

4 四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ．

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る．

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう．

5 実数を係数とする 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し，次の条件を考える．

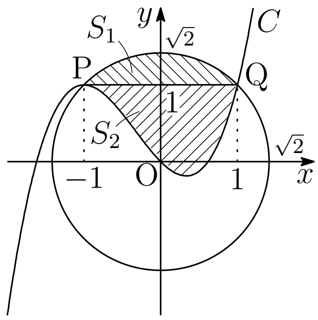
(イ) 方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である．

(ロ) 方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ．

この 2 つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $y = x^3 + x^2 - x$ を微分すると $(-1 \leqq x \leqq 1)$



$$y' = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	1

曲線 C と円 $x^2 + y^2 = 2$ の交点を $\mathrm{P}(-1,\ 1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1)$ とし，直線 PQ の上側で円の内部の面積を S_1，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，直線 PQ と C で囲まれた部分の面積を S_2 とする．$\angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \triangle\mathrm{POQ} = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-1}^{1} \{1 - (x^3 + x^2 - x)\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x+1)^2(1-x)\,dx = \frac{1}{12}\{1-(-1)\}^4 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

求める面積を S とすると　　$S = S_1 + S_2 = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}}$

補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[1]． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

2 「はずれ」が表示される確率を p とすると，ボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」が出る確率が 36% であるから

$$1 - p^{20} = \frac{36}{100} \quad \text{ゆえに} \quad p^{10} = \frac{8}{10} \qquad \cdots①$$

ボタンを n 回押したとき,「あたり」の出る確率が 90% 以上となるとき

$$1 - p^{n} \geqq \frac{90}{100} \quad \text{ゆえに} \quad p^{n} \leqq \frac{1}{10} \qquad \cdots②$$

①，② から p を消去すると

$$\left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{n}{10}} \leqq \frac{1}{10} \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq \frac{10}{1 - 3\log 2} \qquad \cdots③$$

$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3010$ であるから　$\dfrac{967}{10000} < 1 - 3\log 2 < \dfrac{97}{1000}$

したがって　$\dfrac{10000}{97} < \dfrac{10}{1 - 3\log 2} < \dfrac{100000}{967}$

ここで　$\dfrac{10000}{97} = 103 + \dfrac{9}{97},\ \dfrac{100000}{967} = 103 + \dfrac{399}{967}$

よって，③ を満たす最小の自然数 n は　**104**　■

3 $n \geqq 4$ より，n 進法で標記された数 2^{12} と 1331 が等しいから

$$2^{n+2} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{\frac{n+2}{3}} = n + 1 \qquad \cdots(*)$$

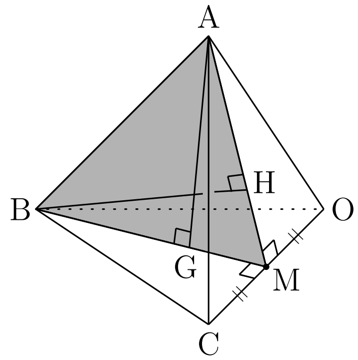
ここで，指数関数 $y = 2^{\frac{x+2}{3}}$ のグラフと直線 $y = x + 1$ の交点は高々2 個.

このとき，$x + 2 \equiv 0 \pmod 3$ に注意して，交点の x 座標を求めると

$$x = 1,\ 7$$

よって，$(*)$ を満たす 4 以上の自然数 n は　**7**　■

4 辺 CO の中点を M とし，△OBC，△OAC の重心をそれぞれ G，H とする．
AG は平面 OBC と垂直であるから，$\mathrm{AG} \perp \mathrm{CO}$．
BH は平面 OAC と垂直であるから，$\mathrm{BH} \perp \mathrm{CO}$．
ゆえに，CO は平面 ABM と垂直である．
したがって　$\mathrm{AC} = \mathrm{AO},\ \ \mathrm{BC} = \mathrm{BO} \quad \cdots (*)$
また，辺 BO の中点をとり，同様の議論を行うと，$(*)$ の B と C を交換して



$$\mathrm{AB} = \mathrm{AO},\ \ \mathrm{CB} = \mathrm{CO} \quad \cdots (**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$\mathrm{AO} = \mathrm{AB} = \mathrm{AC},\ \ \mathrm{OB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CO} \quad \cdots (*\,*\,*)$

$\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MH}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{GA}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{GA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MA}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{GA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2 = 0, \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2 = 0$$

上の 2 式から　$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$　すなわち　$\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$

したがって　$\triangle\mathrm{ACM} \equiv \triangle\mathrm{BCM}$　ゆえに　$\mathrm{AC} = \mathrm{BC}$

これと $(*\,*\,*)$ より，四面体のすべての辺の長さが等しいので，四面体 OABC は正四面体である． ■

5 3 次方程式 $f(x)=0$ の解を $\alpha,\ \overline{\alpha},\ k$ とする (α を虚数，k を実数).

(i) α^3 が実数のとき　$\alpha^3=k$，$k^3=k$
α は虚数であるから，$k\neq 0$ であることに注意して　$k=\pm 1$
$k=1$ のとき　$\alpha^3=1$　ゆえに　$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$
$\alpha\neq 1$ であるから，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから

$$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$$

$k=-1$ のとき　$\alpha^3=-1$　ゆえに　$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$
$\alpha\neq -1$ であるから，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2-x+1=0$ の解であるから

$$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$$

(ii) α^3 が虚数のとき　$\alpha^3=\overline{\alpha}$，$k^3=k$
第 1 式から　$\alpha^4=\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$　ゆえに　$\alpha=\pm\sqrt{|\alpha|}\,i$
$|\alpha|^2=|\alpha|$ となるから　$|\alpha|=1$　すなわち　$\alpha=\pm i$
したがって，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2+1=0$ の解
$k^3=k$ より，$k=0,\ \pm 1$ であるから

$$f(x)=(x-k)(x^2+1)\quad (k=0,\ 1,-1)$$

(i)，(ii) より，求める $f(x)$ は

$$\boldsymbol{x^3-1,\ x^3+1,\ x^3+x,\ x^3-x^2+x-1,\ x^3+x^2+x+1}$$

■

6.3 2017年(120分)

1 曲線 $y = x^3 - 4x + 1$ を C とする．直線 l は C の接線であり，点 $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通るものとする．また，l の傾きは負であるとする．このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

2 次の問に答えよ．ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることをは用いてよい．

(1) 100桁以下の自然数で，2以外の素因数をもたないものの個数を求めよ．

(2) 100桁の自然数で，2と5以外に素因数を持たないものの個数を求めよ．

3 座標空間において原点Oと点 $\mathrm{A}(0, -1,\ 1)$ を通る直線を l とし，点 $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 1)$ と点 $\mathrm{C}(-2,\ 2, -3)$ を通る直線を m とする．l 上の2点P，Qと，m 上の点Rを $\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形となるようにとる．このとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積が最小となるようなP，Q，Rの座標を求めよ．

4 p，q を自然数，α，β を

$$\tan\alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan\beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 次の条件

$$\text{(A)} \quad \tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ のうち，$q \leqq 3$ であるものをすべて求めよ．

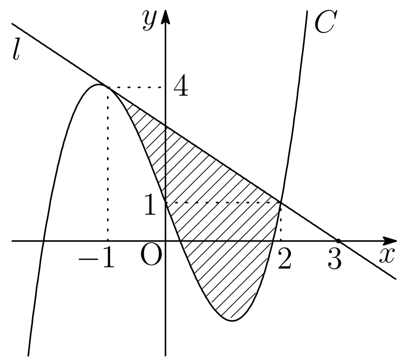
(2) 条件(A)を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ で，$q > 3$ であるものは存在しないことを示せ．

5 n を2以上の自然数とする．さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M - L$ を X とする．

(1) $X = 1$ である確率を求めよ．

(2) $X = 5$ である確率を求めよ．

解答例



$\boxed{1}$ $f(x) = x^3 - 4x + 1$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - 4t + 1) = (3t^2 - 4)(x - t)$$

すなわち　$y = (3t^2 - 4)x - 2t^3 + 1 \quad \cdots (*)$

これが点 $(3,\ 0)$ を通るから

$$(3t^2 - 4)\cdot 3 - 2t^3 + 1 = 0 \quad ゆえに \quad (t+1)(2t^2 - 11t + 11) = 0$$

$f'(-1) = -1 < 0$ であるから，$t = -1$ は条件を満たす．

$2t^2 - 11t + 11 = 0$ のとき，$t^2 = \dfrac{11}{2}(t-1)$，$t = \dfrac{11 \pm \sqrt{33}}{4}$ より

$$\begin{aligned} f'(t) = 3t^2 - 4 = 3\cdot\frac{11}{2}(t-1) - 4 &= \frac{33}{8}\left(4t - 4 - \frac{32}{33}\right) \\ &= \frac{33}{8}\left\{(11 \pm \sqrt{33}) - 4 - \frac{32}{33}\right\} = \frac{33}{8}\left\{(6 \pm \sqrt{33}) + \frac{1}{33}\right\} > 0 \end{aligned}$$

したがって，条件を満たすのは，$t = -1$ に限る．$(*)$ より　$l : y = -x + 3$

$$\begin{aligned} (-x+3) - (x^3 - 4x + 1) &= -(x^3 - 3x - 2) \\ &= -(x+1)^2(x-2) = (x+1)^2(2-x) \end{aligned}$$

C と l の共有点の x 座標は　$x = -1,\ 2$

$-1 \leqq x \leqq 2$ において　$(-x+3) - (x^3 - 4x) = (x+1)^2(2-x) \geqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^{2} (x+1)^2(2-x)\,dx = \frac{1}{12}\{2-(-1)\}^4 = \mathbf{\frac{27}{4}}$$

補足　次の公式[2] に $m = 2$，$n = 1$，$\alpha = -1$，$\beta = 2$ を代入する．

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

2 (1) 100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数を持たない数は

$$1 \leqq 2^m < 10^{100} \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

辺々の常用対数をとると

$$0 \leqq m\log_{10} 2 < 100 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq m < \frac{100}{\log_{10} 2} \quad \cdots (*)$$

$$\frac{100}{0.3011} < \frac{100}{\log_{10} 2} < \frac{100}{0.3010},\quad \frac{100}{0.3011} = 332.1\cdots,\quad \frac{100}{0.3010} = 332.2\cdots$$

$(*)$ を満たす整数は　$0 \leqq m \leqq 332$　よって，求める個数は　**333 個**

(2) 100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数を持たない数 N は

$$N = 2^p \cdot 5^q \quad (p,\ q \text{ は } 0 \text{ 以上の整数},\ 10^{99} \leqq N < 10^{100})$$

(i) $p \geqq q$ のとき，$p = q + m$ とおくと　$N = 2^{q+m} \cdot 5^q = 2^m \cdot 10^q$
100 桁以下の自然数 2^m について，N が 100 桁の自然数となるのとき，
(1) で求めたそれぞれの m に対して，一意に q が定まる．
したがって，これらの個数は 333 個．

(ii) $p \leqq q$ のとき，$q = p + n$ とおくと　$N = 2^p \cdot 5^{p+n} = 5^n \cdot 10^p$
100 桁以下の自然数で，5 以外の素因数を持たない数は

$$1 \leqq 5^n < 10^{100} \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

辺々の常用対数をとると

$$0 \leqq n\log_{10} 5 < 100 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq n < \frac{100}{\log_{10} 5}$$

100 桁以下の自然数 5^n について，N が 100 桁の自然数となるのとき，
それぞれの n に対して，一意に p が定まる．

$$0 \leqq n < \frac{100}{\log_{10} 5} \quad \cdots (**)$$

$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2$　ゆえに　$0.6989 < \log_{10} 5 < 0.6990$

$$\frac{100}{0.6990} < \frac{100}{\log_{10} 5} < \frac{100}{0.6989},\quad \frac{100}{0.6990} = 143.06\cdots,\quad \frac{100}{0.6989} = 143.08\cdots$$

$(**)$ を満たす整数は　$0 \leqq n \leqq 143$　これらの個数は 144 個．

$p = q = 99$ は (i)，(ii) で重複しているから　$333 + 144 - 1 =$ **476 (個)**

■

3 原点 O と点 A$(0, -1,\ 1)$ を通る直線 l 上の点 $(x,\ y,\ z)$ は，媒介変数 s を用いて

$$(x,\ y,\ z) = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (0, -s,\ s) \quad \cdots ①$$

B$(0,\ 2,\ 1)$，C$(-2,\ 2, -3)$ より $\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-2,\ 0, -4) = -2(1,\ 0,\ 2)$

2 点 B，C を通る直線 m 上の点 $(x,\ y,\ z)$ は，媒介変数 t を用いて

$$(x,\ y,\ z) = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t(1,\ 0,\ 2) = (t,\ 2,\ 2t+1) \quad \cdots ②$$

①，② を同時に満たす $(x,\ y,\ z)$ は存在しない．

P$(0, -p,\ p)$，Q$(0, -q,\ q)$，R$(r,\ 2,\ 2r+1)$ とおくと $(p \neq q)$

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= 2(p-q)^2,\\ \mathrm{PR}^2 &= r^2 + (p+2)^2 + (2r+1-p)^2,\\ \mathrm{QR}^2 &= r^2 + (q+2)^2 + (2r+1-q)^2\end{aligned}$$

$\mathrm{PR}^2 - \mathrm{QR}^2 = 0$ であるから

$$\begin{aligned}(p+2)^2 - (q+2)^2 + (2r+1-p)^2 - (2r+1-q)^2 &= 0\\ (p+q+4)(p-q) + (4r+2-p-q)(-p+q) &= 0\\ (p-q)(2p+2q-4r+2) &= 0\end{aligned}$$

$p \neq q$ であるから，$r = \dfrac{1}{2}(p+q+1) \cdots ③$ より

$$\mathrm{PR}^2 = \frac{1}{4}(p+q+1)^2 + (p+2)^2 + (q+2)^2$$

$\mathrm{PR}^2 - \mathrm{PQ}^2 = 0$ であるから

$$\frac{1}{4}(p+q+1)^2 + (p+2)^2 + (q+2)^2 - 2(p-q)^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

ここで $\quad (p+q+1)^2 = (p+q)^2 + 2(p+q) + 1,$

$$\begin{aligned}(p+2)^2 + (q+2)^2 &= p^2 + q^2 + 4(p+q) + 8\\ &= \frac{1}{2}\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} + 4(p+q) + 8\end{aligned}$$

これらの 2 式を $(*)$ に代入して整理すると

$$(p+q)^2 - 2(p-q)^2 + 6(p+q) + 11 = 0$$

したがって $\quad \mathrm{PQ}^2 = 2(p-q)^2 = (p+q+3)^2 + 2$

正三角形 PQR の面積が最小になるとき，PQ^2 が最小となるから

$p+q+3 = 0,\ \ |p-q| = 1$ これを解いて $(p,\ q) = (-1, -2),\ (-2, -1)$

③ より $r = -1$ よって R$\mathbf{(-1,\ 2, -1)}$，P，Q は $\mathbf{(0,\ 1, -1)}$，$\mathbf{(0,\ 2, -2)}$

別解 O，A$(0,-1,\ 1)$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,-1,\ 1)$

B$(0,\ 2,\ 1)$，C$(-2,\ 2,-3)$ より $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 0,-4)=-2(1,\ 0,\ 2)$

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，2 直線 l，m の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{u}=(0,-1,\ 1)$，$\vec{v}=(1,\ 0,\ 2)$ とおく．l 上の点 S を $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\vec{u}$，$m$ 上の点 T を $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\vec{b}+t\vec{v}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}=-s\vec{u}+t\vec{v}+\vec{b}$$

ST が最小となるとき，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ST}}=0$，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ST}}=0$ であるから

$$\vec{u}\cdot(-s\vec{u}+t\vec{v}+\vec{b})=0,\quad \vec{v}\cdot(-s\vec{u}+t\vec{v}+\vec{b})=0$$

したがって $\quad s\vec{u}\cdot\vec{u}-t\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{b},\quad s\vec{u}\cdot\vec{v}-t\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{b}$

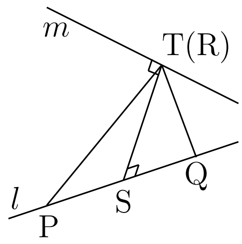
すなわち $2s-2t=-1,\ \ 2s-5t=2$ これを解いて $s=-\dfrac{3}{2},\ t=-1$

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}}=\frac{3}{2}\vec{u}-\vec{v}+\vec{b}=\frac{3}{2}(0,-1,\ 1)-(1,\ 0,\ 2)+(0,\ 2,\ 1)=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{ST}=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

S は P，Q の中点で，T を R にとればよい．

このとき $\mathrm{SP}=\mathrm{SQ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{ST}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{1}{2}\vec{u}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=-\dfrac{3}{2}\vec{u}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\frac{1}{2}\vec{u}&=-\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{u}=-\vec{u}=(0,\ 1,-1),\\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}-\frac{1}{2}\vec{u}&=-\frac{3}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}=-2\vec{u}=(0,\ 2,-2)\end{aligned}$$

よって R$\boldsymbol{(-1,\ 2,-1)}$，P，Q は $\boldsymbol{(0,\ 1,-1)}$，$\boldsymbol{(0,\ 2,-2)}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ より，$q=1$ のとき，$\beta = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ (n は整数) であるから

$$\tan(\alpha+2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -p\ (\neq 2)$$

したがって　$q \neq 1$

$\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ $(q \neq 1)$ より　$\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \dfrac{2\cdot\dfrac{1}{q}}{1-\dfrac{1}{q^2}} = \dfrac{2q}{q^2-1}$

正接の加法定理により

$$\tan\alpha = \tan\{(\alpha+2\beta)-2\beta\} = \frac{\tan(\alpha+2\beta)-\tan 2\beta}{1+\tan(\alpha+2\beta)\tan 2\beta}$$

条件により　$\dfrac{1}{p} = \dfrac{2-\dfrac{2q}{q^2-1}}{1+2\cdot\dfrac{2q}{q^2-1}} = \dfrac{2(q^2-q-1)}{q^2+4q-1}$　ゆえに　$p = \dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}$

$q=2$ のとき $p = \dfrac{11}{2}$，$q=3$ のとき $p=2$　よって　$\boldsymbol{(p,\ q) = (2,\ 3)}$

(2) (1) の計算から　$2p-1 = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$

$2p-1$ は正の奇数，$q^2-q-1 = q(q-2)+q-1 > 0$ より $(q \geqq 2)$

$$\frac{5q}{q^2-q-1} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad q^2-6q-1 \leqq 0$$

したがって　$|q-3| \leqq \sqrt{10}$

これを満たす自然数 q は　$q = 2, 3, 4, 5, 6$

(1) の結果に注意すると，$q = 4, 5, 6$ について調べればよい．

ここで，$f(q) = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$ とすると

$$f(4) = \frac{20}{11},\quad f(5) = \frac{25}{19},\quad f(6) = \frac{30}{29}$$

よって，$q > 3$ であるものは存在しない．■

5　(1)　$X=1$ となるのは　$(L,\ M)=(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$

$(L,\ M)=(2,\ 1)$ であるとき，n 回とも 1 または 2 で，n 回とも 1 のときと n 回とも 2 のときを除くから

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

他の場合も同様であるから，求める確率は

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\boldsymbol{5\left(\frac{1}{3}\right)^n-10\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

(2)　$X=5$ となるのは　$(L,\ M)=(1,\ 6)$

$L=1$，$M=6$ となる事象をそれぞれ A，B とすると

$$P(A)=P(B)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

また　$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=\left(\frac{4}{6}\right)^n$$

ゆえに　$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}+\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}-\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\\&=\boldsymbol{1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}\end{aligned}$$

■

6.4　2018 年 (120 分)

1 a は正の実数とし，座標平面内の点 $(x_0,\ y_0)$ は 2 つの曲線

$$C_1 : y = |x^2 - 1|, \quad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり，$|x_0| \neq 1$ を満たすとする．C_1 と C_2 が $(x_0,\ y_0)$ で共通の接線をもつとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

2 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，辺 BC 上に B とは異なる点 P を取り，線分 AP の垂直 2 等分線が辺 AB，辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q，R とする．

(1) 線分 QR の長さを $\sin \angle \mathrm{BAP}$ を用いて表せ．

(2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ．

3 $n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

4 四面体 ABCD は AC = BD，AD = BC を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする．

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ．

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける．このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ．

5 整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して，次の一連の操作を考える．ただし各球に書かれている整数は 1 つのみとする．

(i) 袋から無作為に球を 1 個取り出し，その球に書かれている整数を k とする．

(ii) $k \neq 0$ の場合，整数 k が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．

(iii) $k = 0$ の場合，袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より 1 大きい整数が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．

整数 0 が書かれている球が 1 個入っており他の球が入っていない袋を用意する．この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に，袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする．例えば X_1 は常に 1 である．以下 $n \geqq 2$ として次の問に答えよ．

(1) $X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ．

(2) $X_n \leqq n + 1$ である確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $f(x)=|x^2-1|$，$g(x)=x^2-2ax+2$ とおくと

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & (|x|>1) \\ -2x & (|x|<1) \end{cases}, \quad g'(x)=2x-2a$$

$f(x_0)=g(x_0)$，$f'(x_0)=g'(x_0)$ であるから

(i) $|x_0|>1$ のとき

$$x_0{}^2-1=x_0{}^2-2ax_0+2, \quad 2x_0=2x_0-2a$$

上の第 2 式から，$a=0$ となり，$a>0$ に反するので不適．

(ii) $|x_0|<1$ のとき

$$-x_0{}^2+1=x_0{}^2-2ax_0+2, \quad -2x_0=2x_0-2a$$

整理すると $\begin{cases} 2x_0{}^2-2ax_0+1=0 \\ x_0=\dfrac{a}{2} \end{cases}$

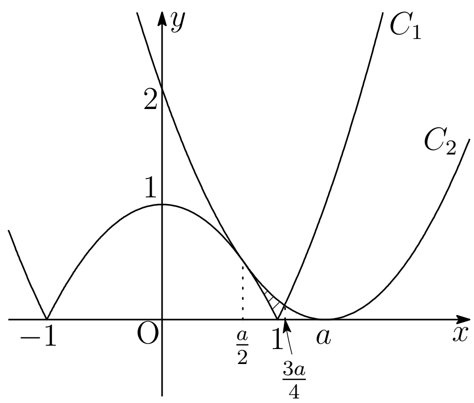
上の第 2 式を第 1 式に代入すると $-\dfrac{a^2}{2}+1=0$

$a>0$ および $|x_0|<1$ に注意して $a=\sqrt{2}$，$x_0=\dfrac{a}{2}$

$C_1: y=|x^2-1|$ と $C_2: y=(x-a)^2$ の接点以外の共有点の x 座標は

$$x^2-1=(x-a)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{a^2+1}{2a}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{3a}{4}$$

求める面積は，下の図の斜線部分の面積である．

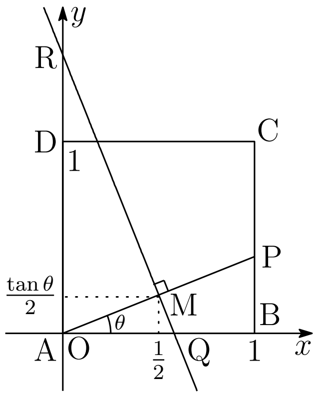


よって，求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} \{(x-a)^2 - |x^2-1|\}\,dx \\
&= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} (x-a)^2\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^{1} (x^2-1)\,dx - \int_{1}^{\frac{3a}{4}} (x^2-1)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{\frac{a}{2}}^{1} - \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{\frac{3a}{4}} \\
&= -\frac{7a^3}{48} + \frac{5a}{4} - \frac{4}{3} = \boldsymbol{\frac{23}{24}\sqrt{2} - \frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$

■

2 (1) $\theta = \angle\mathrm{BAP}$ とし $(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{4})$，正方形 ABCD を右の図のように座標平面にとる．線分 AP の中点を $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\tan\theta}{2}\right)$ とすると，AP の垂直二等分線は，M を通り傾き $-\dfrac{1}{\tan\theta}$ の直線であるから



$$y - \frac{\tan\theta}{2} = -\frac{1}{\tan\theta}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

すなわち　$y = -\dfrac{x}{\tan\theta} + \dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}$　$\cdots(*)$

$(*)$ の方程式から　$\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\right)$

$(*)$ に $y=0$ を代入すると　$x = \dfrac{1}{2\cos^2\theta}$　ゆえに　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2\cos^2\theta},\ 0\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \dfrac{1}{2\cos\theta}\left(-\dfrac{1}{\cos\theta},\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{QR} = |\overrightarrow{\mathrm{QR}}| &= \frac{1}{2\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}} \\
&= \frac{1}{2\sin\theta\cos^2\theta} = \frac{1}{2\sin\theta(1-\sin^2\theta)} \quad \cdots(*)
\end{aligned}
$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{QR} = \dfrac{1}{2\sin\angle\mathrm{BAP}(1-\sin^2\angle\mathrm{BAP})}}$

(2) $t=\sin\theta$ とすると　$0<t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$f(t)=2t(1-t^2)$ とおくと　$f'(t)=2-6t^2=2(1-3t^2)$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(*)$ より，線分 QR の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$ ■

3 与えらえた整式を変形すると

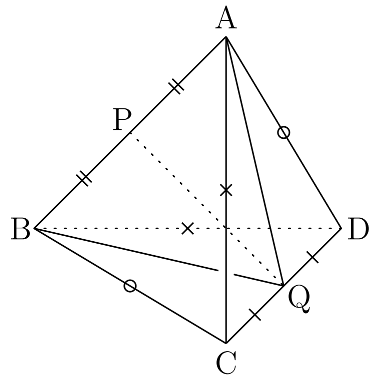
$$n^3-7n+9=(n-1)n(n+1)-3(2n-3)\quad\cdots(*)$$

連続する 3 整数の積 $(n-1)n(n+1)$ は 3 の倍数であるから，$(*)$ は 3 の倍数である．これが素数であるとき，その値は 3 であるから

$$n^3-7n+9=3\quad \text{ゆえに}\quad (n-1)(n-2)(n+3)=0$$

よって，求める整数 n は　$\boldsymbol{n=1,\ 2,\ -3}$ ■

4　(1) $\triangle\mathrm{ACD}$ と $\triangle\mathrm{BDC}$ について



$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD},\ \mathrm{AD} = \mathrm{BC},\ \mathrm{CD}\text{ は共通}$$

3 辺相等により　$\triangle\mathrm{ACD} \equiv \triangle\mathrm{BDC}$

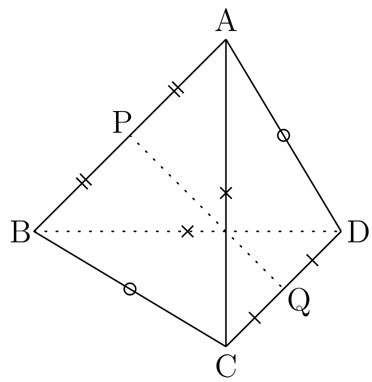
したがって　$\angle\mathrm{ACQ} = \angle\mathrm{BDQ}$

$\triangle\mathrm{ACQ}$ と $\triangle\mathrm{BDQ}$ について，2 辺夾角相等により　$\triangle\mathrm{ACQ} \equiv \triangle\mathrm{BDQ}$

したがって　$\mathrm{AQ} = \mathrm{BQ}$

よって，PQ は二等辺三角形 ABQ の中線であるから　$\mathrm{AB} \perp \mathrm{PQ}$

別解
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})$$



$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{0}$ に注意して，上の 2 式の辺々を加えて 2 倍すると

$$4\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

したがって

$$\begin{aligned}
4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}) + (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}}) \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2
\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0\quad\text{よって}\quad \mathrm{AB}\perp\mathrm{PQ}$$

補足　同様にして

$$\begin{aligned}
4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} &= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} + (\overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) + (\overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2
\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0\quad\text{よって}\quad \mathrm{CD}\perp\mathrm{PQ}$$

(2) $\triangle$ABC と $\triangle$ABD について

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD},\ \mathrm{BC} = \mathrm{AD},\ \mathrm{AB}\ は共通$$

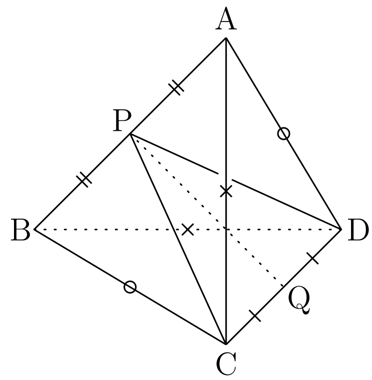
3辺相等により　$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \mathrm{ABD}$

したがって　$\angle\mathrm{CAP} = \angle\mathrm{DBP}$

$\triangle$CAP と $\triangle$DBP について，2辺夾角相等により　$\triangle\mathrm{CAP} \equiv \triangle\mathrm{DBP}$

したがって　$\mathrm{CP} = \mathrm{DP}$

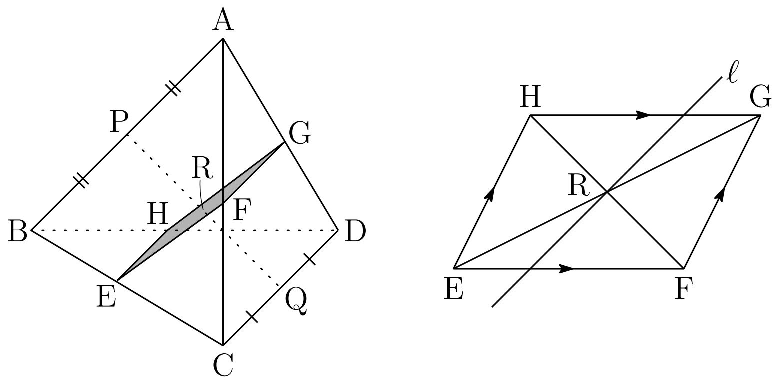
よって，PQ は二等辺三角形 CDP の中線であるから　$\mathrm{CD} \perp \mathrm{PQ}$



線分 PQ 上に点 R とり，R を通り線分 PQ に垂直な平面と辺 BC，AC，AD，BD との交点を，それぞれ，E，F，G，H とすると

$$\mathrm{BA}/\!/\mathrm{EF},\quad \mathrm{BA}/\!/\mathrm{HG},\quad \mathrm{CD}/\!/\mathrm{EH},\quad \mathrm{CD}/\!/\mathrm{FG}$$

ゆえに　EF//HG，EH//FG　すなわち　四角形 EFGH は平行四辺形



PQ を含む平面 α と平行四辺形 EFGH との交線を ℓ とすると，ℓ によって平行四辺形 EFGH の面積は二等分される．

よって，α によって，四面体 ABCD の体積は二等分される．■

$\boxed{5}$ (1) (i) n 回とも整数 0 が書かれた球を取り出すとき

$$X_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \geqq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdots\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n!}$

(ii) $n-1$ 回目まで整数 0 が書かれた球を取り出し，n 回目に整数 $n-1$ が書かれた球を取り出すとき

$$\begin{aligned} X_n &= 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n - 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2} \end{aligned}$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdots\dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n!}$

(i),(ii) 以外のとき，$X_n < \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ となるから，求める確率は

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} = \boldsymbol{\frac{2}{n!}}$$

(2) (i) 2 回目以降すべて整数 1 が書かれた球を取り出すとき

$$X_n = 0 + \overbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}^{n\text{ 個}} = n \leqq n + 1$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$

(ii) 2 回目以降，j 回目だけ整数 0 が書かれた球を取り出し，j 回目以外はすべて整数 1 が書かれた球を取り出すとき ($j = 2, 3, \cdots, n$)

$$X_n = 0 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \overset{j\text{ 回目}}{2} + 1 + \cdots + 1 = n + 1$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{j-2}{j-1}\cdot\dfrac{1}{j}\cdot\dfrac{j-1}{j+1}\cdots\dfrac{n-2}{n} = \dfrac{(n-2)!}{n!}$

(i),(ii) 以外のとき，$X_n > n + 1$ となるから，求める確率は

$$\frac{1}{n} + \frac{(n-2)!}{n!}\cdot(n-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \boldsymbol{\frac{2}{n}}$$

6.5　2019 年 (120 分)

1 次の各問に答えよ．

(1) a は実数とする．x に関する整式 $x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2$ を整式 x^3+x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とする．$R(x)$ の x の 1 次の項の係数が 1 のとき，a の値を定め，さらに $Q(x)$ と $R(x)$ を求めよ．

(2) 8.94^{18} の整数部分は何桁か．また最高位からの 2 桁の数字を求めよ．例えば，12345.6789 の最高位からの 2 桁は 12 を指す．

2 a は実数とし，b は正の定数とする．x の関数 $f(x)=x^2+2(ax+b|x|)$ の最小値 m を求めよ．さらに，a の値が変化するとき，a の値を横軸に，m の値を縦軸にとって m のグラフをかけ．

3 a，b，c は実数とする．次の命題が成立するための，a と c がみたすべき必要十分条件を求めよ．さらに，この $(a,\ c)$ の範囲を図示せよ．

命題：すべての実数 b に対して，ある実数 x が不等式 $ax^2+bx+c<0$ をみたす．

4 1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，$X_2, \cdots, X_n$ とする．このとき次の条件をみたす確率を n を用いて表せ．ただし $X_0=0$ としておく．

条件：$1 \leqq k \leqq n$ をみたす k のうち，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような k の値はただ 1 つである．

5 半径 1 の球面上の 5 点 A，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{B_3}$，$\mathrm{B_4}$ は，正方形 $\mathrm{B_1B_2B_3B_4}$ を底面とする四角錐をなしている．この 5 点が球面上を動くとき，四角錐 $\mathrm{AB_1B_2B_3B_4}$ の体積の最大値を求めよ．

常用対数表は次ページにある．

常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで掲載している．

常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで掲載している．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2=(x^3+x^2+x+1)(x^2+x+a-2)$
$+(3-a)x^2+(4-a)x+4-a$

$R(x)$ の 1 次の項の係数が 1 であるから

$$4-a=1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=3}$$

よって　$\boldsymbol{Q(x)=x^2+x+1,\ \ R(x)=x+1}$

補足 $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ であるから，法 x^3+x^2+x+1 について

$$x^4\equiv 1,\quad x^5\equiv x,\quad x^3\equiv -x^2-x-1,$$

$$\begin{aligned}x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2 &\equiv x+2\cdot 1+a(-x^2-x-1)+3x^2+3x+2\\ &\equiv (3-a)x^2+(4-a)x+4-a\end{aligned}$$

したがって　$R(x)=(3-a)x^2+(4-a)x+4-a$

(2) 常用対数表から，$0.95125\leqq \log_{10}8.94<0.95135$ であるから

$$\begin{aligned}18\times 0.95125 \leqq 18\log_{10}8.94 &< 18\times 0.95135\\ 17.1225\leqq \log_{10}8.94^{18} &< 17.1243\\ 10^{0.1225}\times 10^{17}\leqq 8.94^{18} &< 10^{0.1243}\times 10^{17}\end{aligned}$$

常用対数表から，$\log_{10}1.32<0.12065$，$0.12705\leqq\log_{10}1.34$ であるから

$$1.32\times 10^{17}<8.94^{18}<1.34\times 10^{17}$$

よって　整数部分の桁数は　**18 桁**，最高位の 2 桁は　**13**　■

2　$g(x) = x^2 + 2(a+b)x$，$h(x) = x^2 + 2(a-b)x$ とおくと

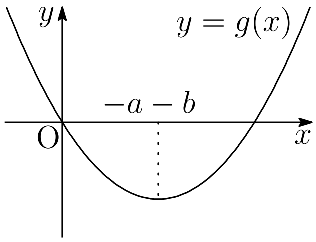
$$f(x) = x^2 + 2(ax + 2b|x|) = \begin{cases} g(x) & (x \geqq 0) \\ h(x) & (x \leqq 0) \end{cases}$$

(i)　$g(x) = (x+a+b)^2 - (a+b)^2$ であるから $(x \geqq 0)$

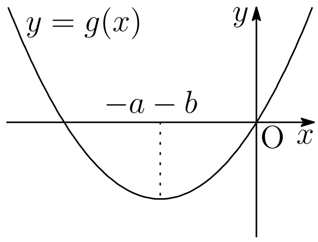
$-a-b \geqq 0$，すなわち，$a \leqq -b$ のとき　$m = g(-a-b) = -(a+b)^2$

$-a-b \leqq 0$，すなわち，$-b \leqq a$ のとき　$m = g(0) = 0$

$a \leqq -b$ のとき



$-b \leqq a$ のとき

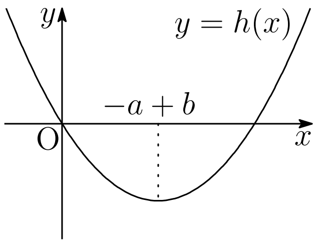


(ii)　$h(x) = (x+a-b)^2 - (a-b)^2$ であるから $(x \leqq 0)$

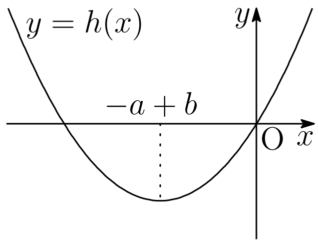
$-a+b \geqq 0$，すなわち，$a \leqq b$ のとき　$m = h(0) = 0$

$-a+b \leqq 0$，すなわち，$b \leqq a$ のとき　$m = h(-a+b) = -(a-b)^2$

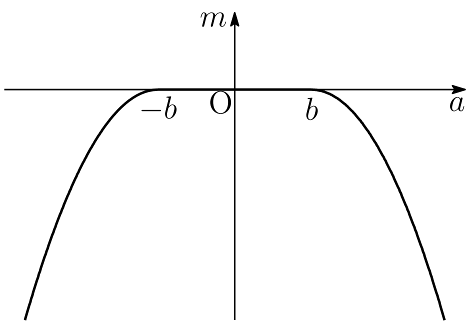
$a \leqq b$ のとき



$b \leqq a$ のとき



(i)，(ii) の結果から　$m = \begin{cases} -(a+b)^2 & (a \leqq -b) \\ 0 & (-b \leqq a \leqq b) \\ -(a-b)^2 & (b \leqq a) \end{cases}$



3 関数 $y = ax^2 + bx + c \quad \cdots (*)$

(i) $a < 0$ のとき，放物線 $(*)$ は，b，c の値に関係なく，$y < 0$ を満たす x が存在する．

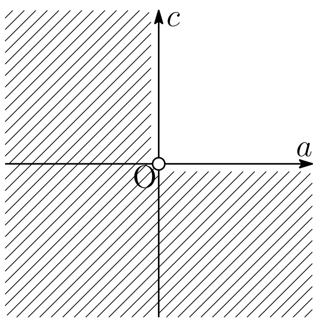
(ii) $a = 0$ のとき，直線 $y = bx + c$ は，すべての b について，$c < 0$ のとき，$y < 0$ を満たす x $(x = 0)$ が存在する．

(iii) $a > 0$ のとき，放物線 $(*)$ が，$y < 0$ を満たす x をもつとき，係数について

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{ゆえに} \quad ac < \frac{b^2}{4}$$

すべての実数 b について，上式が成立するから　$ac < 0$　ゆえに　$c < 0$

(i)〜(iii) から　　$\boldsymbol{a < 0}$ **または「$\boldsymbol{a \geqq 0}$ かつ $\boldsymbol{c < 0}$」**



■

4 連続して i 回 4 以下の事象を A_i，連続して j 回 5 以上の事象を B_j とすると，$A_iB_jA_k$ の順に起きる確率であるから $(i, k \geqq 0,\ j \geqq 1,\ i + j + k = n)$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i,k\geqq 0, j\geqq 1,\\ i+j+k=n}} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{\substack{i\geqq 0, k\geqq 0,\\ i+k\leqq n-1}} \frac{2^{i+k}}{3^n} = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \sum_{i=0}^{n-k-1} 2^i \\
&= \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k(2^{n-k} - 1) = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2^n - 2^k) \\
&= \frac{1}{3^n}\{n\cdot 2^n - (2^n - 1)\} = \boldsymbol{\frac{(n-1)\cdot 2^n + 1}{3^n}}
\end{aligned}$$

■

5 原点Oを中心とする球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上に 4 点 $(\pm a, \pm a,\ b)$ および点 $(0,\ 0,\ 1)$ の 5 点を頂点する四角錐の体積 V とすると $(a>0)$

$$2a^2+b^2=1, \quad V=\frac{1}{3}(2a)^2(1-b)=\frac{4}{3}a^2(1-b)$$

a を消去すると　$V=\dfrac{2}{3}(1-b^2)(1-b)=\dfrac{2}{3}(1+b)(1-b)^2 \quad \cdots ①$

$-1<b<1$ であるから，3 正数 $2(1+b)$，$1-b$，$1-b$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2(1+b)+(1-b)+(1-b)}{3} \geqq \sqrt[3]{2(1+b)(1-b)^2}$$

したがって　$(1+b)(1-b)^2 \leqq \dfrac{32}{27} \quad \cdots ②$

② で等号が成立するとき　$2(1+b)=1-b$　すなわち　$b=-\dfrac{1}{3}$

①，② より　$V \leqq \dfrac{64}{81}$　よって，最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$ ■

6.6　2020 年 (120 分)

1 a を負の実数とする．xy 平面上で曲線 $C : y = |x|x - 3x + 1$ と直線 $\ell : y = x + a$ のグラフが接するときの a の値を求めよ．このとき，C と ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ．

2 x の 2 次関数で，そのグラフが $y = x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ．ただし，2 つの関数のグラフがある点で直交するとは，その点が 2 つのグラフの共有点であり，かつ接線どうしが直交することをいう．

3 a を奇数とし，整数 m，n に対して

$$f(m,\ n) = mn^2 + am^2 + n^2 + 8$$

とおく．$f(m,\ n)$ が 16 で割り切れるような整数の組 $(m,\ n)$ が存在するための a の条件を求めよ．

4 k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A，B，C，D が次の関係式を満たしている．

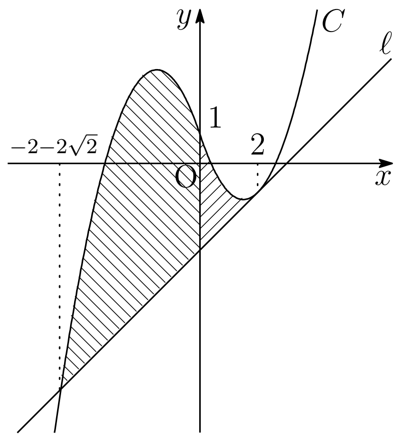
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{\sqrt{6}}{4},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k.$$

このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す．

5 縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1，2，3，4 の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

解答例



$\boxed{1}$ $x>0$ のとき，$C: y=x^2-3x+1$ と $\ell: y=x+a$ から y を消去すると

$$x^2-3x+1=x+a$$

整理すると　$x^2-4x+1-a=0$　$\cdots$①

C と ℓ が接するとき，係数について

$$D/4=(-2)^2-1\cdot(1-a)=0$$

$a<0$ に注意して解くと　$a=-3$

このとき ① の解は　$x=2$

$x<0$ のとき，$C: y=-x^2-3x+1$ と $\ell: y=x+a$ から，y を消去すると

$$-x^2-3x+1=x+a \quad \text{ゆえに} \quad x^2+4x+a-1=0$$

C と ℓ が接するとき，係数について

$$D/4=2^2-1\cdot(a-1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=5$$

これは，$a<0$ に反するので，不適．よって，求める負の値 a は　$\boldsymbol{a=-3}$

$x<0$ において，$C: y=-x^2-3x+1$ と $\ell: y=x-3$ の共有点の x 座標は

$$-x^2-3x+1=x-3 \quad \text{ゆえに} \quad x^2+4x-4=0$$

$x<0$ に注意して，これを解くと　$x=-2-2\sqrt{2}$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-2-2\sqrt{2}}^{0}\{-x^2-3x+1-(x-3)\}\,dx \\
&\qquad\qquad + \int_0^2\{x^2-3x+1-(x-3)\}\,dx \\
&= \int_{-2-2\sqrt{2}}^{0}\{-(x+2)^2+8\}\,dx+\int_0^2(x-2)^2\,dx \\
&= \Big[-\frac{1}{3}(x+2)^3+8x\Big]_{-2-2\sqrt{2}}^{0}+\Big[\frac{1}{3}(x-2)^3\Big]_0^2 \\
&= \boldsymbol{\frac{32}{3}\sqrt{2}+16}
\end{aligned}$$

■

2 $f(x)=px^2+qx+r$ とすると $(p\neq 0)$　$f'(x)=2px+q$

$y=f(x)$ と $y=x^2$ のグラフが 2 点 $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ で直交するとき $(\alpha\neq\beta)$

$$\left\{\begin{array}{l} f(\alpha)=\alpha^2 \\ f(\beta)=\beta^2 \end{array}\right. \quad \text{ゆえに} \quad (*)\left\{\begin{array}{l} p\alpha^2+q\alpha+r=\alpha^2 \\ p\beta^2+q\beta+r=\beta^2 \end{array}\right.$$

また，$y=x^2$ より，$y'=2x$ であるから

$$\left\{\begin{array}{l} 2\alpha f'(\alpha)=-1 \\ 2\beta f'(\beta)=-1 \end{array}\right. \quad \text{ゆえに} \quad (**)\left\{\begin{array}{l} 2\alpha(2p\alpha+q)=-1 \\ 2\beta(2p\beta+q)=-1 \end{array}\right.$$

$(*)$ より，$\alpha,\ \beta$ は次の 2 次方程式の解である．

$$pt^2+qt+r=t^2 \quad \text{すなわち} \quad (p-1)t^2+qt+r=0 \quad \cdots ①$$

また，$(**)$ より，$\alpha,\ \beta$ は次の 2 次方程式の解である．

$$2t(2pt+q)=-1 \quad \text{すなわち} \quad 4pt^2+2qt+1=0 \quad \cdots ②$$

①，② は，それぞれ，$p-1\neq 0$，$p\neq 0$ に注意して

$$t^2+\frac{q}{p-1}t+\frac{r}{p-1}=0, \quad t^2+\frac{q}{2p}t+\frac{1}{4p}=0$$

となり，これらの方程式は一致するから

$$(\mathrm{A}) \quad \frac{q}{p-1}=\frac{q}{2p}, \quad \frac{r}{p-1}=\frac{1}{4p}$$

(A) の第 1 式から　$\dfrac{q(p+1)}{p(p-1)}=0$　ゆえに　$q=0$　または　$p=-1$

(i) $q=0$ のとき，(A) の第 2 式から　$r=\dfrac{p-1}{4p}$

① から，方程式は

$$(p-1)t^2+\frac{p-1}{4p}=0 \quad \text{すなわち} \quad t^2=-\frac{1}{4p}$$

これが異なる 2 つの実数解をもつから　$-\dfrac{1}{4p}>0$　ゆえに　$p<0$

(ii) $p=-1$ のとき　これを (A) の第 2 式に代入して　$r=\dfrac{1}{2}$

① から，方程式は　$-2t^2+qt+\dfrac{1}{2}=0$　判別式は　$D=q^2+4>0$

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{y=px^2+\frac{p-1}{4p}\ (p<0), \quad y=-x^2+qx+\frac{1}{2}\ (q\text{ は任意の実数})}$$

■

3 $f(m,\ n) = mn^2 + am^2 + n^2 + 8$ (a は奇数) は，法 2 について

$$
\begin{array}{lll}
m \equiv 0,\ n \equiv 0 \text{ のとき} & f(m,\ n) \equiv 0 & \pmod 2 \\
m \equiv 1,\ n \equiv 0 \text{ のとき} & f(m,\ n) \equiv a \equiv 1 & \pmod 2 \\
m \equiv 0,\ n \equiv 1 \text{ のとき} & f(m,\ n) \equiv 1 & \pmod 2 \\
m \equiv 1,\ n \equiv 1 \text{ のとき} & f(m,\ n) \equiv 1 & \pmod 2
\end{array}
$$

したがって，$m,\ n$ が共に偶数であることが $f(m,\ n)$ が 16 で割り切れるための必要条件である．そこで，$m = 2M$，$n = 2N$ とおくと (M，N は偶数)

$$f(m,\ n) = 4(2MN^2 + aM^2 + N^2 + 2)$$

このとき，整数 M，N に対して

$$g(M,\ N) = 2MN^2 + aM^2 + N^2 + 2$$

が 4 で割り切れるような整数の組 $(M,\ N)$ が存在するための a の条件を求めればよい．一般に，法 4 について

$$K \equiv 0,\ 2 \text{ のとき } K^2 \equiv 0, \quad K \equiv 1,\ 3 \text{ のとき } K^2 \equiv 1 \pmod 4$$

すなわち

$$K \text{ が偶数のとき } K^2 \equiv 0, \quad K \text{ が奇数のとき } K^2 \equiv 1 \pmod 4$$

これから，$g(M,\ N) = 2MN^2 + aM^2 + N^2 + 2$ (a は奇数) は，法 4 について

$$
\begin{array}{rlll}
\text{(i)} & M,\ N \text{ がともに偶数のとき} & g(M,\ N) \equiv 2 & \pmod 4 \\
\text{(ii)} & M \text{ が偶数，} N \text{ が奇数のとき} & g(M,\ N) \equiv 3 & \pmod 4 \\
\text{(iii)} & M \text{ が奇数，} N \text{ が偶数のとき} & g(M,\ N) \equiv a + 2 & \pmod 4 \\
\text{(iv)} & M,\ N \text{ がともに奇数のとき} & g(M,\ N) \equiv a + 1 & \pmod 4
\end{array}
$$

a は奇数であるから，$g(M,\ N)$ が 4 で割り切れるのは，(iv) の場合である．

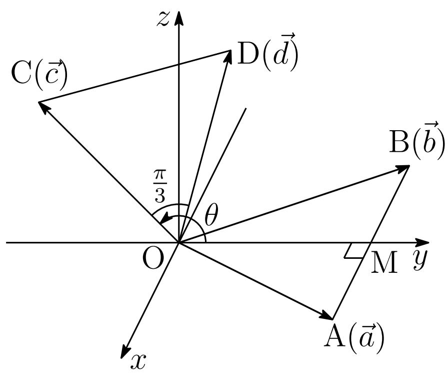
$$a + 1 \equiv 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a \equiv 3 \pmod 4}$$

■

4 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$

とおくと　$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{d} = \frac{1}{2}$$



$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2$$
$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = 1,$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2 = |\vec{d} - \vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{d} + |\vec{c}|^2$$
$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = 1$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}| = 1$ より，△OAB，△OCD は，正三角形である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

A，B を xy 平面上の点とすると，C，D は yz 平面上の点である．

辺 AB の中点を M とすると，$\mathrm{OM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}) = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角は　$\dfrac{3\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の内積は　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{d} = \dfrac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d}) = k > 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角は，鋭角であるから　$\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{12}$

よって　$k = \overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = |\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}}$

別解 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく．

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ より，2 つのベクトル $\vec{a} + \vec{b}$，$\vec{a} - \vec{b}$ は垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{1}{2}$ より

$$|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2 \pm 1 \quad (\text{複号同順})$$

直交する 2 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$ を次のようにおく．

$$\vec{e} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a} + \vec{b}), \quad \vec{f} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{|\vec{a} - \vec{b}|} = \vec{a} - \vec{b}$$

$\vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e} - (\vec{c}\cdot\vec{f})\vec{f}$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ より

$$\vec{c}\cdot\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{c}\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\vec{c}\cdot\vec{f} = \vec{c}\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

したがって，ベクトル $\vec{c} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\,\vec{c} + \vec{e})$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．

$$\left|\sqrt{2}\vec{c} + \vec{e}\right|^2 = 2|\vec{c}|^2 + 2\sqrt{2}\,\vec{c}\cdot\vec{e} + |\vec{e}|^2 = 2 + 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 1$$

$\vec{g} = \sqrt{2}\,\vec{c} + \vec{e}$ とおくと，3 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$，$\vec{g}$ は互いに直交する．

$$\vec{d}\cdot\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{d}\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{\sqrt{3}}k, \quad \vec{d}\cdot\vec{f} = \vec{d}\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = 0,$$
$$\vec{d}\cdot\vec{g} = \vec{d}\cdot(\sqrt{2}\,\vec{c} + \vec{e}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}k$$

$\vec{d} = (\vec{d}\cdot\vec{e})\vec{e} + (\vec{d}\cdot\vec{f})\vec{f} + (\vec{d}\cdot\vec{g})\vec{g}$ より $\quad \vec{d} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}k\vec{e} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)\vec{g}$

$|\vec{d}|^2 = 1$ であるから $\qquad \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2 = 1$

整理すると $\quad 8k^2 + 2\sqrt{6}k - \dfrac{3}{2} = 0 \quad$ これを解いて $\quad k = \dfrac{-\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2}}{8}$

条件より，$k > 0$ であるから $\qquad \boldsymbol{k = \dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}}$ ■

5 1 行目に A，B，C，D を固定し，本題の条件を満たすように，2 行目〜4 行目を並べたとき，行ごと入れ替えても，条件は満たされる．そこで，第 2 行第 1 列目から第 4 行第 1 列目までを上から順に，B，C，D とすると，第 2 行第 2 列に配置する文字 X (X = A，C，D) の場合に分けてその総数を求める．

<table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td colspan="4">2 行 目</td></tr>
<tr><td colspan="4">3 行 目</td></tr>
<tr><td colspan="4">4 行 目</td></tr>
</table>

A	B	C	D
B	**X**		
C			
D			

第 2 行第 2 列に配置される A，C，D の場合の数は，それぞれ，2, 1, 1 通りある．

A	B	C	D
B	**A**	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	**A**	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

A	B	C	D
B	**C**	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	C	D
B	**D**	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

1，2，3，4 を A，B，C，D に 1 対 1 に対応させる (全単射) 場合の数は 4! 通り．
2 行目〜4 行目までの入れ替えの総数は 3! 通り．これと場合分けの総数により

$$4! \times 3! \times (2+1+1) = \mathbf{576}\ (\text{通り})$$

■

第 7 章　大阪大学

出題分野 (2011-2020) 90 分

◀	大阪大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数									2	
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明					1					
	複素数と方程式										
	図形と方程式		3	1	1					1	
	三角関数				2				1		3
	指数関数と対数関数	1									
	微分法と積分法	2		3	3	2	2	1·2			1
A	場合の数と確率		1	2					2		
	整数の性質		2				1				
	図形の性質										
B	平面上のベクトル	3				3					
	空間のベクトル								3	3	
	数列						3	3			2
	確率分布と統計										

数字は問題番号

7.1 2015 年

$\boxed{1}$ 実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{2}$ 直線 $\ell : y = kx + m \ (k > 0)$ が円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と放物線 $C_2 : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ の両方に接している．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) k と m を求めよ．

(2) 直線 ℓ と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{3}$ 平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある．2 点 A，B を除く C 上の点 P に対し，AP = AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる．また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle$AQR の面積を $\theta = \angle$PAB を用いて表せ．

(2) 点 P を動かして $\triangle$AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ 実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき

$$
\begin{aligned}
& x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
=& x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2x\sqrt{1-y^2}\cdot y\sqrt{1-x^2} \\
=& \left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \geqq 0, \\
& 1-(x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \\
=& x^2y^2+(1-x^2)(1-y^2)-2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \\
=& \left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって　　$0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$

別解 $x=\cos\alpha$，$y=\cos\beta$ とおくと $(0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi)$

$$
\begin{aligned}
& x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
=& x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
=& \cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\
=& (\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha)^2 = \sin^2(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

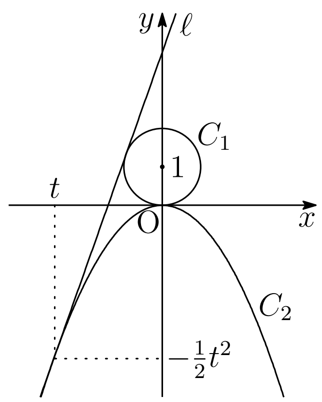
このとき，$0 \leqq \sin^2(\alpha+\beta) \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

■

2　(1) $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ を微分すると　$y'=-x$

C_2 上の点 $\left(t, -\dfrac{1}{2}t^2\right)$ における接線の方程式は



$$y+\frac{1}{2}t^2=-t(x-t)$$

すなわち　　$y=-tx+\dfrac{1}{2}t^2$

これが ℓ に一致するとき　$k=-t$，$m=\dfrac{1}{2}t^2$

上の 2 式より，$m=\dfrac{1}{2}k^2\cdots$ ① であるから　　$\ell: kx-y+\dfrac{1}{2}k^2=0$

このとき，C_1 の中心 $(0,\ 1)$ と ℓ の距離が 1 であるから

$$\frac{|-1+\frac{1}{2}k^2|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(-1+\frac{1}{2}k^2\right)^2=k^2+1$$

整理すると　$\dfrac{1}{4}k^4-2k^2=0$　ゆえに　$k^2(k^2-8)=0$

$k>0$ であるから　$\boldsymbol{k=2\sqrt{2}}$　① より　$\boldsymbol{m=4}$

(2) $k=-t$ であるから，(1) の結果より　$t=-2\sqrt{2}$，$\ell: y=2\sqrt{2}x+4$

求める図形の面積を S とすると

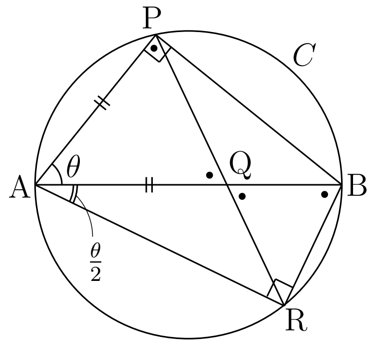
$$\begin{aligned}S&=\int_{-2\sqrt{2}}^{0}\left\{(2\sqrt{2}x+4)-\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{2}}^{0}(x+2\sqrt{2})^2\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x+2\sqrt{2})^3\right]_{-2\sqrt{2}}^{0}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}}\end{aligned}$$

■

3　(1) $\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}$ より　$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{AQP}$

$\overset{\frown}{\mathrm{AR}}$ の円周角により　$\angle\mathrm{APR}=\angle\mathrm{ABR}$

$\angle\mathrm{AQP}=\angle\mathrm{RQB}$ であるから (対頂角)



$$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{AQP}=\frac{\pi-\theta}{2}$$

ゆえに　$\angle\mathrm{BAR}=\angle\mathrm{BPR}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{APQ}=\dfrac{\theta}{2}$

したがって　$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}=2\cos\theta$，$\mathrm{BR}=\mathrm{QR}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\mathrm{AR}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$

よって　
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{AQR}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AR}\sin\angle\mathrm{QAR}\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\cos\theta\sin\theta=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sin 2\theta}\end{aligned}$$

(2) $\triangle\mathrm{APQ}$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\sin\theta}=\frac{2\cos\theta}{\sin\frac{\pi-\theta}{2}}\quad\text{ゆえに}\quad \mathrm{PQ}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

したがって　
$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}&=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}:2\sin\tfrac{\theta}{2}\\&=2\sin\theta\cos\theta:\sin\theta=2\cos\theta:1\end{aligned}$$

ゆえに，点 R は線分 PQ を $(2\cos\theta+1):1$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(2\cos\theta+1)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(2\cos\theta+1)-1}=-\frac{1}{2\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{2\cos\theta+1}{2\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{2\cos\theta}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\frac{1}{2\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{2\cos\theta+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$\triangle\mathrm{AQR}$ を最大にするとき　$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

このとき　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$　■

7.2 2016 年

1 次の問いに答えよ．

(1) a を正の実数とし，k を 1 以上の実数とする．x についての 2 次方程式

$$x^2 - kax + a - k = 0$$

は，不等式

$$-\frac{1}{a} < s \leqq 1$$

をみたすような実数解 s をもつことを示せ．

(2) a を 3 以上の整数とする．$n^2 + a$ が $an + 1$ で割り切れるような 2 以上のすべての整数 n を a を用いて表せ．

2 曲線 $C : y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 6\right| - 2x$ を考える．

(1) C と直線 $L : y = -x + t$ が異なる 4 点で交わるような t の値の範囲を求めよ．

(2) C と L が異なる 4 点で交わるとし，その交点を x 座標が小さいものから順に $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_4}$ とするとき，

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}| + |\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}|} = 4$$

となるような t の値を求めよ．

(3) t が (2) の値をとるとき，C と線分 $\mathrm{P_2P_3}$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

3 1 以上 6 以下の 2 つの整数 a，b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次の条件 (ア)，(イ)，(ウ) で定める．

(ア) $f_1(x) = \sin(\pi x)$

(イ) $f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right)$ $\qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(ウ) $f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x)$ $\qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

以下の問いに答えよ．

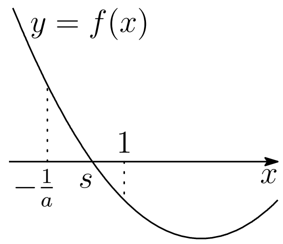
(1) $a = 2$，$b = 3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ．

(2) 1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ．

解答例

1　(1) $f(x) = x^2 - kax + a - k$ とおくと $(a > 0,\ k \geqq 1)$

$$f\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2} + a > 0,$$
$$f(1) = 1 - ka + a - k = (1+a)(1-k) \leqq 0$$



$f(s) = 0$ をみたす $-\dfrac{1}{a} < s \leqq 1$ が存在する．よって，x に関する 2 次方程式 $x^2 - kax + a - k = 0$ は解 s $\left(-\dfrac{1}{a} < s \leqq 1\right)$ をもつ．

(2) $n^2 + a$ が $an + 1$ で割り切れるとき (a は 3 以上の整数，n は 2 以上の整数)，$k = \dfrac{n^2 + a}{an + 1}$ とおくと，k は 1 以上の整数で，次式が成り立つ．

$$n^2 - kan + a - k = 0$$

これから，n は 2 次方程式

$$f(x) = 0 \quad \cdots (*)$$

の解の 1 つである．したがって，(1) で示した s と n は $(*)$ の解であるから，解と係数の関係により

$$s + n = ka \quad \text{ゆえに} \quad s = ka - n \quad \cdots ①$$

このとき，$ka - n$ は整数であるから，s は整数でその値の範囲から

$$s = 0 \quad \text{または} \quad s = 1$$

0 が $(*)$ の解であるとき，$f(0) = a - k = 0$ より　$k = a$

1 が $(*)$ の解であるとき，$f(1) = (1+a)(1-k) = 0$ より　$k = 1$

① より　$(s,\ k) = (0,\ a)$ のとき　$n = a^2$
　　　　$(s,\ k) = (1,\ 1)$ のとき　$n = a - 1$

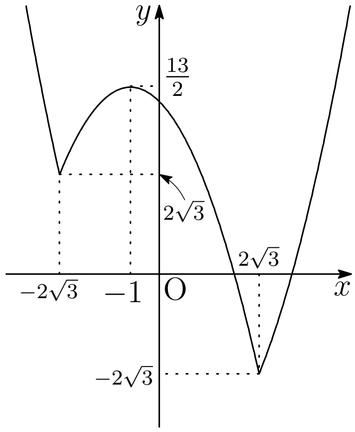
よって　　$\boldsymbol{n = a^2,\ a - 1}$　■

2 (1) $C: y = \left|\dfrac{1}{2}x^2 - 6\right| - 2x$ と $L: y = -x + t$ の

2 式から y を消去すると　$\left|\dfrac{1}{2}x^2 - 6\right| - x = t$

$y = \left|\dfrac{1}{2}x^2 - 6\right| - x \cdots (*)$ のグラフは

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - \dfrac{13}{2} & (|x| \geqq 2\sqrt{3}) \\ -\dfrac{1}{2}(x+1)^2 + \dfrac{13}{2} & (|x| \leqq 2\sqrt{3}) \end{cases}$$



C と L が異なる 4 点で交わるのは，$(*)$ と直線 $y = t$ は異なる 4 点で交わるときであるから

$$\boldsymbol{2\sqrt{3} < t < \frac{13}{2}}$$

(2) x_1，x_4 は $(x_1 < x_4)$

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{13}{2} = t$$

これを解いて　$x_1 = 1 - \sqrt{13 + 2t}$

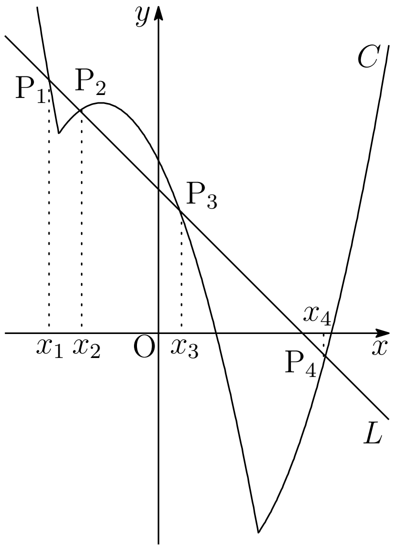
$x_4 = 1 + \sqrt{13 + 2t}$

また，x_2，x_3 は $(x_2 < x_3)$

$$-\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{13}{2} = t$$

これを解いて　$x_2 = -1 - \sqrt{13 - 2t}$

$x_3 = -1 + \sqrt{13 - 2t}$



直線 L の傾きは -1 であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}| = \sqrt{2}(x_2 - x_1),\quad |\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}| = \sqrt{2}(x_3 - x_2),\quad |\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}| = \sqrt{2}(x_4 - x_3)$$

これらを $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}| + |\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}|} = 4$ に代入すると

$$\frac{\sqrt{2}(x_2 - x_1) + \sqrt{2}(x_4 - x_3)}{\sqrt{2}(x_3 - x_2)} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad x_4 - x_1 = 5(x_3 - x_2)$$

したがって　$\sqrt{13 + 2t} = 5\sqrt{13 - 2t}$　これを解いて　$\boldsymbol{t = 6}$

(3) (2) の結果から，$t=6$，$x_2=-2$，$x_3=0$．求める面積を S とすると

$$S=\int_{-2}^{0}\left\{-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{13}{2}-(-x+6)\right\}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x(x+2)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{0-(-2)\}^3=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$

ゆえに　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-(-x)\right)$

$$=f_{2n-1}\left(x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\quad\cdots(*)$$

したがって　$f_5(x)=f_1\left(x+2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right)$

よって，$a=2$，$b=3$ のとき，$x=0$ とすると

$$f_5(0)=f_1\left(\frac{5}{3}\right)=\sin\frac{5}{3}\pi=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $(**)$ より　$f_6(x)=f_1\left(3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)-x\right)$

これに $x=0$ を代入すると，(ア) により

$$f_6(0)=f_1\left(3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)=\sin 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\pi$$

$f_6(0)=0$ となるのは，$3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ が整数になるときで，次の 8 組．

$$(a,b)=(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 6),\ (6,\ 2),\ (3,\ 3),\ (6,\ 6)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{8}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

■

7.3　2017年

1 b，c を実数，q を正の実数とする．放物線 $P : y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ．

2 実数 x，y，z が

$$x + y + z = 1, \quad x + 2y + 3z = 5$$

を満たすとする．

(1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ の最小値を求めよ．

(2) $z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ．

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8{a_n}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく．b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく．数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ 放物線 $y=-x^2+bx+c$ のグラフの頂点の y 座標 q は

$$q=-\frac{b^2-4\cdot(-1)c}{4\cdot(-1)}=\frac{b^2+4c}{4}$$

2次方程式 $-x^2+bx+c=0$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$　$\alpha+\beta=b$　$\alpha\beta=-c$

ゆえに　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=b^2+4c=4q$　したがって　$\beta-\alpha=2\sqrt{q}$

よって　$S=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{q})^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}q\sqrt{q}}$

別解 放物線の頂点を $(p,\ q)$ とすると，x^2 の係数に注意して

$$y=-(x-p)^2+q$$

とおく．この放物線の x 軸との共有点の x 座標は

$$-(x-p)^2+q=0\quad これを解いて\quad x=p\pm\sqrt{q}$$

よって，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{6}\{(p+\sqrt{q})-(p-\sqrt{q})\}^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{q})^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}q\sqrt{q}}$$

■

2 (1) $\begin{cases} x+y=1-z \\ x+2y=5-3z \end{cases}$ ゆえに $(*)\begin{cases} x=z-3 \\ y=-2z+4 \end{cases}$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$,
$x+y+z=1$ より

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \\
&= (z-3)^2+(-2z+4)^2+z^2 \\
&\qquad -(z-3)(-2z+4)-(-2z+4)z-z(z-3) \\
&= 9z^2-33z+37 \\
&= 9\left(z-\frac{11}{6}\right)+\frac{27}{4}
\end{aligned}$$

よって $z=\dfrac{11}{6}$ で，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$ をとる．

(2) $(*)$ より
$$\begin{aligned}
xyz &= (z-3)(-2z+4)z \\
&= -2z^3+10z^2-12z
\end{aligned}$$

$f(z)=-2z^3+10z^2-12z$ とおくと $(z \geqq 0)$

$$f'(z)=-6z^2+20z-12=-2(3z^2-10z+6)$$

$f'(z)=0$ とすると $z=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$

z	0	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(z)$	0	↘	極小	↗	極大	↘

$f(2)=f(3)=0$，$2<\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}<3$ であるから，上の増減表により，xyz が最大となる z の値は

$$\boldsymbol{z=\frac{5+\sqrt{7}}{3}}$$

補足 $f(z)=f'(z)\left(\dfrac{1}{3}z-\dfrac{5}{9}\right)+\dfrac{4}{9}(7z-15)$ より

$$f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{4}{9}\left(7\times\frac{5+\sqrt{7}}{3}-15\right)=\frac{4}{27}(7\sqrt{7}-10)>0$$

■

3 (1) $a_{n+1} = 8{a_n}^2 \cdots (*)$ より　$a_n > 0$ のとき，$a_{n+1} > 0$

$a_1 = 2$ であるから，すべての自然数 n について　$a_n > 0$

$(*)$ の両辺を底を 2 とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8{a_n}^2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + 3$$

よって　　$\boldsymbol{b_{n+1} = 2b_n + 3}$

(2) $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$，(1) の結果から　$b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$

数列 $\{b_n + 3\}$ は，初項 $b_1 + 3 = 4$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n + 3 = 4\cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_n = 2^{n+1} - 3}$$

(3) $P_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$ より

$$\begin{aligned}\log_2 P_n = \log_2 a_1a_2a_3\cdots a_n &= \sum_{k=1}^{n}\log_2 a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}(2^{k+1} - 3) = \frac{2^2(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n \\ &= 2^{n+2} - 3n - 4 \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}}$

(4) $P_n > 10^{100}$ より　$\log_2 P_n > \log_2 10^{100} = 100\log_2 10$

$(*)$ より　$2^{n+2} - 3n - 4 > 100\log_2 10$

ここで　$\log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16$ より　$300 < 100\log_2 10 < 400$

また，$q_n = 2^{n+2} - 3n - 4$ とおくと $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$q_{n+1} - q_n = (2^{n+3} - 3n - 7) - (2^{n+2} - 3n - 4) = 2^{n+2} - 3 > 0$$

$\{q_n\}$ は単調増加列であることに注意して

$$q_6 = 2^8 - 3\cdot 6 - 4 = 234, \quad q_7 = 2^9 - 3\cdot 7 - 4 = 487$$

よって，求める最小の自然数 n は　**7** ■

7.4 2018 年

1 関数 $f(t) = (\sin t - \cos t)\sin 2t$ を考える．

(1) $x = \sin t - \cos t$ とおくとき，$f(t)$ を x を用いて表せ．

(2) t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき，$f(t)$ の最大値と最小値を求めよ．

2 1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする．

(1) $\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx = 0$ である確率を求めよ．

(2) a，b が 2 以上かつ $2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1$ である確率を求めよ．

3 座標空間に 6 点

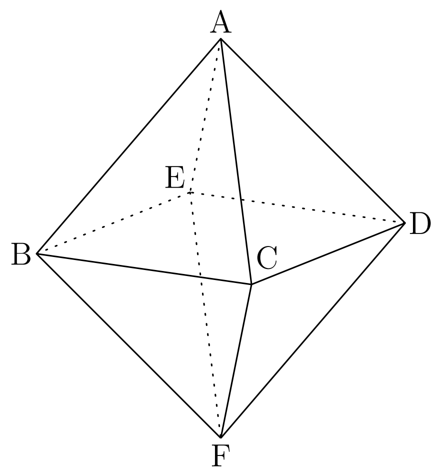
$$\mathrm{A}(0,0,1),\ \mathrm{B}(1,0,0),\ \mathrm{C}(0,1,0),\ \mathrm{D}(-1,0,0),\ \mathrm{E}(0,-1,0),\ \mathrm{F}(0,0,-1)$$

を頂点とする正八面体 ABCDEF がある．s，t を $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ を満たす実数とする．線分 AB，AC をそれぞれ $1-s : s$ に内分する点を P，Q とし，線分 FD，FE をそれぞれ $1-t : t$ に内分する点を R，S とする．

(1) 4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあることを示せ．

(2) 線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする．s，t が $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ．

(3) 正八面体 ABCDEF の 4 点 P，Q，R，S を通る平面による切り口の面積を X とする．線分 LM の長さが (2) の値 m をとるとき，X を最大とするような s，t の値と，そのときの X の値を求めよ．



解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x = \sin t - \cos t$ より

$$x^2 = 1 - 2\sin t\cos t = 1 - \sin 2t \quad ゆえに \quad \sin 2t = 1 - x^2$$

よって $f(t) = (\sin t - \cos t)\sin 2t = x(1 - x^2) = \boldsymbol{-x^3 + x}$

(2) $x = \sin t - \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ より $(0 \leqq t \leqq \pi)$

$$-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}$$

$y = -x^3 + x$ とすると $(-1 \leqq x \leqq \sqrt{2})$

$$y' = -3x^2 + 1 = -3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

よって 最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$，最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{2}}$ ■

2　(1)
$$\begin{aligned}\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx &= \int_a^c (x-a)\{(x-a)+(a-b)\}\,dx\\ &= \int_a^c (x-a)^2\,dx + (a-b)\int_a^c (x-a)\,dx\\ &= \frac{1}{3}(c-a)^3 + \frac{1}{2}(a-b)(c-a)^2\\ &= \frac{1}{6}(c-a)^2(a-3b+2c)\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx = 0$ であるとき　$(c-a)^2(a-3b+2c)=0$

したがって　　$a=c$　または　$a+2c=3b$

(i) $a=c$ のとき　6^2 通り

(ii) $a+2c=3b$ のとき，次の 12 通り

$b=1$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 1)$

$b=2$ のとき　$(a,\ c)=(4,\ 1),\ (2,\ 2)$

$b=3$ のとき　$(a,\ c)=(5,\ 2),\ (3,\ 3),\ (1,\ 4)$

$b=4$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 3),\ (4,\ 4),\ (2,\ 5)$

$b=5$ のとき　$(a,\ c)=(5,\ 5),\ (3,\ 6)$

$b=6$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 6)$

(iii) $a=c$ かつ $a+2c=3b$ すなわち $a=b=c$ のとき　6 通り

(i)〜(iii) より，求める確率は　$\dfrac{6^2+12-6}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{7}{36}}$

(2) $2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1$ より　$2\log_a b - 2\log_a c + \dfrac{\log_a c}{\log_a b} = 1$

ゆえに　　$(2\log_a b - 1)(\log_a b - \log_a c) = 0$

したがって　$a = b^2$　または　$b = c$　$(a \geqq 2,\ b \geqq 2)$

(i) $a = b^2$ のとき　次の 6 通り

$$(a,\ b,\ c) = (4,\ 2,\ i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

(ii) $b = c$ のとき　次の 5^2 通り

$$(a,\ b,\ c) = (j,\ k,\ k) \quad (j, k = 2, 3, 4, 5, 6)$$

(iii) $a = b^2$ かつ $b = c$ すなわち $(a,\ b,\ c) = (4,\ 2,\ 2)$ の 1 通り

(i)〜(iii) より，求める確率は　$\dfrac{6 + 5^2 - 1}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$　■

3 (1) $\vec{a} = (0, 0, 1)$，$\vec{b} = (1, 0, 0)$，$\vec{c} = (0, 1, 0)$ とすると，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$，$\mathrm{D}(-\vec{b})$，$\mathrm{E}(-\vec{c})$，$\mathrm{F}(-\vec{a})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{b}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{c}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{c}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)(\vec{c} - \vec{b}) = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{SR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OS}} = (t-1)(\vec{b} - \vec{c}) = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{SR}}$ であるから，4 点 P，Q，R，S は同一平面上にある．

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}}}{2} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} = -(s+t)\vec{a} + \frac{1}{2}(s+t-2)(\vec{b}+\vec{c})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \left(\dfrac{s+t-2}{2},\ \dfrac{s+t-2}{2}, -(s+t)\right)$

ここで，$s+t=2u$ とおくと $(0<u<1)$　$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = (u-1,\ u-1, -2u)$

$$\begin{aligned} m^2 = |\overrightarrow{\mathrm{LM}}|^2 &= (u-1)^2 + (u-1)^2 + (-2u)^2 \\ &= 6u^2 - 4u + 2 = 6\left(u - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

よって，$u=\dfrac{1}{3}$，すなわち，$s+t=\dfrac{2}{3}$ のとき，m は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

(3) 直線 LM と xy 平面との交点を H とすると，$\vec{a}$ の係数に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{t\overrightarrow{\mathrm{OL}} + s\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{s+t} = \frac{t(1-s)+s(t-1)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$

したがって

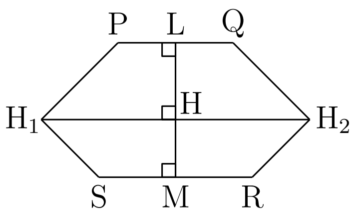
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{HL}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) \\ &= s\vec{a} + \frac{s(2-s-t)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}), \\ \overrightarrow{\mathrm{HM}} &= -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) \\ &= -t\vec{a} + \frac{t(s+t-2)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) \end{aligned}$$

$s+t=\dfrac{2}{3}$ を上の 2 式に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{HL}} = s(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (s,\ s,\ s),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = -t(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (-t, -t, -t)$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{HL}}| = \sqrt{3}s$，$|\overrightarrow{\mathrm{HM}}| = \sqrt{3}t$

平面 PQRS と線分 BE，CD のとの交点をそれぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{2}$

(1) の結果から　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = (1-s)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-s)\sqrt{2}$，

$|\overrightarrow{\mathrm{SR}}| = (1-t)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-t)\sqrt{2}$

X は 2 つの台形 $\mathrm{PH_1H_2Q}$，$\mathrm{H_1SRH_2}$ の和であるから

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}(\mathrm{PQ} + \mathrm{H_1H_2})\mathrm{HL} + \frac{1}{2}(\mathrm{SR} + \mathrm{H_1H_2})\mathrm{HM} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(1-s)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\}\sqrt{3}s + \frac{1}{2}\left\{(1-t)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\}\sqrt{3}t \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t = \frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t) - (s^2+t^2)\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\{4(s+t) - (s+t)^2 - (s-t)^2\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{4\cdot\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - (s-t)^2\right\} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{\frac{20}{9} - (s-t)^2\right\}
\end{aligned}$$

よって，$s-t=0$，すなわち，$s=t=\dfrac{1}{3}$ のとき，X は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{6}}{9}}$ ■

7.5　2019年

1 xy 平面において，連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi, \quad 2\sin(x+y) - 2\cos(x+y) \geqq \sqrt{2}$$

の表す領域を D とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

2 p を実数の定数とする．x の2次方程式

$$x^2 - (2p + |p| - |p+1| + 1)x + \frac{1}{2}(2p + 3|p| - |p+1| - 1) = 0$$

について以下の問いに答えよ．

(1) この2次方程式は実数解をもつことを示せ．

(2) この2次方程式が異なる2つの実数解 α，β をもち，かつ $\alpha^2 + \beta^2 \leqq 1$ となるような定数 p の値の範囲を求めよ．

3 座標空間内の2つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$

と

$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

を考える．S_1 と S_2 の共通部分を C とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ．

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ．

解答例

1 (1) $2\sin(x+y)-2\cos(x+y) \geqq \sqrt{2}$ より

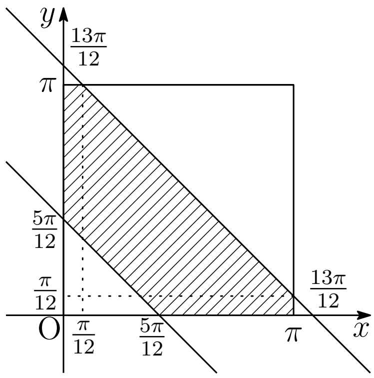
$$\sin\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right) \geqq \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \pi$ より，
$0 \leqq x+y \leqq 2\pi$ に注意して

$$\frac{\pi}{6} \leqq x+y-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{5\pi}{6}$$

したがって，D の表す不等式は

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi, \quad \frac{5\pi}{12} \leqq x+y \leqq \frac{13\pi}{12}$$



よって，領域 D は，右の図の斜線部分で，境界線を含む．

(2) $2x+y=k$ とおくと　$y=-2x+k$
これは，傾き -2，切片 k の直線を表す．
D において，k が最大・最小となるのは，それぞれ

$$x=\pi, \quad y=\frac{\pi}{12} \text{のとき}\quad \text{最大値}\ \boldsymbol{\frac{25}{12}\pi}$$
$$x=0, \quad y=\frac{5\pi}{12} \text{のとき}\quad \text{最小値}\ \boldsymbol{\frac{5}{12}\pi}$$

■

2 (1) 2 次方程式

$$x^2-(2p+|p|-|p+1|+1)x+\frac{1}{2}(2p+3|p|-|p+1|-1)=0 \quad \cdots(*)$$

において

$$|p|=\begin{cases} p & (p \geqq 0) \\ -p & (p<0) \end{cases} \qquad |p+1|=\begin{cases} p+1 & (p \geqq -1) \\ -p-1 & (p<-1) \end{cases}$$

したがって，次の (i)〜(iii) の場合分けを行う．

(i) $p<-1$ のとき，2次方程式 $(*)$ は

$$x^2-(2p+2)x=0 \quad これを解いて \quad x=0,\ 2p+2$$

このとき，2次方程式 $(*)$ は実数解をもつ．

(ii) $-1 \leqq p<0$ のとき，2次方程式 $(*)$ は

$$x^2-p-1=0 \quad これを解いて \quad x=\pm\sqrt{p+1} \quad (p+1 \geqq 0)$$

このとき，2次方程式 $(*)$ は実数解をもつ ($p=-1$ のとき重解)．

(iii) $0 \leqq p$ のとき，2次方程式 $(*)$ は

$$x^2-2px+2p-1=0 \quad ゆえに \quad (x-1)(x-2p+1)=0$$

これを解いて　$x=1,\ 2p-1$

このとき，2次方程式 $(*)$ は実数解をもつ ($p=1$ のとき重解)．

(i)〜(iii) より，2次方程式 $(*)$ は，実数解をもつ．

(2) (1) の結果と同じ場合分けを行う．

i) $p<-1$ のとき

$$\alpha^2+\beta^2=0^2+(2p+2)^2 \leqq 1 \quad ゆえに \quad (2p+1)(2p+3) \leqq 0$$

このとき，$p<-1$ に注意して　　$-\dfrac{3}{2} \leqq p<-1$

ii) $-1 \leqq p<0$ のとき

$$\alpha^2+\beta^2=(\sqrt{p+1})^2+(-\sqrt{p+1})^2<1 \quad ゆえに \quad p \leqq -\frac{1}{2}$$

このとき，$-1 \leqq p<0$ に注意して　　$-1 \leqq p \leqq -\dfrac{1}{2}$

iii) $0 \leqq p$ のとき

$$\alpha^2+\beta^2=1^2+(2p-1)^2 \leqq 1 \quad ゆえに \quad (2p-1)^2 \leqq 0$$

このとき，$0 \leqq p$ に注意して　　$p=\dfrac{1}{2}$

i)〜iii) において $p \neq -1,\ 1$ であることに注意して

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq p<-1,\ \ -1<p \leqq -\frac{1}{2},\quad p=\frac{1}{2}}$$

■

3 (1) 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7$$
$$S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

の中心は，それぞれ $(1,\ 1,\ 1)$，$(2,\ 3,\ 3)$ であり，この 2 点間の距離は

$$\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(3-1)^2}=3$$

また，S_1，S_2 の半径は，それぞれ $\sqrt{7}$，1 より

$$\sqrt{7}-1<3<\sqrt{7}+1$$

したがって，S_1 と S_2 の共通部分 C は円である．S_1 と S_2 の方程式から $x^2+y^2+z^2$ の項を消去すると，円 C が存在する次の平面の方程式を得る．

$$2x+4y+4z-25=0$$

これから，S_1 との共通部分が C となる球面の方程式は，実数 k を用いて

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-7+k(2x+4y+4z-25)=0$$
$$(x+k-1)^2+(y+2k-1)^2+(z+2k-1)^2=9k^2+15k+7 \quad \cdots(*)$$

ゆえに　$9k^2+15k+7=9\left(k+\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

球面の半径が最小になるのは，$k=-\dfrac{5}{6}$ ときで，その方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{3}{4}}$$

(2) 球面の半径が $\sqrt{3}$ になるとき　$9k^2+15k+7=3$

ゆえに　$(3k+1)(3k+4)=0$　これを解いて　$k=-\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3}$

上の結果を $(*)$ に代入することにより，求める球面の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3,}$$
$$\boldsymbol{\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3}$$

■

7.6 2020年

1 a を $0 \leqq a < 2\pi$ を満たす実数とする．関数

$$f(x) = 2x^3 - (6 + 3\sin a)x^2 + (12\sin a)x + \sin^3 a + 6\sin a + 5$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ はただ1つの極大値をもつことを示し，その極大値 $M(a)$ を求めよ．

(2) $0 \leqq a < 2\pi$ における $M(a)$ の最大値とそのときの a の値，最小値とそのときの a の値をそれぞれ求めよ．

2 円周を3等分する点を時計回りにA，B，Cとおく．点QはAから出発し，A，B，Cを以下のように移動する．1個のさいころを投げて，1の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し，2の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し，その他の目が出た場合は移動しない．さいころを n 回投げたあとにQがAに位置する確率を p_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3) p_n を求めよ．

3 三角形ABCにおいて，辺ABの長さを c，辺CAの長さを b で表す．
$\angle\mathrm{ACB} = 3\angle\mathrm{ABC}$ であるとき，$c < 3b$ を示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=2x^3-(6+3\sin a)x^2+(12\sin a)x+\sin^3 a+6\sin a+5$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2-2(6+3\sin a)x+12\sin a \\ &= 6(x-\sin a)(x-2) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$\sin a$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$\boldsymbol{x=\sin a}$ で極大値

$$f(\sin a)=\mathbf{6\sin^2 \boldsymbol{a}+6\sin \boldsymbol{a}+5}$$

をただ 1 つもつ．

(2) (1) の結果から　$M(a)=6\left(\sin a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{2}$

よって　$\sin a=-\dfrac{1}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{a=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

$\sin a=1$，すなわち，$\boldsymbol{a=\dfrac{\pi}{2}}$ で最大値 **17** ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 1 回投げたあとに Q が A に位置する確率は　$p_1=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

1 回投げたあとに Q が B，C に位置する確率はともに　$\dfrac{1}{2}(1-p_1)$

よって　$p_2=p_1\times\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{2}(1-p_1)\times\dfrac{1}{6}\times 2=\dfrac{1}{2}p_1+\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) n 回投げたあとに，Q が B，C に位置する確率はともに　$\dfrac{1}{2}(1-p_n)$

よって　$p_{n+1}=p_n\times\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{2}(1-p_n)\times\dfrac{1}{6}\times 2=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{6}}$

(3) (2) の結果から　$p_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{1}{3}\right)$

ゆえに　$p_n-\dfrac{1}{3}=\left(p_1-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　よって　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}$ ■

3 $C = \angle\mathrm{ACB}$，$B = \angle\mathrm{ABC}$ とする．正弦定理により

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$C = 3B$ であるから　$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin 3B}$　ゆえに　$\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sin 3B}{\sin B}$　$\cdots$①

$B + C < \pi$，$C = 3B$ より，$B < \dfrac{\pi}{4}$

したがって　$\dfrac{\sin 3B}{\sin B} = \dfrac{3\sin B - 4\sin^3 B}{\sin B} = 3 - 4\sin^2 B < 3$　$\cdots$②

①，② より　$\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sin 3B}{\sin B} < 3$　よって　$c < 3b$　■

第 8 章　神戸大学

出題分野 (2011-2020) 80 分

◀	神戸大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	数と式										
I	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
	式と証明		3								
	複素数と方程式										
II	図形と方程式	2	1	2		1					
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	1	2		1		2	1·2		1	1
	場合の数と確率	3		3		3	3	3	3		3
A	整数の性質				2					2	
	図形の性質										
	平面上のベクトル									3	
B	空間のベクトル			1	3		1		1		
	数列					2			2		2
	確率分布と統計										

数字は問題番号

8.1　2015年(80分)

1 s，t を $s < t$ をみたす実数とする．座標平面上の3点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(s,\ s^2)$，$\mathrm{C}(t,\ t^2)$ が一直線上にあるとする．以下の問に答えよ．

(1) s と t の間の関係式を求めよ．

(2) 線分 BC の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とする．u と v の間の関係式を求めよ．

(3) s，t が変化するとき，v の最小値と，そのときの u，s，t の値を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が $a_1 = 5$，$b_1 = 7$ をみたし，さらにすべての実数 x とすべての自然数 n に対して

$$x(a_{n+1}x + b_{n+1}) = \int_{c_n}^{x+c_n} (a_n t + b_n)\, dt$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $c_n = 3^{n-1}$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $c_n = n$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

3 a，b，c を1以上7以下の自然数とする．次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ 3辺の長さが a，b，c である三角形と，3辺の長さが $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する．

以下の問に答えよ．

(1) $a = b > c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(2) $a > b > c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(3) 条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

解答例

1 (1) A(1, 2)，B(s, s^2)，C(t, t^2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s-1, s^2-2), \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (t-s)(1,\ s+t)$$

3点A，B，Cが同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから ($s<t$)

$$(s-1)(s+t)-(s^2-2)\cdot 1 = 0 \quad \text{整理すると} \quad \boldsymbol{st = s+t-2}$$

(2) 線分BCの中点M(u, v) は

$$u = \frac{s+t}{2}, \quad v = \frac{s^2+t^2}{2} \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の第1式および (1) の結果から　$s+t=2u,\ st=2u-2 \quad \cdots (**)$

よって　$v = \dfrac{s^2+t^2}{2} = \dfrac{(s+t)^2-2st}{2} = \dfrac{(2u)^2-2(2u-2)}{2}$

$$= \boldsymbol{2u^2-2u+2}$$

(3) (2) の結果から　$v = 2\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2}$

したがって　$\boldsymbol{u = \dfrac{1}{2}}$ のとき v は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ をとる．

$u = \dfrac{1}{2}$ を $(**)$ に代入すると　$s+t=1, \quad st=-1$

2数 s，t を解とする2次方程式は

$$x^2-x-1=0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$s<t$ であるから　$\boldsymbol{s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$，$\boldsymbol{t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$　■

2 (1) $x(a_{n+1}x+b_{n+1}) = \displaystyle\int_{c_n}^{x+c_n} (a_nt+b_n)\,dt = \left[\frac{a_nt^2}{2}+b_nt\right]_{c_n}^{x+c_n}$

$$= \frac{a_n}{2}(x^2+2c_nx)+b_nx = \frac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$$

したがって　$a_{n+1}x^2+b_{n+1}x = \dfrac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$

同じ次数の項の係数が等しいから

$$(*)\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} \\ b_{n+1} = a_nc_n+b_n \end{cases}$$

$\{a_n\}$ は初項 $a_1=5$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから　$\boldsymbol{a_n = 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(2) $c_n=3^{n-1}$ のとき，(1) の結果を $(*)$ の第2式に代入すると

$$b_{n+1}=5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times 3^{n-1}+b_n \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1}=b_n+5\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき，$b_1=7$ より

$$\begin{aligned} b_n &= b_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=7+5\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1} \\ &= 7+10\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}=10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3 \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{b_n=10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3}$

(3) $c_n=n$ のとき，(1) の結果を $(*)$ の第2式に代入すると

$$\text{ゆえに} \quad b_{n+1}=b_n+5n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \cdots(**)$$

ここで，$r=\dfrac{1}{2}$ とし，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} rS_n &= \sum_{k=1}^{n}kr^k=\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)r^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-1}+nr^n \\ &= S_n-\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}+nr^n \end{aligned}$$

したがって　$(1-r)S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}-nr^n=\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n$

ゆえに　$(1-r)S_n=2-(n+2)r^n$　すなわち　$S_n=4-(n+2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$(**)$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1+5\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=7+5S_{n-1} \\ &= 7+5\left\{4-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=27-5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{b_n=27-5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$ ■

3　(1) a，b，c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a = b > c$ のとき　$\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c}$

条件 (∗) をみたすとき　$b + c > a$　かつ　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$

このとき，$a = b > c$ であるから　$\dfrac{2}{b} > \dfrac{1}{c}$　すなわち　$2c > b > c$

ゆえに　$c = 1$ のとき　$2 > b > 1$ より　なし
$c = 2$ のとき　$4 > b > 2$ より　$a = b = 3$
$c = 3$ のとき　$6 > b > 3$ より　$a = b = 4,\ 5$
$c = 4$ のとき　$8 > b > 4$ より　$a = b = 5,\ 6,\ 7$
$c = 5$ のとき　$10 > b > 5$ より　$a = b = 6,\ 7$
$c = 6$ のとき　$12 > b > 6$ より　$a = b = 7$
$c = 7$ のとき　$14 > b > 7$ より　なし

よって，求める組の個数は　$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = \mathbf{9}$ (個)

(2) a，b，c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a > b > c$ のとき　$\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c}$

条件 (∗) をみたすとき　$b + c > a$　かつ　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$

ゆえに　$a - b < c$　かつ　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$

このとき，$a > b > c$ であるから　$1 \leqq c \leqq 5$

(i) $a > b > c = 1$ のとき　$a - b < 1,\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > 1$

これをみたす $(a,\ b)$ の組はなし

(ii) $a > b > c = 2$ のとき　$a - b < 2,\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{2}$

よって，$(a,\ b) = (4,\ 3)$ の 1 個

(iii) $a > b > c = 3$ のとき　$a - b < 3,\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{3}$

よって，$(a,\ b) = (5,\ 4),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (7,\ 5)$ の 4 個

(iv) $a > b > c = 4$ のとき　$a - b < 4,\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{4}$

よって，$(a,\ b) = (6,\ 5),\ (7,\ 5),\ (7,\ 6)$ の 3 個

(v) $a > b > c = 5$ のとき　$a - b < 5,\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{5}$

よって，$(a,\ b) = (7,\ 6)$ の 1 個

したがって，求める組の個数は　$1 + 4 + 3 + 1 = \mathbf{9}$ (個)

(3) a，b，c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a > b = c$ のとき　$\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　　$b + c > a$　かつ　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$

このとき，$a > b = c$ であるから　$c + c > a$　すなわち　$2c > a > c$

これは (1) の個数に等しいから　9 (個)

また，$a = b = c$ となる個数は 7 個であるから，以上をまとめると

- $a = b > c$ の場合が 9 個であるから，
  $b = c > a$，$c = a > b$ の場合もそれぞれ 9 個
- $a > b = c$ の場合が 9 個であるから，
  $b > c = a$，$c > a = b$ の場合もそれぞれ 9 個
- $a > b > c$ の場合が 9 個であるから，
  $$a > c > b,\ b > a > c,\ b > a > c,\ c > a > b,\ c > b > a$$
  の場合もそれぞれ 9 個
- $a = b = c$ の場合が 7 個

よって，条件 $(*)$ をみたす a，b，c の個数は

$$9 \times 3 + 9 \times 3 + 9 \times 6 + 7 = \mathbf{115}\ \ (\text{個})$$

■

8.2　2016 年 (80 分)

1 四面体 OABC において，P を OA の中点，Q を辺 OB を 2 : 1 に内分する点，R を辺 BC の中点とする．P，Q，R を通る平面と辺 AC の交点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}| : |\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ．

(3) 四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ．

2 a を正の定数とし，$f(x) = |x^2 + 2ax + a|$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) $y = f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 2)$ を通るときの a の値を求めよ．また，そのときの $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) $a = 2$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ．

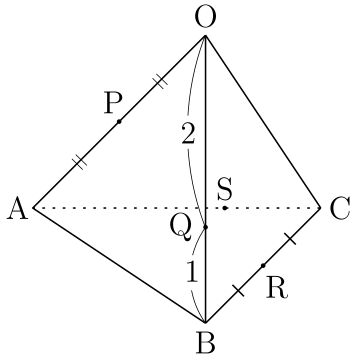
3 さいころを 4 回振って出た目を順に a，b，c，d とする．以下の問に答えよ．

(1) $ab \geqq cd + 25$ となる確率を求めよ．

(2) $ab = cd$ となる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$= \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} = \boldsymbol{\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}}$$

(2) S は平面 PQR 上の点であるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$$

$$= \frac{1}{2}(1-s-t)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}s + \frac{t}{2}\right)\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}$$

このとき，S は直線 AC 上の点であるから

$$\frac{1}{2}(1-s-t) + \frac{t}{2} = 1, \quad \frac{2}{3}s + \frac{t}{2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = -1,\ t = \frac{4}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AS}}| : |\overrightarrow{\mathrm{SC}}| = 2 : 1}$

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{QS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|^2$$
$$= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 8\vec{b}\cdot\vec{c} + 4\vec{c}\cdot\vec{a})$$

このとき　$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2 = \frac{1}{9}(1+4+4-2-4+2) = \frac{5}{9}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{QS}}| = \frac{\sqrt{5}}{3}}$ ■

2　(1) $g(x) = x^2 + 2ax + a$ とおくと　$g(x) = (x+a)^2 - a^2 + a$

$a > 0$ に注意すると

(i) $-a^2 + a \geqq 0$，すなわち，$0 < a \leqq 1$ のとき，$g(x) \geqq 0$ であるから

$$f(x) = |g(x)| = g(x)$$

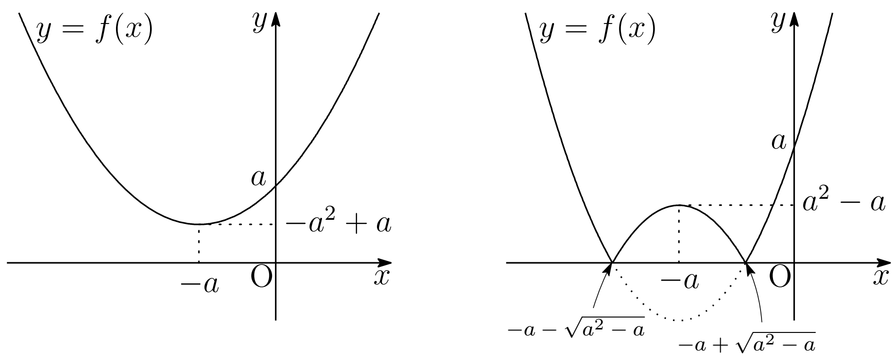
(ii) $-a^2 + a < 0$，すなわち，$1 < a$ のとき，

$g(x) = 0$ の解は　$x = -a \pm \sqrt{a^2 - a}$

$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & (x \leqq -a - \sqrt{a^2-a},\ -a + \sqrt{a^2-a} \leqq x) \\ -g(x) & (-a - \sqrt{a^2-a} \leqq x \leqq -a + \sqrt{a^2-a}) \end{cases}$$

(i)，(ii) より，$y = f(x)$ のグラフは，次のようになる．

(i) $0 < a \leqq 1$ のとき　　(ii) $1 < a$ のとき



(2) $y = f(x)$ が点 $(-1,\ 2)$ を通るから，$f(-1) = 2$ より

$$|1 - a| = 2 \quad \text{このとき}, a > 0 \text{に注意して解くと} \quad a = 3$$

(1) で示したグラフから，$y = f(x)$ と x 軸との交点の x 座標は　$-3 \pm \sqrt{6}$

よって　$-\displaystyle\int_{-3-\sqrt{6}}^{-3+\sqrt{6}} (x^2 + 6x + 3)\,dx = \frac{1}{6}\{(-3+\sqrt{6}) - (-3-\sqrt{6})\} = \boldsymbol{8\sqrt{6}}$

(3) $a = 2$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は，(1)(ii) のグラフに $a = 2$ を代入して

$$x = -2 \pm \sqrt{2}$$

また，$g(x) = x^2 + 4x + 2$ であるから，$g'(x) = 2x + 4$ より

$$g'(-2+\sqrt{2}) = 2(-2+\sqrt{2}) + 4 = 2\sqrt{2} > 2$$

点 $(-2+\sqrt{2},\ 0)$ が直線 $y = 2x + b$ の上側またはこの直線上にあるときで

$$0 \geqq 2(-2+\sqrt{2}) + b \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b \leqq 4 - 2\sqrt{2}}$$

■

3 (1) ab の値の集合を M とすると

$$M = \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,30,36\}$$

$m \in M$ に対する $ab = m$ となる組 (a,b) の個数を $S(m)$ とすると

m	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
$S(m)$	1	2	2	3	2	4	2	1	2	4

m	15	16	18	20	24	25	30	36
$S(m)$	2	1	2	2	2	1	2	1

また，cd の値の集合も M に等しい．

$ab \geqq cd + 25 \geqq 26$ より，ab は 30 または 36.

$ab = 30$ のとき　$cd = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$ab = 36$ のとき　$cd = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10$

$S(30) = 2$，S(36)=1，

$S(1) + S(2) + S(3) + S(4) + S(5) = 1 + 2 + 2 + 3 + 2 = 10$

$S(6) + S(8) + S(9) + S(10) = 4 + 2 + 1 + 2 = 9$

よって，求める確率は $\dfrac{2 \times 10 + 1 \times (10 + 9)}{6^4} = \mathbf{\dfrac{13}{432}}$

(2) $S(m) = 1$ となる m は $1,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$ の 5 通り

$S(m) = 2$ となる m は $2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 15,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30$ の 10 通り

$S(m) = 3$ となる m は 4 の 1 通り

$S(m) = 4$ となる m は $6,\ 12$ の 2 通り

よって，求める確率は $\dfrac{1^2 \times 5 + 2^2 \times 10 + 3^2 \times 1 + 4^2 \times 2}{6^4} = \mathbf{\dfrac{43}{648}}$ ■

8.3　2017 年 (80 分)

1 t を正の実数とする．$f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $2t^3 - 3t^2 + 1$ を因数分解せよ．

(2) $f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ．

(3) $-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ．

2 次の 2 つの条件をみたす x の 2 次式 $f(x)$ を考える．

(i) $y = f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通る．

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 15.$

以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つの解を α，β とするとき，α と β のみたす関係式を求めよ．

(3) (2) における α，β がともに正の整数となるような $f(x)$ をすべて求めよ．

3 $\vec{v}_1 = (1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}_2 = (1, -1, -1)$，$\vec{v}_3 = (-1,\ 1, -1)$，$\vec{v}_4 = (-1, -1,\ 1)$ とする．座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ (1，2，3，4 の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る) をふるごとに，出た目が k $(k = 1, 2, 3, 4)$ のときは $\vec{v}_k$ だけ移動する．すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n + 1)$ 回目にふって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \vec{v}_k$$

である．ただし，$\mathrm{P}_0 = \mathrm{O}$ である．以下の問に答えよ．

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \perp \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ．

(3) 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $2t^3 - 3t^2 + 1 = \boldsymbol{(2t+1)(t-1)^2}$

(2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2-1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 3(t^2-1) = 3(x^2 + 2x + 1 - t^2) \\ &= 3\{(x+1)^2 - t^2\} = 3(x+1+t)(x+1-t) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$-1-t$	$\cdots$	$-1+t$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $4t^3$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x = -1+t$ で極小値 0 をとる．

補足　$f(x) = (x+1)^3 - 3t^2(x+1) + 2t^3$ であるから，$x+1 = X$ とおくと

$$X^3 - 3t^2X + 2t^3 = (X-t)^2(X+2t)$$

ゆえに　　$f(x) = (x+1-t)^2(x+1+2t)$

(3) $f(-1) = 2t^3$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) - f(-1) &= (x+1)^3 - 3t^2(x+1) = (x+1)\{(x+1)^2 - 3t^2\} \\ &= (x+1)(x+1+\sqrt{3}\,t)(x+1-\sqrt{3}\,t) \end{aligned}$$

$-1+t \leqq 2$，すなわち，$0 < t \leqq 3$ のとき

$$m = f(-1+t)$$

$2 \leqq -1+t$，すなわち，$t \geqq 3$ のとき

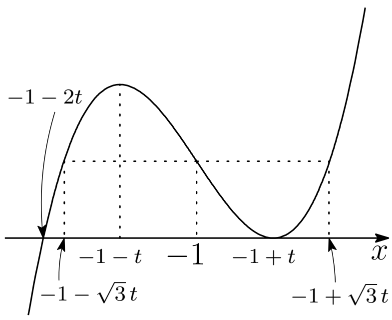
$$m = f(2)$$

$-1+\sqrt{3}t \leqq 2$，すなわち，$0 < t \leqq \sqrt{3}$ のとき

$$M = f(2)$$

$2 \leqq -1+\sqrt{3}t$，すなわち，$t \geqq \sqrt{3}$ のとき

$$M = f(-1)$$



よって　　$\boldsymbol{m = \begin{cases} 0 & (0 < t \leqq 3) \\ 2t^3 - 9t^2 + 27 & (t \geqq 3) \end{cases}}$

$$\boldsymbol{M = \begin{cases} 2t^3 - 9t^2 + 27 & (0 < t \leqq \sqrt{3}) \\ 2t^3 & (t \geqq \sqrt{3}) \end{cases}}$$ ■

2　(1)　$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと，(i) より，$f(1) = 4$ であるから

$$a + b + c = 4 \quad \cdots ①$$

(ii) より，$\displaystyle\int_{-1}^{2} (ax^2 + bx + c)\, dx = 15$ であるから

$$\left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-1}^{2} = 15 \quad \text{ゆえに} \quad a + \frac{b}{2} + c = 5 \quad \cdots ②$$

①，② より　$a + c = 6$，$b = -2$　よって，求める 1 次の係数は　$\boldsymbol{-2}$

(2)　(1) の結果から

$$f(x) = ax^2 - 2x + 6 - a \quad \cdots (*)$$

とおける．2 次方程式 $f(x) = 0$ の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{2}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{6-a}{a} = \frac{6}{a} - 1 \quad \cdots (**)$$

上の 2 式から a を消去すると

$$\alpha\beta = 3(\alpha + \beta) - 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(\alpha - 3)(\beta - 3) = 8}$$

(3)　α，β がともに正の整数であるから，$1 \leqq \alpha \leqq \beta$ とすると，$-2 \leqq \alpha - 3 \leqq \beta - 3$ に注意すると，(2) の結果から

$$(\alpha - 3,\ \beta - 3) = (1,\ 8),\ (2,\ 4) \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha,\ \beta) = (4,\ 11),\ (5,\ 7)$$

$(**)$ の第 1 式より，$a = \dfrac{2}{\alpha + \beta}$ であるから　　$a = \dfrac{2}{15},\ \dfrac{1}{6}$

これを $(*)$ に代入して

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{15}x^2 - 2x + \frac{88}{15}} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{f(x) = \frac{1}{6}x^2 - 2x + \frac{35}{6}}$$

■

3 (1) $i, j = 1, 2, 3, 4$ とし，$\vec{v}_i + \vec{v}_j$ が x 軸と平行になる組み合わせは

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = (2,\ 0,\ 0)$$
$$\vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = (-2,\ 0,\ 0)$$

したがって，求める確率は $\dfrac{2! + 2!}{4^2} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(2) $\vec{e}_1 = (1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e}_2 = (0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e}_3 = (0,\ 0,\ 1)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，次のベクトルからなる．

$$\begin{array}{ll}
\vec{v}_1 + \vec{v}_1 = 2\vec{v}_1, & \vec{v}_2 + \vec{v}_2 = 2\vec{v}_2, \\
\vec{v}_3 + \vec{v}_3 = 2\vec{v}_3, & \vec{v}_4 + \vec{v}_4 = 2\vec{v}_4, \\
\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_1, & \vec{v}_1 + \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_2, \\
\vec{v}_1 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_3, & \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_3, \\
\vec{v}_2 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_2, & \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = -2\vec{e}_1
\end{array}$$

$\vec{v}_j \cdot \vec{e}_k \neq 0$ であるから $(j = 1, 2, 3, 4,\ k = 1, 2, 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}} \perp \overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ となるのは，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ が座標軸に平行で，互いに垂直な場合について調べればよい．(1) の結果と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，x 軸，y 軸，z 軸と平行となる確率は $\dfrac{1}{4}$ であるから，求める確率は

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \times {}_3\mathrm{P}_2 = \mathbf{\frac{3}{8}}$$

(3) $i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i$ のとき，$\vec{v}_i$，$\vec{v}_j$，$\vec{v}_k$ は 1 次独立であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}$ がすべて異なる場合を除く確率であるから

$$1 - \frac{{}_4\mathrm{P}_3}{4^3} = 1 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \mathbf{\frac{5}{8}}$$

■

8.4　2018 年 (80 分)

1 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする．辺 OA を $1-t : t$ に内分する点を P，辺 OB を $t : 1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする．また $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ．

(3) t が (2) で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ．

2 $f(x) = (2x-1)^3$ とする．数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$x_1 = 2$ であり，x_{n+1} $(n \geqq 1)$ は点 $(x_n,\ f(x_n))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点の x 座標とする．

以下の問に答えよ．

(1) 点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ．また $t \neq \dfrac{1}{2}$ のときに，その接線と x 軸の交点の x 座標を求めよ．

(2) $x_n > \dfrac{1}{2}$ を示せ．また x_n を n の式で表せ．

(3) $|x_{n+1} - x_n| < \dfrac{3}{4} \times 10^{-5}$ を満たす最小の n を求めよ．ただし $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$，$0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ は用いてよい．

3 さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \cdots (*)$$

を考える．以下の問に答えよ．

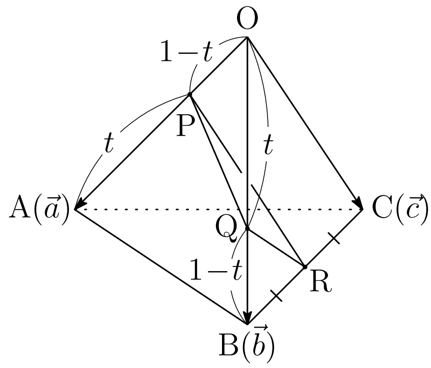
(1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ．

(2) $(*)$ が整数を解にもつとする．このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ．

(3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ．

解答例

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{b}$$

$$=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

(2) $\angle\mathrm{PQR}=\frac{\pi}{2}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ であるから

$$\{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right\}=0$$

ゆえに $$(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}-t\left(\frac{1}{2}-t\right)|\vec{b}|^2-\frac{1}{2}t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

上式に $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$|\vec{b}|=1$ を代入すると

$$\frac{1}{2}(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)+\frac{1}{4}(1-t)-t\left(\frac{1}{2}-t\right)-\frac{1}{4}t=0$$

整理すると $6t^2-7t+2=0$ ゆえに $(2t-1)(3t-2)=0$

$0<t<1$ に注意して，これを解くと $\boldsymbol{t=\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}}$

(3) (i) $t=\frac{1}{2}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}\vec{c}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\frac{1}{2}|\vec{c}|=\frac{1}{2}$

ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2-2\cdot\frac{1}{2}+1^2}=\frac{1}{2}$

よって $\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$

(ii) $t=\frac{2}{3}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{1}{6}(-\vec{a}+3\vec{c})$

ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}=\frac{1}{3}\sqrt{1^2-4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot1^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\frac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2}=\frac{1}{6}\sqrt{1^2-6\cdot\frac{1}{2}+9\cdot1^2}=\frac{\sqrt{7}}{6}$

よって $\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{36}}$ ■

2 (1) $f(x)=(2x-1)^3$ より　$f'(x)=6(2x-1)^2$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(2t-1)^3=6(2t-1)^2(x-t)$$

したがって　$\boldsymbol{y=(2t-1)^2(6x-4t-1)}$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$6x-4t-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{x=\frac{4t+1}{6}}$$

(2) (1) の結果より，$x_{n+1}=\dfrac{4x_n+1}{6}$ であるから (ニュートン法[1])

$$x_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)$$

数列 $\left\{x_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $x_1-\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$x_n-\frac{1}{2}=\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x_n=\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{2}}$$

これから　$x_n>\dfrac{1}{2}$

(3) (2) の結果から　$x_{n+1}-x_n=\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}-\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$|x_{n+1}-x_n|<\dfrac{3}{4}\times10^{-5}$ のとき

$$\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{3}{4}\times10^{-5} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n<10^{-5}$$

常用対数をとると　$n(\log_{10}2-\log_{10}3)<-5$

したがって　$n>\dfrac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}$　$\cdots(*)$

ここで，$0.477-0.302<\log_{10}3-\log_{10}2<0.478-0.301$ であるから

$$28+\frac{44}{177}=\frac{5}{0.177}<\frac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}<\frac{5}{0.175}=28+\frac{4}{7}$$

よって，$(*)$ を満たす最小の n は　**29**　■

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf (p.17 を参照)

3 (1) 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0 \cdots (*)$ が $x = 1$ を解にもつから $b = a - 1$

$1 \leqq a \leqq 6$，$2 \leqq b \leqq 12$ であるから

$$(a,\ b) = (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$$

a の値に対する確率は $\dfrac{1}{6}$，それぞれの b の値に対する確率は

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36}\right) = \frac{10}{216} = \boldsymbol{\frac{5}{108}}$$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

$(*)$ の整数解を α とすると，上の第 1 式から

$$\beta = a - \alpha$$

上式の右辺は整数であるから，β も整数である．

2 整数 α，β について，$\alpha \leqq \beta$ とおいても一般性を失わないから

$$2\alpha \leqq \alpha + \beta = a \leqq 6 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha \leqq 3$$

(3) (i) $x = 2$ が 2 次方程式 $(*)$ の解のとき $b = 2a - 4$

$$(a,\ b) = (3,\ 2),\ (4,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 8)$$

(ii) $x = 3$ が 2 次方程式 $(*)$ の解のとき $b = 3a - 9$

$$(a,\ b) = (4,\ 3),\ (5,\ 6)\ (6,\ 9)$$

(1),(i),(ii) より

a	3	4	4,5	6	5	6	6
b	2	3	4	5	6	8	9

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36}\cdot 2 + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36}\right) = \frac{27}{216} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

■

8.5　2019 年 (80 分)

1 a，b，c を実数とし，$a \neq 0$ とする．2 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

で定める．曲線 $y = f(x)$ は点 $\left(2,\ 2 - \dfrac{c}{2}\right)$ を通り，

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{9}{2}$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を a を用いて表せ．

(2) 点 $(1,\ f(1))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を ℓ とする．直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ．

(3) $0 < a < \dfrac{1}{2}$ とする．(2) で求めた直線 ℓ の $y \geqq 0$ の部分と曲線 $y = f(x)$ の $x \geqq 0$ の部分および x 軸で囲まれた図形の面積 S の最大値と，そのときの a の値を求めよ．

2 次のように 1，3，4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする．

$$1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\cdots$$

すなわち，$a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_3 = 4$ で，4 以上の自然数 n に対し，$a_n = a_{n-3}$ とする．この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の問に答えよ．

(1) S_n を求めよ．

(2) $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ．

(3) どのような自然数 k に対しても，$S_n = k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ．

3 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2$ をみたす $\triangle\mathrm{PAB}$ を考え，辺 AB の中点を M，$\triangle\mathrm{PAB}$ の重心を G とする．以下の問に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ．

(3) 点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{5}{4}$ をみたすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ．ただし，$0 < \angle\mathrm{ABG} < \pi$ とする．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 曲線 $y = ax^2 + bx + c$ が点 $\left(2,\ 2 - \dfrac{c}{2}\right)$ を通るから

$$4a + 2b + c = 2 - \frac{c}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 4a + 2b + \frac{3}{2}c = 2 \quad \cdots①$$

$\displaystyle\int_0^3 (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{9}{2}$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right]_0^3 = \frac{9}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{9}{2} \quad \cdots②$$

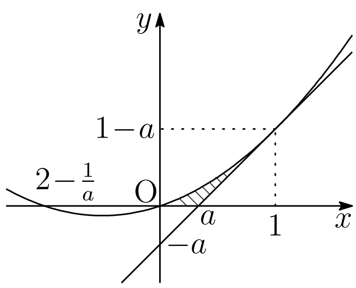
①，② より　$b = 1 - 2a$，$c = 0$　よって　$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + (1 - 2a)x}$

(2) (1) の結果から　$f(1) = 1 - a$，$f'(x) = 2ax + 1 - 2a$ から　$f'(1) = 1$

よって，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - (1 - a) = 1(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x - a}$$

(3) (1)，(2) の結果から



$$\begin{aligned} f(x) - (x - a) &= ax^2 + (1 - 2a)x - (x - a) \\ &= a(x - 1)^2 \end{aligned}$$

3 点 O，$(a,\ 0)$，$(0, -a)$ を頂点とする三角形の面積は $\dfrac{a^2}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 a(x - 1)^2\,dx - \frac{a^2}{2} = \left[\frac{a}{3}(x - 1)^3\right]_0^1 - \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{a}{3} - \frac{a^2}{2} = -\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{18} \end{aligned}$$

$0 < a < \dfrac{1}{2}$ より，S は，$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$ をとる． ■

2 (1) (i) $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_3 + (1+3+4)\frac{n-3}{3} = 8 + \frac{8}{3}(n-3) = \frac{8n}{3}$$

(ii) $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_1 + (3+4+1)\frac{n-1}{3} = 1 + \frac{8}{3}(n-1) = \frac{8n-5}{3}$$

(iii) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_2 + (4+1+3)\frac{n-2}{3} = 4 + \frac{8}{3}(n-2) = \frac{8n-4}{3}$$

よって
$$\boldsymbol{S_n = \begin{cases} \dfrac{8n}{3} & (n \equiv 0 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-5}{3} & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-4}{3} & (n \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}}$$

(2) $n = 3m + r$ とおくと $(r = 0,\ 1,\ 2)$

$r = 0$ のとき　$S_{3m} = \dfrac{8\cdot 3m}{3} = 8m$

$r = 1$ のとき　$S_{3m+1} = \dfrac{8(3m+1)-5}{3} = 8m+1$

$r = 2$ のとき　$S_{3m+2} = \dfrac{8(3m+2)-4}{3} = 8m+4$

$2019 \equiv 3 \pmod 8$ であるから，$S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しない．

(3) i) $k \equiv 0, \pm 4 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 0 \pmod 8$

ii) $k \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 1 \pmod 8$

iii) $k \equiv \pm 2 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 4 \pmod 8$

i)〜iii) および (2) の結果から，どのような自然数 k に対しても，

$$S_n = k^2$$

となる自然数 n が存在する．■

3 (1) 点 M は辺 AB の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}})$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} \quad \cdots ①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}} - \overrightarrow{\mathrm{PA}}| = 2$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = 4 + 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

上の結果を ① に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = \frac{1}{4}(4 + 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 1}$$

(2) 点 G は △PAB の重心であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = 3\overrightarrow{\mathrm{GM}} \quad \cdots ②$

また，$\overrightarrow{\mathrm{GM}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}})$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \dfrac{3}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}) \quad \cdots ③$

$\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}} = 0 \quad \text{および} \quad |\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 2^2 = 4$$

③ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = \frac{9}{4}|\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2 = \frac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}} + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2)$$
$$= \frac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2) = \frac{9}{4}\cdot 4 = 9$$

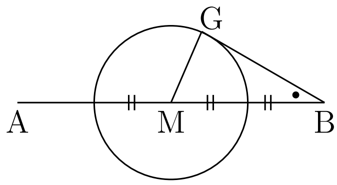
これを (1) の結果に代入して　$9 = \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 1$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = 8}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{5}{4}$ を (1) の結果に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = 1 + \frac{5}{4} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{PM}}| = \frac{3}{2}$$

これに ② を代入することにより　$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{MG}}| = \dfrac{1}{2}$

したがって，G は M を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にある．B からこの円に引いた接線と辺 AB のなす角が求める最大値であるから，MB $= 1$ より



$$\boldsymbol{\angle\mathrm{ABG} = \frac{\pi}{6}}$$

■

8.6　2020 年 (80 分)

1 a，b，c，p は実数とし，$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $(x-p)^2$ で割り切れるとする．以下の問に答えよ．

(1) b，c を a，p を用いて表せ．

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，$f'\left(p + \dfrac{4}{3}\right) = 0$ をみたすとする．a を p を用いて表せ．

(3) (2) の条件のもとで $p = 0$ とする．曲線 $y = f(x)$ と $y = f'(x)$ の交点を x 座標が小さい方から順に A，B，C とし，線分 AB と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1，線分 BC と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする．このとき，$S_1 + S_2$ の値を求めよ．

2 n を自然数とし，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次の (i)，(ii) で定める．

(i) $a_1 = b_1 = 1$ とする．

(ii) $f_n(x) = a_n(x+1)^2 + 2b_n$ とし，$-2 \leqq x \leqq 1$ における $f_n(x)$ の最大値を a_{n+1}，最小値を b_{n+1} とする．

以下の問に答えよ．

(1) すべての自然数 n について $a_n > 0$ かつ $b_n > 0$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおく．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x-p$ で割り切れるから，$f(p)=0$ より

$$p^3+ap^2+bp+c=0 \quad ゆえに \quad c=-p^3-ap^2-bp \quad \cdots①$$

したがって　$f(x)=x^3+ax^2+bx-p^3-ap^2-bp$
$=x^3-p^3+a(x^2-p^2)+b(x-p)$
$=(x-p)\{x^2+px+p^2+a(x+p)+b\}$

$g(x)=x^2+px+p^2+a(x+p)+b$ とおくと，$g(x)$ は $x-p$ で割り切れるから，$g(p)=0$ より

$$3p^2+2ap+b=0 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{b=-3p^2-2ap}$$

上の第 2 式を ① に代入すると

$$c=-p^3-ap^2-(-3p^2-2ap)p=\boldsymbol{2p^3+ap^2}$$

(2) (1) の結果から　$f(x)=x^3+ax^2+(-3p^2-2ap)x+2p^3+ap^2$

$$f'(x)=3x^2+2ax-3p^2-2ap$$

$f'\left(p+\dfrac{4}{3}\right)=0$ より　$3\left(p+\dfrac{4}{3}\right)^2+2a\left(p+\dfrac{4}{3}\right)-3p^2-2ap=0$

整理すると　$3p+2+a=0$　よって　$\boldsymbol{a=-3p-2}$

(3) $p=0$ のとき，(2) の結果から　$a=-2,\ b=0,\ c=0$

$f(x)=x^3-2x^2$，$f'(x)=3x^2-4x$

2 曲線 $y=f(x)$，$y=f'(x)$ の交点の x 座標は

$$x^3-2x^2=3x^2-4x$$

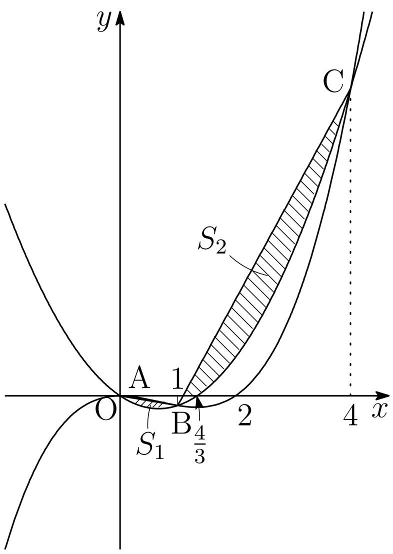
ゆえに　$x(x-1)(x-4)=0$

これを解いて　$x=0,\ 1,\ 4$

A$(0,\ 0)$，B$(1,-1)$，C$(4,\ 32)$

直線 AB は　$y=-x$

直線 BC は　$y=11x-12$



したがって

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^1 \{-x-(3x^2-4x)\}\,dx \\
&= -3\int_0^1 x(x-1)\,dx = \frac{3}{6}(1-0)^3 = \frac{1}{2}, \\
S_2 &= \int_1^4 \{11x-12-(3x^2-4x)\}\,dx \\
&= -3\int_1^4 (x-1)(x-4)\,dx = \frac{3}{6}(4-1)^3 = \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

よって　　$S_1+S_2 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{27}{2} = \mathbf{14}$　■

2　(1) すべての自然数について

$$a_n > 0 \ \text{かつ}\ b_n > 0 \quad \cdots (*)$$

であることを数学的帰納法により示す.

［1］ $n=1$ のとき，$a_1 = 1 > 0$, $b_1 = 1 > 0$ より，$(*)$ は成立する.

［2］ $n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$a_{k+1} = f_n(1) = 4a_k + 2b_k > 0, \quad b_{k+1} = f_n(-1) = 2b_k > 0$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する.

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する.

(2) (1) の結果から　$a_{n+1} = 4a_n + 2b_n$,　$b_{n+1} = 2b_n$

$b_1 = 1$ および上の第 2 式から　$b_n = 1\cdot 2^{n-1} = \mathbf{2^{n-1}}$

(3) (2) の結果から　$a_{n+1} = 4a_n + 2^n$　ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 2\cdot\dfrac{a_n}{2^n} + \dfrac{1}{2}$

したがって　$c_1 = \dfrac{a_1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$，$c_{n+1} = 2c_n + \dfrac{1}{2}$

$$c_{n+1} + \frac{1}{2} = 2\left(c_n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad c_n + \frac{1}{2} = \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}$$

よって　$\boldsymbol{c_n = 2^{n-1} - \dfrac{1}{2}}$　■

3 (1) 30 個の○を一列に並べ，その間の 29 か所から 1 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$$ {}_{29}\mathrm{C}_1 = \mathbf{29}\ (\text{個}) $$

(2) 30 個の○を一列に並べ，その間の 29 か所から 2 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$$ {}_{29}\mathrm{C}_2 = \frac{29\cdot 28}{2\cdot 1} = \mathbf{406}\ (\text{個}) $$

(3) 和 30 になる 3 つの自然数の組合せについて

(i) 3 数が等しいものが $\{10,\ 10,\ 10\}$ の 1 組

(ii) 2 数だけが等しいものが，次の 13 組

$$ \{1,1,28\},\ \{2,2,26\},\ \cdots,\ \{9,9,12\},\ \{11,11,8\},\ \cdots \{14,14,2\} $$

(iii) 3 数がすべて異なるものが，n 組とすると，(i)，(ii) および (2) から

$$ 1 + 13\cdot 3 + n\cdot 3! = 406 \quad \text{これを解いて} \quad n = 61\ (\text{組}) $$

よって，求める組合せの総数は，(i)～(iii) から

$$ 1 + 13 + 61 = \mathbf{75}\ (\text{組}) $$

■

第 9 章　広島大学

出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	広島大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数	1									
	図形と計量		3				2				
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式			4	1			2		4	
	三角関数							1			2
	指数関数と対数関数	2	1								
	微分法と積分法	3	2	1	2	1·4	1	4	1·3		1
A	場合の数と確率		4	5	5		4	3	4	2	3
	整数の性質		5								
	図形の性質									4	
B	平面上のベクトル	4		2		3					
	空間のベクトル				3		3				
	数列			3	4	2·5			2	1·3	4
	確率分布と統計	5					5				

数字は問題番号

9.1 2015 年 (120 分)

1 a，b，c を実数とし，$a<1$ とする．座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = x^2 - x, \quad C_2 : y = x^3 + bx^2 + cx - a$$

を考える．C_1 と C_2 は，点 P$(1,\ 0)$ と，それとは異なる点 Q を通る．また，点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいものとする．点 P における C_1 の接線を ℓ_1，点 Q における C_1 の接線を ℓ_2，点 Q における C_2 の接線を ℓ_3 とする．次の問いに答えよ．

(1) b，c および点 Q の座標を a を用いて表せ．

(2) ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が三角形をつくらないような a の値を求めよ．

(3) ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が直角三角形をつくるような a の値の個数を求めよ．

2 n を自然数とし，p_n，q_n を実数とする．ただし，p_1，q_1 は ${p_1}^2 - 4q_1 = 4$ を満たすとする．2 次方程式 $x^2 - p_nx + q_n = 0$ は異なる実数解 α_n，β_n をもつとする．ただし，$\alpha_n < \beta_n$ とする．$c_n = \beta_n - \alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n，r_{n+1} を用いて表せ．

(2) c_n を n の式で表せ．

(3) $p_n = n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ．

3 座標平面上に原点 O と 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ をとり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．点 C は $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$，$0^\circ < \angle\mathrm{AOC} < 90^\circ$，$0^\circ < \angle\mathrm{BOC} < 90^\circ$ を満たすとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(2) 線分 AB と線分 OC の交点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(3) 点 C から線分 OA に引いた垂線と線分 AB の交点を E とする．D は (2) で定めた点とする．このとき，$\triangle\mathrm{OBD}$ と $\triangle\mathrm{CDE}$ の面積の和を t を用いて表せ．

4 α，β は $\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\alpha + \beta < 1$ を満たす実数とする．三つの放物線

$$C_1 : y = x(1-x), \quad C_2 : y = x(1-\beta-x), \quad C_3 : y = (x-\alpha)(1-x)$$

を考える．C_2 と C_3 の交点の x 座標を γ とする．また，C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1) γ を α，β を用いて表せ．

(2) S を α，β を用いて表せ．

(3) α，β が $\alpha + \beta = \dfrac{1}{4}$ を満たしながら動くとき，S の最大値を求めよ．

5 n を自然数とする．A，B，C，D，E の 5 人が 1 個のボールをパスし続ける．最初に A がボールを持っていて，A は自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，ボールを受けた人は，また自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，以後同様にパスを続ける．n 回パスしたとき，B がボールを持っている確率を p_n とする．ここで，たとえば，A $\to$ C $\to$ D $\to$ A $\to$ E の順にボールをパスすれば，4 回パスしたと考える．次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$　(1)　$f(x) = x^2 - x$，$g(x) = x^3 + bx^2 + cx - a$ とおくと

$$f'(x) = 2x - 1, \quad g'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

このとき，$g(1) = 0$，$g'(1) = f'(1)$ であるから

$$1 + b + c - a = 0, \quad 3 + 2b + c = 1$$

上の 2 式から　　$\boldsymbol{b = -a - 1}$，$\boldsymbol{c = 2a}$

$C_1 : y = x^2 - x$，$C_2 : y = x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a$ から y を消去すると

$$x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a = x^2 - x \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2(x-a) = 0$$

$a < 1$ であるから，点 P$(1,\ 0)$ と異なる C_1，C_2 の交点 Q は　$\boldsymbol{(a,\ a^2 - a)}$

(2)　ℓ_1 は点 P$(1,\ 0)$ を通り，傾き 1 の直線であるから　　$\ell_1 : y = x - 1$

ℓ_2 の傾きは　　$f'(a) = 2a - 1$

ℓ_3 の傾きは　　$g'(a) = 3a^2 - 2(a+1)a + 2a = a^2$

ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が三角形をつくらないのは，これら 3 本の直線のうち少なくとも 2 本が平行であるか，3 本の直線が 1 点で交わるときである．

(i)　$a < 1$ より，$f'(a) = 2a - 1 < 1$ であるから　$\ell_1 \not\parallel \ell_2$

(ii)　$a < 1$ より，$g'(a) - f'(a) = (a-1)^2 \neq 0$ であるから　$\ell_2 \not\parallel \ell_3$

(iii)　$\ell_3 /\!/ \ell_1$ のとき　$a^2 = 1$　このとき $a < 1$ に注意して　$a = -1$

(iv)　3 直線が 1 点で交わるとき，すなわち，ℓ_1 が点 Q を通るとき

$$a^2 - a = a - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a-1)^2 = 0$$

$a < 1$ であるから，これを満たす a は存在しない．

(i)〜(iv) より，求める a の値は　　$\boldsymbol{a = -1}$

(3) ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が直角三角形をつくるのは，これらの 3 本のうち 2 本だけが垂直である場合であり，(2) の結果より，$a \neq -1$ に注意する．

(i) $\ell_1 \perp \ell_2$ のとき　$1 \cdot (2a-1) = -1$　すなわち　$a = 0$

(ii) $\ell_2 \perp \ell_3$ のとき　$(2a-1) \cdot a^2 = -1$　整理すると　$2a^3 - a^2 + 1 = 0$

$h(a) = 2a^3 - a^2 + 1$ とおくと　$h'(a) = 6a^2 - 2a = 2a(3a-1)$

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$h'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(a)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{26}{27}$	$\nearrow$

$h(-1) = -2 \neq 0$ であるから，$h(a) = 0$ を満たす a が，$-1 < a < 0$ の範囲に唯一存在する．

(iii) $\ell_3 \perp \ell_1$ のとき　$a^2 \cdot 1 = -1$　これを満たす実数 a は存在しない．

(i)～(iii) から，求める a の個数は　**2 個**　■

2 (1) $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \log_2 \sqrt{n}(n+1)$ より

$$\sqrt{n}(n+1) = 2^{r_n} \quad さらに \quad \sqrt{n+1}(n+2) = 2^{r_{n+1}}$$

よって　$$\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)} = \boldsymbol{\frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}}$$

(2) $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ であるから，(1) の結果より

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}} \quad ゆえに \quad \frac{c_{n+1}}{2^{r+1}} = \frac{c_n}{2^{r_n}}$$

ここで，$c_1 = \sqrt{p_1{}^2 - 4q_1} = 2$，$r_1 = \log_2 2 = 1$ であるから

$$\frac{c_n}{2^{r_n}} = \frac{c_1}{2^{r_1}} = \frac{2}{2^1} = 1 \quad よって \quad c_n = 2^{r_n} = \boldsymbol{\sqrt{n}(n+1)}$$

(3) $x^2 - p_n x + q_n = 0$ の異なる 2 つの実数解が α_n，β_n であるから $(\alpha_n < \beta_n)$

$$\alpha_n = \frac{p_n - \sqrt{p_n{}^2 - 4q_n}}{2}, \quad \beta_n = \frac{p_n + \sqrt{p_n{}^2 - 4q_n}}{2}$$

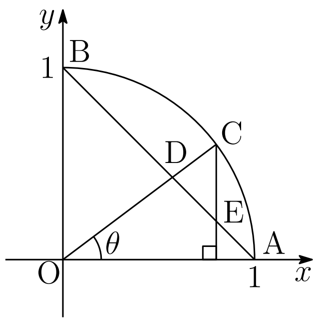
したがって　$c_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{p_n{}^2 - 4q_n}$　ゆえに　$c_n{}^2 = p_n{}^2 - 4q_n$

これに (2) の結果および $p_n = n\sqrt{n}$ を代入すると

$$n(n+1)^2 = n^3 - 4q_n \quad よって \quad \boldsymbol{q_n = -\frac{2n^2+n}{4}}$$

■

3 (1) 与えられた条件により，点Cは原点を中心とする単位円周上の第1象限にある．OCの x 軸の正の向きとなす角を θ とすると $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$



$$\mathrm{C}(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t$ であるから $\cos\theta = t$

ゆえに $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-t^2}$

よって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \cos\theta(1,\ 0) + \sin\theta(0,\ 1)\\ &= \boldsymbol{t\vec{a} + \sqrt{1-t^2}\,\vec{b}}\end{aligned}$$

(2) 点Dは，直線OC : $y = x\tan\theta$ と直線AB : $y = -x+1$ の交点であるから

$$\left(\frac{1}{1+\tan\theta},\ \frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta},\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)$$

よって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\left\{(\cos\theta)\vec{a} + (\sin\theta)\vec{b}\right\}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}(t\vec{a} + \sqrt{1-t^2}\,\vec{b})}\end{aligned}$$

(3) $\triangle\mathrm{OBD} \backsim \triangle\mathrm{CED}$ であるから，(1)，(2) の結果から

$$\mathrm{OD} : \mathrm{OC} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} : \cos\theta = 1 : \cos\theta+\sin\theta$$

その相似比は $\mathrm{OD} : \mathrm{DC} = 1 : \cos\theta+\sin\theta-1$

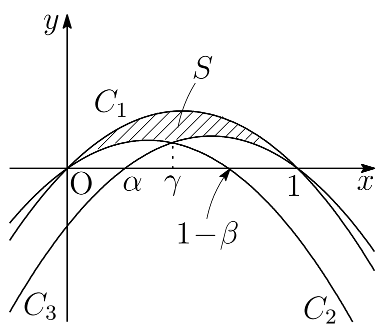
$$\triangle\mathrm{OBD} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{2(\cos\theta+\sin\theta)}$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{\cos\theta}{2(\cos\theta+\sin\theta)}\left\{1+(\cos\theta+\sin\theta-1)^2\right\}\\ &= \boldsymbol{\frac{t\{1+(t+\sqrt{1-t^2}-1)^2\}}{2(t+\sqrt{1-t^2})}}\end{aligned}$$

■

4 (1) C_2，C_3 の方程式から y を消去すると



$$x(1-\beta-x)=(x-\alpha)(1-x)$$

整理すると　$(\alpha+\beta)x=\alpha$

$\alpha>0$，$\beta>0$ より，$\alpha+\beta\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{\gamma=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

(2) S は，右上の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^\gamma\{x(1-x)-x(1-\beta-x)\}\,dx\\
&\qquad\qquad+\int_\gamma^1\{x(1-x)-(x-\alpha)(1-x)\}\,dx\\
&=\beta\int_0^\gamma x\,dx-\alpha\int_\gamma^1(x-1)\,dx\\
&=\beta\Big[\,\frac{1}{2}x^2\,\Big]_0^\gamma-\alpha\Big[\,\frac{1}{2}(x-1)^2\,\Big]_\gamma^1=\frac{1}{2}\beta\gamma^2+\frac{1}{2}\alpha(\gamma-1)^2\\
&=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2+\frac{1}{2}\alpha\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2\\
&=\frac{\alpha^2\beta}{2(\alpha+\beta)^2}+\frac{\alpha\beta^2}{2(\alpha+\beta)^2}=\boldsymbol{\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}}
\end{aligned}$$

(3) $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\beta=\dfrac{1}{4}-\alpha>0$ より，$0<\alpha<\dfrac{1}{4}$ であるから

$$S=\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}=2\alpha\beta=2\alpha\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)=-2\left(\alpha-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{32}$$

よって　$\alpha=\beta=\dfrac{1}{8}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$ をとる．

別解 $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ のとき，(2) の結果から　$S=2\alpha\beta$

$\alpha>0$，$\beta>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\geqq\sqrt{\alpha\beta}\quad ゆえに\quad \sqrt{\alpha\beta}\leqq\frac{1}{8}$$

$\alpha\beta\leqq\dfrac{1}{64}$ であるから　$S=2\alpha\beta\leqq\dfrac{1}{32}$

よって　S は最大値 $\dfrac{1}{32}$　$\left(\alpha=\beta=\dfrac{1}{8}\right)$ ■

5 (1) n 回パスしたとき，A，B，C，D，E それぞれがボールを持っている確率を a_n，b_n，c_n，d_n，e_n とすると (n は自然数)

$$a_1 = 0,\quad b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = \frac{1}{4}$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n + d_n + e_n)$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n + d_n + e_n)$$
$$c_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + d_n + e_n)$$
$$d_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + e_n)$$
$$e_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + d_n)$$

$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 1$ であるから，上の第 2 式より

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(1 - b_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{4}\left(b_n - \frac{1}{5}\right)$$

数列 $\left\{b_n - \dfrac{1}{5}\right\}$ は，初項 $b_1 - \dfrac{1}{5}$，公比 $-\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{5} = \left(b_1 - \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{1}{5}\left\{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$p_n = b_n$ であるから $\quad p_n = \dfrac{1}{5}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right\} \quad \cdots(*)$

$(*)$ より $\quad \boldsymbol{p_1 = \dfrac{1}{4},\ p_2 = \dfrac{3}{16},\ p_3 = \dfrac{13}{64},\ p_4 = \dfrac{51}{256}}$

(2) $(*)$ より $\quad \boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{5}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}}$ ■

9.2　2016 年 (120 分)

1 a を正の定数とし，座標平面上において，

$$\text{円 } C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad \text{放物線 } C_2 : y = ax^2 + 1$$

を考える．C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 ℓ は点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ で C_2 に接している．次の問いに答えよ．

(1) s，t および a を求めよ．

(2) C_2，ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) 円 C_1 上の点が点 P から点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ まで反時計回りに動いてできる円弧を C_3 とする．C_2，ℓ および C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ．

2 四角形 ABCD において，

$$\angle\mathrm{DAB} = \angle\mathrm{DBC} = 90^\circ, \quad \angle\mathrm{BCD} = 60^\circ, \quad \mathrm{AB} = \mathrm{AD}, \quad \mathrm{BC} = 1$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) 対角線 BD の長さの 2 乗 BD^2 を求めよ．

(2) 対角線 AC の長さの 2 乗 AC^2 を求めよ．

(3) $\angle\mathrm{BAC} = \alpha$，$\angle\mathrm{ACD} = \beta$ とおくとき，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$ を求めよ．

3 座標空間に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(s,\ s,\ s),\ \mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$

がある．ただし，$s>0$ とする．t，u，v を実数とし，

$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u，v を s を用いて表せ．

(3) (2) のとき，2 点 D，E を

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$$

となる点とする．四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ．

4 xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う．

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く．ただし，点 $(3,\ 1)$ に到達したら Q は原点に戻る．

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ．

(2) $(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ．

(3) $x_8+y_8\leqq 4$ となる確率を求めよ．

(4) $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ．ここで k は n 以下の自然数とする．

5 n を 2 以上の自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) 変量 x のデータの値が x_1，x_2，$\cdots$，x_n であるとし，

$$f(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$$

とする．$f(a)$ を最小にする a は x_1，x_2，$\cdots$，x_n の平均値で，そのときの最小値は x_1，x_2，$\cdots$，x_n の分散であることを示せ．

(2) c を定数として，変量 y，z の k 番目のデータの値が

$$\begin{aligned} y_k &= k \quad (k=1,2,\cdots,n) \\ z_k &= ck \quad (k=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

であるとする．このとき y_1，y_2，$\cdots$，y_n の分散が z_1，z_2，$\cdots$，z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ．

(3) 変量 x のデータの値が x_1，x_2，$\cdots$，x_n であるとし，その平均値を $\overline{x}$ とする．新たにデータを得たとし，その値を x_{n+1} とする．x_1，x_2，$\cdots$，x_n，x_{n+1} の平均値を x_{n+1}，$\overline{x}$ および n を用いて表せ．

(4) 次の 40 個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど 40，670，35 であった．

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が 40 であった．このとき，41 個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ．ただし，得られた値が整数でない場合は，小数第 1 位を四捨五入せよ．

解答例

1 (1) $C_1 : x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ における接線 ℓ の方程式は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=1 \quad \text{すなわち} \quad y=\sqrt{3}x-2$$

点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ は C_2 上の点であるから，$\mathrm{Q}(s,\ as^2+1)$

$C_2 : y=ax^2+1$ を微分すると　$y'=2ax$

C_2 上の点 Q における接線の方程式は

$$y-(as^2+1)=2as(x-s) \quad \text{ゆえに} \quad y=2asx-as^2+1$$

これが ℓ に一致するから

$$\begin{cases} 2as=\sqrt{3} \\ -as^2+1=-2 \end{cases} \qquad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\frac{1}{4},\ s=2\sqrt{3}}$$

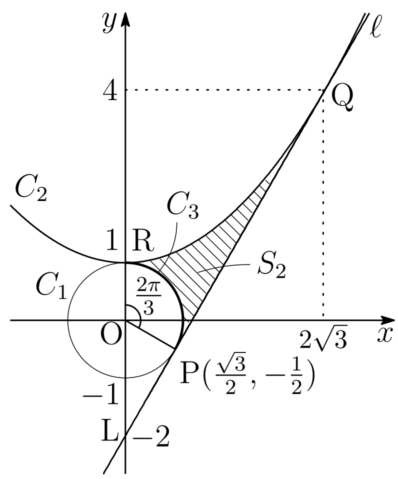
また　　$t=as^2+1=\dfrac{1}{4}(2\sqrt{3})^2+1=\mathbf{4}$

(2) (1) の結果より，$C_2 : y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ であるから，求める面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_0^{2\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{4}x^2+1-(\sqrt{3}x-2)\right\}dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{3}}(x-2\sqrt{3})^2\,dx$$
$$=\frac{1}{12}\Big[\ (x-2\sqrt{3})^3\ \Big]_0^{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

(3) ℓ と y 軸との交点を L とし，求める面積を S_2 とすると，$\angle\mathrm{POR}=\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

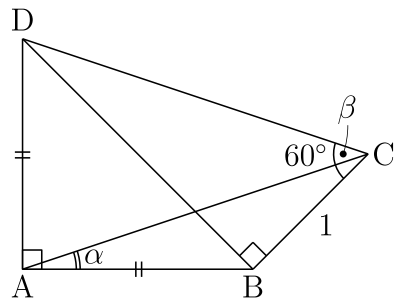
$$S_2=S_1-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\triangle\mathrm{OLP}$$
$$=2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}}$$



2 (1) 直角三角形 BCD に着目すると

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BC}\tan 60^\circ = 1\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3} \quad ゆえに \quad \mathbf{BD^2 = 3}$$

(2) 直角二等辺三角形 ABD に着目すると



$$\mathrm{AB} = \mathrm{BD}\cos 45^\circ = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

△ABC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AC}^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 1^2 - 2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 1\cos 135^\circ$$
$$= \boldsymbol{\frac{5}{2} + \sqrt{3}}$$

(3) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}} = \frac{\frac{3}{2} + \left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) - 1}{2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{AC}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{6}\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\cos^2\alpha = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{6\mathrm{AC}^2} = \frac{6(2 + \sqrt{3})}{3(5 + 2\sqrt{3})} = \boldsymbol{\frac{2}{13}(4 + \sqrt{3})}$$

△ACD に余弦定理を適用すると

$$\cos\beta = \frac{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{CD}^2 - \mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}} = \frac{\left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) + 4 - \frac{3}{2}}{4\mathrm{AC}} = \frac{5 + \sqrt{3}}{4\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\cos^2\beta = \frac{(5 + \sqrt{3})^2}{16\mathrm{AC}^2} = \frac{2(14 + 5\sqrt{3})}{8(5 + 2\sqrt{3})} = \boldsymbol{\frac{1}{52}(40 - 3\sqrt{3})}$$

■

3 (1) O$(0,\ 0,\ 0)$, A$(s,\ s,\ s)$, B$(-1,\ 1,\ 1)$, C$(0,\ 0,\ 1)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= s(1,\ 1,\ 1),\\ \vec{d} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 1,\ 1) - t(s,\ s,\ s)\\ &= (-1-st,\ 1-st,\ 1-st)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{d}=0$ であるから $(s>0)$，

$$1(-1-st)+1(1-st)+1(1-st)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t=\frac{1}{3s}}$$

(2) (1) の結果から，$st=\dfrac{1}{3}$ より $\vec{d}=\left(-1-\dfrac{1}{3},\ 1-\dfrac{1}{3},\ 1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}(-2,\ 1,\ 1)$

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - u\overrightarrow{\mathrm{OA}} - v\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ 0,\ 1) - u(s,\ s,\ s) - v(-1,\ 1,\ 1)\\ &= (-us+v, -us-v,\ 1-us-v)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$, $\vec{d}\perp\vec{e}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=0$, $\vec{d}\cdot\vec{e}=0$ であるから

$$\begin{aligned}1(-us+v)+1(-us-v)+1(1-us-v)&=0,\\ -2(-us+v)+1(-us-v)+1(1-us-v)&=0\end{aligned}$$

整理すると $\begin{cases}-3us-v+1=0\\ -4v+1=0\end{cases}$ よって $\boldsymbol{u=\dfrac{1}{4s},\ v=\dfrac{1}{4}}$

(3) (2) の結果から，$su=v=\dfrac{1}{4}$ であるから

$$\vec{e}=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}(0, -1.\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

このとき，四面体 OADE の体積が 2 であるから，$\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=2$ より

$$\frac{1}{6}\cdot s\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{s=6}$$

解説

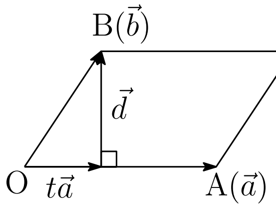
座標空間に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$$

があるとき，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

$\vec{d}=\vec{b}-t\vec{a}$ が $\vec{a}\perp\vec{d}$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{d}=0$ より

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-t\vec{a})=0 \quad ゆえに \quad t|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$$



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S^2 &= (|\vec{a}||\vec{d}|)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}-t\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2(|\vec{b}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{a}|^2) \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-2t|\vec{a}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})+(t|\vec{a}|^2)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \end{aligned}$$

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ であるから

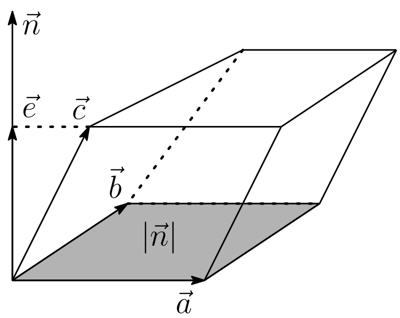
$$\begin{aligned} S^2 &= ({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\ &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 \end{aligned}$$

ここで，$\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$ とおくと

$$|\vec{n}|=S, \quad \vec{n}\cdot\vec{a}=0, \quad \vec{n}\cdot\vec{b}=0$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および $\vec{n}$ に平行なベクトル $\vec{e}$ を用いて

$$\vec{c}=\vec{e}+u\vec{a}+v\vec{b} \quad (u,\ v \text{ は定数})$$



とかける．このとき

$$\vec{n}\cdot\vec{e}=\vec{n}\cdot(\vec{c}-u\vec{a}-v\vec{b})=\vec{n}\cdot\vec{c}$$

$\vec{n}$ と $\vec{e}$ のなす角は 0° または 180° であるから　$|\vec{n}\cdot\vec{e}|=|\vec{n}||\vec{e}|$

この平行六面体の体積を V とすると，$V=|\vec{n}||\vec{e}|$ であるから

$$V=|\vec{n}\cdot\vec{e}|=|\vec{n}\cdot\vec{c}|=|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3|$$

よって，四面体 OABC の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S\cdot|\vec{e}|=\dfrac{1}{6}|\vec{n}||\vec{e}|=\dfrac{1}{6}V$ より

$$\frac{1}{6}|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3|$$

■

$\boxed{4}$ (1) $(x_4,\ y_4) = (0,\ 0)$ となるのは，硬貨を 4 回投げて，表が 3 回，裏が 1 回出る確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(2) $(x_8,\ y_8) = (5,\ 3)$ となるのは，点 $(3,1)$ を通らずに，点 $(5,\ 3)$ に到達する確率であるから，(1) の結果を利用して

$$ {}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{4}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7}{32} - \frac{1}{4}\times\frac{3}{8} = \boldsymbol{\frac{1}{8}} $$

(3) $x_8 + y_8 \leqq 4$ となるのは，4 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達することである．したがって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(4) $x_{4n} + y_{4n} \leqq 4k$ となるのは，4 回目，8 回目，$\cdots$，$4(n-k)$ 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達する，すなわち，ちょうど $n-k$ 回原点に戻る．よって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} = \boldsymbol{\frac{1}{4^{n-k}}} $$

■

$\boxed{5}$ (1) $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の平均を $\overline{x}$ とすると

$$ \begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2 - 2a\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2 - 2a\overline{x} + a^2 = (a-\overline{x})^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2 - \overline{x}^2 \end{aligned} $$

$f(a)$ は，$a = \overline{x}$ のとき，最小値 $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2 - \overline{x}^2$ をとる．これは $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の分散である．

(2) $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ の平均を $\overline{y}$ とし，${y_1}^2,\ {y_2}^2,\ \cdots,\ {y_n}^2$ の平均を $\overline{y^2}$ とすると

$$ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n+1), $$

$$ \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) $$

y_1，y_2，$\cdots$，y_n の分散は

$$\overline{y^2}-\overline{y}^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)-\left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}^2=\frac{1}{12}(n+1)(n-1)$$

z_1，z_2，$\cdots$，z_n の平均を $\overline{z}$ とし，${z_1}^2$，${z_2}^2$，$\cdots$，${z_n}^2$ の平均を $\overline{z^2}$ とすると，$z_k=cy_k$ であるから

$$\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k=c\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=c\overline{y},$$

$$\overline{z^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{z_k}^2=c^2\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2=c^2\overline{y^2}$$

z_1，z_2，$\cdots$，z_n の分散は

$$\overline{z^2}-\overline{z}^2=c^2\overline{y^2}-(c\overline{y})=c^2(\overline{y^2}-\overline{y}^2)$$

$n\geqq 2$ より，$\overline{y^2}-\overline{y}^2>0$ であるから，条件を満たす c の範囲は

$$c^2<1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-1<c<1}$$

(3) $\overline{x}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ より，求める平均は

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}x_k=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(n\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n\overline{x}+x_{n+1}}{n+1}}$$

(4) (3) の結果を利用すると，平均値は

$$\frac{40\overline{x}+x_{41}}{41}=\frac{40\cdot40+40}{41}=\boldsymbol{40}$$

$\dfrac{1}{40}(x_k-40)^2=670$ および $x_{41}=40$ より，分散は

$$\frac{1}{41}\sum_{k=1}^{41}(x_k-40)^2=\frac{1}{41}\left\{\sum_{k=1}^{40}(x_k-40)^2+(x_{41}-40)^2\right\}$$
$$=\frac{40}{41}\cdot\frac{1}{40}\sum_{k=1}^{40}(x_k-40)^2=\frac{40}{41}\times670\fallingdotseq 653.6\cdots$$

よって，分散は **654**

40 個のデータで中央値 35 に一致するデータ 35 は存在しないので，小さい方から 20 番目が 30 で，21 番目が 40 である．したがって，データ 40 を追加したとき，これら 41 個のデータについて，小さい方から 21 番目に該当する，すなわち，中央値は **40** である． ■

9.3　2017年(120分)

1　座標平面上の2点 $\mathrm{A}(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ を考え，A，B間の距離を L とする．ただし，θ は条件

$$(*)\qquad 0 \leqq \theta < 2\pi \quad \text{かつ} \quad \sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $(*)$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(2) $t = \sin\theta\cos\theta$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) L を (2) の t を用いて表せ．

(4) L の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

2　座標平面上の3点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\quad \mathrm{A}(3,\ 0),\quad \mathrm{B}(1,\ 2)$$

を考える．C を線分 OA 上にあり，$\angle\mathrm{OBC} = 45^\circ$ を満たす点とする．また，P を x 座標が t である直線 OA 上の点とする．点 Q，R，P$'$ を次により定める．

(a) 点 P を通り傾きが1の直線と，直線 AB の交点を Q とする．

(b) 点 Q を通り直線 OB に垂直な直線と，直線 OB の交点を R とする．

(c) 点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線と，直線 OA の交点を P$'$ とする．

次の問いに答えよ．

(1) 点 Q の座標を t を用いて表せ．

(2) 点 R の座標を t を用いて表せ．

(3) 点 P$'$ の座標を t を用いて表せ．

(4) 点 P$'$ の x 座標を $f(t)$ とする．数列 $\{t_n\}$ を

$$t_1 = 2,\quad t_{n+1} = f(t_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．数列 $\{t_n\}$ の一般項を求めよ．

3 n を 2 以上の整数とする．n 個のさいころを投げ，出た目のすべての積を X とする．次の問いに答えよ．

(1) X が 5 の倍数である確率を n を用いて表せ．

(2) X が 5 の倍数である確率が 0.99 より大きくなる最小の n を求めよ．ただし，$\log_2 3 = 1.585$，$\log_2 5 = 2.322$ とする．

(3) X が 3 でも 5 でも割り切れない確率を n を用いて表せ．

(4) X が 15 の倍数である確率を n を用いて表せ．

4 座標平面上の二つの曲線

$$C_1 : y = 4x^3 - 1, \quad C_2 : y = x^3$$

を考える．$a > 0$ に対して，x 座標が a である C_1 上の点を A とし，A における C_1 の接線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標を p とする．p の値を求めよ．

(2) 直線 ℓ の方程式を，a を用いて表せ．

(3) 直線 ℓ が C_2 に接するとき，a の値を求めよ．

(4) (3) のとき，直線 ℓ と C_2 の接点を B とする．C_1，C_2 と線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1 (1) $\sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$ より

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4} < \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{7}{4}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi}$$

(2) $$t = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots (*)$$

(1) の結果から，$\pi < 2\theta < 2\pi$ であるから　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2} \leqq t < 0}$

(3) $\mathrm{A}(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ より

$$\begin{aligned} L^2 &= (\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)^2 \\ &= (\sin\theta - \cos\theta)^2\{1 + (\sin\theta + \cos\theta)^2\} \\ &= (1 - 2\sin\theta\cos\theta)(2 + 2\sin\theta\cos\theta) \\ &= (1 - 2t)(2 + 2t) = 2(1 + t)(1 - 2t) \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{L = \sqrt{2(1+t)(1-2t)}}$

(4) (3) の結果から　$L^2 = -4t^2 - 2t + 2 = -4\left(t + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$

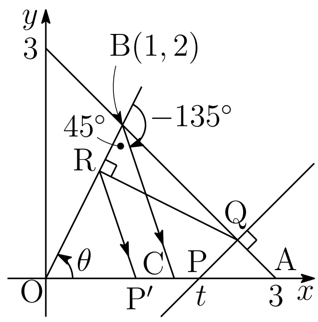
上式および $(*)$ より L は

$t = -\dfrac{1}{4}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi}$ のとき最大値 $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

$t = -\dfrac{1}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{3}{4}\pi}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

■

2 (1) 点 P$(t,\ 0)$ を通り，傾きが 1 の直線は



$$y = x - t$$

2 点 A$(3,\ 0)$，B$(1,\ 2)$ を通る直線は

$$y = -x + 3$$

この 2 直線の交点 Q は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{3+t}{2},\ \dfrac{3-t}{2}\right)}$

(2) 点 Q$\left(\dfrac{3+t}{2},\ \dfrac{3-t}{2}\right)$ を通り，直線 OB に垂直な直線は

$$y - \frac{3-t}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3+t}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{9-t}{4}$$

これと直線 OB : $y = 2x$ との交点 R は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{9-t}{10},\ \dfrac{9-t}{5}\right)}$

(3) 直線 OB と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると　$\tan\theta = 2$

直線 BC の傾きは　$\tan(\theta - 135^\circ) = \dfrac{\tan\theta - \tan 135^\circ}{1 + \tan\theta\tan 135^\circ} = \dfrac{2-(-1)}{1+2\cdot(-1)} = -3$

点 R$\left(\dfrac{9-t}{10},\ \dfrac{9-t}{5}\right)$ を通り，直線 BC と平行な直線は

$$y - \frac{9-t}{5} = -3\left(x - \frac{9-t}{10}\right) \quad \text{ゆえに} \quad y = -3x + \frac{9-t}{2}$$

この直線と直線 OA の交点 P′ は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{9-t}{6},\ 0\right)}$

(4) (3) の結果より，P′ の x 座標が $f(t)$ であるから　$f(t) = \dfrac{9-t}{6}$

$t_{n+1} = f(t_n)$ より　$t_{n+1} = \dfrac{9-t_n}{6}$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

したがって　$t_{n+1} - \dfrac{9}{7} = -\dfrac{1}{6}\left(t_n - \dfrac{9}{7}\right)$

数列 $\left\{t_n - \dfrac{9}{7}\right\}$ は初項 $t_1 - \dfrac{9}{7} = 2 - \dfrac{9}{7} = \dfrac{5}{7}$，公比 $-\dfrac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$t_n - \frac{9}{7} = \left(t_1 - \frac{9}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t_n = \frac{9}{7} + \frac{5}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}$$

■

3 (1) X が 5 の倍数となる事象を A とすると

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \boldsymbol{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

(2) (1) の結果を利用して　$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.99$　ゆえに　$\left(\frac{6}{5}\right)^n > 100$

2 を底とする対数をとると　$n \log_2 \frac{6}{5} > \log_2 100$

したがって　$n(1 + \log_2 3 - \log_2 5) > 2(1 + \log_2 5)$

$$n > \frac{2(1 + \log_2 5)}{1 + \log_2 3 - \log_2 5}$$

$$\frac{2(1 + \log_2 5)}{1 + \log_2 3 - \log 25} = \frac{2(1 + 2.322)}{1 + 1.585 - 2.322} = \frac{6.644}{0.263} \fallingdotseq 25.2\cdots$$

よって，求める最小の整数 n は　**26**

(3) X が 3 の倍数となる事象を B とすると，求める確率は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(4) (3) の結果から　$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

したがって　$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$P(\overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n$　ゆえに　$P(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

よって X が 15 の倍数である確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &= \boldsymbol{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n} \end{aligned}$$

■

4 (1) $C_1 : y = 4x^3 - 1$ と $C_2 : y = x^3$ の交点の x 座標が p であるから

$$4p^3 - 1 = p^3 \quad \text{ゆえに} \quad p^3 = \frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$$

(2) $y = 4x^3 - 1$ を微分すると　$y' = 12x^2$

C_1 上の点 $(a,\ 4a^3 - 1)$ における接線 l の方程式は

$$y - (4a^3 - 1) = 12a^2(x - a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 12a^2x - 8a^3 - 1}$$

(3) $y = x^3$ を微分すると　$y' = 3x^2$

l と C_2 との接点の x 座標を t とすると，接線の傾きと y 座標により

$$\begin{cases} 3t^2 = 12a^2 & \cdots ① \\ t^3 = 12a^2t - 8a^3 - 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① から　$t^2 = 4a^2$　ゆえに　$t = \pm 2a$

(i) $t = 2a$ を ② に代入すると　$(2a)^3 = 12a^2 \cdot 2a - 8a^3 - 1$

整理すると　$8a^3 = 1$　ゆえに　$a = \dfrac{1}{2}$，$t = 1$

(ii) $t = -2a$ を ② に代入すると　$(-2a)^3 = 12a^2 \cdot (-2a) - 8a^3 - 1$

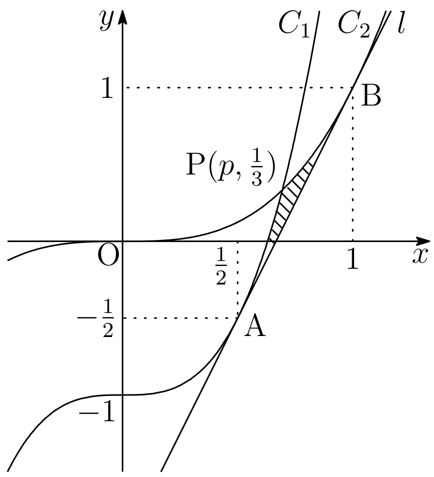
整理すると　$24a^3 = -1$　これは $a > 0$ であることに反するので不適

よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

(4) 2 点 A，B の x 座標は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$，1

(2),(3) の結果から　$l : y = 3x - 2$

求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^{p} (4x^3 - 1)\,dx + \int_{p}^{1} x^3\,dx \\ &\qquad - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (3x - 2)\,dx \\ &= \Big[\, x^4 - x \,\Big]_{\frac{1}{2}}^{p} + \Big[\, \frac{1}{4}x^4 \,\Big]_{p}^{1} \\ &\qquad - \Big[\, \frac{3}{2}x^2 - 2x \,\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \frac{3}{4}p^4 - p + \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$p^4 = p^3 p = \dfrac{1}{3}p$ に注意して　$S = -\dfrac{3}{4}p + \dfrac{9}{16} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} + \dfrac{9}{16}}$ ■

9.4　2018年(120分)

1　次の問いに答えよ．

(1) t の2次関数 $s=\left(t-\dfrac{1}{5}\right)\left(t-\dfrac{3}{5}\right)$ のグラフを図示せよ．

(2) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(A) 2次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(3) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(B) 2次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(4) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が4点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) 実数 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，不等式

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} < 1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \quad \left(0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

により定まる実数 α は，θ についての整数 $f(\theta)$ を用いて $\alpha = f(\theta)$ と表すことができる．このような $f(\theta)$ を一つ求めよ．

(3) (2) で求めた $f(\theta)$ を用いて，数列 $\{\theta_n\}$ を

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{n+1} = f(\theta_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) (3) の数列 $\{\theta_n\}$ に対し，

$$|\theta_{n+1} - \theta_n| \leqq \frac{\pi}{1000}$$

となる最小の自然数 n を求めよ．

3 O を原点とする座標平面上の曲線

$$C : y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{13}{6}$$

を考える．C 上の点 D$(-1,\ 2)$ における C の接線を ℓ とし，D と異なる C と ℓ の共有点を E とする．次の問いに答えよ．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) E の座標を求めよ．

(3) 原点 O を中心とする半径 1 の円の周上の点 A$(a,\ b)$ を考える．ただし，a と b はともに正であるとする．直線 ℓ 上の動点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が P の位置によらず一定であるとき，A の座標を求めよ．

(4) A を (3) で求めた点とする．点 Q が C 上を D から E まで動くときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を求めよ．

4 座標平面上で，三つの不等式

$$y \geqq 0, \quad x+y \geqq 4, \quad 2x+3y \leqq 12$$

によって表される領域を D とする．次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．D に含まれる格子点をすべて求めよ．

(3) 1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目に出た目の数を X，2 回目に出た目の数を Y とする．点 $(X,\ Y)$ が D に含まれる確率を求めよ．

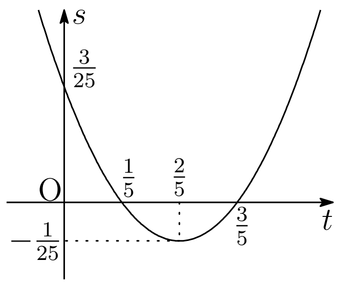
(4) 1 個のさいころを n 回投げるとき，出た目の数の中の最小の数を Z，最大の数を W とする．点 $(Z,\ W)$ が D に含まれる確率 P_n を求めよ．ただし，n は 2 以上の自然数とする．

解答例

1 (1) $s = \left(t - \dfrac{1}{5}\right)\left(t - \dfrac{3}{5}\right)$ より

$$s = \left(t - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}$$

グラフの概形は右の図のようになる.



(2) $f(t) = t^2 - ut + v$ とおくと　$f(t) = \left(t - \dfrac{u}{2}\right)^2 + v - \dfrac{u^2}{4}$

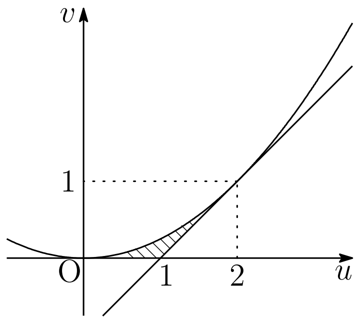
2 次方程式 $f(t) = 0$ の実数解 x, y が $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たすから，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \geqq 0$ および上式より

$$v \geqq 0, \quad 1 - u + v \geqq 0, \quad 0 \leqq \frac{u}{2} \leqq 1, \quad v - \frac{u^2}{4} \leqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} 0 \leqq u \leqq 2 \\ v \geqq 0 \\ v \geqq u - 1 \\ v \leqq \dfrac{u^2}{4} \end{cases}$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む.



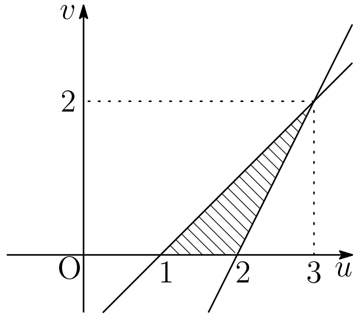
(3) 2 次方程式 $f(t) = 0$ の実数解 x, y が $0 \leqq x \leqq 1 \leqq y \leqq 2$ を満たすから，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \leqq 0$，$f(2) \geqq 0$ より

$$v \geqq 0, \quad 1 - u + v \leqq 0, \quad 4 - 2u + v \geqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} v \geqq 0 \\ v \leqq u - 1 \\ v \geqq 2u - 4 \end{cases}$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む.



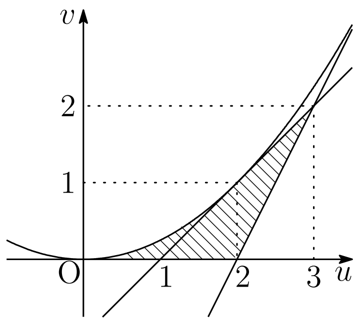
(4) $A = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$，$B = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1 \leqq y \leqq 2\}$ とすると，$(x,\ y)$ が 4 点 $(0, 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部は $A \cup B$ である．(1)，(2) で求めた領域をそれぞれ E，F とすると

$$\text{点}\,(x+y,\ xy)\quad \text{すなわち}\quad \text{点}\,(u,\ v)$$

の表す領域は $E \cup F$ で，右の図のようになる．

よって，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^2 \frac{u^2}{4}\,du + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$= \left[\frac{u^3}{12}\right]_0^2 + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{7}{6}}$$



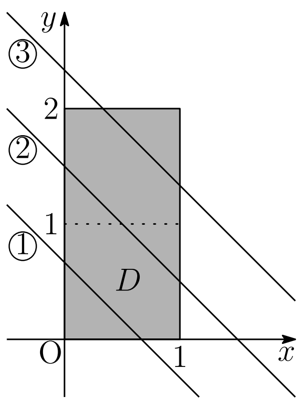
別解　$D = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2\}$ とし，直線 $x + y = u$ 上の点 $(x,\ y) \in D$ における $v = xy$ のとる値の範囲を求める．

$$v = x(u - x) = -\left(x - \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{u^2}{4}$$

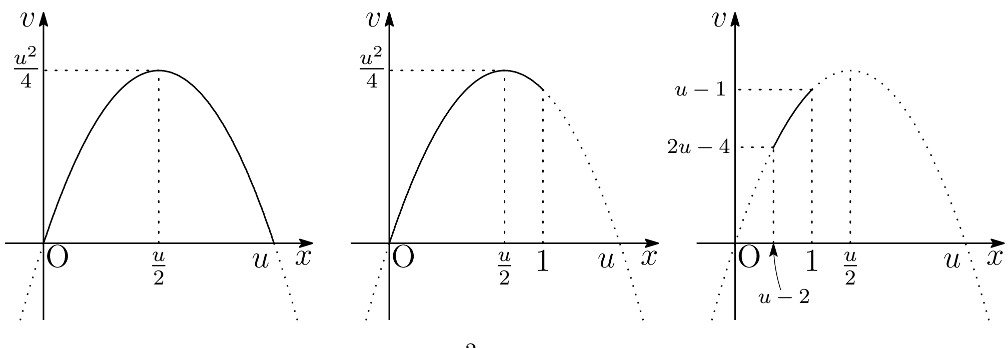
① $0 \leqq u \leqq 1$ のとき　$0 \leqq x \leqq u$

② $1 \leqq u \leqq 2$ のとき　$0 \leqq x \leqq 1$

③ $2 \leqq u \leqq 3$ のとき　$u - 2 \leqq x \leqq 1$



① $0 \leqq u \leqq 1$　　② $1 \leqq u \leqq 2$　　③ $2 \leqq u \leqq 3$



(i) $0 \leqq u \leqq 2$ のとき　$0 \leqq v \leqq \dfrac{u^2}{4}$

(ii) $2 \leqq u \leqq 3$ のとき　$2u - 4 \leqq v \leqq u - 1$

よって　$S = \displaystyle\int_0^2 \frac{u^2}{4}\,du + \int_2^3 \{(u-1) - (2u-4)\}\,du = \frac{7}{6}$　■

2 (1) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき　$0 \leqq \cos\theta \leqq 1$　ゆえに　$0 \leqq \frac{1-\cos\theta}{2} \leqq \frac{1}{2}$

よって　$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \leqq \sqrt{\frac{1}{2}} < 1$$

(2) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$，$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$　$\left(0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ より

$$2\cos^2\alpha - 1 = -\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos 2\alpha = \cos(\pi - \theta)$$

このとき，$0 \leqq 2\alpha \leqq \pi$，$\frac{\pi}{2} \leqq \pi - \theta \leqq \pi$ であるから，第 2 式から

$$2\alpha = \pi - \theta \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}$$

(3) $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ より，(2) の結果から　$\theta_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_n}{2}$

したがって　$$\theta_{n+1} - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\left(\theta_n - \frac{\pi}{3}\right)$$

$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ より　$\theta_n - \frac{\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　よって　$\boldsymbol{\theta_n = \frac{\pi}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$

(4) (3) の結果から　$\theta_{n+1} - \theta_n = \frac{\pi}{3}\left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = -\pi\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

したがって　$$|\theta_{n+1} - \theta_n| = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$|\theta_{n+1} - \theta_n| \leqq \frac{\pi}{1000}$ より

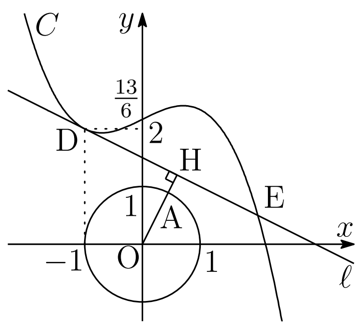
$$\frac{\pi}{2^{n+1}} \leqq \frac{\pi}{1000} \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n+1} \geqq 1000$$

$2^9 = 512$，$2^{10} = 1024$ より，上式を満たす最小の自然数 n は

$$n + 1 = 10 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{n = 9}$$

■

3 (1) $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}$ より　$y'=-x^2+\frac{1}{2}$



$x=-1$ のとき　　$y'=-\frac{1}{2}$

ℓ は点 D$(-1,\ 2)$ を通り，傾き $-\frac{1}{2}$ の直線である

$y-2=-\frac{1}{2}(x+1)$　すなわち　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

(2) C と ℓ の共有点は　　$(*)\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6} \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}$

$(*)$ から y を消去すると　$-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

整理すると　$x^3-3x-2=0$　ゆえに　$(x+1)^2(x-2)=0$

E の x 座標は $x\neq -1$ に注意して　$x=2$　これを $(*)$ に代入して　E$\boldsymbol{\left(2,\ \frac{1}{2}\right)}$

(3) O から ℓ に垂線 OH を引くと，直線 OH の方程式は　$y=2x$

直線 OH と ℓ の交点 H の座標は　$\left(\frac{3}{5},\ \frac{6}{5}\right)$

ℓ の方向ベクトルを $\vec{v}=(2,-1)$ とし，直線 OH の方向ベクトルを $\vec{n}=(1,\ 2)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+t\vec{v}=t\vec{v}+\frac{3}{5}\vec{n}\quad (t \text{ は媒介変数})$$

$(1,\ 0)=\frac{1}{5}(2\vec{v}+\vec{n})$，$(0,\ 1)=\frac{1}{5}(-\vec{v}+2\vec{n})$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(a,\ b)=a(1,\ 0)+b(0,1)\\ &=\frac{a}{5}(2\vec{v}+\vec{n})+\frac{b}{5}(-\vec{v}+2\vec{n})=\frac{2a-b}{5}\vec{v}+\frac{a+2b}{5}\vec{n}\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2a-b}{5}t|\vec{v}|^2+\frac{3}{25}(a+2b)|\vec{n}|^2=(2a-b)t+\frac{3}{5}(a+2b)$

上式は t の値によらず一定であるから　$2a-b=0$　$\cdots$①

点 A$(a,\ b)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上の第 1 象限にあるから

$$a^2+b^2=1\ (a>0,\ b>0)\quad\cdots②$$

①，② を解いて　$a=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$b=\frac{2}{\sqrt{5}}$　よって　A$\boldsymbol{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$

(4) 点 Q$(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は，$(**)$ と同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x,\ y)=\frac{2x-y}{5}\vec{v}+\frac{x+2y}{5}\vec{n}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{n}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\frac{x+2y}{5\sqrt{5}}|\vec{n}|^2=\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{3}x^3+2x+\frac{13}{3}\right)\end{aligned}$$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-\dfrac{2}{3}x^3+2x+\dfrac{13}{3}\right)$ とおくと $(-1\leqq x\leqq 2)$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x^2+2)=-\frac{2}{\sqrt{5}}(x+1)(x-1)$$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$	$\nearrow$	$\frac{17}{3\sqrt{5}}$	$\searrow$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$

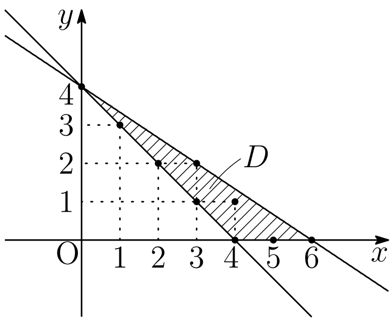
よって，Q$\left(1,\ \dfrac{7}{3}\right)$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{17\sqrt{5}}{15}}$ をとる．

補足 点 Q が C 上を D から E まで動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を与える点における接線は ℓ に平行である．■

4 (1) 三つの不等式

$$y \geqq 0, \quad x+y \geqq 4, \quad 2x+3y \leqq 12$$

すなわち $\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \geqq -x+4 \\ y \leqq -\dfrac{2}{3}x+4 \end{cases}$



この連立不等式の表す領域 D は，右の図の斜線部分で境界線を含む．

(2) (1) の図から，求める格子点は

(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (5, 0), (6, 0)

(3) 点 $(X,\ Y)$ が D に含まれるものは，次の 5 通り．

$$(X,\ Y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

よって，求める確率は $\dfrac{5}{6^2}=\mathbf{\dfrac{5}{36}}$

(4) $1 \leqq Z \leqq W \leqq 6$ である $(Z,\ W)$ の組は $(Z,\ W)=(1,\ 3),\ (2,\ 2)$

(i) $(Z,\ W)=(1,\ 3)$ のとき
$1 \leqq Z \leqq W \leqq 3$，$1 \leqq Z \leqq W \leqq 2$，$2 \leqq Z \leqq W \leqq 3$ である事象をそれぞれ A，B，C とすると，このときの確率は

$$\begin{aligned} P(A)-P(B\cup C) &= P(A)-P(B)-P(C)+P(B\cap C) \\ &= \frac{3^n}{6^n}-\frac{2^n}{6^n}-\frac{2^n}{6^n}+\frac{1^n}{6^n} \\ &= \frac{3^n-2^{n+1}+1}{6^n} \end{aligned}$$

(ii) $(Z,\ W)=(2,\ 2)$ のとき，$Z=W=2$ であるから，このときの確率は

$$\frac{1^n}{6^n}=\frac{1}{6^n}$$

(i),(ii) は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3^n-2^{n+1}+1}{6^n}+\frac{1}{6^n}=\boldsymbol{\frac{3^n-2^{n+1}+2}{6^n}}$$

■

9.5　2019 年 (120 分)

1 $a>0$，$r>0$ とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする．また，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される．

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) b_n を a，r および n を用いて表せ．

(2) 一般項が

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ．

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする．すなわち，

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k$$

とする．このとき，一般項が

$$d_n = 2^{M_n}$$

である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ．

2 n を自然数とし，p を $0<p<1$ を満たす実数とする．一方の面に 0，もう一方の面に 1 と書いたカードがある．最初，このカードは 0 と書かれた面が上になるように置いてある．表の出る確率が p のコインを投げ，裏が出たときだけカードを裏返すという試行を n 回繰り返して行う．n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 である確率を P_n とおく．次の問いに答えよ．

(1) P_n を p および n を用いて表せ．

(2) $n \geqq 2$ とする．n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 であり，さらに，途中でカードが少なくとも 1 回裏返されたことがわかっている．このとき，ちょうど 2 回裏返された確率を p および n を用いて表せ．

3 座標平面上の二つの曲線

$$C : y = x^3, \quad C' : y = 8x^3$$

と曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ を考える．点 P_1 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_1 とし，点 Q_1 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_2 とする．次に，点 P_2 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_2 とし，点 Q_2 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_3 とする．このように，自然数 n に対して，点 P_n を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_n とし，点 Q_n を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする．点 P_n の x 座標を a_n とおく．次の問いに答えよ．

(1) a_n を n を用いて表せ．

(2) 点 P_{n+1} における曲線 C の接線，直線 $x = a_n$ および曲線 C で囲まれる部分のうち，$a_{n+1} \leqq x \leqq a_n$ の領域にある面積を S_n とする．S_n を n を用いて表せ．

(3) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とおく．T_n を n を用いて表せ．

4 原点を O とする座標平面上において，点 A(0, 3)，B(0, −1) および x 軸上の正の部分を動く点 P(t, 0) があり，∠APB は鈍角でないとする．△ABP の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする．次の問いに答えよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている．その交点のことを，三角形の垂心という．

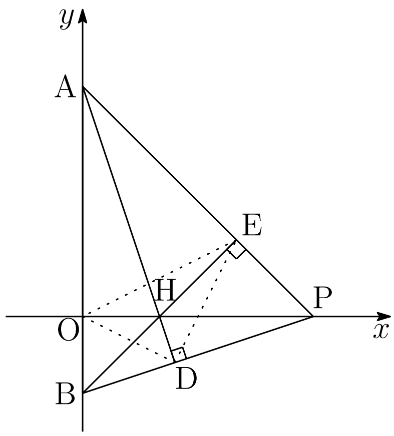
(1) ∠APB が直角となる t の値を求めよ．

(2) 点 H の座標を t を用いて表せ．

以下では，t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする．

(3) 点 H が △ODE の内心であることを証明せよ．ただし，1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい．

(4) △ODE の内接円の半径を t を用いて表せ．



解答例

$\boxed{1}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公比 r の等比数列であるから $(a>0,\ r>0)$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$b_1 = a_1 = a$，$b_{n+1} = b_n a_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より　$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = ar^n$

$n \geqq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{b_k} = \prod_{k=1}^{n-1} ar^k \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_n}{a} = a^{n-1}r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$n=1$ のときも，上式は成立することから　$\boldsymbol{b_n = a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)}}$

(2) (1) の結果から　$\log_2 b_n = n\log_2 a + \dfrac{1}{2}n(n-1)\log_2 r$

したがって　$c_n = \dfrac{\log_2 b_n}{n} = \log_2 a + \dfrac{1}{2}(n-1)\log_2 r$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $\log_2 a$，公差 $\dfrac{1}{2}\log_2 r$ の等差数列

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{\log_2 a + \frac{1}{2}(k-1)\log_2 r\right\} = n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r$$

ゆえに
$$\begin{aligned} M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k &= \frac{1}{n}\left\{n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r\right\} \\ &= \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1)\log_2 r \end{aligned}$$

したがって　$d_n = 2^{M_n} = ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$

よって，数列 $\{d_n\}$ は，初項 a，公比 $r^{\frac{1}{4}}$ の等比数列である． ■

2 (1) 条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$P_1 = p, \quad P_{n+1} = pP_n + (1-p)(1-P_n) \qquad (n \geqq 1)$$

ゆえに　$$P_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$$

したがって　$$P_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}\left(p - \frac{1}{2}\right)$$

よって　$$\boldsymbol{P_n = \frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\}}$$

(2) n 回の試行で少なくとも 1 回裏返されて，n 回終了後にカードの上の面が 0 である事象を A とし，n 回の試行でちょうど 2 回裏返される事象を B とする．

$$P(A) = P_n - p^n = \frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\} - p^n$$

$$P(A \cap B) = {}_n\mathrm{C}_2 \cdot p^{n-2}(1-p)^2 = \frac{1}{2}n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{\frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\} - p^n}$$

$$= \boldsymbol{\frac{n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{1 + (2p-1)^n - 2p^n}}$$

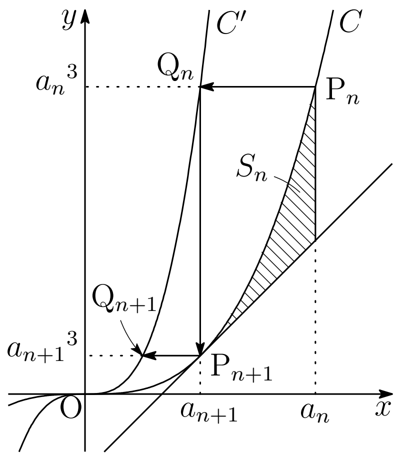
■

3 (1) P_n，P_{n+1} は $C: y=x^3$ 上の点であるから

$$\mathrm{P}_n(a_n,\ {a_n}^3),\quad \mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ {a_{n+1}}^3)$$

右の図から，Q_n の座標は，P_{n+1} の x 座標および P_n の y 座標と等しいから

$$\mathrm{Q}_n\left(a_{n+1},\ {a_n}^3\right)$$



Q_n は $C': y=8x^3$ 上の点であるから

$${a_n}^3 = 8{a_{n+1}}^3 \quad ゆえに \quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$$

$a_1=1$ であるから，上式より $\quad a_n = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{1}{2^{n-1}}}$

(2) $C: y=x^3$ より $\quad y'=3x^2$

ここで，C 上の点 $(\alpha,\ \alpha^3)$ における接線を ℓ とすると，その方程式は

$$y-\alpha^3 = 3\alpha^2(x-\alpha) \quad ゆえに \quad y=3\alpha^2x-2\alpha^3$$

C と ℓ で囲まれる部分のうち，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の領域にある面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{x^3-(3\alpha^2x-2\alpha^3)\}\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x+2\alpha)\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^3+3\alpha(x-\alpha)^2\}\,dx = \left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4+\alpha(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{4}(3\alpha+\beta)(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

上式に $\alpha=a_{n+1}=\frac{1}{2^n}$，$\beta=a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ を代入することにより

$$S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{2^{4n+2}}}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \frac{5}{2^{4k+2}} = \frac{5}{64}\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{16}\right)^{k-1} \\ &= \frac{5}{64}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n}{1-\frac{1}{16}} = \boldsymbol{\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{2^{4n}}\right)} \end{aligned}$$

■

4 (1) 3 点 A$(0,\ 3)$，B$(0, -1)$，P$(t,\ 0)$ $(t>0)$ により

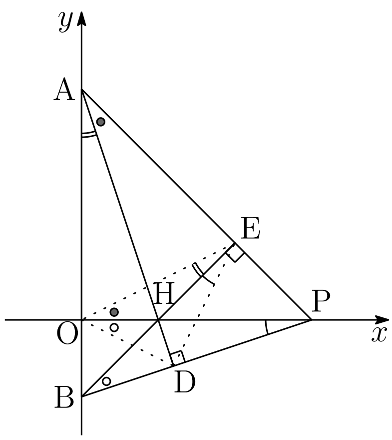
$$\text{直線 AP の傾きは}\ -\frac{3}{t},\qquad \text{直線 BP の傾きは}\ \frac{1}{t}$$

2 直線 AP，BP は直交するから　$-\dfrac{3}{t}\cdot\dfrac{1}{t}=-1$　よって　$\boldsymbol{t=\sqrt{3}}$

(2) 直線 BE は点 B$(0, -1)$ を通り，傾き $\dfrac{t}{3}$ であるから (直線 AP に垂直)

$$y=\frac{t}{3}x-1\quad \text{ゆえに}\quad y=\frac{t}{3}\left(x-\frac{3}{t}\right)\quad \text{よって}\quad \mathbf{H}\left(\boldsymbol{\frac{3}{t},\ 0}\right)$$

(3) 四角形 AOHE，四角形 OBDH，四角形 HDPE は，それぞれ対角の和が 180° であるから，円に内接する．



四角形 AOHE において　$\angle\mathrm{EOH}=\angle\mathrm{EAH}$

$\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{OAH}$

四角形 OBDH において　$\angle\mathrm{HOD}=\angle\mathrm{HBD}$

四角形 HDPE において　$\angle\mathrm{HED}=\angle\mathrm{HPD}$

$\triangle\mathrm{AHE}\backsim\triangle\mathrm{BHD}$ より　$\angle\mathrm{EAH}=\angle\mathrm{HBD}$

$\triangle\mathrm{AHO}\backsim\triangle\mathrm{PHD}$ より　$\angle\mathrm{OAH}=\angle\mathrm{HPD}$

上の第 1，第 3，第 5 式から

$$\angle\mathrm{EOH}=\angle\mathrm{HOD}\quad\cdots①$$

同様に，上の第 2，第 4，第 6 式から

$$\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{HED}\quad\cdots②$$

①，② より，$\triangle\mathrm{ODE}$ において，線分 OH，EH は，それぞれ $\angle\mathrm{O}$，$\angle\mathrm{E}$ の二等分線である．よって，点 H は $\triangle\mathrm{ODE}$ の内心である．

(4) 点 E は，直線 AP : $y=-\dfrac{3}{t}x+3$ と (2) の直線 $y=\dfrac{t}{3}x-1$ 交点である．

これらの連立方程式を解くと　E$\left(\dfrac{12t}{t^2+9},\ \dfrac{3t^2-9}{t^2+9}\right)$

ゆえに，直線 OE の方程式は　$y=\dfrac{3t^2-9}{12t}x$　すなわち　$(t^2-3)x-4ty=0$

$\triangle\mathrm{ODE}$ の内接円の半径は，点 H$\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ から直線 OE までの距離であるから $(t>\sqrt{3})$

$$\frac{\left|(t^2-3)\cdot\dfrac{3}{t}-4t\cdot 0\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+(-4t)^2}}=\boldsymbol{\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}}$$

■

9.6　2020 年 (120 分)

1 m, p, q を実数とする．二つの関数

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x, \quad g(x) = \frac{1}{6}(x-p)^2 + q$$

を考える．座標平面上の放物線

$$C_1 : y = f(x), \quad C_2 : y = g(x)$$

および直線 $\ell : y = mx$ について，次の二つの条件 (i)，(ii) が成り立つとする．

(i) 直線 ℓ は原点 O において放物線 C_1 に接している．

(ii) 直線 ℓ は放物線 C_2 に接している．

直線 ℓ と放物線 C_2 の接点を A とする．次の問いに答えよ．

(1) m の値を求めよ．

(2) q を p を用いて表せ．また，点 A の座標を p を用いて表せ．

(3) $p \neq -1$ とする．放物線 C_1 と放物線 C_2 の二つの共有点の x 座標を p を用いて表せ．

(4) $p = 2$ とする．放物線 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた図形のうち，$x \geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S と，$x \leqq 0$ の範囲にある部分の面積 T をそれぞれ求めよ．

2 $a,\ b$ を正の定数とする．$0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対し，平面上で，次の三つの条件 (i)，(ii)，(iii) を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える．

(i) $\mathrm{PA} = a$，$\mathrm{PB} = b$，$\angle\mathrm{APB} = \theta$ である．

(ii) 2 点 C，D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある．

(iii) $\mathrm{AB} = 3\mathrm{AD}$ である．

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする．次の問いに答えよ．

(1) 辺 AB の長さを $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ．

(2) S を $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ．

(3) θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし，S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする．M を $a,\ b$ を用いて表せ．また，$\sin\beta$ および $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) $a = 16,\ b = 25$ とする．また，β を (3) で定めた値とする．$\theta = \beta$ のときの，点 P と直線 AB の距離を求めよ．

3 1 個のさいころを 2 回投げる．1 回目に出た目を a_1，2 回目に出た目を a_2 とする．次に，1 枚の硬貨を 2 回投げる．1 回目に表が出た場合は $b_1 = 1$，裏が出た場合は $b_1 = a_1$ とおく．また，2 回目に表が出た場合は $b_2 = 1$，裏が出た場合は $b_2 = a_2$ とおく．ベクトル

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2), \quad \vec{b} = (b_1,\ b_2)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $a_1 + a_2 = 7$ である確率を求めよ．

(2) $b_1 = 1$ である確率を求めよ．

(3) $\vec{b} = (1,\ 1)$ であったとき，$\vec{a} = (1,\ 6)$ である条件付き確率を求めよ．

(4) $\vec{b} = (1,\ 1)$ であったとき，$a_1 + a_2 = 7$ である条件付き確率を求めよ．

4 数列 $\{a_n\}$ を次の条件 (i)，(ii) により定める．

(i) $a_1 = 1$ である．

(ii) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，n が奇数ならば $a_{n+1} = -a_n + 1$，また n が偶数ならば $a_{n+1} = -2a_n + 3$ である．

さらに，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n-1}$ により定め，数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n}$ により定める．次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(3) 自然数 m に対して，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $(2m-1)$ 項までの和を T_m とする．T_m を m を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x$ より　$f'(x)=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$　よって　$m=f'(0)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2) $\ell: y=\dfrac{1}{3}x$ と $C_2: y=\dfrac{1}{6}(x-p)^2+q$ から y を消去すると

$$\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}(x-p)^2+q \quad \text{整理すると} \quad x^2-2(p+1)x+p^2+6q=0$$

ℓ と C_2 は接するから，上の第 2 式の係数について

$$(p+1)^2-1\cdot(p^2+6q)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{q=\frac{1}{3}p+\frac{1}{6}}$$

(3) $C_1: y=\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x$，$C_2: y=\dfrac{1}{6}(x-p)^2+\dfrac{1}{3}p+\dfrac{1}{6}$

上の 2 式から y を消去して整理すると

$$3x^2+2(p+1)x-(p+1)^2=0$$
$$(x+p+1)(3x-p-1)=0$$

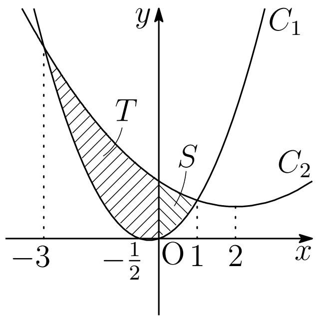
よって，求める二つの共有点の x 座標は　$\boldsymbol{x=-p-1,\ \dfrac{p+1}{3}}$

(4) $p=2$ のとき，(2) の結果から

$$q=\frac{5}{6}$$

(3) の結果から，C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$x=-3,\ 1$$



$-3 \leqq x \leqq 1$ において　$g(x)-f(x) \geqq 0$

$$g(x)-f(x)=\frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x\right)$$
$$=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x+3)(x-1)$$

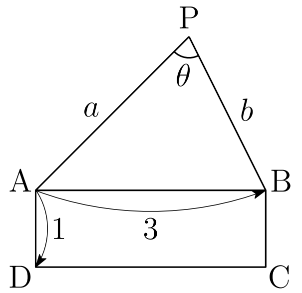
よって　$S+T=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)\,dx=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot4^3=\dfrac{16}{3}$

$$S=\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}\right)dx=\left[-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

$$T=\frac{16}{3}-\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

■

2　(1)　$\triangle$PABに余弦定理を適用すると



$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$\mathrm{AB} > 0$ であるから

$$\mathbf{AB} = \boldsymbol{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$$

(2)　$\mathrm{AD} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AB}$ であるから

$$\text{長方形 ABCD の面積} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD} = \frac{1}{3}\mathrm{AB}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)$$

また，$\triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{ab}{6}(3\sin\theta - 4\cos\theta)} \end{aligned}$$

(3)　$\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$，$\sin\varphi = -\dfrac{4}{5}$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < 0\right)$，(2)の結果から

$$S = \frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{5ab}{6}\sin(\theta + \varphi)$$

$0 < \theta < \pi$ より，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta + \varphi < \pi$ であるから，S が最大なるとき，$\theta = \beta$ であるから

$$\beta + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

よって　$\sin\beta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi = \boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$

$\cos\beta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \boldsymbol{-\dfrac{4}{5}}$

(4)　$a = 16$，$b = 25$，$\theta = \beta$ のとき　$S = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 16\cdot 25\cdot\dfrac{3}{5} = 120$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{16^2 + 25^2 - 2\cdot 16\cdot 25\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{1521} = 39$$

点Pから直線ABまでの距離を h とすると，$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h$ であるから

$$120 = \frac{1}{2}\cdot 39h \quad \text{よって} \quad h = \boldsymbol{\frac{80}{13}}$$

■

3 (1) $a_1+a_2=7$ の場合の数の総数は，7 個の○を一列に並べ，間の 6 カ所のうち 1 カ所に仕切りを作り，区切られた○の個数を順番に a_1，a_2 としたときの場合の総数に等しい．よって，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_1}{6^2}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2) $b_1=1$ となるのは，次の事象である．

- 1 回目に投げた硬貨が表である．
- 1 回目に投げた硬貨が裏で，$a_1=1$ である．

これらの事象は，互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{7}{12}}$$

(3) $\vec{a}=(1,\ 6)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ となる事象をそれぞれ A，B とする．(2) の結果から

$$P(B)=\left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$A\cap B$ は，さいころの出た目が順に 1, 6 で，硬貨は，1 回目は表・裏どちらでもよく，2 回目が裏となる事象であるから

$$P(A\cap B)=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{12}{7}\right)^2=\mathbf{\frac{2}{49}}$$

(4) $a_1+a_2=7$ となる事象を C とする．$B\cap C$ は，$\{a_1,\ a_2\}$ の組合せが $\{1,\ 6\}$，$\{2,\ 5\}$，$\{3,\ 4\}$ の場合であるから

$$P(B\cap C)=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left\{2!\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+2!\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2\right\}=2\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

求める条件付き確率は

$$P_B(C)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=2\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{12}{7}\right)^2=\mathbf{\frac{8}{49}}$$

■

4 (1) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \begin{cases} -a_n + 1 & (n \text{ が奇数}) \\ -2a_n + 3 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$　$\cdots (*)$

したがって
$$\begin{aligned} a_2 &= -a_1 + 1 = -1 + 1 = \mathbf{0}, \\ a_3 &= -2a_2 + 3 = -2\cdot 0 + 3 = \mathbf{3} \\ a_4 &= -a_3 + 1 = -3 + 1 = \mathbf{-2} \\ a_5 &= -2a_4 + 3 = -2\cdot(-2) + 3 = \mathbf{7} \end{aligned}$$

(2) $(*)$ より
$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= -2a_{2n} + 3 = -2(-a_{2n-1} + 1) + 3 = 2a_{2n-1} + 1 \\ a_{2n+2} &= -a_{2n+1} + 1 = -(-2a_{2n} + 3) + 1 = 2a_{2n} - 2 \end{aligned}$$

$b_n = a_{2n-1}$，$c_n = a_{2n}$ より　$b_1 = a_1 = 1$，$c_1 = a_2 = 0$

$$b_{n+1} = 2b_n + 1, \quad c_{n+1} = 2c_n - 2$$

したがって　$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$，$c_{n+1} - 2 = 2(c_n - 2)$

数列 $\{b_n + 1\}$ は，初項 $b_1 + 1 = 2$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n + 1 = 2\cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_n = 2^n - 1}$$

数列 $\{c_n - 2\}$ は，初項 $c_1 - 2 = -2$，公比 2 の等比数列であるから

$$c_n - 2 = -2\cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c_n = -2^n + 2}$$

(3) (2) の結果から

$$a_{2n-1} = b_n = 2^n - 1, \quad a_{2n} = c_n = -2^n + 2$$

上の 2 式から，$a_{2n-1} + a_{2n} = 1$ であるから，$m > 1$ のとき

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{k=1}^{2m-1} a_k = \sum_{j=1}^{m-1} (a_{2j-1} + a_{2j}) + a_{2m-1} \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} 1 + (2^m - 1) \\ &= 2^m + m - 2 \end{aligned}$$

$T_1 = a_1 = 1$ であるから，上式は，$m = 1$ のときも成立する．

よって　$\boldsymbol{T_m = 2^m + m - 2}$　■

第 10 章　九州大学

出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	九州大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式							2			
	2 次関数										
	図形と計量				3						
	データの分析										
II	式と証明									4	
	複素数と方程式										3
	図形と方程式			2·4	1			2			
	三角関数				3						
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	1	2	4	1	1	1	1	1	2	1
A	場合の数と確率	4	4	3	4*	3	3	3	4	1	4
	整数の性質		3		2	4	4	4	2		3
	図形の性質				3		2				
B	平面上のベクトル	3							3		
	空間のベクトル		1	1		2				3	2
	数列	2	4								
	確率分布と統計										

数字は問題番号 (∗ は旧課程の内容を含む)

10.1　2015 年 (120 分)

1 座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

を考える。ただし，a，b は実数とする。

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a，b に関する条件を求めよ。

以下，a，b が (1) の条件を満たすとし，C_1 と C_2 で囲まれる面積が 9 であるとする。

(2) b を a を用いて表せ。

(3) a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。

2 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q，辺 OC を 1 : 3 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ。

(3) 三角形 PQR の面積を求めよ。

3 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を考える。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

この操作を 4 回繰り返す。もらう硬貨の総数が 1 枚である確率と，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率をそれぞれ求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。

(2) p を素数とし，k を 0 以上の整数とする。$2^{p-1} - 1 = p^k$ を満たす p，k の組をすべて求めよ。

解答例

1 (1) $y=x^2$ と $y=-x^2+ax+b$ から y を消去すると

$$x^2=-x^2+ax+b \quad \text{すなわち} \quad 2x^2-ax-b=0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるとき，$(*)$ より

$$(-a)^2-4{\cdot}2{\cdot}(-b)>0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a^2+8b>0}$$

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=\frac{a}{2},\quad \alpha\beta=-\frac{b}{2}$$
$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b} \quad \cdots①$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\{(-x^2+ax+b)-x^2\}\,dx&=-\int_\alpha^\beta(2x^2-ax-b)\,dx\\&=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

したがって　$\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=9$　ゆえに　$\beta-\alpha=3$　$\cdots②$

①，② より　$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b}=3$　よって　$\boldsymbol{b=-\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2}}$

(3) (2) の結果から，C_2 は

$$y=-x^2+ax-\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2} \quad \text{すなわち} \quad y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2}$$

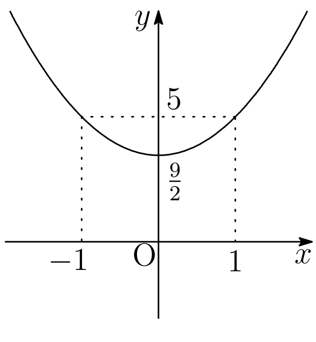
C_2 の頂点を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{a}{2},\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

よって，C_2 の頂点が描く軌跡の方程式は

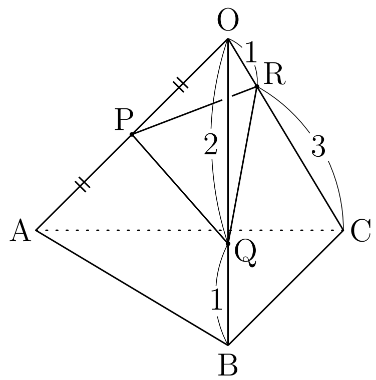
$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$$

その軌跡は，右の図のようになる．



■

2 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと



$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{4}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{4}{9}|\vec{b}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{16}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

よって
$$\mathbf{PQ}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{6}},\quad \mathbf{PR}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

別解　△OPQ および △OPR に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{36}$$
$$\mathrm{PR}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OR}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{5}{48}}$$

(3)
$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{36}\cdot\frac{3}{16}-\left(\frac{5}{48}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{131}}{96}}\ \blacksquare$$

3 1，3 回目の操作で青玉の個数は 2 個または 0 個.

2，4 回目の操作で青玉の個数は 3 個または 1 個.

したがって，もらう硬貨の枚数は 0，1，2 枚のいずれかである.

2 回目の操作で青玉 3 個である確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

したがって，2 回目の操作で青玉 1 個である確率は

$$1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

2，4 回目の操作で青玉 3 個，すなわち，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率は

$$\frac{2}{9}\times 1\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{27}}$$

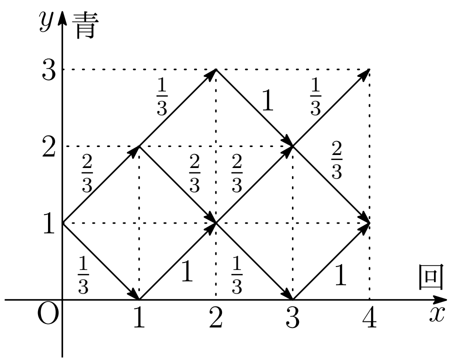
2，4 回目の操作で青玉 1 個，すなわち，硬貨を 1 枚ももらわない確率は

$$\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{49}{81}$$

よって，もらう硬貨の総数が 1 枚である確率は

$$1-\left(\frac{2}{27}+\frac{49}{81}\right)=\boldsymbol{\frac{26}{81}}$$

補足 x 回目の操作で青玉が y 個である確率を $P(x,y)$ とすると



$$P(2,3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$
$$P(2,1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{7}{9}$$

4 回の操作で硬貨を 2 枚もらう (青玉が 2 回 3 個になる) 確率は

$$P(2,3)\times 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

4 回の操作で硬貨を 1 枚ももらわない確率は

$$\{P(2,1)\}^2=\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$$

■

$\boxed{4}$ (1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

よって，$2^n - 1$ は 3 の倍数である．

(2) $2^{p-1} - 1 = p^k$ (p は素数, k は 0 以上の整数) $\cdots(*)$

(i) $p = 2$ のとき，$(*)$ は

$$1 = 2^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 0$$

(ii) $p \neq 2$ のとき，p は奇素数であるから，$p-1$ は偶数である．

(1) の結果から，$2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数である．

$(*)$ より，p^k は 3 を因数にもつから

$$p = 3$$

これを $(*)$ に代入すると

$$3 = 3^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 1$$

よって　**$(p,\ k) = (2,\ 0),\ (3,\ 1)$**

■

10.2　2016 年 (120 分)

1 座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0 < \alpha < \beta)$ があり，曲線 $C : y = x^3 + ax^2 + bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a，b は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2) β の値を固定して，$0 < \alpha < \beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2 : 1$，$t : 1 - t$，$1 : 3$ に内分する点を D，E，F とする。また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP} = k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR} = \ell\mathrm{CD}$ を満たす実数 k，ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

3 袋の中に，赤玉が 15 個，青玉が 10 個，白玉が 5 個入っている。袋の中から玉を 1 個取り出し，取り出した玉の色に応じて，以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

(操作) コインが点 $(x,\ y)$ にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x+1,\ y)$ に移動，青玉を取り出したときには点 $(x,\ y+1)$ に移動，白玉を取り出したときには点 $(x-1,\ y-1)$ に移動し，取り出した球は袋に戻す。

最初に原点 $(0,\ 0)$ にコインを置き，この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後，コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 操作を n 回繰り返したとき，白玉を 1 度だけ取り出したとする。このとき，到達点となり得る点をすべて求めよ。

(2) 操作を n 回繰り返したとき，到達点となり得る点の個数を求めよ。

(3) 座標平面上の 4 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1, -1)$，$(1, -1)$ を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき，到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。P_3 を求めよ。

(4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。

4 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

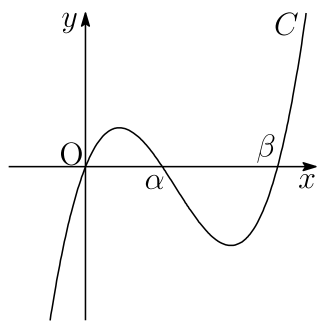
(i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進数で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。

解答例

$\boxed{1}$ (1) C は x 軸との共有点の x 座標が $x=0,\ \alpha,\ \beta$ であるから，$C: y=f(x)$ の方程式は x^3 の係数に注意して $(0<\alpha<\beta)$



$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3+\frac{1}{2}\alpha\beta x^2$$

とおくと

$$F(0)=0,\quad F(\alpha)=-\frac{1}{12}\alpha^4+\frac{1}{6}\alpha^3\beta,\quad F(\beta)=-\frac{1}{12}\beta^4+\frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha f(x)\,dx-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_0^\alpha-\Big[\,F(x)\,\Big]_\alpha^\beta \\ &= 2F(\alpha)-F(\beta)-F(0) \\ &= 2\left(-\frac{1}{12}\alpha^4+\frac{1}{6}\alpha^3\beta\right)-\left(-\frac{1}{12}\beta^4+\frac{1}{6}\alpha\beta^3\right) \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3\beta-\frac{1}{6}\alpha\beta^3+\frac{1}{12}\beta^4} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= -\frac{2}{3}\alpha^3+\alpha^2\beta-\frac{1}{6}\beta^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\alpha-\beta)\{2\alpha(\beta-\alpha)+\beta^2\} \end{aligned}$$

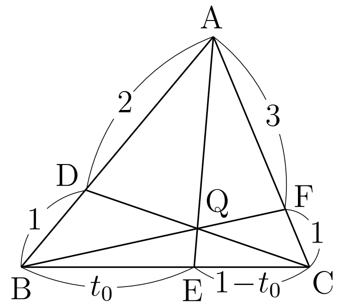
$0<\alpha<\beta$ であるから　$2\alpha(\beta-\alpha)+\beta^2>0$

したがって

α	(0)	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	(β)
$\frac{dS}{d\alpha}$		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，S を最小にする α は　$\boldsymbol{\alpha=\frac{\beta}{2}}$ ■

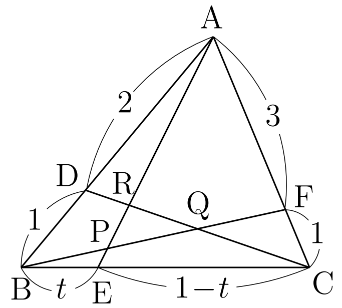
2　(1) チェバの定理により



$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

これを解いて　$\boldsymbol{t_0=\dfrac{3}{5}}$

(2) $\triangle$AEC および直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} \quad ゆえに \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}=\dfrac{3}{t}$

よって　$k=\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{3+t}}$

$\triangle$BCD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{2}{3}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}=\dfrac{3(1-t)}{2t}$

よって　$\ell=\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}=\boldsymbol{\dfrac{3(1-t)}{3-t}}$

(3) (2) の図について，$\triangle$BCF および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{3(1-t)}{4t}$　$\cdots$①

$t=\dfrac{3}{5}$ のとき，P は Q に一致するので　$\dfrac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{QB}}=\dfrac{1}{2}$　$\cdots$②

よって　$\triangle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 1=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(4) $t=\dfrac{3}{5}$ のとき，R は Q に一致するので，(2) の結果から

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}=\frac{3\left(1-\frac{3}{5}\right)}{3-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\mathrm{CQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3(1-t)}{3-t}-\dfrac{1}{2}=3-t:3-5t$

また，①，② から

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\frac{3(1-\mathrm{t})}{3(1-\mathrm{t})+4\mathrm{t}}-\frac{1}{3}=3+\mathrm{t}:3-5\mathrm{t}$$

$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=\mathrm{BQ}{\cdot}\mathrm{CQ}:\mathrm{PQ}{\cdot}\mathrm{QR}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=(3+t)(3-t):(3-5)^2$$

(3) の結果から　　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)}=\boldsymbol{\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}}$

解説 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\cdot\frac{3}{4}\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=3(1-t):2t$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3(1-t)+2t}=\frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b}+2t\vec{c}\}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b}-3\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b}-3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え，外積の性質を用いると [1]

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって　　$\triangle\mathrm{PQR}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}:1$

外積は高校数学の範囲外であるから，2 次試験では使えないが，センター試験では，非常に有効な計算法である．なお，外積 (ベクトル積) の演算について，次式が成り立つことに注意したい．

$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{b}$$

また，これに $\vec{c}=\vec{b}$ を代入すると　　$\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

$\boxed{3}$ (1) 白玉を1度だけ取り出すので，赤玉をm回$(m=0,1,\cdots,n-1)$取り出すとすると，青玉を取り出す回数は$n-m-1$であるから，到達点$(x,\ y)$は

$$x=m-1,\quad y=(n-m-1)-1=n-m-2$$

よって，到達点は　$\boldsymbol{(m-1,\ n-m-2)\quad (m=0,1,\cdots,n-1)}$

(2) 赤玉，青玉，白玉を取り出す回数を，それぞれi，j，kとすると，到達点$(x,\ y)$は$(i+j+k=n)$

$$x=i-k,\quad y=j-k$$

このとき，$k=n-i-j$であるから

$$(*)\begin{cases} x=i-(n-i-j)=2i+j-n \\ y=j-(n-i-j)=i+2j-n \end{cases}$$

ここで

$$2i+j-n=2i'+j'-n,\quad i+2j-n=i'+2j'-n$$

とすると

$$2(i-i')+(j-j')=0,\quad (i-i')+2(j-j')=0$$

これを解くと　　$(i,\ j)=(i',\ j')$

したがって，$(i,\ j)\neq(i',\ j')$のとき

$$(2i+j-n,\ i+2j-n)\neq(2i'+j'-n,\ i'+2j'-n)$$

このことから，$(i,\ j,\ k)$の組合せの個数とその到達点の個数は一致する．

よって，求める到達点の個数は，赤玉，青玉，白玉の3種類の玉からn個取り出す重複組合せの総数に一致するので

$$_3\mathrm{H}_n={}_{3+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

(3) $(*)$ から

$$i = \frac{2x-y}{3} + \frac{n}{3}, \quad j = \frac{2x-y}{3} - x + y + \frac{n}{3} \quad \cdots(**)$$

$n = 3$ のとき，上式より

$$i = \frac{2x-y}{3} + 1, \quad j = \frac{2x-y}{3} - x + y + 1$$

$(x,\ y)$ が D 内にあるとき $(k = 3 - i - j)$

$$(x,\ y,\ i,\ j,\ k) = (-1,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1),\ (1, -1,\ 2,\ 0,\ 1)$$

よって，求める確率は

$$P_3 = \frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{6} + \frac{3!}{1!1!1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{25}{72}}$$

(4) $n = 3N$ のとき，$(**)$ より

$$i = \frac{2x-y}{3} + N, \quad j = \frac{2x-y}{3} - x + y + N$$

$(x,\ y)$ が D 内にあるとき $(k = 3N - i - j)$

$$\begin{gathered}(x,\ y,\ i,\ j,\ k) = (-1,\ 1,\ N-1,\ N+1,\ N),\ (0,\ 0,\ N,\ N,\ N), \\ (1, -1,\ N+1,\ N-1,\ N)\end{gathered}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P_{3N} &= \frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N} \\ &\quad + \frac{(3N)!}{N!N!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^{N}\left(\frac{1}{6}\right)^{N} \\ &\quad\quad + \frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N} \\ &= \boldsymbol{\frac{(19N+6)(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^2(N+1)!}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 仮定から $10^n \equiv a_n,\quad 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって $a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より $\boldsymbol{a_1 = 10}$

(1) の結果を用いると，法 13 について

$$
\begin{aligned}
a_2 &\equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9\\
a_3 &\equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12\\
a_4 &\equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3\\
a_5 &\equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4\\
a_6 &\equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1
\end{aligned}
$$

よって $\boldsymbol{a_2 = 9,\ a_3 = 12,\ a_4 = 3,\ a_5 = 4,\ a_6 = 1}$

(3) 整数 p，q を $1 \leqq p \leqq 9$，$0 \leqq q \leqq 9$ とし，求める自然数 N を

$$N = p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

とおくと，法 13 に関して

$$
\begin{aligned}
N &\equiv p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q\\
&\equiv p \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 9 + 6 \cdot 10 + q = 4p + q + 75\\
&\equiv 4p + q - 3
\end{aligned}
$$

このとき，$N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0),\ (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1),\ (9,\ 6)$$

よって，求める自然数 N は

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

■

10.3　2017 年 (120 分)

1 定数 $a<1$ に対し，放物線 $C_1 : y=2x^2+1$，$C_2 : y=-x^2+a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_1，C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) C_1 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

2 座標平面上に原点 O，点 A$(1,\ a)$，点 B$(s,\ t)$ がある。以下の問いに答えよ。

(1) $a=1$ のとき，△OAB が正三角形となるような $(s,\ t)$ をすべて求めよ。

(2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(3) △OAB が正三角形であり，a が有理数であるとき，s と t のうち少なくとも 1 つは無理数であることを示せ。

3 A と B の 2 人が A，B，A，B，$\cdots$ の順にさいころを投げ，先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め，さいころ投げを終える。以下では，さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2=0.301$，$\log_{10} 3=0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ。さらに，p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ。

(2) さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

(3) 自然数 k に対し，さいころを投げた回数が $2k+1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。

(2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3) 225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 求める直線を $l : y = px + q$ とおく．C_1 と l の方程式から y を消去すると

$$2x^2 + 1 = px + q \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - px - q + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と l は接するので，方程式 $(*)$ の係数について

$$(-p)^2 - 4 \cdot 2(-q+1) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 + 8q - 8 = 0 \quad \cdots ①$$

同様に，C_2 と l の方程式から y を消去すると

$$-x^2 + a = px + q \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + px + q - a = 0 \quad \cdots (**)$$

C_2 と l は接するので，上の方程式の係数について

$$p^2 - 4 \cdot 1(q-a) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 - 4q + 4a = 0 \quad \cdots ②$$

①，② から　$p^2 = \dfrac{8}{3}(1-a)$，$q = \dfrac{1}{3}(a+2)$

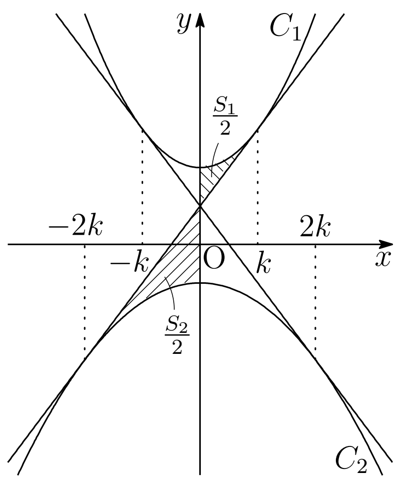
よって，求める 2 直線の方程式は

$$\boldsymbol{y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}\,x + \frac{1}{3}(a+2)}$$

(2) (1) の結果から，次の 2 式は平方式になることに注意して

$$2x^2 + 1 - (px+q) = 2\left(x - \frac{p}{4}\right)^2$$
$$px + q - (-x^2 + a) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$p = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}(1-a)}$ のとき，$k = \dfrac{p}{4}$ とおく．C_1，C_2 および 2 接線は y 軸に関して対称であることに注意して



$$\begin{aligned}\frac{S_1}{2} &= \int_0^k 2(x-k)^2\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x-k)^3\right]_0^k = \frac{2k^3}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{S_2}{2} &= \int_{-2k}^0 (x+2k)^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+2k)^3\right]_{-2k}^0 = \frac{8k^3}{3}\end{aligned}$$

よって　$\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{16k^3}{3} \times \dfrac{3}{4k^3} = \boldsymbol{4}$

解説 $y=kx^2\cdots$① は $y=x^2\cdots$② を x 軸を元に y 軸方向に k 倍だけ拡大したものであるが，① 上の点 $\mathrm{P}(t,\ kt^2)$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ をとると

$$(x,\ y)=k(t,\ kt^2)\quad \text{ゆえに}\quad x=kt,\quad y=(kt)^2$$

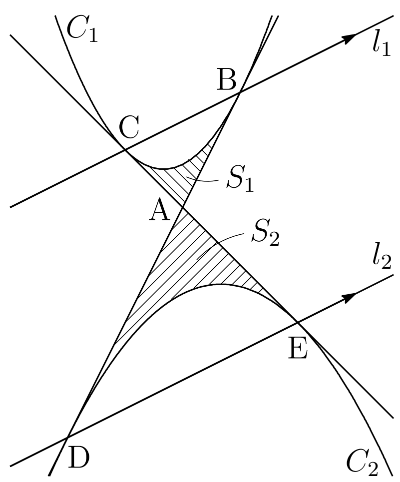
これから，点 Q の描く軌跡は，$y=x^2$ である．

したがって，① と ② は相似であり，その相似比は $1:|k|$ である．

一般に，放物線は相似であり，2 つの放物線

$$C_1: y=a_1x^2+b_1x+c_1,\quad C_2: y=a_2x^2+b_2x+c_2$$

の相似比は $\dfrac{1}{|a_1|}:\dfrac{1}{|a_2|}$ である．



右の図のように，C_1，C_2 と 2 本の共通接線との接点を B，C，D，E とすると，点 A は線分 BD および線分 CE を

$$\frac{1}{|a_1|}:\frac{1}{|a_2|}$$

に内分するである．また，2 つの斜線部分の面積を S_1，S_2 とすると，面積比は相似比の 2 乗に比例するから

$$S_1:S_2=\frac{1}{{a_1}^2}:\frac{1}{{a_2}^2}$$

特に，$S_1=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$，$S_2=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ADE}$ である [2]．

本題の点 A は C_1 の頂点 $(0,\ 1)$ と C_2 の頂点 $(0,\ a)$ を $1:2$ に内分する点で

$$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{2+a}{3}\right)$$

また，C_1 上の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ をみたす点 Q の軌跡が C_2 である．

点 A を通り，傾き m の直線 $y=mx+\dfrac{2+a}{3}$ が $C_1: y=2x^2+1$ と接するとき，2 次方程式 $2x^2-mx+\dfrac{1-a}{3}=0$ の係数により

$$(-m)^2-4\cdot2\cdot\frac{1-a}{3}=0\quad \text{ゆえに}\quad m=\pm2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ の補足を参照．

2 (1) 3点O(0, 0)，A(1, 1)，B(s, t) について，△OAB が正三角形であるから，$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OB}^2=\mathrm{AB}^2$ より

$$1^2+1^2=s^2+t^2=(s-1)^2+(t-1)^2$$

整理すると　　$s^2+t^2=2,\quad s+t=1$

これを解いて　$\boldsymbol{(s,\ t)=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}\right)}$　**(複号同順)**

(2) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると，自然数 p，q を用いて

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}\quad (p,\ q\ \text{は互いに素})$$

とおける．これから，$p=\sqrt{3}q$ の両辺を平方すると

$$p^2=3q^2\quad \cdots ①$$

p^2 は3の倍数であるから，p は3の倍数である．

したがって，$p=3k$ (k は自然数) とおけ，これを ① に代入すると

$$(3k)^2=3q^2\quad \text{ゆえに}\quad q^2=3k^2$$

q^2 は3の倍数であるから，q も3の倍数である．このことは，p と q が互いに素であることに反する．よって，$\sqrt{3}$ は無理数である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ a)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(s,\ t)$ であるから，△OAB の面積により

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin 60^\circ=\frac{1}{2}|t-as|$$

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であることに注意して

$$\frac{1}{2}(a^2+1)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}|t-as|\quad \text{ゆえに}\quad \sqrt{3}=\frac{2|t-as|}{a^2+1}\quad \cdots(*)$$

a が有理数であるとき，2数 s，t がともに有理数であるとすると，$(*)$ の右辺は有理数となり，(2) の結果に矛盾する．

よって，s と t のうち少なくとも1つは無理数である．■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) サイコロを 1 回投げるとき，勝敗が決まらない，すなわち，1 または 2 の目が出る確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

n 回以下では勝敗が決まらないのは，n 回とも 1 または 2 の目が出ることであるから，よって，求める確率 p_n は

$$p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \boldsymbol{\frac{1}{3^n}}$$

p_n が 0.005 より小さいとき

$$\frac{1}{3^n} < 0.005 = \frac{1}{200} \quad \text{ゆえに} \quad 3^n > 200$$

$3^4 = 81$，$3^5 = 243$ であるから，求める最小の n は　　$\boldsymbol{n = 5}$

(2) サイコロを 1 回投げるとき，勝者が決まる，すなわち，3，4，5，6 の目が出る確率は

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つのは，1 回目または 3 回目で A が勝つことであるから，求める確率は

$$\frac{2}{3} + p_2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} \times \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{20}{27}}$$

(3) 求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} + \sum_{i=1}^{k} p_{2i} \times \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{3^{2i}} = \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{9}\right)^i \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{9}} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{9^{k+1}}\right)}\end{aligned}$$

■

4 (1) ユークリッドの互除法を用いて

$$\begin{aligned}2017 &= 225 \times 8 + 217,\\ 225 &= 217 \times 1 + 8,\\ 217 &= 8 \times 27 + 1\end{aligned}$$

よって，求める最大公約数は　**1**

(2) $225 = 3^2 \times 5^2$，$2017 = 15 \times 134 + 7$
全体集合を $U = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 134\}$ とし，その部分集合を

$$\begin{aligned}A &= \{3{\cdot}1,\ 3{\cdot}2,\ 3{\cdot}3,\ \cdots,\ 3{\cdot}44\},\\ B &= \{5{\cdot}1,\ 5{\cdot}2,\ 5{\cdot}3,\ \cdots,\ 5{\cdot}26\}\end{aligned}$$

とすると

$$A \cap B = \{15{\cdot}1,\ 15{\cdot}2,\ 15{\cdot}3,\ \cdots,\ 15{\cdot}8\}$$

したがって，求める個数は

$$\begin{aligned}n(\overline{A} \cap \overline{B}) &= n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)\\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\}\\ &= 134 - (44 + 26 - 8) = \mathbf{72}\end{aligned}$$

(3) $225 = 3^2 \times 5^2$，$15 = 3 \times 5$，$1998 = 2 \times 3^3 \times 37$，$111 = 3 \times 37$
求める数は 2017 以下で，$3 \times 5 \times 37$ の倍数は

$$\{555n \,|\, n = 1, 2, 3\}$$

ただし，n は 2，3，5 と互いに素であるから，求める数は　**555**　■

10.4 2018 年 (120 分)

1 座標平面内の曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接しているとする。ただし，a，b は実数，$c > 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) a，b をそれぞれ c を用いて表せ。

(2) この曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S を最小にする c の値を求めよ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示

$$101101101101101101_{(2)}$$

をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。

3 平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し，

$$L = \mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ および $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくとき，次の等式を示せ。

$$L = 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

(2) L を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また，L の最小値は

$$\frac{1}{3}(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2)$$

であることを示せ。

$\boxed{4}$ 3 つの部品 a，b，c からなる製品が多数入った箱がある。製品を 1 つ取り出したとき，部品 a，b，c が不良品である確率について次のことがわかっている。

- 部品 a が不良品である確率は p である。
- 部品 a が不良品でないとき，部品 b が不良品である確率は q である。
- 部品 a が不良品であるとき，部品 b も不良品である確率は $3q$ である。
- 部品 b が不良品でないとき，部品 c が不良品である確率は r である。
- 部品 b が不良品であるとき，部品 c も不良品である確率は $5r$ である。

ただし，$0 < p < 1$，$0 < q < \dfrac{1}{3}$，$0 < r < \dfrac{1}{5}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 製品を 1 つ取り出したとき，部品 a，b の少なくとも一方が不良品である確率を p，q を用いて表せ。

(2) 製品を 1 つ取り出したとき，部品 c が不良品である確率を p，q，r を用いて表せ。

(3) 製品を 1 つ取り出したところ部品 c が不良品であった。このとき，部品 b も不良品である確率を p，q を用いて表せ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接するから，曲線の方程式の x^3 の係数および定数項に注意して

$$y = (x-c)^2\left(x + \frac{1}{c}\right) \qquad \cdots (*)$$

とおける．これを展開すると

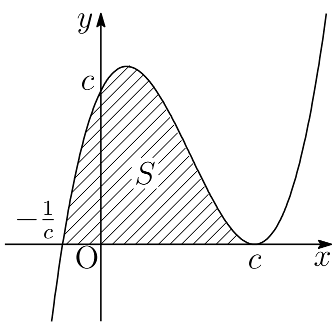
$$y = x^3 + \left(\frac{1}{c} - 2c\right)x^2 + (c^2-2)x + c$$

与えられた曲線の方程式と上式の同じ次数の項の係数を比較すると

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{c} - 2c, \quad b = c^2 - 2}$$

(2) $(*)$ により $(c > 0)$

$$S = \int_{-\frac{1}{c}}^{c}\left(x + \frac{1}{c}\right)(c-x)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{12}\left(c + \frac{1}{c}\right)^4$$



$c > 0,\ \dfrac{1}{c} > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$c + \frac{1}{c} \geqq 2\sqrt{c \cdot \frac{1}{c}} = 2$$

上式において，等号が成立するのは

$$c = \frac{1}{c} \quad \text{すなわち} \quad c = 1$$

のときで，このとき S は最小となる．よって　$\boldsymbol{c = 1}$

補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[3]． ■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

2 (1) $2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8\equiv 1 \pmod 7$ であるから

2^n を 7 で割った余りは $\begin{cases} \boldsymbol{n\equiv 0 \pmod 3}\ \textbf{のとき}\quad \mathbf{1} \\ \boldsymbol{n\equiv 1 \pmod 3}\ \textbf{のとき}\quad \mathbf{2} \\ \boldsymbol{n\equiv 2 \pmod 3}\ \textbf{のとき}\quad \mathbf{4} \end{cases}$

(2) $m=101101101101101101_{(2)}$

これに (1) の結果を用いると，法 7 に関して

$$m=\sum_{k=0}^{5}(2^2+1)2^{3k}\equiv\sum_{k=0}^{5}5{\cdot}1=30\equiv 2 \pmod 7$$

よって，求める余りは **2** ■

3 (1) $L=\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より

$$\begin{aligned} L&=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\\ &=|\vec{a}-\vec{x}|^2+|\vec{b}-\vec{x}|^2+|\vec{c}-\vec{x}|^2\\ &=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2\\ &=3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とし，$\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とおくと

$$\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\quad \text{ゆえに}\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\vec{g}$$

これを (1) に代入すると

$$\begin{aligned} L&=3|\vec{x}|^2-6\vec{g}\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\\ &=3(|\vec{x}|^2-2\vec{g}\cdot\vec{x}+|\vec{g}|^2)+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-3|\vec{g}|^2\\ &=3|\vec{x}-\vec{g}|^2+\frac{1}{3}\{3|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2+3|\vec{c}|^2-|3\vec{g}|^2\} \end{aligned}$$

ここで $3|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2+3|\vec{c}|^2-|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$

$$\begin{aligned} &=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+2|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2\\ &=|\vec{b}-\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2=(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2) \end{aligned}$$

したがって $L=|\vec{x}-\vec{g}|^2+\dfrac{1}{3}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)$

よって，$\vec{x}=\vec{g}$，すなわち，P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心であるとき，

L は最小値 $\dfrac{1}{3}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)$ をとる． ■

$\boxed{4}$ a，b，c がそれぞれ不良品である事象をそれぞれ A，B，C とすると

$$P(A) = p,\ P_{\overline{A}}(B) = q,\ P_A(B) = 3q,\ P_{\overline{B}}(C) = r,\ P_B(C) = 5r$$

(1) $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{1 - P(A)}$，$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ より

$$P(\overline{A} \cap B) = \{1 - P(A)\}P_{\overline{A}}(B) = (1-p)q$$
$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = p \cdot 3q = 3pq$$

ゆえに　$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$
$= 3pq + (1-p)q = (1+2p)q$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= p + (1+2p)q - 3pq = \boldsymbol{p + q - pq} \end{aligned}$$

(2) $P_{\overline{B}}(C) = \dfrac{P(\overline{B} \cap C)}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(\overline{B} \cap C)}{1 - P(B)}$，$P_B(C) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(B)}$ より

$$P(\overline{B} \cap C) = \{1 - P(B)\}P_{\overline{B}}(C) = \{1 - (1+2p)q\}r$$
$$P(B \cap C) = P(B)P_B(C) = (1+2p)q \cdot 5r = 5(1+2p)qr$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\overline{B} \cap C) + P(B \cap C) \\ &= \{1 - (1+2p)q\}r + 5(1+2p)qr \\ &= \{1 + 4(1+2p)q\}r = \boldsymbol{(1 + 4q + 8pq)r} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，求める確率は

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{5(1+2p)qr}{(1+4q+8pq)r} = \boldsymbol{\frac{5(1+2p)q}{1+4q+8pq}}$$

■

10.5　2019 年 (120 分)

1 表に 3，裏に 8 が書かれた硬貨がある。この硬貨を 10 回投げるとき，出た数字 10 個の積が 8 桁になる確率を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

2 k を実数とする。3 次関数 $y = x^3 - kx^2 + kx + 1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき，k の値を求めよ。

3 座標空間内の 3 点 A(1, 2, 3)，B(3, 2, 3)，C(4, 5, 6) を通る平面を α とし，平面 α 上にない点 P(6, p, q) を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から平面 α に下ろした垂線と α との交点を H とする。線分 PH の長さを p，q を用いて表せ。

(2) 点 P が $(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$ を満たしながら動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値と最小値を求めよ。

4 0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2+2)g(x) + 7$$
$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

解答例

1 硬貨を 10 回投げて，裏が出た回数を n とすると，出た数字 10 個の積は

$$8^n \cdot 3^{10-n}$$

これが 8 桁の数であるから　$10^7 \leqq 8^n \cdot 3^{10-n} < 10^8$

辺々の常用対数をとると　$7 \leqq n\log_{10}8 + (10-n)\log_{10}3 < 8$

$\log_{10}8 = 3\log_{10}2 = 3\times 0.3010 = 0.9030$，$\log_{10}3 = 0.4771$ より

$$7 \leqq 0.9030n + 0.4771(10-n) < 8$$

整理すると　$22290 \leqq 4259n < 32290$　ゆえに　$5 + \dfrac{995}{4259} \leqq n < 7 + \dfrac{2477}{4259}$

n は整数 $(0 \leqq n \leqq 10)$ であるから　$n = 6,\ 7$

よって，求める確率は

$${}_{10}\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = (210+120)\times\frac{1}{1024} = \boldsymbol{\frac{165}{512}}$$

■

2 $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 1$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 - 2kx + k$

$f(x)$ は極大値と極小値をもつから，$f'(x) = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$

$$\beta - \alpha = \frac{k + \sqrt{k^2-3k}}{3} - \frac{k - \sqrt{k^2-3k}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{k(k-3)} \quad \cdots ①$$

$$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$$

極大値，極小値は，それぞれ $f(\alpha)$，$f(\beta)$ であるから

$$f(\alpha) - f(\beta) = \int_\beta^\alpha f'(x)\,dx = 3\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$= -3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

条件により，$f(\alpha) - f(\beta) = 4|k|^3$ であるから

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 = 4|k|^3 \quad ゆえに \quad \beta - \alpha = 2|k| \quad \cdots ②$$

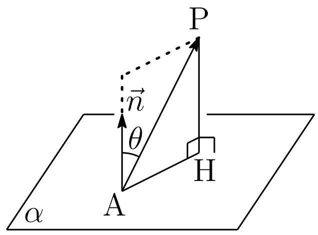
①，② より　$2|k| = \dfrac{2}{3}\sqrt{k(k-3)}$　ゆえに　$k(8k+3) = 0$

$k(k-3) > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{k = -\dfrac{3}{8}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) A(1, 2, 3)，B(3, 2, 3)，C(4, 5, 6)，P(6, p, q) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ 0,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (3,\ 3,\ 3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (5,\ p-2,\ q-3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトル，すなわち，α の法線ベクトルの 1 つを



$$\vec{n} = (0,\ 1, -1)$$

とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\mathrm{PH} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\cos\theta|,\quad \cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\vec{n}|}$$

よって　$\mathrm{PH} = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \dfrac{|0\cdot5 + 1\cdot(p-2) - 1\cdot(q-3)|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = \boldsymbol{\dfrac{|p-q+1|}{\sqrt{2}}}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = 3\sqrt{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の張る平行四辺形の面積を S とすると

$$S = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} = \sqrt{2^2(3\sqrt{3})^2 - 6^2} = 6\sqrt{2}$$

四面体 ABCP の体積を V とすると [4]

$$V = \frac{1}{6}S\cdot\mathrm{PH} = \frac{1}{6}\cdot6\sqrt{2}\cdot\frac{|p-q+1|}{\sqrt{2}} = |p-q+1|$$

$(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$ より，$p-9 = \cos\theta$，$q-7 = \sin\theta$ とおくと

$$p = \cos\theta + 9,\quad q = \sin\theta + 7$$

したがって
$$\begin{aligned} V &= |p-q+1| = |(\cos\theta+9) - (\sin\theta+7) + 1| \\ &= |3 - (\sin\theta - \cos\theta)| = 3 - \sqrt{2}\sin(\theta - 45^\circ) \end{aligned}$$

ゆえに　$3-\sqrt{2} \leqq V \leqq 3+\sqrt{2}$

よって　最大値 $\mathbf{3+\sqrt{2}}$，最小値 $\mathbf{3-\sqrt{2}}$ ■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai_bun_2016.pdf $\boxed{3}$ の解説を参照．

4 (1) 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\begin{cases} f(x^2) = (x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とすると

$$\begin{cases} 2m = 2+n & \cdots ① \\ 3n = \max(4+m,\ 2+n) & \cdots ② \end{cases}$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より　$3n = 4+m$　ゆえに　$m = 3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと　$m = n = 2$

(ii) $4+m < 2+n$ のとき，② より　$3n = 2+n$　ゆえに　$n = 1$
これを ① に代入すると，$m = \dfrac{3}{2}$ となり，不適．

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから，題意は成立する．

(2) $(*)$ の第 1 式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2+2)g(-x)+7$$

これと $(*)$ の第 1 式により　$g(-x) = g(x)$　$\cdots ③$
また，$(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(-x) - 6x^2 - 2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

これと $(*)$ の第 2 式より　$f(-x) = f(x)$
また，$(*)$ に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 2g(0)+7,\quad g(0) = -2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 3$$

以上の結果から，$f(x) = ax^2+3$，$g(x) = px^2-2$ とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4+3 = (x^2+2)(px^2-2)+7 \\ px^6-2 = x^4(ax^2+3) - 3x^2(px^2-2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

整理すると
$$\begin{cases} ax^4 = px^4 + 2(p-1)x^2 \\ px^6 = ax^6 - 3(p-1)x^4 \end{cases}$$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = p,\quad p-1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = p = 1$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = x^2+3,\ \ g(x) = x^2-2}$ ■

10.6　2020年(120分)

1 $a \geqq 0$ とする。2つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) a が (1) で求めた範囲を動くとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S の最大値を求めよ。

2 座標空間内の4点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(1, 0, p)，C(q, r, s) を頂点とする四面体が正四面体であるとする。ただし，$p > 0$，$s > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) p，q，r，s の値を求めよ。

(2) z 軸に垂直な平面で正四面体 OABC を切ったときの断面積の最大値を求めよ。

3 a，b，c を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a，b を c を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を7で割ると4余り，$f(-1)$ を11で割ると2余るとする。c の絶対値が40以下であるとき，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

4 4個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が25の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が4の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が100の倍数になる確率を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=x^2$，$g(x)=3(x-a)^2+a^3-40$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= x^2-\{3(x-a)^2+a^3-40\} \\ &= -(2x^2-6ax+a^3+3a^2-40) \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

2 次方程式

$$2x^2-6ax+a^3+3a^2-40=0 \quad \cdots(**)$$

の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-3a)^2-2(a^3+3a^2-40) \\ &= -2a^3+3a^2+80=(4-a)(2a^2+5a+20) \\ &= (4-a)\left\{2\left(a+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{135}{8}\right\} \end{aligned}$$

方程式 $(**)$ が異なる 2 つの実数解をもつから，$D>0$ より

$a \geqq 0$ に注意して，$4-a>0$ を解くと　$\boldsymbol{0 \leqq a < 4}$

(2) 2 次方程式 $(**)$ の解を α, β とおくと $(\alpha<\beta)$

$$\beta-\alpha=\frac{3a+\sqrt{D/4}}{2}-\frac{3a-\sqrt{D/4}}{2}=\sqrt{D/4}$$

$$f(x)-g(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)$$

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$f(x)-g(x) \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx=-2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\{D/4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$h(a)=D/4$ とおくと　$S=\dfrac{1}{3}\{h(a)\}^{\frac{3}{2}}$

$h(a)=-2a^3+3a^2+80$ より　$h'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$h'(a)$		$+$	0	$-$	
$h(a)$		$\nearrow$	81	$\searrow$	

よって，求める S の最大値は　$\dfrac{1}{3}\{h(1)\}^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}\cdot 81^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{243}$ ■

2　(1)　4点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ p)$，C$(q,\ r,\ s)$ について，
OA $=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，OB = OA であるから

$$\sqrt{1^2+p^2}=\sqrt{2}\quad \text{条件}\ p>0\ \text{により}\quad p=1$$

$\mathrm{OC}^2=\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2=2$ であるから

$$(*)\begin{cases} q^2+r^2+s^2=2 \\ (q-1)^2+(r-1)^2+s^2=2 \\ (q-1)^2+r^2+(s-1)^2=2 \end{cases}$$

$(*)$ の第2式，第3式をそれぞれ整理すると

$$(q^2+r^2+s^2-2)-2(q+r-1)=0,$$
$$(q^2+r^2+s^2-2)-2(q+s-1)=0$$

$(*)$ の第1式を上の2式に代入することにより

$$\begin{cases} q+r-1=0 \\ q+s-1=0 \end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad (**)\begin{cases} q=1-s \\ r=s \end{cases}$$

$(**)$ を $(*)$ の第1式に代入すると

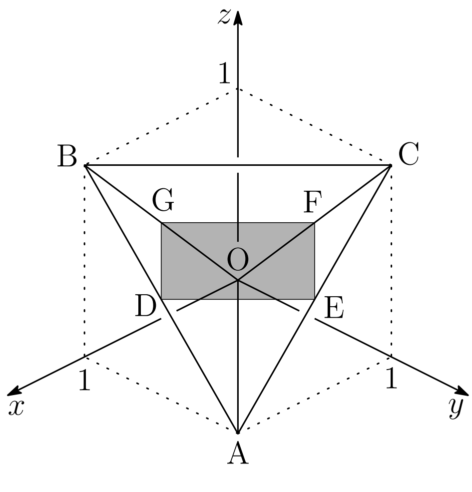
$$(1-s)^2+s^2+s^2=2\quad \text{ゆえに}\quad (s-1)(3s+1)=0$$

$s>0$ に注意して　$s=1$　$(**)$ より　$q=0,\ r=1$

よって　　$\boldsymbol{p=1,\ q=0,\ r=1,\ s=1}$

(2)　2点O，A の z 座標が0で，2点B，C の z 座標が1であるから，四面体 OABC の平面 $z=t$ による断面は，線分 AB，AC，OC，OB を $t:1-t$ に内分する点を頂点とする四角形である．これらの頂点を順に D，E，F，G とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{GF}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\overrightarrow{\mathrm{FE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$



$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$ より $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，この断面積を S とすると

$$S=t(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2t(1-t)=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$0\leqq t\leqq 1$ より，断面積は，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．■

3　(1) $w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x)=0$ の解であるから，
$f(x)$ は，$(x-w)(x-\overline{w})$，すなわち，x^2-x+1 を因数にもつ．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+ax^2+bx+c \\ &= (x^2-x+1)(x+a+1) \\ &\qquad\qquad + (a+b)x-a+c-1 \end{aligned}$$

したがって　$a+b=0,\quad -a+c-1=0$
よって　$\boldsymbol{a=c-1,\ \ b=1-c}$

(2) (1) の結果から　$f(x)=x^3+(c-1)x^2+(1-c)x+c$
ゆえに　$f(1)=c+1$，$f(-1)=3c-3$
$f(1)$ を 7 で割ると 4 余るから

$$c+1\equiv 4 \quad \text{ゆえに} \quad c\equiv 3 \pmod 7$$

したがって，整数 k を用いて　$c=7k+3\cdots$①
$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るから

$$3c-3\equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad 4{\cdot}3c=4{\cdot}5 \quad \text{すなわち} \quad c\equiv 9 \pmod{11}$$

① を上式に代入すると

$$7k+3\equiv 9 \quad \text{ゆえに} \quad 3{\cdot}7k\equiv 3{\cdot}6 \quad \text{すなわち} \quad k\equiv 4 \pmod{11}$$

したがって，整数 ℓ を用いて　$k=11\ell+4$
これを ① に代入すると　$c=7(11\ell+4)+3=77\ell+31$
c の絶対値が 40 以下であるから

$$c=31 \quad \text{ゆえに} \quad a=30,\ \ b=-30 \qquad \cdots(*)$$

(1) の結果から

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+a+1)$$

$(*)$ をこれに代入して

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+31)$$

$f(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \ -31}$　■

$\boxed{4}$ (1) X が 5 で割り切れない，すなわち，4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0，X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\frac{626}{1296} + \frac{500}{1296}\right) = \mathbf{\frac{19}{144}}$$

(2) X が 2 で割り切れない，すなわち，4 回とも奇数の目が出る確率を q_0，X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - (q_0 + q_1) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \mathbf{\frac{37}{48}}$$

(3) X が 100 の倍数となるは，出る目の組合せが次の (i)〜(iv) の場合である．

(i) $\{\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ 5,\ 5\}$ のとき $(\mathrm{A} = 2,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

(ii) $\{4,\ 5,\ 5,\ \mathrm{B}\}$ のとき $(\mathrm{B} = 1,\ 2,\ 3,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

(iii) $\{4,\ 4,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

(iv) $\{4,\ 5,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

(i)〜(iv) より，求める確率は $\dfrac{24+48+6+4}{1296} = \dfrac{82}{1296} = \mathbf{\dfrac{41}{648}}$ ■