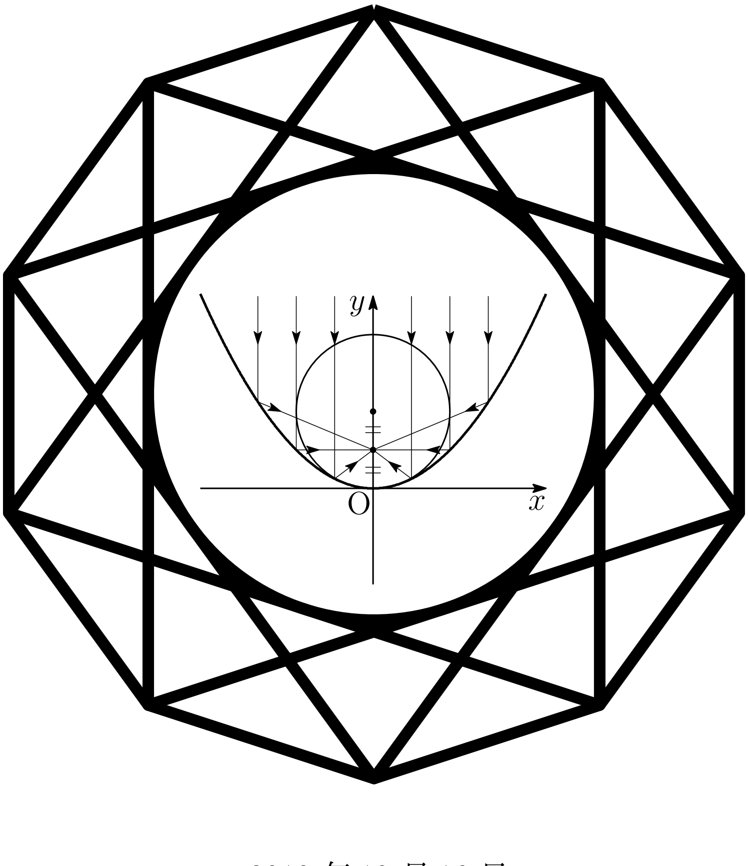
入試の軌跡

難関大学　文系

2015 − 2019

数　学



2019 年 10 月 16 日

Typed by LaTeX 2ε

序

本書には，関東・中京・関西・中国地区の主な難関国立大学 (文系)

東京大学・一橋大学・名古屋大学・京都大学・大阪大学・神戸大学・広島大学

が，現行教育課程で実施した平成 27 年 (2015 年) 度から平成 31 年 (2019 年) 度までの一般前期試験問題 (数学) および解答例をすべて掲載した．
また，これらの問題および解答例は，年度ごとに次のサイトにも掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

本書の作成にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．

2. ICT 教材として，電子黒板やプロジェクターでの使用を視野に入れており，この機能を利用する際には，全画面表示 ($\boxed{\text{Ctrl}}$+L) および描画領域に合わせる ($\boxed{\text{Ctrl}}$+3) と見やすくなる．ページスクロールには，($\boxed{\text{Ctrl}}$+▲，$\boxed{\text{Ctrl}}$+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る ($\boxed{\text{Alt}}$+◀)，進む ($\boxed{\text{Alt}}$+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには $\boxed{\text{ESC}}$．

3. スマートフォンでの使用も想定し，ページリンクの操作性を配慮した ICT 教材でもある．問題および解答には相互リンクを施した．各問の解答の終わりにある ■ をクリックすると，各大学の出題分野に戻る．また，出題分野の左上にある ◀ をクリックすると，最初のページに戻る．

上の 2，3 の機能をサポートする PDF ブラウザとして，Adobe Reader をご使用ください (フリーソフト)．スマートフォンには，同アプリがインストールされていない場合が多いので，同アプリをインストールされてからご使用ください．

令和元年 6 月　編者

目 次

第 1 章　東京大学

出題分野 (2010-2019) 100 分

◀	東京大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2 次関数			1							
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式		4	2	2·3		3	1		1	4
	三角関数	1									
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	2	1	4	1	1·3	1·2	3	1	3·4	1·2
A	場合の数と確率			3	4				3		3
	整数の性質	4	2			4	1	4	4		
	図形の性質										
B	平面上のベクトル								2		2
	空間のベクトル										
	数列	3	3			2	4	2		2	
	確率分布と統計										

数字は問題番号

1.1　2015年

$\boxed{1}$ 以下の命題A，Bそれぞれに対し，その真偽を調べよ．また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ．

命題A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ．

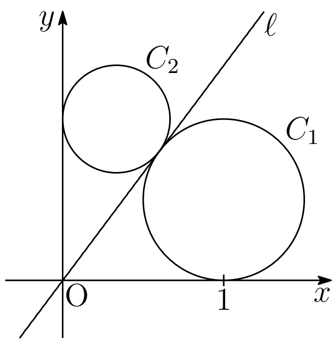
命題B　整数 n，m，ℓ が $5n+5m+3\ell=1$ をみたすならば，$10nm+3m\ell+3n\ell<0$ が成り立つ．

$\boxed{2}$ 座標平面上の2点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1, -1)$ を考える．また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は1以下であるとする．次の条件 (i) または (ii) をみたす点Pの範囲を図示し，その面積を求めよ．

(i) 頂点の x 座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで，点A，P，Bをすべて通るものがある．

(ii) 点A，P，Bは同一直線上にある．

$\boxed{3}$ ℓ を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする．さらに，以下の3条件 (i)，(ii)，(iii) で定まる円 C_1，C_2 を考える．



(i) 円 C_1，C_2 は2つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる．

(ii) 円 C_1，C_2 は直線 ℓ と同一点で接する．

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する．

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする．$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ．

4 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く．コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く．さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく．たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は

$$\mathrm{AABBAAB}$$

となる．このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である．

(1) n を正の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ．

(2) n を 2 以上の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ 命題 A：$f(x)=\dfrac{x^3}{26}-x^2+100\ (x>0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{3}{26}x^2-2x=\frac{3}{26}x\left(x-\frac{52}{3}\right)$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$17<\dfrac{52}{3}<18$ より　$f(17)=17^2\left(\dfrac{17}{26}-1\right)+100=-\dfrac{2601}{26}+100<0$

したがって，$n=17$ のとき，不等式 $\dfrac{n^3}{26}+100\geqq n^2$ は成立しない．

よって，命題 A は　**偽**

命題 B：$5n+5m+3\ell=1$ より，$3\ell=1-5(m+n)$ であるから

$$\begin{aligned}10nm+3m\ell+3n\ell&=10mn+3\ell(m+n)\\&=10mn+\{1-5(m+n)\}(m+n)\\&=10mn+(m+n)-5(m+n)^2\\&=-5m^2-5n^2+m+n\\&=-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\end{aligned}$$

m，n は整数なので

$$-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\leqq 0\quad(\text{等号は } m=n=0 \text{ のとき})$$

$m=n=0$ のとき，$3\ell=1$ を満たす整数 ℓ は存在しないから

$$10nm+3m\ell+3n\ell=-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}<0$$

よって，命題 B は　**真**　■

2 点Pの x 座標 ($|x| \leqq 1$) および条件 (ii) より，点Pは線分AB上にあるから

$$x + y = 0 \quad (-1 \leqq x \leqq 1) \quad \cdots (*)$$

条件 (i) について，点A，B，P$(x,\ y)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ が満たす2次関数を

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおくと，このグラフは，2点A$(-1,\ 1)$，B$(1, -1)$ を通るから

$$a - b + c = 1, \quad a + b + c = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b = -1,\ c = -a$$

したがって　$y = ax^2 - x - a \quad \cdots ①$

すなわち　$y = a\left(x - \dfrac{1}{2a}\right)^2 - a - \dfrac{1}{4a}$

頂点の x 座標の絶対値が1以上であるから

$$\left|\frac{1}{2a}\right| \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < |a| \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

① により，$x = -1$ のとき点A，$x = 1$ のとき点Bにある．

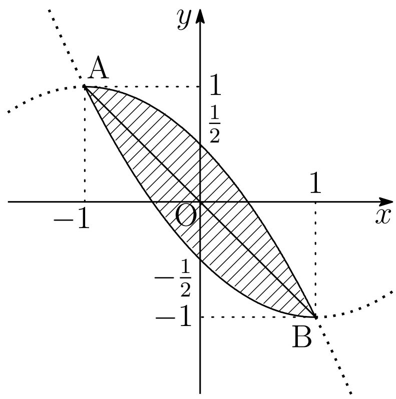
$-1 < x < 1$ のとき，$a = \dfrac{x+y}{x^2-1}$ を ② に代入すると　$0 < \left|\dfrac{x+y}{x^2-1}\right| \leqq \dfrac{1}{2}$

したがって　$0 < |x+y| \leqq \dfrac{1}{2}(1-x^2) \quad (-1 < x < 1)$

これに $(*)$ を含めると　$|x+y| \leqq \dfrac{1}{2}(1-x^2) \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

すなわち　$\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{2} \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{1}{2}$

よって，点Pの表す領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．その面積を S とすると



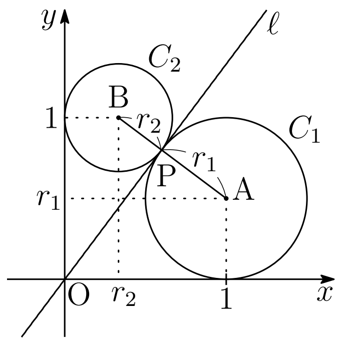
$$S = \int_{-1}^{1} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\right) \right\} dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\{1 - (-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

■

3 円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ A，B とし，C_1，C_2 が外接する点を P とすると，右の図から，$\mathrm{OP}=1$ である．これから，B の y 座標は 1 であるから，$\mathrm{A}(1,\ r_1)$，$\mathrm{B}(r_2,\ 1)$ とおくと，$\mathrm{AB}=r_1+r_2$ より



$$(r_1+r_2)^2=(r_2-1)^2+(1-r_1)^2$$

整理すると　　$r_1r_2+r_1+r_2=1$

$r_2=\dfrac{1-r_1}{1+r_1}=\dfrac{2}{1+r_1}-1$ であるから

$$\begin{aligned}8r_1+9r_2&=8r_1+9\left(\frac{2}{1+r_1}-1\right)\\&=8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17\\&\geqq 2\sqrt{8(1+r_1)\cdot\frac{18}{1+r_1}}-17=7\end{aligned}$$

上式において，等号が成立するとき

$$8(1+r_1)=\frac{18}{1+r_1}\quad \text{すなわち}\quad r_1=\frac{1}{2},\quad r_2=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

このとき，点 P は 2 点 $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ を $r_1:r_2=3:2$ に内分するから，その座標は

$$\left(\frac{2\cdot1+3\cdot\frac{1}{3}}{3+2},\ \frac{2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot1}{3+2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

よって，ℓ の方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{4}{3}x}$，　最小値は　**7**　■

$\boxed{4}$ (1) 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n とすると，p_{n+2} は最初に裏が出た場合と表が場合により

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots(*)$$

このとき　$p_1 = \frac{1}{2}$，$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$(*)$ より　$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$，

$$p_{n+2} + \frac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$$

第 1 式から　$p_{n+1} - p_n = (p_2 - p_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

第 2 式から　$p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = p_2 + \frac{1}{2}p_1 = 1$

上の 2 式から　$\boldsymbol{p_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad (n \geqq 1)}$

(2) 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字列が B となる確率を q_n とすると，q_{n+2} は，(1) と同様に

$$q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n \quad (n \geqq 2) \quad \cdots(**)$$

このとき　$q_2 = 0$，$q_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$(**)$ より　$q_{n+2} - q_{n+1} = -\frac{1}{2}(q_{n+1} - q_n)$，

$$q_{n+2} + \frac{1}{2}q_{n+1} = q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$$

第 1 式から　$q_{n+1} - q_n = (q_3 - q_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

第 2 式から　$q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n = q_3 + \frac{1}{2}q_2 = \frac{1}{4}$

上の 2 式から　$\boldsymbol{q_n = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \quad (n \geqq 2)}$ ■

1.2 2016年

$\boxed{1}$ 座標平面上の3点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x, -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ．また，その条件をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ．

$\boxed{2}$ A，B，C の3つのチームが参加する野球の大会を開催する．以下の方式で試合を行い，2連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する．

(a) 1試合目で A と B が対戦する．

(b) 2試合目で，1試合目の勝者と，1試合目で待機していた C が対戦する．

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する．ここで k は2以上の整数とする．

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．

(1) ちょうど5試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(2) n を2以上の整数とする．ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(3) m を正の整数とする．総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ．

$\boxed{3}$ 座標平面上の2つの放物線

$$\begin{aligned} A:\ \ & y = x^2 \\ B:\ \ & y = -x^2 + px + q \end{aligned}$$

が点 $(-1,\ 1)$ で接している．ここで，p と q は実数である．さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする．

(1) p と q の値を求めよ．

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする．ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t)=0$ と定める．$S(t)$ を求めよ．

(3) $t>0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下の問いに答えよ．ただし，(1) については，結論のみを書けばよい．

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする．a_n を求めよ．

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする．b_n を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ．

解答例

1 △PQR が鋭角三角形であるとき，次の条件式をみたせばよい．

$$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2>\mathrm{RP}^2,\quad \mathrm{QR}^2+\mathrm{RP}^2>\mathrm{PQ}^2,\quad \mathrm{RP}^2+\mathrm{PQ}^2>\mathrm{QR}^2$$

3点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,-y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ から

$$\mathrm{PQ}^2=4x^2+4y^2,\quad \mathrm{QR}^2=(x+1)^2+y^2,\quad \mathrm{RP}^2=(x-1)^2+y^2$$

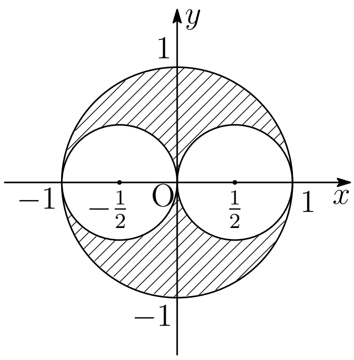
これらを条件式に代入すると

$$\begin{aligned}&4x^2+4y^2+(x+1)^2+y^2>(x-1)^2+y^2,\\&(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2>4x^2+4y^2,\\&(x-1)^2+y^2+4x^2+4y^2>(x+1)^2+y^2\end{aligned}$$

整理すると　$x^2+y^2+x>0,\quad x^2+y^2<1,\quad x^2+y^2-x>0$

すなわち　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4},\quad x^2+y^2<1,\quad \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4}$

よって，$\mathrm{P}(x,\ y)$ のみたす領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含まない．



■

2 (1) ちょうど5試合目でAが優勝するときの勝敗は次のようになる．

回数	1	2	3	4	5
勝者	A	C	B	A	A
敗者	B	A	C	B	C
控え	C	B	A	C	B

求める確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$

(2) $n_1 \equiv 1 \pmod 3$, $n_2 = n_1 + 1$, $n_3 = n_1 + 2$ とする．
優勝チームが決まらず対戦が続くとき，勝者・敗者・控えは 3 順ごとに，次の (i),(ii) のように繰り返す．

(i) 初戦で A が B に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	A	C	B	$\cdots$	A	C	B	$\cdots$
敗者	B	A	C	$\cdots$	B	A	C	$\cdots$
控え	C	B	A	$\cdots$	C	B	A	$\cdots$

(ii) 初戦で B が A に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	B	C	A	$\cdots$	B	C	A	$\cdots$
敗者	A	B	C	$\cdots$	A	B	C	$\cdots$
控え	C	A	B	$\cdots$	C	A	B	$\cdots$

n 試合目に A が優勝するのは，(i) の場合，$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき，A は最後に C に勝って優勝し，(ii) の場合，$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，A は最後に B に勝って優勝する．これらの場合の確率は，ともに $\left(\frac{1}{2}\right)^n$．
よって，求める確率は

$$\boldsymbol{n \not\equiv 0 \text{ のとき } \left(\frac{1}{2}\right)^n,\quad n \equiv 0 \text{ のとき } 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 3)}$$

(3) (2) の結果から，A が最後に C に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

また，A が最後に B に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\} + \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\} = \boldsymbol{\frac{1}{14}\left\{5 - 12\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}}$$

補足 初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和は　$\boldsymbol{\dfrac{a - rl}{1 - r}}$ ■

3 (1) $f(x)=x^2$，$g(x)=-x^2+px+q$ とおくと，$f'(x)=2x$，$g'(x)=-2x+p$.
A，B が点 $(-1,\ 1)$ で接するとき

$$f(-1)=g(-1),\quad f'(-1)=g'(-1)$$

ゆえに　$1=-1-p+q,\ -2=2+p$　よって　$\boldsymbol{p=-4,\ q=-2}$

(2) (1) の結果から　$g(x)=-x^2-4x-2$
B を x 軸方向に $2t$，y 軸方向に t だけ平行移動した C の方程式は

$$\begin{aligned}y&=g(x-2t)+t=-(x-2t)^2-4(x-2t)-2+t\\&=-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2\end{aligned}$$

$h(x)=-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2$ とおくと

$$h(x)-f(x)=-2x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2$$

$h(x)-f(x)=0$ とすると

$$2x^2-4(t-1)x+4t^2-9t+2=0\quad\cdots(*)$$

2次方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=\{-2(t-1)\}^2-2(4t^2-9t+2)=-4t^2+10t=-2t(2t-5)$$

$D>0$ のとき，$t>0$ に注意して　$0<t<\dfrac{5}{2}$
このとき，2次方程式 $(*)$ の異なる2つの解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\begin{aligned}\beta-\alpha&=\frac{2(t-1)+\sqrt{D/4}}{2}-\frac{2(t-1)-\sqrt{D/4}}{2}=\sqrt{D/4},\\S(t)&=\int_\alpha^\beta\{h(x)-f(x)\}dx=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}(D/4)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}} & \left(0<t<\dfrac{5}{2}\right)\\ 0 & \left(t\geqq\dfrac{5}{2}\right)\end{cases}}$

(3) $0<t<\dfrac{5}{2}$ のとき　$-4t^2+10t=-4\left(t-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{25}{4}$

よって，最大値　$S\left(\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{125}{24}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $3^1 \equiv 3,\quad 3^2 \equiv 9,\quad 3^3 \equiv 7,\quad 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$

したがって　$3^{n+4} \equiv 3^n \pmod{10}$

よって　$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} 3 & (n \equiv 1 \pmod 4) \\ 9 & (n \equiv 2 \pmod 4) \\ 7 & (n \equiv 3 \pmod 4) \\ 1 & (n \equiv 0 \pmod 4) \end{cases}}$$

(2) $3^1 \equiv 3,\quad 3^2 \equiv 1 \pmod 4$

したがって　$3^{n+2} \equiv 3^n \pmod 4$

よって　$$\boldsymbol{b_n = \begin{cases} 3 & (n \equiv 1 \pmod 2) \\ 1 & (n \equiv 0 \pmod 2) \end{cases}}$$

(3) $x_1 = 1,\quad x_{n+1} = 3^{x_n}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

この漸化式で定められた数列 $\{x_n\}$ は奇数からなるから，x_8 は奇数

したがって，(2) の結果から　$3^{x_8} \equiv 3 \pmod 4$　ゆえに　$x_9 \equiv 3 \pmod 4$

さらに，(1) の結果から　$3^{x_9} \equiv 7 \pmod{10}$　ゆえに　$x_{10} \equiv 7 \pmod{10}$

よって，求める余りは　**7**

補足 正の整数 m について，x_m は奇数

したがって，(2) の結果から　$3^{x_m} \equiv 3 \pmod 4$　ゆえに　$x_{m+1} \equiv 3 \pmod 4$

さらに，(1) の結果から　$3^{x_{m+1}} \equiv 7 \pmod{10}$　ゆえに　$x_{m+2} \equiv 7 \pmod{10}$

よって，$l \geqq 3$ の整数について　$x_l \equiv 7 \pmod{10}$　■

1.3　2017年

1 座標平面において2つの放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を考える．ただし，s，t は実数で，$0<s$，$0<t<1$ をみたすとする．放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする．A と B がただ1点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ．

2 1辺の長さが1の正六角形ABCDEFが与えられている．点Pが辺AB上を，点Qが辺CD上をそれぞれ独立に動くとき，線分PQを2 : 1に内分する点Rが通りうる範囲の面積を求めよ．

3 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という．格子点上を次の規則 (a)，(b) に従って動く点Pを考える．

(a) 最初に，点Pは原点Oにある．

(b) ある時刻で点Pが格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その1秒後の点Pの位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(1) 最初から1秒後の点Pの座標を $(s,\ t)$ とする．$t-s=-1$ となる確率を求めよ．

(2) 点Pが，最初から6秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ．

4 $p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める．以下の問いに答えよ．ただし設問(1)は結論のみを書けばよい．

(1) a_1，a_2 の値を求めよ．

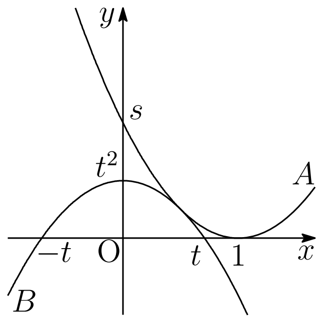
(2) $n \geqq 2$ とする．積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ．

(3) a_n は自然数であることを示せ．

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

解答例

1 (1) $A : y = s(x-1)^2$ と $B : y = -x^2+t^2$ から y を消去して，整理すると



$$(s+1)x^2 - 2sx + s - t^2 = 0$$

A と B は接するので，上式の係数について

$$(-s)^2 - (s+1)(s-t^2) = 0$$

これを s について解くと　$s = \dfrac{t^2}{1-t^2}$

ゆえに　$P = \displaystyle\int_0^1 s(x-1)^2\,dx = \left[\,\frac{s}{3}(x-1)^3\,\right]_0^1 = \frac{s}{3} = \frac{t^2}{3(1-t^2)}$

$Q = \displaystyle\int_0^t (-x^2+t^2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + t^2x\,\right]_0^t = \frac{2t^3}{3}$

したがって　$\dfrac{Q}{P} = \dfrac{2t^3}{3}\cdot\dfrac{3(1-t^2)}{t^2} = 2t - 2t^3$

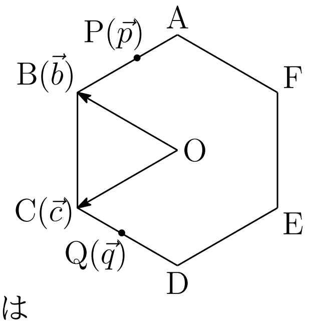
$f(t) = 2t - 2t^3$ $(0 < t < 1)$ とおくと

$$f'(t) = 2 - 6t^2 = -6\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) = -6\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大	↘	

よって，求める最大値は　$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}}$ ■

2 正六角形の中心 O に関する 4 点 B，C，P，Q の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$ とする．このとき実数 s，t を用いて $(0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1)$



$$\vec{p} = \vec{b} + s(-\vec{c}) = \vec{b} - s\vec{c}$$
$$\vec{q} = \vec{c} + t(-\vec{b}) = -t\vec{b} + \vec{c}$$

線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R($\vec{r}$) の位置ベクトルは

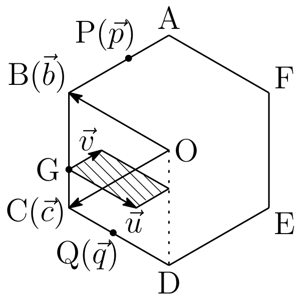
$$\begin{aligned}\vec{r} &= \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q} = \frac{1}{3}(\vec{b} - s\vec{c}) + \frac{2}{3}(-t\vec{b} + \vec{c})\\ &= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{2t}{3}(-\vec{b}) + \frac{s}{3}(-\vec{c})\end{aligned}$$

2 つのベクトル $-\vec{b}$，$-\vec{c}$ の大きさはともに 1 で，そのなす角は 60° である．

$0 \leqq \dfrac{2t}{3} \leqq \dfrac{2}{3}$，$0 \leqq \dfrac{s}{3} \leqq \dfrac{1}{3}$ であるから，R が通る図形の面積は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 60^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c}$，$\vec{u} = -\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\vec{v} = -\dfrac{1}{3}\vec{c}$ とおくと，G を始点とする 2 つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ で張られた平行四辺形の内部または周上を点 R は動く．
(右の図の斜線部分)



■

3 (1) 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は原点Oから1秒後に格子点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(-1,\ 0)$，$(0,-1)$ に確率 $\dfrac{1}{4}$ で移動し，このとき，$t-s$ はそれぞれ -1，1，1，-1 となるから，求める確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) x 軸方向に 1，-1，y 軸方向に 1，-1 だけ平行移動する回数をそれぞれ i，j，k，l とすると $(0 \leqq i,\ j,\ k,\ l \leqq 6)$，その確率は

$$\sum_{\substack{i+j+k+l=6\\0\leqq i,j,k,l\leqq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

このとき　$i+j+k+l=6$,　$i-j=k-l$　すなわち　$i+l=j+k=3$
よって，求める確率は,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i+l=j+k=3\\0\leqq i,j,k,l\leqq 3}} \frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 &= \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{\substack{i+l=3\\0\leqq i,l\leqq 3}}\frac{3!}{i!l!}\sum_{\substack{j+k=3\\0\leqq j,k\leqq 3}}\frac{3!}{j!k!}\\ &= \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = \mathbf{\frac{5}{16}}\end{aligned}$$

■

4 (1) $a_1 = p-\dfrac{1}{p} = 2+\sqrt{5}-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2) = \mathbf{4}$

$a_2 = p^2+\dfrac{1}{p^2} = \left(p-\dfrac{1}{p}\right)^2+2 = 4^2+2 = \mathbf{18}$

(2) $p^{n+1}+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n+1} = \left(p-\dfrac{1}{p}\right)\left\{p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n\right\}+p^{n-1}+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}$ より

$$a_{n+1}=a_1a_n+a_{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a_1a_n = a_{n+1}-a_{n-1}}$$

補足 $\alpha^{n+1}+\beta^{n+1} = (\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$

(3) (1)，(2) の結果から　$a_1=4$，$a_2=18$，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}$　$\cdots(*)$
よって，すべての自然数 n について，a_n は自然数である．

(4) 2つの自然数 k，l の最大公約数を $\gcd(k,\ l)$ とする．
$(*)$ にユークリッドの互除法を順次適用することにより

$$\gcd(a_{n+1},\ a_n)=\gcd(a_n,\ a_{n-1})=\cdots=\gcd(a_2,\ a_1)=\mathbf{2}$$

■

1.4　2018年

1 座標平面上に放物線 C を

$$y = x^2 - 3x + 4$$

で定め，領域 D を

$$y \geqq x^2 - 3x + 4$$

で定める．原点をとおる2直線 l，m は C に接するものとする．

(1) 放物線 C 上を動く点Aと直線 l，m の距離をそれぞれ L，M とする．$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小値をとるときの点Aの座標を求めよ．

(2) 次の条件をみたす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px + qy \leqq 0$ がなりたつ．

2 数列 a_1，a_2，$\cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める．

(1) a_7 と1の大小を調べよ．

(2) $n \geqq 2$ とする．$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲を求めよ．

(3) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ．

3 $a > 0$ とし，

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく．

(1) $x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ．

(2) 次の2条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件1： 方程式 $f(x) = b$ は相異なる3実数解をもつ．

条件2： さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である．

4 放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす部分を C とする．座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える．

(1) 点 P が C 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

をみたす点 Q の軌跡を求めよ．

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

をみたす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $C : y = x^2 - 3x + 4$ より　$y' = 2x - 3$

C 上の点 $(t,\ t^2 - 3t + 4)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 - 3t + 4) = (2t - 3)(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = (2t - 3)x - t^2 + 4$$

この接線が原点を通るとき　$-t^2 + 4 = 0$　これを解いて　$t = \pm 2$

したがって，2 直線 l，m の方程式は　$x - y = 0,\ \ 7x + y = 0$

C 上の点 A の座標を $(a,\ a^2 - 3a + 4)$ とすると

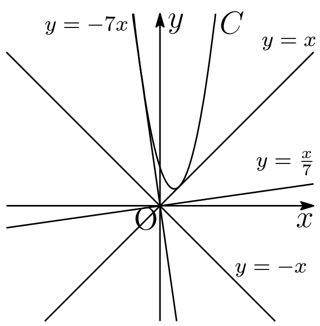
$$\begin{aligned}\sqrt{L} + \sqrt{M} &= \sqrt{\frac{|a - (a^2 - 3a + 4)|}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{|7a + (a^2 - 3a + 4)|}{5\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}(\sqrt{5}\,|a - 2| + |a + 2|)\end{aligned}$$

このとき　$\sqrt{5}\,|a-2|+|a+2| = \begin{cases} -(1+\sqrt{5})a - 2 + 2\sqrt{5} & (a < -2) \\ (1-\sqrt{5})a + 2 + 2\sqrt{5} & (-2 \leqq a \leqq 2) \\ (1+\sqrt{5})a + 2 - 2\sqrt{5} & (2 < a) \end{cases}$

したがって，$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小となるのは，$-2 \leqq a \leqq 2$ の範囲であり，$a = 2$ のときである．このとき，点 A の座標は　$\mathbf{(2,\ 2)}$

(2) 領域 D 内の点 $(x,\ y)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = (x,\ y)$ とすると

$$px + qy = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}} \geqq 0 \quad \cdots (*)$$

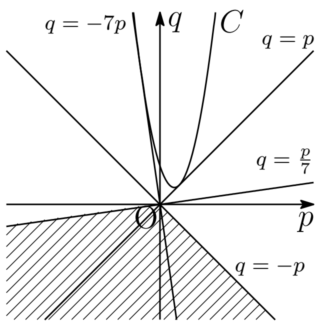


l，m に垂直な 2 直線は

$$y = -x, \quad y = \frac{x}{7}$$

$(*)$ を満たす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は

$$\begin{cases} q \leqq -p \\ q \leqq \dfrac{p}{7} \end{cases}$$



よって，その領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!}$ より $(n = 1, 2, \cdots)$

$$\begin{aligned} a_7 &= \frac{{}_{14}\mathrm{C}_7}{7!} = \frac{14{\cdot}13{\cdot}12{\cdot}11{\cdot}10{\cdot}9{\cdot}8}{(7!)^2} = \frac{2^4{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4 \times 13{\cdot}11{\cdot}9}{(7!)^2} \\ &= \frac{2^4{\cdot}13{\cdot}11{\cdot}9}{3!{\cdot}7!} = \frac{13{\cdot}11}{7{\cdot}6{\cdot}5} = \frac{143}{210} < 1 \end{aligned}$$

(2) $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^3}$ より $(n = 1, 2, \cdots)$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^3}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^3}{(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{n^3} = \frac{2(2n-1)}{n^2}$$

ゆえに　$1 - \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1 - \dfrac{2(2n-1)}{n^2} = \dfrac{(n-2)^2 - 2}{n^2} > 0$

上式をみたす n の値の範囲は　$\boldsymbol{n \geqq 4}$

(3)　$a_1 = \dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{1!} = 2$，$a_2 = \dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!} = 3$，

また　$a_3 = \dfrac{6!}{(3!)^3}$，　$a_4 = \dfrac{8!}{(4!)^3}$，　$a_5 = \dfrac{10!}{(5!)^3}$，　$a_6 = \dfrac{12!}{(6!)^3}$

a_3，a_4 の既約分数は，その分母に素因数 3 がある．

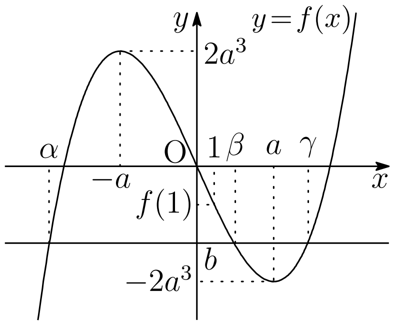
a_5，a_6 の既約分数は，その分母に素因数 5 がある．

(1)，(2) の結果から，$n \geqq 7$ のとき　$0 < a_n < 1$

よって，a_n が整数となる $n \geqq 1$ は　$\boldsymbol{n = 1,\ 2}$　■

3　(1)　$f(x) = x^3 - 3a^2x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$



$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するから，$a > 0$ に注意して　$\boldsymbol{0 < a \leqq 1}$

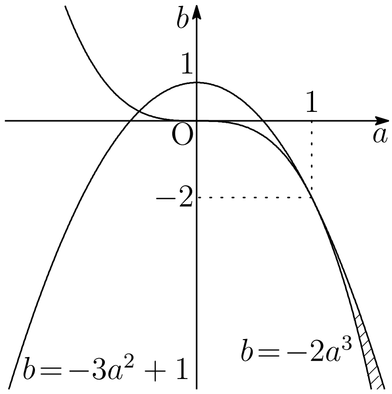
(2)　$f(x) = b$ の解 $\alpha < \beta < \gamma$ について，$\beta > 1$ であるから，右上の図より

$$1 < a, \quad -2a^3 < b < f(1)$$

したがって

$$\boldsymbol{-2a^3 < b < -3a^2 + 1 \ \ (a > 1)}$$

点 $(a,\ b)$ の満たす領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含まない．



■

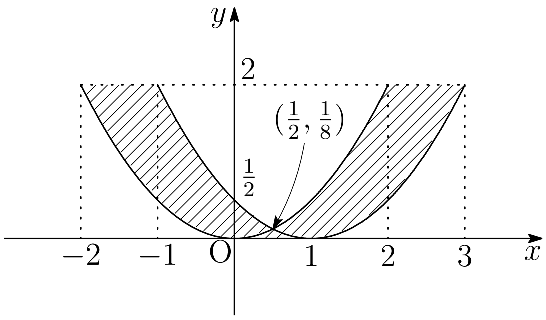
4 (1) C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ に対して $(-1 \leqq t \leqq 1)$，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より

$$(x,\ y) = 2(t,\ t^2) \quad \text{ゆえに} \quad x = 2t,\ y = 2t^2$$

上の 2 式から t を消去すると　$\boldsymbol{y = \dfrac{x^2}{2}\ \ (-2 \leqq x \leqq 2)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$

したがって，点 S が動く領域は，(1) で求めた Q の軌跡を x 軸方向に 1 だけ平行移動するときに描く図形であるから，次の図の斜線部分である．

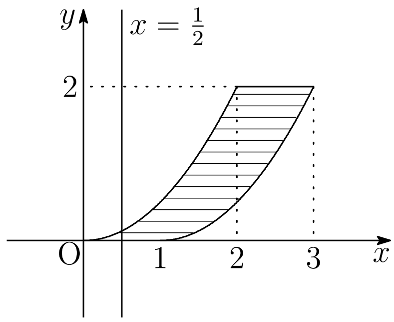


右の図の斜線部分の面積は，カバリエリの原理により

$$1 \cdot 2 = 2$$

斜線部分の $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ における面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{48}$$



図形は直線 $x = \dfrac{1}{2}$ に関して対称であるから，求める図形の面積は

$$2\left(2 - \frac{1}{48}\right) = \boldsymbol{\frac{95}{24}}$$

■

1.5　2019年

1 座標平面の原点をOとし，O，A(1, 0)，B(1, 1)，C(0, 1) を辺の長さが1の正方形の頂点とする．3点P(p, 0)，Q(0, q)，R(r, 1) はそれぞれ辺OA，OC，BC上にあり，3点O，P，Qおよび3点P，Q，Rはどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の3頂点であるとする．

(1) q と r を p で表し，p，q，r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値，最小値を求めよ．

2 Oを原点とする座標平面において，点A(2, 2)を通り，線分OAと垂直な直線を l とする．座標平面上を点P(p, q)が次の2つの条件をみたしながら動く．

条件1：$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$

条件2：点Oと直線 l の距離を c とし，点P(p, q)と直線 l の距離を d とするとき $cd \geqq (p-1)^2$

このとき，Pが動く領域を D とする．さらに，x 軸の正の部分と線分OPのなす角を θ とする．

(1) D を図示し，その面積を求めよ．

(2) $\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

3 正八角形の頂点を反時計回りに A，B，C，D，E，F，G，H とする．また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある．点 P が最初に点 A にある．次の操作を 10 回繰り返す．

操作： コインを投げ，表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる．

例えば，点 P が点 H にある状態で，投げたコインの表が出れば点 A に移動させ，裏が出れば点 G に移動させる．以下の事象を考える．

事象 S： 操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある．

事象 T： 1 回目から 10 回目の操作によって，点 P は少なくとも 1 回，点 F に移動する．

(1) 事象 S が起こる確率を求めよ．

(2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ．

4 O を原点とする座標平面を考える．不等式

$$|x| + |y| \leqq 1$$

が表す領域を D とする．また，点 P，Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R が動く範囲を E とする．

(1) D，E をそれぞれ図示せよ．

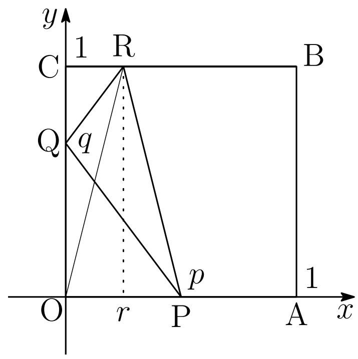
(2) a，b を実数とし，不等式

$$|x - a| + |y - b| \leqq 1$$

が表す領域を F とする．また，点 S，T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}}$ をみたす点 U が動く範囲を G とする．G は E と一致することを示せ．

解答例

1 (1) $\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}pq = \dfrac{1}{3}$ より　$p = \dfrac{2}{3q}$, $q = \dfrac{2}{3p}$



$0 < p \leqq 1$, $0 < q \leqq 1$ より

$$0 < \frac{2}{3q} \leqq 1,\quad 0 < \frac{2}{3p} \leqq 1$$

よって　$\boldsymbol{q = \dfrac{2}{3p},\ \dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1,\ \dfrac{2}{3} \leqq q \leqq 1}$

$\triangle\mathrm{OPR} + \triangle\mathrm{OQR} = \triangle\mathrm{OPQ} + \triangle\mathrm{PQR}$ より

$$\frac{1}{2}p\cdot 1 + \frac{1}{2}qr = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\quad ゆえに\quad p + qr = \frac{4}{3}$$

上の第 2 式に $q = \dfrac{2}{3p}$ を代入すると

$$p + \frac{2}{3p}\cdot r = \frac{4}{3}\quad ゆえに\quad \boldsymbol{r = -\frac{3}{2}p^2 + 2p} = -\frac{3}{2}\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

$\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ であるから　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} \leqq r \leqq \dfrac{2}{3}}$

(2) (1) の結果から

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}} = \frac{r}{q} = \frac{3p}{2}\left(-\frac{3}{2}p^2 + 2p\right) = -\frac{9}{4}p^3 + 3p^2$$

$f(p) = -\dfrac{9}{4}p^3 + 3p^2$ とおくと $\left(\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1\right)$

$$f'(p) = -\frac{27}{4}p^2 + 6p = -\frac{27}{4}p\left(p - \frac{8}{9}\right)$$

したがって，$f(p)$ の増減表は，次のようになる．

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ ■

$\boxed{2}$ (1) A$(2,\ 2)$，P$(p,\ q)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(p,\ q)$

これらを条件 1 に適用すると

$$8 \leqq 2p+2q \leqq 17 \quad \text{ゆえに} \quad 4 \leqq p+q \leqq \frac{17}{2} \quad \cdots ①$$

線分 OA に垂直な直線の傾きは　-1

直線 l は点 A$(2,\ 2)$ を通り傾き -1 であるから

$$y-2=-1(x-2) \quad \text{すなわち} \quad x+y=4$$

$c=\mathrm{OA}$ であるから　$c=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

P$(p,\ q)$ から直線 l までの距離 d は，① に注意して

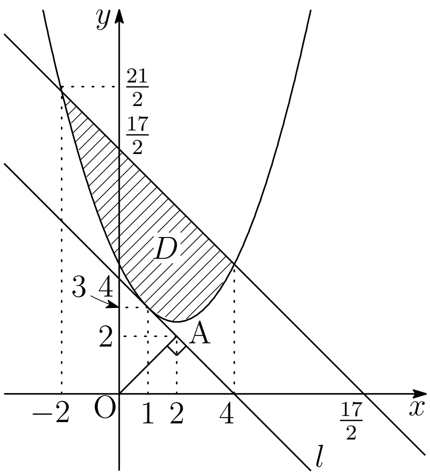
$$d=\frac{|p+q-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{p+q-4}{\sqrt{2}}$$

$cd \geqq (p-1)^2$ より

$$2\sqrt{2}\cdot\frac{p+q-4}{\sqrt{2}} \geqq (p-1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad q \geqq \frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}$$

D の表す領域は，上式および ① より

$$\begin{cases} y \leqq -x+\dfrac{17}{2} \\ y \geqq \dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2} \end{cases}$$



上の 2 式の境界線は

$$\begin{cases} y = -x+\dfrac{17}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

上の 2 式から y を消去すると

$$-x+\frac{17}{2}=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x=-2,\ 4$$

領域 D の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{4}\left\{\left(-x+\frac{17}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)\,dx = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(4+2)^3 = \mathbf{18} \end{aligned}$$

(2) 直線 $y = kx$ および放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$ の共有点について

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} = kx \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2(k+2)x + 9 = 0 \quad \cdots ②$$

これらの直線と放物線が接するとき，係数について

$$(k+2)^2 - 9 = 0 \quad \text{すなわち} \quad k = 1, -5$$

共有点の x 座標は，$x = k+2$ より　$x = \pm 3$
θ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (p,\ q)$ とベクトル $(1,\ 0)$ のなす角であるから

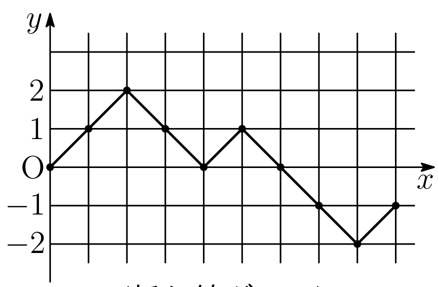
$$\cos\theta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

$\cos\theta$ は $\mathrm{P}(3,\ 3)$ で最大となり，$\mathrm{P}\left(-2, \frac{21}{2}\right)$ で最小となるから

$$\frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2}} \leqq \cos\theta \leqq \frac{3}{\sqrt{3^2+3^2}}$$

よって
$$-\frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{457}}} \leqq \boldsymbol{\cos\theta} \leqq \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$ ■

3 座標平面上の原点 O から右斜め 45°，または右斜め −45° の方向に最も近い第 1 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ．同様にして第 1 番目の格子点から第 2 番目の格子点をとり，第 1 番目と第 2 番目を線分で結ぶ．以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする．右図は原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例である．



(折れ線グラフ)

n を自然数，k を $|k| \leqq n$ を満たす整数とする．原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき（$n+k$ が偶数），右斜め 45° の方向に $\frac{n+k}{2}$ 回，右斜め −45° の方向に $\frac{n-k}{2}$ 回進む．原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ であるから，格子点 $(n,\ k)$ にある確率は

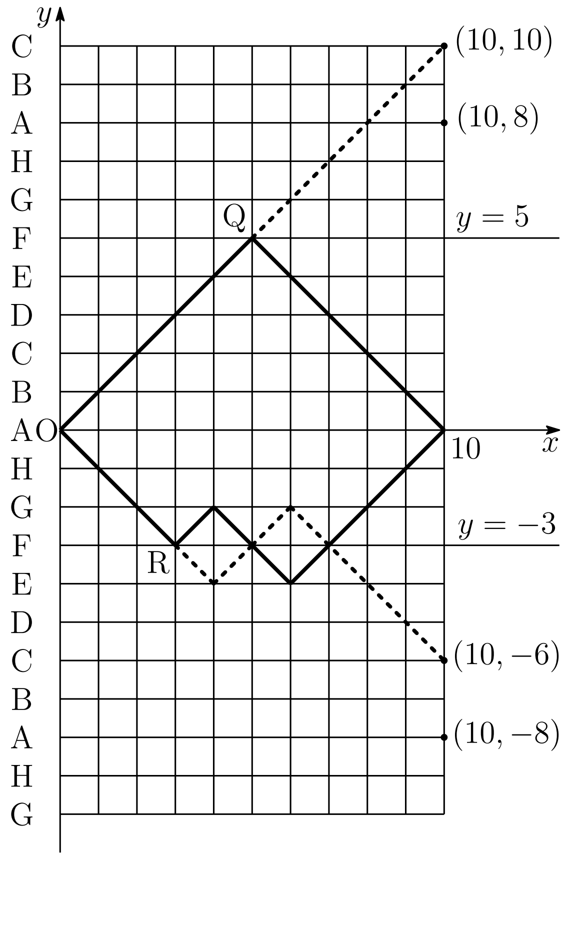
$$P_n(k) = \frac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}}{2^n}$$

(1) コインの表，裏により，格子点上の点 P がそれぞれ右斜め 45°，右斜め −45° 方向の最も近い格子点に移動するものとする．格子点 $(n,\ k)$ にあるとき，$k \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \pmod 8$ を，それぞれ，A，B，C，D，E，F，G，H に対応させる．操作を 10 回行って点 P が点 A にあるとき，$k = 0, \pm 8$ であるから，求める確率は

$$
\begin{aligned}
P_{10}(0) + P_{10}(8) + P_{10}(-8) &= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+0}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+8}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10-8}{2}}}{2^{10}} \\
&= \frac{1}{2^{10}}({}_{10}\mathrm{C}_5 + {}_{10}\mathrm{C}_9 + {}_{10}\mathrm{C}_1) \\
&= \frac{1}{2^{10}}(252 + 10 + 10) = \boldsymbol{\frac{17}{64}}
\end{aligned}
$$

(2) 原点 O と点 (10, 0) を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = 5$ と交わる点を Q とすると，点 Q と点 (10, 0) を結ぶ折れ線グラフの本数と点 Q と点 $(10, 10)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい (鏡像原理)．同様に，原点 O と点 (10, 0) を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = -3$ と交わる点を R とすると，点 R と点 (10, 0) を結ぶ折れ線グラフの本数と点 R と点 $(10, -6)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい．よって，求める確率は

$$
\begin{aligned}
&P_{10}(8) + P_{10}(-8) \\
&\qquad + P_{10}(10) + P_{10}(-6) \\
&= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_9}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_1}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{10}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{2^{10}} \\
&= \frac{10 + 10 + 1 + 45}{2^{10}} = \boldsymbol{\frac{33}{512}}
\end{aligned}
$$



補足 操作を10回行った後に点Pが点Eにあるとき，10回目ではじめて点Eに達する条件付き確率について考えてみる．

8回目以前ですでに点Eを通過する折れ線グラフは，点$(9, \pm 5)$または点$(9, \pm 3)$と点$(10, \pm 4)$を結ぶ(複号同順)．原点Oと点$(10, \pm 4)$を結ぶ折れ線グラフで最初に$y = \pm 4$と交わる点をSとすると，点Sと点$(10, \pm 5)$を結ぶ折れ線グラフの本数と点Sと点$(10, \pm 3)$を結ぶ折れ線グラフの本数は鏡像原理により等しい(複号同順)．したがって，10回目で初めて点Eに達する折れ線グラフの本数は

$$\left({}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+4}{2}} - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{\frac{9+5}{2}}\right) + \left({}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10-4}{2}} - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{\frac{9-5}{2}}\right) = 2\left({}_{10}\mathrm{C}_{7} - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{7}\right) \quad (\text{本})$$

求める確率は　$\dfrac{2\left({}_{10}\mathrm{C}_{7} - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{7}\right)}{2\cdot{}_{10}\mathrm{C}_{7}} = \dfrac{2}{5}$

一般に，原点Oと点$(n,\ k)$を結ぶ折れ線グラフで，n回目で初めて$y = k$に達する折れ線グラフの本数は

$${}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = {}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n}\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$$

これは，原点Oと格子点$(n,\ k)$を結ぶ折れ線グラフの本数の$\dfrac{k}{n}$倍．

よって，求める条件付き確率は$\dfrac{k}{n}$となる．■

4　(1) 領域 D にある 2 点 P，Q の座標を，それぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると

$$|x_1| + |y_1| \leqq 1, \quad |x_2| + |y_2| \leqq 1$$

したがって

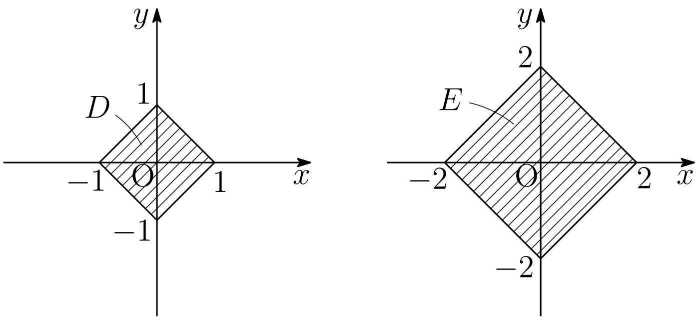
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$$

R$(x,\ y)$ とおくと

$$|x| + |y| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leqq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \leqq 2$$

したがって，領域 E の表す不等式は　$|x| + |y| \leqq 2$

よって，D，E の表す領域を図示すると



(2) 領域 F にある 2 点 S，T の座標を，それぞれ $(x_3,\ y_3)$，$(x_4,\ y_4)$ とすると

$$|x_3 - a| + |y_3 - b| \leqq 1, \quad |x_4 - a| + |y_4 - b| \leqq 1$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}} = (x_3,\ y_3) - (x_4,\ y_4) = (x_3 - x_4,\ y_3 - y_4)$$

U$(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= |x_3 - x_4| + |y_3 - y_4| \\ &= |(x_3 - a) - (x_4 - a)| + |(y_3 - b) - (y_4 - b)| \\ &\leqq |x_3 - a| + |y_3 - b| + |x_4 - a| + |y_4 - b| \leqq 2 \end{aligned}$$

よって，$G : |x| + |y| \leqq 2$ の表す領域は E と一致する．■

第 2 章　一橋大学

出題分野 (2010-2019) 120 分

◀	一橋大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量	3	2								
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式								3		
	図形と方程式	2					2		4		2·4
	三角関数					3·4					
	指数関数と対数関数								1		
	微分法と積分法	1	3	2·3	3	2		4		2·5	3
A	場合の数と確率	5				5	3	3		3	5
	整数の性質	4	1	1	1	1	1	1	2	1	1
	図形の性質										
B	平面上のベクトル				2			5*			
	空間のベクトル		4	4	4		4		5	4	
	数列		5		5		5*	2			
	確率分布と統計			5			6*	6*			

数字は問題番号 (5*，6*の 2 題から 1 題選択)

2.1　2015年

- $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から1題選択．

$\boxed{1}$ n を2以上の整数とする．n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が1となるものの個数を $E(n)$ で表す．たとえば

$$E(2)=1,\quad E(3)=2,\quad E(4)=2,\quad \cdots,\quad E(10)=4,\quad \cdots$$

である．

(1) $E(1024)$ を求めよ．

(2) $E(2015)$ を求めよ．

(3) m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする．$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{2}$ 座標平面上の原点をOとする．点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ および点Cが

$$\mathrm{OC}=1,\quad \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$$

を満たしながら動く．

(1) $s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする．s と t の関係を表す等式を求めよ．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{3}$ n を4以上の整数とする．正 n 角形の2つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を l とする．さらに，残りの $n-2$ 個の頂点から2つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を m とする．直線 l と m が平行になる確率を求めよ．

$\boxed{4}$ xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径1の円周上を点Pが動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径1の円周上を点Qが動く．

(1) 線分PQの長さの最小値と，そのときの点P，Qの座標を求めよ．

(2) 線分PQの長さの最大値と，そのときの点P，Qの座標を求めよ．

5 数列 $\{a_n\}$ を $a_k = k + \cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ で定める．n を正の整数とする．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} a_k$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2$ を求めよ．

6 a，b，c は異なる 3 つの正の整数とする．次のデータは 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 10 人の得点をまとめたものである．

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
科目 X の得点	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
科目 Y の得点	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a

科目 X の得点の平均値と科目 Y の得点の平均値とは等しいとする．

(1) 科目 X の得点の分散を ${s_{\mathrm{X}}}^2$，科目 Y の得点の分散を ${s_{\mathrm{Y}}}^2$ とする．$\dfrac{{s_{\mathrm{X}}}^2}{{s_{\mathrm{Y}}}^2}$ を求めよ．

(2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数を，四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．

(3) 科目 X の得点の中央値が 65，科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるとき，a，b，c の組を求めよ，

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $1024 = 2^{10}$ であるから　$E(1024) = 1024\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \mathbf{512}$

(2) $2015 = 5 \times 13 \times 31$ であるから

$$\begin{aligned} E(2015) &= 2015 - \left(\frac{2015}{5} + \frac{2015}{13} + \frac{2015}{31}\right. \\ &\qquad \left. - \frac{2015}{5{\cdot}13} - \frac{2015}{13{\cdot}31} - \frac{2015}{31{\cdot}5} + \frac{2015}{5{\cdot}13{\cdot}31}\right) \\ &= 2015\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{13}\right)\left(1 - \frac{1}{31}\right) \\ &= 4 \times 12 \times 30 = \mathbf{1440} \end{aligned}$$

(3) $n = p^m q^m$ であるから

$$E(n) = n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{p{\cdot}q}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

したがって　$\dfrac{E(n)}{n} = \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\left(1 - \dfrac{1}{q}\right)$

p，q は異なる素数であるから，一般性を失うことなく $p < q$ とすると

$$p \geqq 2, \quad q \geqq 3$$

であるから

$$1 - \frac{1}{p} \geqq \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{1}{q} \geqq \frac{2}{3}$$

よって　$\dfrac{E(n)}{n} = \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\left(1 - \dfrac{1}{q}\right) \geqq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

補足 p_1，$p_2, \cdots, p_l$ を素数，k_1，$k_2, \cdots, k_l$ を正の整数とすると

$$n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$E(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_l}\right)$$

本題の $E(n)$ はオイラー (Euler) の $\varphi(n)$ 関数である [1]． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf $\boxed{1}$ を参照．

2　(1) A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$．点Cの座標を$(x,\ y)$とすると

$$\mathrm{OC}^2 = 1,\quad \mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2$$

であるから

$$x^2 + y^2 = 1,\quad a^2 + b^2 = x^2 + (y-b)^2 = (x-a)^2 + y^2$$

整理すると　$2by = 1 - a^2$，$2ax = 1 - b^2$

ゆえに　$2aby = a(1-a^2)$，$2abx = b(1-b^2)$

上の2式から

$$\begin{aligned}\{a(1-a^2)\}^2 + \{b(1-b^2)\}^2 &= (2aby)^2 + (2abx)^2 \\ &= 4a^2b^2(x^2+y^2) = 4a^2b^2\end{aligned}$$

整理すると　$a^6 + b^6 - 2(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + a^2 + b^2 = 0$

したがって　$(a^2+b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2+b^2) - 2(a^2+b^2)^2 + (a^2+b^2) = 0$

$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 \neq 0$ であるから

$$(a^2+b^2)^2 - 3(ab)^2 - 2(a^2+b^2) + 1 = 0$$

$s = a^2 + b^2$，$t = ab$ であるから

$$s^2 - 3t^2 - 2s + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{(s-1)^2 = 3t^2}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}^2 \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s$

ここで　$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = s + 2t \geqq 0$
　　　　$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = s - 2t \geqq 0$

したがって　$-\dfrac{s}{2} \leqq t \leqq \dfrac{s}{2}$　ゆえに　$t^2 \leqq \dfrac{s^2}{4}$

これを(1)の結果に代入すると

$$(s-1)^2 \leqq \frac{3}{4}s^2 \quad \text{ゆえに} \quad s^2 - 8s + 4 \leqq 0$$

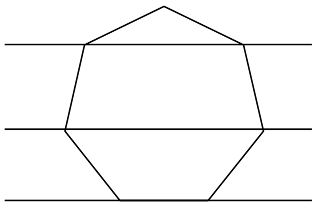
これを解いて　$4 - 2\sqrt{3} \leqq s \leqq 4 + 2\sqrt{3}$

よって　$\boldsymbol{\sqrt{3} - \dfrac{3}{2} \leqq \triangle\mathrm{ABC} \leqq \sqrt{3} + \dfrac{3}{2}}$　■

3 直線 l および m の選び方の総数は

$$\begin{aligned}\frac{{}_n\mathrm{C}_2 \times {}_{n-2}\mathrm{C}_2}{2!} &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{(n-2)(n-3)}{2} \\ &= \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3) \quad (\text{通り})\end{aligned}$$

(i) n が奇数のとき，直線 l を含めた平行な直線群には正 n 角形の辺が1本だけ存在し，この直線群の本数は $\dfrac{n-1}{2}$ であるから，直線 l と m が平行になる場合の総数は

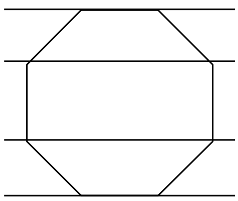


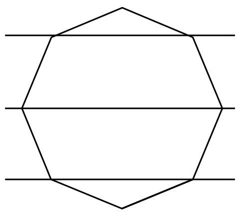
$$\begin{aligned}n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2 &= n \times \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2} \\ &= \frac{1}{8}n(n-1)(n-3)\end{aligned}$$

このとき，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)} = \boldsymbol{\frac{1}{n-2}}$$

(ii) n が偶数のとき，直線 l を含めた平行な直線群には正 n 角形の辺が2本存在する場合と辺が1本も存在しない場合がある．





それぞれの直線群の本数は $\dfrac{n}{2}$，$\dfrac{n-2}{2}$ であるから，直線 l と m が平行になる場合の総数は

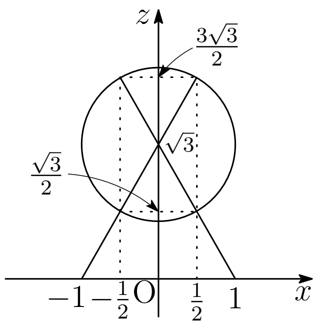
$$\begin{aligned}\frac{n}{2!} \times {}_{\frac{n}{2}}\mathrm{C}_2 + \frac{n}{2!} \times {}_{\frac{n-2}{2}}\mathrm{C}_2 &= \frac{n}{2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n-2}{2} + \frac{n}{2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2} \\ &= \frac{1}{8}n(n-2)^2\end{aligned}$$

このとき，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{8}n(n-2)^2}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)} = \boldsymbol{\frac{n-2}{(n-1)(n-3)}}$$

■

4 (1) 線分 PQ の長さが最小となるとき，P，Q は zx 平面上にある．右の図から



$$\mathbf{P(\pm 1,\ 0,\ 0),\quad Q\left(\pm\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

のとき (複号同順)，PQ は最小値 **1** をとる．

(2) 線分 PQ の長さが最大となるとき，P，Q は zx 平面上にある．上の図から

$$\mathbf{P(\pm 1,\ 0,\ 0),\quad Q\left(\mp\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$$

のとき (複号同順)，PQ は最大値 **3** をとる．■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $a_k = k + \cos\dfrac{k\pi}{6}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n} &= \sum_{k=1}^{12n} k + \sum_{k=1}^{12n} \cos\frac{k\pi}{6}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 12n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12}\cos\frac{12j+k}{6}\pi\\ &= 6n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12}\cos\frac{k}{6}\pi\\ &= 6n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1} 0 = \boldsymbol{6n(12n+1)}\end{aligned}$$

(2) ${a_k}^2 = k^2 + 2k\cos\dfrac{k\pi}{6} + \cos^2\dfrac{k\pi}{6} = k^2 + \dfrac{1}{2} + 2k\cos\dfrac{k\pi}{6} + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{k\pi}{3}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n}\left(k^2+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{6}\cdot 12n(12n+1)(2\cdot 12n+1) + \frac{1}{2}\cdot 12n\\ &= 2n(12n+1)(24n+1) + 6n\\ &= 8n(72n^2+9n+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n} k\cos\frac{k\pi}{6} &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12}(12j+k)\cos\frac{12j+k}{6}\pi\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 12j\sum_{k=1}^{12}\cos\frac{k\pi}{6} + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12} k\cos\frac{k\pi}{6}\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 12j\times 0 + \sum_{j=0}^{n-1} 6 = 6n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{3} &= \sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{k=1}^{6}\cos\frac{6j+k}{3}\pi\\ &= \sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{k=1}^{6}\cos\frac{k}{3}\pi = \sum_{j=0}^{2n-1}\times 0 = 0\end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n}{a_k}^2 &= 8n(72n^2+9n+1) + 2\times 6n + 0\\ &= \boldsymbol{4n(144n^2+18n+5)}\end{aligned}$$

■

6　(1) X と Y の平均をそれぞれ $\overline{X}$，$\overline{Y}$ とすると

$$\overline{X}=\frac{1}{10}(3a+3b+4c),\quad \overline{Y}=\frac{1}{10}(5a+5b)=\frac{1}{2}(a+b)$$

$\overline{X}=\overline{Y}$ であるから

$$3a+3b+4c=5a+5b \quad \text{すなわち} \quad \overline{X}=\overline{Y}=c=\frac{a+b}{2} \quad \cdots ①$$

したがって

$$\begin{aligned} {s_{\mathrm{X}}}^2&=\frac{1}{10}(3a^2+3b^2+4c^2)-c^2=\frac{3}{10}(a^2+b^2-2c^2)\\ &=\frac{3}{10}\left\{a^2+b^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}=\frac{3}{20}(a-b)^2,\\ {s_{\mathrm{Y}}}^2&=\frac{1}{10}(5a^2+5b^2)-c^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2c^2)\\ &=\frac{1}{2}\left\{a^2+b^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}=\frac{1}{4}(a-b)^2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

よって

$$\frac{{s_{\mathrm{X}}}^2}{{s_{\mathrm{Y}}}^2}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

(2) 科目 X と Y の共分散を s_{XY} とすると

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{XY}}&=\frac{1}{10}(2a^2+2b^2+2ab+2bc+2ca)-\overline{X}\cdot\overline{Y}\\ &=\frac{1}{10}\{2a^2+2b^2+2ab+2c(a+b)\}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\\ &=\frac{1}{10}\{2a^2+2b^2+2ab+(a+b)^2\}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\\ &=\frac{1}{20}(a-b)^2 \end{aligned}$$

(1) の結果から　${s_{\mathrm{X}}}^2{s_{\mathrm{Y}}}^2=\dfrac{3}{80}(a-b)^4$　ゆえに　$s_{\mathrm{X}}s_{\mathrm{Y}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}(a-b)^2$

したがって．相関係数は　$\dfrac{s_{\mathrm{XY}}}{s_{\mathrm{X}}s_{\mathrm{Y}}}=\dfrac{\frac{1}{20}(a-b)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}(a-b)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

$3<\sqrt{15}<4$ より，$0.25=\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{\sqrt{15}}<\dfrac{1}{3}<0.34$ であるから

よって，求める相関係数は　**0.3**

(3) $a < c$，$b < c$ と仮定すると $\dfrac{a+b}{2} < c$ となり，① に反する．

また，$a > c$，$b > c$ と仮定すると $\dfrac{a+b}{2} > c$ となり，① に反する．

よって，c は科目 X の最大値でもなく，最小値でもない．a 点が 3 人，b 点が 3 人，c 点が 4 人であるから，科目 X の中央値は c である．

したがって　$c = 65$　① より　$a + b = 130$　$\cdots$③

科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるから，② より

$$\frac{1}{2}|a-b| = 11 \quad \text{ゆえに} \quad |a-b| = 22 \quad \cdots④$$

③，④ を解いて　$(a,\ b) = (54,\ 76),\ (76,\ 54)$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (54,\ 76,\ 65),\ (76,\ 54,\ 65)}$ ■

2.2　2016 年

- $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から 1 題選択．

1 $6{\cdot}3^{3x}+1=7{\cdot}5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ．

2 θ を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_2=\cos\theta,\quad a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．すべての n について $a_n=\cos(n-1)\theta$ が成り立つとき，$\cos\theta$ を求めよ．

3 硬貨が 2 枚ある．最初は 2 枚とも表の状態で置かれている．次の操作を n 回行ったあと，硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ．

［操作］2 枚とも表，または 2 枚とも裏のときには，2 枚の硬貨両方を投げる．
表と裏が 1 枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる．

4 a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする．区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする．M の最小値とそのときの a の値を求めよ．

5 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は零ベクトルではなく，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度は 60° である．このとき

$$r=\frac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}$$

のとりうる値の範囲を求めよ．

6 x は0以上の整数である．次の表は2つの科目XとYの試験を受けた5人の得点をまとめたものである．

	①	②	③	④	⑤
科目Xの得点	x	6	4	7	4
科目Yの得点	9	7	5	10	9

(1) $2n$ 個の実数 a_1，a_2，，$\cdots$，a_n，b_1，b_2，$\cdots$，b_n について，

$a = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$，$b = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)(b_k - b) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - nab$$

が成り立つことを示せ．

(2) 科目Xの得点と科目Yの得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ．

(3) x の値を2増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった．このとき，r_{XY} の値を四捨五入して小数第1位まで求めよ．

解答例

1　$6{\cdot}3^{3x}+1=7{\cdot}5^{2x} \quad \cdots(*)$

$(*)$ において

x	0	1	2
$6{\cdot}3^{3x}+1$	7	163	4375
$7{\cdot}5^{2x}$	7	175	4375

$x \geqq 3$ のとき

$$\frac{3^{3x}}{5^{2x}}=\left(\frac{27}{25}\right)^x \geqq \left(1+\frac{2}{25}\right)^3 > 1+3{\cdot}\frac{2}{25}=1+\frac{6}{25}>1+\frac{6}{36}=\frac{7}{6}$$

したがって　$x \geqq 3$ のとき　$6{\cdot}3^{3x}>7{\cdot}5^{2x}$　すなわち　$6{\cdot}3^{3x}+1>7{\cdot}5^{2x}$

$x \geqq 3$ において，$(*)$ を満たす整数 x は存在しない．

よって，$(*)$ を満たす 0 以上の整数 x は　**0，2**　■

2　$a_1=1$，$a_2=\cos\theta$，$a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$ が

$$a_n=\cos(n-1) \qquad \cdots(*)$$

を満たすから

$n=1$ のとき　$\cos 2\theta=\dfrac{3}{2}\cos\theta-1 \quad \cdots ①$

$n=2$ のとき　$\cos 3\theta=\dfrac{3}{2}\cos 2\theta-\cos\theta \quad \cdots ②$

① より　$2\cos^2\theta-1=\dfrac{3}{2}\cos\theta-1$　ゆえに　$\cos\theta\left(\cos\theta-\dfrac{3}{4}\right)=0$

② より　$2\cos 2\theta\cos\theta=\dfrac{3}{2}\cos 2\theta$　ゆえに　$(2\cos^2\theta-1)\left(\cos\theta-\dfrac{3}{4}\right)=0$

上の 2 式を同時に満たすとき　$\cos\theta=\dfrac{3}{4} \quad \cdots ③$

$n \leqq 2$ のとき，$(*)$ は定義より成立する．

$n \leqq k+1$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，③ より

$$a_{k+2}=\frac{3}{2}a_{k+1}-a_k=2\cos\theta\cos k\theta-\cos(k-1)\theta$$

$\cos(k+1)\theta+\cos(k-1)\theta=2\cos\theta\cos k\theta$ であるから　$a_{k+2}=\cos(k+1)\theta$

ゆえに，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．よって　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{3}{4}}$

補足 漸化式 $a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_n$ の特性方程式

$$x^2=\frac{3}{2}x-1 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$$

$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{4}$，$\beta=\dfrac{3-\sqrt{7}i}{4}$ とおくと，$a_0=1$，$a_1=\dfrac{3}{4}$ より

$$a_n=\frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{2}$$

$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ とおくと

$$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta,\quad \beta=\cos\theta-i\sin\theta$$

したがって

$$a_n=\frac{1}{2}\left\{(\cos\theta+i\sin\theta)^{n-1}+(\cos\theta-i\sin\theta)^{n-1}\right\}=\cos(n-1)\theta$$

■

$\boxed{3}$ 硬貨を n 回投げたあと，表の硬貨の枚数が 0，1，2 である確率をそれぞ p_n，q_n，r_n とすると

$$p_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\quad q=1={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},\quad r_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

操作により，次の確率漸化式が成り立つ．

$$(*)\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{4}r_n \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{2}r_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{1}{4}r_n \end{cases} \qquad (n\geqq 1)$$

$(*)$ により　$p_2=\dfrac{3}{8}$，$q_2=\dfrac{1}{2}$，$r_2=\dfrac{1}{8}$　さらに　$p_3=\dfrac{3}{8}$，$q_3=\dfrac{1}{2}$，$r_3=\dfrac{1}{8}$

したがって　$n\geqq 2$ のとき　$p_n=\dfrac{3}{8}$，$q_n=\dfrac{1}{2}$，$r_n=\dfrac{1}{8}$

よって，求める確率は　$p_n=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{1}{4}} & \boldsymbol{(n=1)} \\ \boldsymbol{\dfrac{3}{8}} & \boldsymbol{(n\geqq 2)}\end{cases}$

■

4 $f(x) = x^3 - 3ax$ より

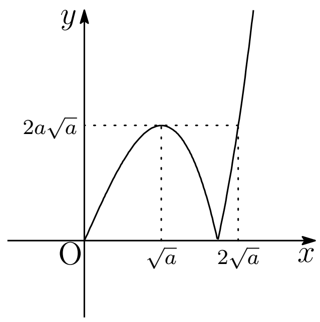
$$f(-x) = -(x^3 - 3ax) = -f(x) \quad \text{ゆえに} \quad |f(-x)| = |f(x)|$$

したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を求めればよい．

$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$ であるから，$a \leqq 0$ のとき $f(x)$ は単調増加．

$a < 0$ のとき，$f(x)$ の増減および $y = |f(x)|$ のグラフは

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2a\sqrt{a}$	$\nearrow$



(i) $a \leqq 0$ のとき　$M = |f(1)| = |1 - 3a| = -3a + 1$

(ii) $0 < 2\sqrt{a} \leqq 1$，すなわち，$0 < a \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき

$$M = |f(1)| = |1 - 3a| = -3a + 1$$

(iii) $\sqrt{a} \leqq 1 < 2\sqrt{a}$，すなわち，$\dfrac{1}{4} < a \leqq 1$ のとき

$$M = |f(\sqrt{a})| = 2a\sqrt{a}$$

(iv) $1 < \sqrt{a}$，すなわち，$1 < a$ のとき

$$M = |f(1)| = |1 - 3a| = 3a - 1$$

(i)〜(iv) より　$M = \begin{cases} -3a + 1 & \left(a \leqq \frac{1}{4}\right) \\ 2a\sqrt{a} & \left(\frac{1}{4} < a \leqq 1\right) \\ 3a - 1 & (1 < a) \end{cases}$

M は a の関数で，$a \leqq \dfrac{1}{4}$ で単調減少，$\dfrac{1}{4} \leqq a$ で単調増加である．

よって，M は $a = \dfrac{1}{4}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる．■

$\boxed{5}$ $r = \dfrac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}$ および $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$ より

$$r^2 = \frac{|\vec{a}+2\vec{b}|^2}{|2\vec{a}+\vec{b}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2}$$

$x = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ とおくと $(x>0)$ $\quad r^2 = \dfrac{1+2x+4x^2}{4+2x+x^2}$

したがって $\quad (r^2-4)x^2+2(r^2-1)x+4r^2-1=0 \quad \cdots(*)$

方程式 $(*)$ は，$r^2-4=0$，すなわち，$r=2$ のとき $\quad 6x+15=0$

これは正の解をもたないので不適．

$r \neq 2$ のとき，$(*)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta = -\frac{2(r^2-1)}{r^2-4}, \quad \alpha\beta = \frac{4r^2-1}{r^2-4}$$

(i) $r=\dfrac{1}{2}$ のとき $\quad \alpha+\beta<0$，$\alpha\beta=0$ より，$(*)$ は正の解をもたない．

(ii) $0<r<\dfrac{1}{2}$，$2<r$ のとき $\quad \alpha+\beta<0$，$\quad \alpha\beta>0$ より，
$(*)$ は正の解をもたない．

(iii) $\dfrac{1}{2}<r<2$ のとき $\quad \alpha\beta<0$ より，$(*)$ は正の解をもつ．

(i)〜(iii) から，求める r の値の範囲は $\quad \boldsymbol{\dfrac{1}{2}<r<2}$

補足 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β とすると，$\alpha\beta<0$ のとき

$$b^2-4ac = b^2-4a^2\cdot\frac{c}{a} = b^2-4a^2\alpha\beta > 0$$

別解 $f(x) = r^2 = \dfrac{1+2x+4x^2}{4+2x+x^2}$ とおくと $(x>0)$

$$f'(x) = \frac{(1+2x+4x^2)'(4+2x+x^2)-(1+2x+4x^2)(4+2x+x^2)'}{(4+2x+x^2)^2}$$

$$= \frac{6(1+5x+x^2)}{(4+2x+x^2)^2} > 0$$

$f(x)$ は単調増加．$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \frac{1}{4}$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$

したがって $\quad \dfrac{1}{4}<r^2<4 \quad$ よって $\quad \dfrac{1}{2}<r<2$ ■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $na=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$，$nb=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)&=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-a\sum_{k=1}^{n}b_k-b\sum_{k=1}^{n}a_k+ab\sum_{k=1}^{n}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-a\cdot nb-b\cdot na+nab\\&=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab\end{aligned}$$

(2) 科目 X と科目 Y の得点の平均をそれぞれ a，b とすると

$$a=\frac{1}{5}(x+6+4+7+4)=\frac{x+21}{5},\quad b=\frac{1}{5}(9+7+5+10+9)=8$$

科目 X と科目 Y の得点の分散をそれぞれ ${s_{\mathrm{X}}}^2$，${s_Y}^2$ とすると

$$\begin{aligned}{s_{\mathrm{X}}}^2&=\frac{1}{5}(x^2+6^2+4^2+7^2+4^2)-a^2=\frac{2}{25}(2x^2-21x+72)\\{s_{\mathrm{Y}}}^2&=\frac{1}{5}(9^2+7^2+5^2+10^2+9^2)-b^2=\frac{16}{5}\end{aligned}$$

科目 X と科目 Y の得点の共分散を s_{XY} とすると

$$s_{\mathrm{XY}}=\frac{1}{5}(x\cdot 9+6\cdot 7+4\cdot 5+7\cdot 10+4\cdot 9)-ab=\frac{x}{5}$$

よって　$r_{\mathrm{XY}}=\dfrac{s_{\mathrm{XY}}}{s_{\mathrm{X}}s_{\mathrm{Y}}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}x}{4\sqrt{2(2x^2-21x+72)}}}$

(3) r_{XY} は x の値を 2 増やしても値は同じであるから，(2) の結果から

$$\frac{\sqrt{5}(x+2)}{4\sqrt{2}\sqrt{2(x+2)^2-21(x+2)+72}}=\frac{\sqrt{5}x}{4\sqrt{2}\sqrt{2x^2-21x+72}}$$

ゆえに　$x\sqrt{2x^2-13x+38}=(x+2)\sqrt{2x^2-21x+72}$

両辺を平方して整理すると　$7x^2-34x-48=0$

したがって　$(x-6)(7x+8)=0$　x は 0 以上の整数であるから　$x=6$

ゆえに　$r_{\mathrm{XY}}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot 6}{4\sqrt{2(2\cdot 6^2-21\cdot 6+72)}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}=\dfrac{2.236\cdots}{4}=0.559\cdots$

よって　$\boldsymbol{r_{\mathrm{XY}}=0.6}$　■

2.3　2017 年

1 実数 a，b は $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たす．

(1) $\log_3 a + \log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) $\log_2 a + \log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ．

2 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 \\ y^2 = zx + 7 \\ z^2 = xy + 7 \end{cases}$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ．

3 $P(0)=1$，$P(x+1)-P(x)=2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ．

4 正の実数 a，b，c は $a+b+c=1$ を満たす．連立方程式

$$|ax+by| \leqq 1, \qquad |cx-by| \leqq 1$$

の表す xy 平面の領域を D とする．D の面積の最小値を求めよ．

5 xy 平面上の直線 $x=y+1$ を k，yz 平面上の直線 $y=z+1$ を l，xz 平面上の直線 $z=x+1$ を m とする．直線 k 上に点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 0)$ をとる．l 上の点 P_2 を $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \perp l$ となるように定め，m 上の点 P_3 を $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 \perp m$ となるように定め，k 上の点 P_4 を $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4 \perp k$ となるように定める．以下，同様の手順で $l,\ m,\ k,\ l,\ m,\ k, \cdots$ 上の点 P_5，P_6，P_7，P_8，P_9，$\mathrm{P}_{10}, \cdots$ を定める．

(1) 点 P_2，P_3 の座標を求めよ．

(2) 線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを n を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たすとき

$$b = 9 - a \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq a \leqq 8$$

このとき　$\log_3 a + \log_3 b = \log_3 ab = \log_3 a(9-a)$

$f(a) = a(9-a)$ $(1 \leqq a \leqq 8)$ とおくと　$f(a) = -\left(a - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \dfrac{81}{4}$

したがって　　$8 \leqq f(a) \leqq \dfrac{81}{4}$

よって　最大値 $\log_3 \dfrac{81}{4} = \mathbf{4 - 2\log_3 2}$，最小値 $\log_3 8 = \mathbf{3\log_3 2}$

(2) (1) と同様に　$\log_2 a + \log_4 b = \log_4 a^2 b = \log_4 a^2(9-a)$

$g(a) = a^2(9-a) = -a^3 + 9a^2$ $(1 \leqq a \leqq 8)$ とおくと

$$g'(a) = -3a^2 + 18a = -3a(a-6)$$

a	1	$\cdots$	6	$\cdots$	8
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	8	↗	極大 108	↘	64

したがって　　$8 \leqq g(a) \leqq 108$

よって　最大値 $\log_4 108 = \mathbf{1 + 3\log_4 3}$，最小値 $\log_4 8 = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$　■

2

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 & \cdots ① \\ y^2 = zx + 7 & \cdots ② \\ z^2 = xy + 7 & \cdots ③ \end{cases}$$

① − ② より　$x^2 - y^2 = z(y - x)$　ゆえに　$(x - y)(x + y + z) = 0$

② − ③ より　$y^2 - z^2 = x(z - y)$　ゆえに　$(y - z)(x + y + z) = 0$

上の 2 式の結果において，$x + y + z \neq 0$ とすると　$x - y = 0,\quad y - z = 0$

すなわち　$x = y = z$　これは，①〜③ を満たさない．

したがって　$x + y + z = 0$　$\cdots ④$

条件より，$x \leqq y \leqq z$ であるから，$z < 0$ とすると

$$x \leqq y \leqq z < 0 \quad \text{これは④に反するから} \quad z \geqq 0$$

④ から，$x = -(y + z)$ を ① に代入すると

$$(y + z)^2 = yz + 7 \quad \text{ゆえに} \quad (2y + z)^2 = 28 - 3z^2$$

第 2 式の左辺が平方数であるから，$z \geqq 0$ に注意して　$z = 1,\ 2,\ 3$

③，④ より，x，y を解とする t に関する 2 次方程式は

$$t^2 - (x + y)t + xy = 0 \quad \text{すなわち} \quad t^2 + zt + z^2 - 7 = 0 \quad \cdots (*)$$

(i) $z = 1$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + t - 6 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t + 3)(t - 2) = 0$$

$x \leqq y$ に注意して　$x = -3,\ y = 2$　これは，$y \leqq z$ に反するので不適．

(ii) $z = 2$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t + 3)(t - 1) = 0$$

$x \leqq y$ に注意して　$x = -3,\ y = 1$

(iii) $z = 3$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t + 2)(t + 1) = 0$$

$x \leqq y$ に注意して　$x = -2,\ y = -1$

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-3,\ 1,\ 2),\ (-2, -1,\ 3)}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $P(x+1)-P(x)=2x$ より，n を自然数とすると

$$\sum_{k=0}^{n-1}\{P(k+1)-P(k)\}=2\sum_{k=0}^{n-1}k$$

したがって　$P(n)-P(0)=2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$

$P(0)=1$ であるから　$P(n)=n^2-n+1$

$f(x)=P(x)-(x^2-x+1)\cdots(*)$ とおくと

$$f(1)=0,\ f(2)=0,\ \cdots,\ f(n)=0,\cdots$$

$f(x)$ は整式であるから，因数定理により

$$f(x)=g(x)(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\cdots \qquad (g(x)\text{ は整式})$$

$f(x)$ の次数は有限であるから

$$g(x)=0 \quad \text{すなわち} \quad f(x)=0$$

$(*)$ より　$\boldsymbol{P(x)=x^2-x+1}$　■

4 $|ax+by| \leqq 1$，$|cx-by| \leqq 1$ より

$$-1 \leqq ax+by \leqq 1,\quad -1 \leqq cx-by \leqq 1$$

4 本の直線を

$$l_1 : ax+by=1,\qquad m_1 : cx-by=1,$$
$$l_2 : ax+by=-1,\qquad m_2 : cx-by=-1$$

とすると，$l_1 // l_2$，$m_1 // m_2$．D はこれら 4 本の直線で囲まれた平行四辺形の内部および周からなる領域である．

l_1 の点 $(x_1,\ y_1)$ から l_2 へ下ろした垂線の長さを d とすると，$ax_1+by_1=1$ より

$$d=\frac{|ax_1+by_1+1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

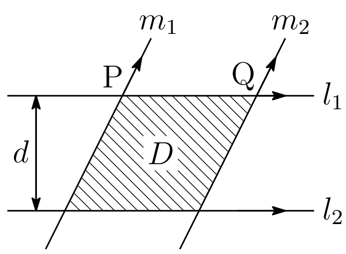
l_1 と m_1 の交点を P をとすると，P の座標は

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx-by=1 \end{cases} \quad \text{これを解いて}\quad \mathrm{P}\left(\frac{2}{a+c},\ \frac{-a+c}{b(a+c)}\right)$$

l_1 と m_2 の交点を Q をとすると，Q の座標は

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx-by=-1 \end{cases} \quad \text{これを解いて}\quad \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{1}{b}\right)$$

したがって　$\mathrm{PQ}=\dfrac{2\sqrt{a^2+b^2}}{b(a+c)}$



D の面積を S とすると

$$S=\mathrm{PQ}\cdot d=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{b(a+c)}\cdot\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{4}{b(a+c)}$$

$a+b+c=1$ より，$a+c=1-b$ であるから　$S=\dfrac{4}{b(1-b)}$

$0<b<1$ であるから　$b(1-b)=-b^2+b=-\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4} \leqq \dfrac{1}{4}$

よって　$b=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $S=\dfrac{4}{\frac{1}{4}}=\mathbf{16}$ ■

$\boxed{5}$ (1) 直線 k，l，m を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned} k:&\ (x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 0) + t(1,\ 1,\ 0) \\ l:&\ (x,\ y,\ z) = (0,\ 1,\ 0) + t(0,\ 1,\ 1) \\ m:&\ (x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 1) + t(1,\ 0,\ 1) \end{aligned}$$

P_2，P_3 はそれぞれ l，m 上にあるから，a_2，a_3 を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} &= (0,\ 1,\ 0) + a_2(0,\ 1,\ 1) = (0,\ 1+a_2,\ a_2) \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_3} &= (0,\ 0,\ 1) + a_3(1,\ 0,\ 1) = (a_3,\ 0,\ 1+a_3) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (1,\ 0,\ 0)$ および上の 2 式から

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = (-1,\ 1+a_2,\ a_2),\quad \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} = (a_3, -1-a_2,\ 1-a_2+a_3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \perp l$ より

$$0\cdot(-1) + 1\cdot(1+a_2) + 1\cdot a_2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 + 2a_2 = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} \perp m$ より

$$1\cdot a_3 + 0\cdot(-1-a_2) + 1(1-a_2+a_3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 - a_2 + 2a_3 = 0$$

これを解いて　$a_2 = -\dfrac{1}{2}$，$a_3 = -\dfrac{3}{4}$

よって　$\mathbf{P_2}\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$，$\mathbf{P_3}\left(-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}},\ \mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$

(2) P_n が k 上にあるとき，$\mathrm{P}_n(1+a_n,\ a_n,\ 0)$，$\mathrm{P}_{n+1}(0,\ 1+a_{n+1},\ a_{n+1})$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (-1-a_n,\ 1-a_n+a_{n+1},\ a_{n+1}) \perp l$ であるから

$$(-1-a_n)\cdot 0 + (1-a_n+a_{n+1})\cdot 1 + a_{n+1}\cdot 1 = 0 \quad \cdots ①$$

P_n が l 上にあるとき，$\mathrm{P}_n(0,\ 1+a_n,\ a_n)$，$\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ 0,\ 1+a_{n+1})$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (a_{n+1}, -1-a_n,\ 1-a_n+a_{n+1}) \perp m$ であるから

$$a_{n+1}\cdot 1 + (-1-a_n)\cdot 0 + (1-a_n+a_{n+1})\cdot 1 = 0 \quad \cdots ②$$

P_n が m 上にあるとき，$\mathrm{P}_n(a_n,\ 0,\ 1+a_n)$，$\mathrm{P}_{n+1}(1+a_{n+1},\ a_{n+1},\ 0)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (1-a_n+a_{n+1},\ a_{n+1}, -1-a_n) \perp k$ であるから

$$(1-a_n+a_{n+1})\cdot 1 + a_{n+1}\cdot 1 + (-1-a_n)\cdot 0 = 0 \quad \cdots ③$$

①〜③をそれぞれ整理すると，すべて次式となる．

$$2a_{n+1} - a_n + 1 = 0$$

$a_1 = 0$，$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}$ であるから

$$a_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(a_n + 1) \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1$$

したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}{}^2 &= (-1 - a_n)^2 + (1 - a_n + a_{n+1})^2 + a_{n+1}{}^2 \\
&= \{-1 - (2^{1-n} - 1)\}^2 \\
&\qquad\qquad + \{1 - (2^{1-n} - 1) + (2^{-n} - 1)\}^2 + (2^{-n} - 1)^2 \\
&= 4{\cdot}2^{-2n} + (1 - 2^{-n})^2 + (2^{-n} - 1)^2 \\
&= 6{\cdot}2^{-2n} - 4{\cdot}2^{-n} + 2
\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} = \sqrt{6{\cdot}2^{-2n} - 4{\cdot}2^{-n} + 2}}$ ■

2.4　2018 年

1 正の整数 n の各位の数の和を $S(n)$ で表す．たとえば

$$S(3) = 3, \quad S(10) = 1 + 0 = 1, \quad S(516) = 5 + 1 + 6 = 12$$

である．

(1) $n \geqq 10000$ のとき，不等式 $n > 30S(n) + 2018$ を示せ．

(2) $n = 30S(n) + 2018$ を満たす n を求めよ．

2 $-1 \leqq t \leqq 1$ とし，曲線 $y = \dfrac{x^2 - 1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2 - 1}{2}\right)$ における接線を l とする．半円 $x^2 + y^2 = 1$ $(y \leqq 0)$ と l で囲まれた部分の面積を S とする．S のとりうる値の範囲を求めよ．

3 3 個のさいころを投げる．

(1) 出た目の積が 6 となる確率を求めよ．

(2) 出た目の積が k となる確率が $\dfrac{1}{36}$ であるような k をすべて求めよ．

4 p，q を正の実数とする．原点を O とする座標空間内の 3 点 $\mathrm{P}(p,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ q,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 1)$ は $\angle\mathrm{PRQ} = \dfrac{\pi}{6}$ を満たす．四面体 OPQR の体積の最大値を求めよ．

5 a を実数とし，$f(x) = x - x^3$，$g(x) = a(x - x^2)$ とする．2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ は $0 < x < 1$ の範囲に共有点を持つ．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ．

解答例

1 (1) $10^k \leqq n < 10^{k+1}$ とすると $(k \geqq 4)$

$$n \geqq 10^k = (9+1)^k > 9^k + {}_k\mathrm{C}_1 \cdot 9^{k-1} > 9^4 + {}_k\mathrm{C}_1 \cdot 9^3 = 6561 + 729k$$
$$> 30(9k+9) + 2018 \geqq 30S(n) + 2018$$

よって　$n \geqq 10000$ のとき　$n > 30S(n) + 2018$

(2) (1) の結果から

$$n = 30S(n) + 2018 \quad \cdots (*)$$

を満たす正の整数 n の必要条件は

$$n < 10000$$

また，$(*)$ から，n の一位の数が 8 であることに注意すると，9 以下の負でない整数 a，b，c を用いて

$$n = 1000a + 100b + 10c + 8$$

とおき，$(*)$ に代入すると

$$1000a + 100b + 10c + 8 = 30(a+b+c+8) + 2018$$

整理すると　$7b - 2c = 225 - 97a \quad \cdots ①$

$-18 \leqq 7b - 2c \leqq 63$ であるから

$$-18 \leqq 225 - 97a \leqq 63 \qquad \text{ゆえに} \quad a = 2$$

これを ① に代入して　$7b - 2c = 31$

b，c の条件に注意してこれを解くと　$(b,\ c) = (5,\ 2),\ (7,\ 9)$

よって，求める n は　**2528，2798** ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ より　$y'=x$

曲線 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{2}\right)$ における接線 l の方程式は

$$y-\frac{t^2-1}{2}=t\,(x-t)+\frac{t^2-1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad tx-y-\frac{t^2+1}{2}=0$$

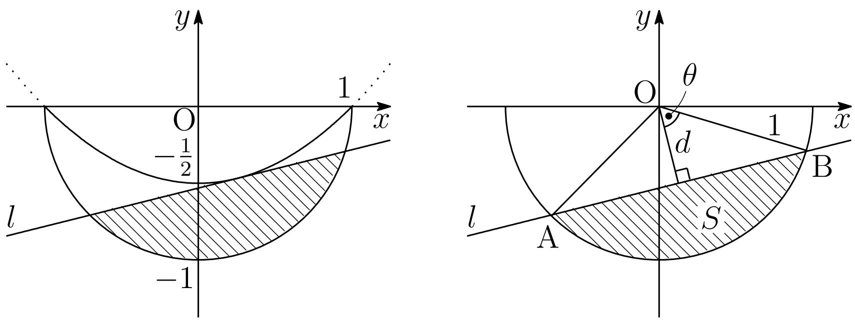
原点 O と直線 l の距離を d とすると

$$d=\frac{\left|-\frac{t^2+1}{2}\right|}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}\qquad(-1\leqq t\leqq 1)$$

l と半円 $x^2+y^2=1$ $(y\leqq 0)$ との交点を A，B とし，$2\theta=\angle\mathrm{AOB}$ とすると

$$\cos\theta=d=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}\quad\cdots①$$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta-\dfrac{1}{2}\cdot1^2\sin2\theta=\theta-\dfrac{1}{2}\sin2\theta\quad\cdots②$



S は d が最大のとき最小となり，d が最小のとき最大となるから ①，② より，

$$t=\pm1\quad\text{すなわち}\quad\theta=\frac{\pi}{4}\ \text{のとき}\quad S\ \text{は最小値}\ \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},$$

$$t=0\quad\text{すなわち}\quad\theta=\frac{\pi}{3}\ \text{のとき}\quad S\ \text{は最大値}\ \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\leqq S\leqq\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$　■

$\boxed{3}$ (1) 出た目の積が6となる3個のサイコロの目の組合せは

$$\{1,\ 2,\ 3\},\quad \{1,\ 1,\ 6\}$$

よって，求める確率は $\dfrac{3!+{}_3\mathrm{C}_1}{6^3}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}}$

(2) 3個のさいころの出た目を $a,\ b,\ c$ とすると $k=abc$

k となる確率が $\dfrac{1}{36}$ となるのは，次の (A)，(B) の場合である．

(A) k が3数 $a,\ a,\ ar^2$ または $ar, ar,\ ar^2$ の積として表される $(r\neq 1)$，すなわち，1, 1, 4 または 2, 2, 4 の積であるから $k=4,\ 16$

(B) k が相異なる3数 $a,\ b,\ c$ の積として一意的に表される．

ここで，$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $Y=\{5\}$ とする．

(i) $a,\ b,\ c$ が X の要素であるとき，k は

$$1{\cdot}2{\cdot}3,\quad 1{\cdot}2{\cdot}4,\quad 1{\cdot}2{\cdot}6=1{\cdot}3{\cdot}4,\quad 1{\cdot}3{\cdot}6,$$
$$1{\cdot}4{\cdot}6=2{\cdot}3{\cdot}4,\quad 2{\cdot}3{\cdot}6,\quad 2{\cdot}4{\cdot}6,\quad 3{\cdot}4{\cdot}6$$

これらは，(B) を満たさない．

(ii) $a,\ b,\ c$ の1つが Y の要素であるとき，$c=5$ とすると，$a,\ b$ は X の要素である．このとき

$$4=1{\cdot}4=2{\cdot}2,\quad 6=1{\cdot}6=2{\cdot}3,\quad 12=2{\cdot}6=3{\cdot}4$$

であることに注意すると，(B) を満たす $\{a,\ b\}$ の組合せは

$$\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{3,\ 6\},\ \{4,\ 6\}$$

したがって，(B) を満たす k の値は

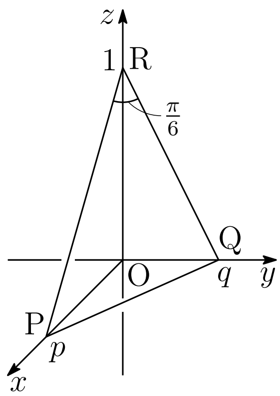
$$k=1{\cdot}2{\cdot}5,\ 1{\cdot}3{\cdot}5,\ 2{\cdot}4{\cdot}5,\ 3{\cdot}5{\cdot}6,\ 4{\cdot}5{\cdot}6$$

(A) および (ii) から

$$\boldsymbol{k=4,\ 10,\ 15,\ 16,\ 40,\ 90,\ 120}$$

■

4 P$(p,\ 0,\ 0)$，Q$(0,\ q,\ 0)$，R$(0,\ 0,\ 1)$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{RP}} = (p,\ 0, -1),\quad \overrightarrow{\mathrm{RQ}} = (0,\ q, -1)$$

$\angle\mathrm{PRQ} = \dfrac{\pi}{6}$，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{RP}}||\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|\cos\dfrac{\pi}{6}$ より

$$1 = \sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに　$(p^2+1)(q^2+1) = \dfrac{4}{3}$　$\cdots$①

四面体 OPQR の体積を V とすると　$V = \dfrac{1}{6}pq$　$\cdots$②

① より　$p^2q^2 + p^2 + q^2 = \dfrac{1}{3}$　ゆえに　$(p-q)^2 = -p^2q^2 - 2pq + \dfrac{1}{3}$　$\cdots$①′

したがって　$-p^2q^2 - 2pq + \dfrac{1}{3} \geqq 0$　ゆえに　$(pq)^2 + 2pq - \dfrac{1}{3} \leqq 0$

$p > 0,\ q > 0$ に注意して　$0 < pq \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1$

上式において等号が成立するのは，①′ より　$p = q = \sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1}$

② より，このとき V は最大値

$$\frac{1}{6}pq = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}-3}{18}}$$

をとる．■

$\boxed{5}$ (1) $f(x) = x(1-x)(1+x)$,

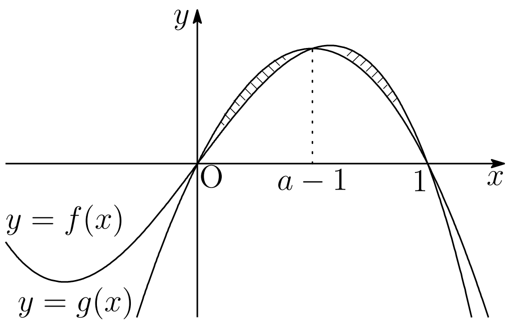
$g(x) = ax(1-x)$ より

$f(x) - g(x) = x(1-x)(x-a+1)$

$f(x) = g(x)$ の解は $x = 0,\ 1,\ a-1$

$0 < x < 1$ に解があるから

$0 < a-1 < 1$ よって $\boldsymbol{1 < a < 2}$



(2) $f(x) - g(x) = x(1-x)(x-a+1)$ より

$0 \leqq x \leqq a-1$ のとき $f(x) \leqq g(x)$, $a-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $f(x) \geqq g(x)$

$$S_1 = \int_0^{a-1} \{g(x) - f(x)\}\,dx, \quad S_2 = \int_{a-1}^{1} \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

とおくと

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \int_{a-1}^{1} \{f(x) - g(x)\}\,dx - \int_0^{a-1} \{g(x) - f(x)\}\,dx \\ &= \int_0^1 \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_0^1 x(1-x)(x-a+1)\,dx \\ &= \int_0^1 x^2(1-x)\,dx + (1-a)\int_0^1 x(1-x)\,dx \\ &= \frac{1}{12} + (1-a)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}(3-2a) \end{aligned}$$

$S_2 - S_1 = 0$ であるから $\quad \boldsymbol{a = \dfrac{3}{2}}$

補足 積分公式[2]

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用する. ■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照.

2.5 2019 年

1 p を自然数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ．

2 原点を O とする座標平面上の点 Q は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ の部分を動く．点 Q と点 A(2, 2) に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}})\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

を満たす点 P の軌跡を求め，図示せよ．

3 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とする．また，α は 1 より大きい実数とする．曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 P(α, $f(\alpha)$) における接線と x 軸の交点を Q とする．点 Q を通る C の接線の中で傾きが最小のものを ℓ とする．

(1) ℓ と C の接点の x 座標を α の式で表せ．

(2) $\alpha = 2$ とする．ℓ と C で囲まれた部分の面積を求めよ．

4 原点を O とする座標平面上に，点 (2, 0) を中心とする半径 2 の円 C_1 と，点 (1, 0) を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．点 P を中心とする円 C_3 は C_1 に内接し，かつ C_2 に外接する．ただし，P は x 軸上にないものとする．P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を Q とするとき，三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ．

5 左下の図のような縦 3 列横 3 列の 9 個のマスがある．異なる 3 個のマスを選び，それぞれに 1 枚ずつコインを置く．マスの選び方は，どれも同様に確からしいものとする．縦と横の各列について，点数を次のように定める．

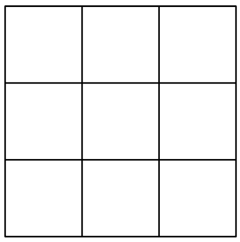
- その列に置かれているコインが 1 枚以下のとき，0 点
- その列に置かれているコインがちょうど 2 枚のとき，1 点
- その列に置かれているコインが 3 枚のとき，3 点

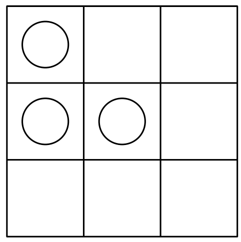
縦と横のすべての列の点数の合計を S とする．たとえば，右下の図のようにコインが置かれている場合，縦の 1 列目と横の 2 列目の点数が 1 点，他の列の点数が 0 点であるから，$S=2$ となる．

(1) $S=3$ となる確率を求めよ．

(2) $S=1$ となる確率を求めよ．

(3) $S=2$ となる確率を求めよ．





解答例

1 $a_1=1,\quad a_2=p^2,\quad a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+13\quad (n=1,2,3,\cdots)$

ゆえに　$a_3=a_2-a_1+13=p^2-1+13=p^2+12$

$$a_4=a_3-a_2+13=(p^2+12)-p^2+13=25$$

$$a_5=a_4-a_3+13=25-(p^2+12)+13=26-p^2$$

数列 $\{a_n\}$ が平方数からなると仮定すると，$a_5=26-p^2$ より，p が自然数であるから，条件を満たす p は

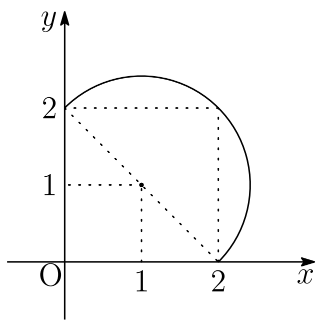
$$p=1,\ 5$$

このとき，a_3 は平方数ではないので矛盾を生じる．
よって，数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在する．■

2 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=(2\cos\theta+2\sin\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)\\&=(2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta)\\&=(\cos2\theta+\sin2\theta+1,\ \sin2\theta-\cos2\theta+1)\\&=\left(\sqrt{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1,\ \sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ であるから，点 P の描く軌跡は，次のようになる．



■

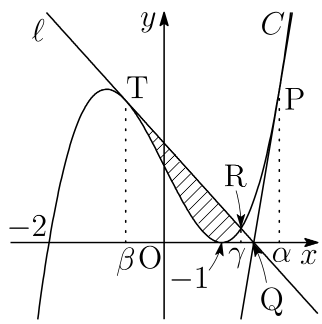
3 (1) $f(x)=x^3-3x+2$ より　$f'(x)=3x^2-3$
C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線は

$$y-(\alpha^3-3\alpha+2)=(3\alpha^2-3)(x-\alpha)$$

すなわち　$y=3(\alpha^2-1)x-2\alpha^3+2\quad\cdots(*)$

これに $y=0$ を代入して整理すると

$$(\alpha-1)\{3(\alpha+1)x-2(\alpha^2+\alpha+1)\}=0$$



点Qの x 座標は，$\alpha > 1$ に注意して　$x = \dfrac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)}$

ℓ と C の接点をTとし，その x 座標を β とすると，ℓ と x 軸の交点の x 座標は，$\beta \neq -1$ に注意して

$$\frac{2(\beta^2+\beta+1)}{3(\beta+1)}$$

これが点Qの x 座標と一致するから

$$\frac{2(\beta^2+\beta+1)}{3(\beta+1)} = \frac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\beta^2}{\beta+1} = \frac{\alpha^2}{\alpha+1}$$

これを整理すると　$(\alpha-\beta)(\alpha\beta+\alpha+\beta) = 0$

$\alpha \neq \beta$ であるから　$\beta = -\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\alpha+1}}$

(2) C 上の点 $\mathrm{T}(\beta,\ f(\beta))$ における接線の方程式は，$(*)$ と同様に

$$y = 3(\beta^2-1)x - 2\beta^3 + 2$$

C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^3 - 3x + 2 = 3(\beta^2-1)x - 2\beta^3 + 2$$

整理すると　$(x-\beta)^2(x+2\beta) = 0$

T以外の共有点をRとし，その x 座標を γ とすると　$\gamma = -2\beta$

ℓ と C で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_\beta^\gamma \{3(\beta^2-1)x - 2\beta^3 + 2 - (x^3-3x+2)\}dx \\ &= -\int_\beta^\gamma (x-\beta)^2(x+2\beta)\,dx \\ &= \int_\beta^\gamma (x-\beta)^2(\gamma-x)\,dx = \frac{1}{12}(\gamma-\beta)^4 \end{aligned}$$

$\alpha = 2$ のとき，$\beta = -\dfrac{2}{3}$，$\gamma = \dfrac{4}{3}$，$\gamma-\beta = 2$　よって　$S = \dfrac{1}{12}\cdot 2^4 = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

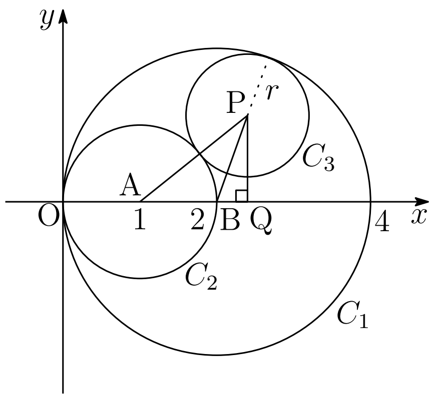
補足　積分公式[3]

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用する．■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

4 C_1，C_2 の中心をそれぞれ A$(1,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ とし，C_3 の半径を r，中心 P の座標を $(x,\ y)$ とすると $\mathrm{AP}=1+r,\ \mathrm{BP}=2-r$ であるから



$$(x-1)^2+y^2=(1+r)^2 \quad \cdots ①$$
$$(x-2)^2+y^2=(2-r)^2 \quad \cdots ②$$

① − ② より　$2x=6r$　ゆえに　$x=3r$

これを ① に代入すると　$y^2=8r(1-r)$

△OPQ の面積を S とすると

$$S^2=\frac{1}{4}x^2y^2=\frac{1}{4}(3r)^2\cdot 8r(1-r)=18r^3(1-r)$$

$0<r<1$ より，4 正数 $r,\ r,\ r,\ 3(1-r)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{r+r+r+3(1-r)}{4} \geqq \sqrt[4]{r\cdot r\cdot r\cdot 3(1-r)} \quad \text{ゆえに} \quad r^3(1-r) \leqq \frac{27}{256}$$

上式において，等号が成立する条件は

$$r=3(1-r) \quad \text{すなわち} \quad r=\frac{3}{4}$$

したがって　$S^2 \leqq 18\times\dfrac{27}{256}$　ゆえに　$S \leqq \dfrac{9\sqrt{6}}{16}$

よって，求める △OPQ の面積の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{6}}{16}}$　■

$\boxed{5}$ (1) 3枚のコインを配置する場合の総数は　${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$ (通り)

$S=3$ となるのは，3枚のコインが縦1列に並ぶ3通りと横1列に並ぶ3通りの計6通り

よって，求める確率は　$P(S=3) = \dfrac{6}{84} = \boldsymbol{\dfrac{1}{14}}$

(2) 縦1列に丁度2枚のコインが並ぶ場合の数は，1列に並ぶ列の選び方が ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り，その配置法が ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りあり，さらに残り1枚の配置法が2通りであるから

$${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times 2 = 18 \text{ (通り)}$$

同様に，横1列に丁度2枚のコインが並ぶ場合の数は　18 (通り)

よって，求める確率は　$P(S=1) = \dfrac{18+18}{84} = \boldsymbol{\dfrac{3}{7}}$

(3) まず，$S=0$ となる場合は，3枚のコインのうちどの2枚も同じ縦の列または横の列にない場合であるから，その確率は

$$P(S=0) = \frac{3!}{84} = \frac{1}{14}$$

$P(S=2) = 1 - P(S=0) - P(S=1) - P(S=3)$ であるから

求める確率は　$1 - \dfrac{1}{14} - \dfrac{3}{7} - \dfrac{1}{14} = \boldsymbol{\dfrac{3}{7}}$　■

第 3 章　名古屋大学

出題分野 (2010-2019) 90 分

◀	名古屋大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2 次関数							1			
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式						3				
	図形と方程式	1	3	1		1	1			1	
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	2	1		2	3			1		1
A	場合の数と確率		2	2				2			3
	整数の性質			3	3			3	3	2	
	図形の性質										
B	平面上のベクトル										
	空間のベクトル										
	数列	3			1		2		2	3	2
	確率分布と統計					2					

数字は問題番号

3.1　2015 年

1 座標平面上の円 $C : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と，x 軸上の 2 点 $\mathrm{P}(-a,\ 0)$，$\mathrm{Q}(b,\ 0)$ を考える．ただし，$a > 0$，$b > 0$，$ab \neq 1$ とする．点 P，Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き，その 2 つの接線の交点を R とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 直線 QR の方程式を求めよ．

(2) R の座標を a，b で表せ．

(3) R の y 座標が正であるとき，△PQR の周の長さを T とする．T を a，b で表せ．

(4) 2 点 P，Q が，条件「$\mathrm{PQ} = 4$ であり，R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき，T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ．

2 数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える．石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 1 にあるならば，確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k = 2, 3, 4) \text{ にあるならば，} \\ \qquad \text{確率} \dfrac{1}{2} \text{で点 } k-1 \text{ に，確率} \dfrac{1}{2} \text{で点 } k+1 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば，確率 1 で 4 に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う．石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す．試行を n 回繰り返した後に，石が点 k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ にある確率を $P_n(k)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $n = 6$ のときの確率 $P_6(k)$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 石が移動した先の点に印をつける (点 1 には初めから印がついているものとする)．試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点全てに印がついている確率を求めよ．

(3) $n \geqq 1$ のとき，$P_n(3)$ を求めよ．

3 次の問に答えよ．

(1) $\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2$ を計算し，2 重根号を用いない形で表せ．

(2) $\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ．

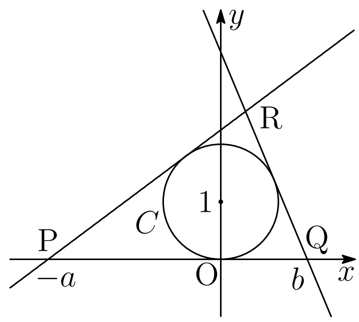
(3) 8 つの実数

$$\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

(ただし，複号 $\pm$ はすべての可能性にわたる) の中で，(2) で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求めよ．

解答例

1 (1) 点 Q$(b,\ 0)$ を通り $(b \neq 1)$，傾き m の直線は



$$y = m(x-b) \quad \text{ゆえに} \quad mx - y - bm = 0$$

これが円 $C : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と接するから

$$\frac{|-1-bm|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

平方して整理すると $\quad m\{(b^2-1)m + 2b\} = 0$

$m \neq 0$ であるから $\quad m = \dfrac{2b}{1-b^2}$

したがって，直線 QR の方程式は $\quad y = \dfrac{2b}{1-b^2}(x-b)$

よって，$b=1$ のときも成立することに注意して

$$\boldsymbol{2bx + (b^2-1)y - 2b^2 = 0}$$

(2) (1) の結果から直線 PR の方程式は $\quad -2ax + (a^2-1)y - 2a^2 = 0$
点 R の座標は，次の連立方程式の解である．

$$\begin{cases} -2ax + (a^2-1)y - 2a^2 = 0 & \cdots ① \\ 2bx + (b^2-1)y - 2b^2 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より $\quad -2(a+b)x + (a^2-b^2)y - 2(a^2-b^2) = 0$

$$(a+b)\{-2x + (a-b)y - 2(a-b)\} = 0$$

$a+b \neq 0$ であるから $\quad 2x = (a-b)(y-2) \quad \cdots ③$

②，③ から x を消去して，整理すると

$$b(a-b)(y-2) + (b^2-1)y - 2b^2 = 0$$
$$(ab-1)y - 2ab = 0$$

$ab \neq 1$ であるから $\quad y = \dfrac{2ab}{ab-1} \quad$ これを ③ に代入して

$$2x = (a-b)\left(\frac{2ab}{ab-1} - 2\right) \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a-b}{ab-1}$$

よって，点 R の座標は $\quad \boldsymbol{\left(\dfrac{a-b}{ab-1},\ \dfrac{2ab}{ab-1}\right)}$

(3) $\triangle$PQR の面積は，PQ の長さと点 R の y 座標により

$$\triangle\text{PQR} = \frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{2ab}{ab-1} = \frac{ab(a+b)}{ab-1}$$

また，$\triangle$PQR の面積は，T と $\triangle$PQR の内接円の半径により

$$\triangle\text{PQR} = \frac{1}{2}\cdot T\cdot 1 = \frac{T}{2}$$

したがって　$\dfrac{T}{2} = \dfrac{ab(a+b)}{ab-1}$　　よって　$\boldsymbol{T = \dfrac{2ab(a+b)}{ab-1}}$

(4) R の y 座標は，正であるから　$\dfrac{2ab}{ab-1} > 0$

a，$b > 0$ であるから　$ab > 1$

正の 2 数 a，b の相加平均・相乗平均の関係により　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

$a+b=4$ であるから　$2 \geqq \sqrt{ab}$　すなわち　$1 < ab \leqq 4$

$$\begin{aligned} T &= \frac{8ab}{ab-1} = \frac{8(ab-1)+8}{ab-1} = 8 + \frac{8}{ab-1} \\ &\geqq 8 + \frac{8}{4-1} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

上式で等号が成立するのは，$a=b$，すなわち，$a=b=2$

よって，T は $\boldsymbol{a=2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{32}{3}}$ をとる. ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) n が奇数のとき　$P_n(1) = P_n(3) = P_n(5) = 0$

n が偶数のとき　$P_n(2) = P_n(4) = 0$

n が奇数のとき，石は点 2 または 4 にある．このとき

$$P_{2j+1}(2) = p_{2j-1}(2) \times \left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + P_{2j-1}(4) \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$P_{2j+1}(4) = P_{2j-1}(2) \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + P_{2j-1}(4) \times \left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

したがって，j を自然数とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$P_1(2) = 1,\ P_1(4) = 0$$
$$(*) \begin{cases} P_{2j+1}(2) = \dfrac{3}{4}P_{2j-1}(2) + \dfrac{1}{4}P_{2j-1}(4) \\ P_{2j+1}(4) = \dfrac{1}{4}P_{2j-1}(2) + \dfrac{3}{4}P_{2j-1}(4) \end{cases}$$

$(*)$ に $j = 1$ を代入すると

$$P_3(2) = \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{3}{4}, \quad P_3(4) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 0 = \frac{1}{4}$$

さらに，$(*)$ に $j = 2$ を代入すると

$$P_5(2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{8}, \quad P_5(4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

したがって

$$P_6(1) = P_5(2) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$
$$P_6(3) = P_5(2) \times \frac{1}{2} + P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$
$$P_6(5) = P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{16}}$$
$$P_6(2) = P_6(4) = \mathbf{0}$$

(2) 4 回繰り返した後に，点 5，点 3 にある確率は

$$P_4(5) = P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$
$$P_4(3) = P_3(2) \times \frac{1}{2} + P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

よって，6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がつく確率は

$$P_4(5) + P_4(3) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) $(*)$ の辺々を加えると

$$P_{2j+1}(2) + P_{2j+1}(4) = P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4)$$

ゆえに
$$\begin{aligned} P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4) &= P_1(2) + P_1(4) \\ &= 1 + 0 = 1 \quad (j \geqq 1) \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned} P_{2j}(3) &= P_{2j-1}(2) \times \frac{1}{2} + P_{2j-1}(4) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\{P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4)\} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって
$$\boldsymbol{P_n(3) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ \dfrac{1}{2} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}}$$

補足 $(*)$ を解くと[1]　$P_{2j-1}(2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^j}$，$P_{2j-1}(4) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^j}$

ゆえに　$P_{2j}(1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2^{j+1}}$，$P_{2j}(3) = \dfrac{1}{2}$，$P_{2j}(5) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2^{j+1}}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Ndai/Ndai_ri_2015.pdf $\boxed{4}$ 参照

3 (1) $p=\sqrt{9+2\sqrt{17}}$，$q=\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とおくと

$$p^2+q^2=18,\quad pq=\sqrt{13}$$

よって $\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2=(p+q)^2=p^2+q^2+2pq$
$$=\mathbf{18+2\sqrt{13}}$$

(2) $\alpha=pq+p+q$ であるから

$$(\alpha-pq)^2=(p+q)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2-2pq\alpha+(pq)^2=p^2+q^2+2pq$$

したがって $\alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=18+2\sqrt{13}$
$$\alpha^2-5=2\sqrt{13}(\alpha+1)$$

この両辺を平方すると

$$(\alpha^2-5)^2=52(\alpha+1)^2 \quad \text{すなわち} \quad \alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$$

よって $\boldsymbol{f(x)=x^4-62x^2-104x-27}$

(3) (1) の式変形に注意すると，$f(x)=0$ は $(x^2-5)^2=52(x+1)^2$

(i) $x^2-5=2\sqrt{13}(x+1)$ のとき

$$x^2-2\sqrt{13}x+13=18+2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x-pq)^2=(p+q)^2$$

したがって $x-pq=\pm(p+q)$ すなわち $x=pq+p+q,\ pq-p-q$

(ii) $x^2-5=-2\sqrt{13}(x+1)$ のとき

$$x^2+2\sqrt{13}x+13=18-2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x+pq)^2=(p-q)^2$$

したがって $x+pq=\pm(p-q)$ すなわち $x=-pq+p-q,-pq-p+q$

(i)，(ii) から，$f(x)=0$ の解は

$$\boldsymbol{\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}},}$$
$$\boldsymbol{\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},}$$
$$\boldsymbol{-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},}$$
$$\boldsymbol{-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}}$$

■

3.2　2016 年

1 曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる．ただし $b>-1$ とする．このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ．

条件：$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-1<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する．

2 n を正の整数とし，k を $1 \leqq k \leqq n+2$ を満たす整数とする．$n+2$ 枚のカードがあり，そのうちの 1 枚には数字 0 が，他の 1 枚には数字 2 が，残りの n 枚には数字 1 が書かれている．この $n+2$ 枚のカードのうちから無作為に k 枚のカードを取り出すとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 1 以上になる確率を求めよ．

(2) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 2 となる確率 $Q_n(k)$ を求めよ．

(3) 与えられた n に対して，確率 $Q_n(k)$ が最大となる k の値と，その最大値を求めよ．

3 正の整数 n に対して，その (1 と自分自身を含めた) すべての正の約数の和を $s(n)$ と書くことにする．このとき，次の問に答えよ．

(1) k を正の整数，p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^k p)$ を求めよ．

(2) $s(2016)$ を求めよ．

(3) 2016 の正の約数 n で，$s(n)=2016$ となるものをすべて求めよ．

解答例

1 直線ATの傾きは $\dfrac{t^2-1}{t+1}=t-1$,　　直線BTの傾きは $\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATBが直角であるから

$$(t-1)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-1)t-b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ が，$-1<t<b$ に解をもつ条件を求めればよい．ここで

$$f(t)=t^2+(b-1)t-b+1=\left(t+\frac{b-1}{2}\right)^2-\frac{(b+3)(b-1)}{4} \quad (-1 \leqq t \leqq b)$$

の最大値を M，最小値を m とすると

$$M=\begin{cases} f(-1) & (-1<b<1) \\ f(b) & (1 \leqq b) \end{cases}, \quad m=\begin{cases} f(b) & (-1<b<\frac{1}{3}) \\ f\left(\frac{1-b}{2}\right) & (\frac{1}{3} \leqq b \leqq 3) \\ f(-1) & (3<b) \end{cases}$$

$$f(-1)=-2b+3, \quad f(b)=2b^2-2b+1, \quad f\left(\frac{1-b}{2}\right)=-\frac{(b+3)(b-1)}{4}$$

方程式 $(*)$ が $-1<t<b$ に解をもつことから

(i) $-1<b<\dfrac{1}{3}$ のとき $\begin{cases} -2b+3>0 \\ 2b^2-2b+1<0 \end{cases}$ 　ゆえに　解なし

(ii) $\dfrac{1}{3} \leqq b<1$ のとき $\begin{cases} -2b+3>0 \\ -\dfrac{(b+3)(b-1)}{4} \leqq 0 \end{cases}$ 　ゆえに　解なし

(iii) $1 \leqq b \leqq 3$ のとき $\begin{cases} 2b^2-2b+1>0 \\ -\dfrac{(b+3)(b-1)}{4} \leqq 0 \end{cases}$ 　ゆえに　$1 \leqq b \leqq 3$

(iv) $3<b$ のとき $\begin{cases} 2b^2-2b+1>0 \\ -2b+3<0 \end{cases}$ 　ゆえに　$3<b$

(i)〜(iv) より　　$\boldsymbol{b \geqq 1}$

別解　直線 AT の傾きは　$\dfrac{t^2-1}{t+1}=t-1$,　　直線 BT の傾きは　$\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-1)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-1)t-b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ は，実数解をもつから

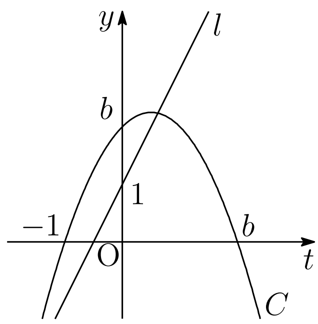
$$(b-1)^2-4\cdot1(-b+1) \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (b+3)(b-1) \geqq 0$$

$b>-1$ に注意すると，$b \geqq 1$ の範囲について調べればよい．

$(*)$ を変形すると　　$2(b-1)t+1=-(t+1)(t-b)$

直線 $l : y=2(b-1)t+1$ と放物線 $C : y=-(t+1)(t-b)$ が $-1<t<b$ で共有点をもつ b の値の範囲を求めればよい．

$b \geqq 1$ のとき，C と l は共有点を持つ．
とくに，$b=1$ のとき，C と l は，$t=0$ で接する．
$b>1$ のとき，C および l が y 軸とそれぞれ b，1 で交わるので，このとき，C と l は常に $-1<t<b$ に共有点をもつ．よって　$\boldsymbol{b \geqq 1}$



2 (1) 0以外の $n+1$ 枚のカードから k 枚取り出す場合の確率であるから

$$\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}{{}_{n+2}\mathrm{C}_k}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\cdot\frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!}=\boldsymbol{\frac{n+2-k}{n+2}}$$

(2) 2のカードを1枚，1のカードを $k-1$ 枚取り出す場合の確率であるから

$$\begin{aligned}Q_n(k)&=\frac{1\cdot{}_n\mathrm{C}_{k-1}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\cdot\frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!}\\&=\boldsymbol{\frac{k(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}}\end{aligned}$$

(3) (2)の結果から　$Q_n(k)=-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(k-\dfrac{n+2}{2}\right)^2+\dfrac{n+2}{4(n+1)}$

(i) n が偶数のとき，$\boldsymbol{k=\dfrac{n+2}{2}}$ で，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{n+2}{4(n+1)}}$

(ii) n が奇数のとき，$\boldsymbol{k=\dfrac{n+1}{2},\ \dfrac{n+3}{2}}$ で，

最大値 $-\dfrac{1}{4(n+1)(n+2)}+\dfrac{n+2}{4(n+1)}=\boldsymbol{\dfrac{n+3}{4(n+2)}}$

別解 (2)の結果から

$$\frac{Q_n(k+1)}{Q_n(k)}-1=\frac{(k+1)(n+1-k)}{k(n+2-k)}-1=\frac{n+1-2k}{k(n+2-k)}$$

(i) n が偶数のとき

$$Q_n(1)<Q_n(2)<\cdots<Q_n(\tfrac{n}{2})<Q_n(\tfrac{n+2}{2})>\cdots>Q_n(n+2)$$

よって　最大値 $Q_n\left(\dfrac{n+2}{2}\right)=\dfrac{n+2}{4(n+1)}$

(ii) n が奇数のとき

$$Q_n(1)<Q_n(2)<\cdots<Q_n(\tfrac{n+1}{2})=Q_n(\tfrac{n+3}{2})>\cdots>Q_n(n+2)$$

よって　最大値 $Q_n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)=Q_n\left(\dfrac{n+3}{2}\right)=\dfrac{n+3}{4(n+2)}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $s(2^k p) = (1+2+\cdots+2^k)(1+p)$

$$= \frac{2^{k+1}-1}{2-1}(1+p) = \boldsymbol{(2^{k+1}-1)(p+1)}$$

(2) $2016 = 2^5{\cdot}3^2{\cdot}7$ より

$$\begin{aligned} s(2016) &= s(2^5)s(3^2)s(7) \\ &= \frac{2^6-1}{2-1}(1+3+3^2)(1+7) \\ &= 63{\cdot}13{\cdot}8 = \mathbf{6552} \end{aligned}$$

(3) n は 2016 の正の約数であるから

$$n = 2^i{\cdot}3^j{\cdot}7^k \quad (0 \leqq i \leqq 5,\ 0 \leqq j \leqq 2,\ 0 \leqq k \leqq 1)$$

とおくと，$s(n) = 2016$ となるとき

$$s(2^i)s(3^j)s(7^k) = 2^5{\cdot}3^2{\cdot}7 \quad \cdots(*)$$

ここで

$s(2^0) = 1$	$s(3^0) = 1$	$s(7^0) = 1$
$s(2^1) = 3$	$s(3^1) = 2^2$	$s(7^1) = 2^3$
$s(2^2) = 7$	$s(3^2) = 13$	
$s(2^3) = 3{\cdot}5$		
$s(2^4) = 31$		
$s(2^5) = 3^2{\cdot}7$		

$(*)$ の $3^2{\cdot}7$ に注目すると　$i = 5$

さらに，2^5 に注目すると　$j = k = 1$

よって　$n = 2^5{\cdot}3^1{\cdot}7^1 = \mathbf{672}$　■

3.3　2017 年

$\boxed{1}$ a を正の定数とする．2 次関数 $f(x) = ax^2$ と 3 次関数 $g(x) = x(x-4)^2$ について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $y = g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け．

(2) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ．

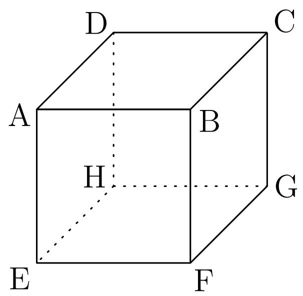
(3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ．またそのとき，2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ．

$\boxed{2}$ 下図のような立方体を考える．この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する．時刻 0 では点 P は頂点 A にいる．時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる．自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ．

(3) 自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ．



3 次の問に答えよ．

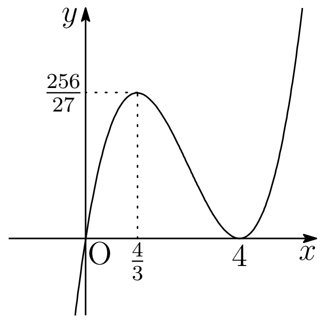
(1) 次の条件 $(*)$ を満たす3つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

$$(*) \quad a < b < c \text{ かつ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \text{ である．}$$

(2) 偶数 $2n$ $(n \geqq 1)$ の3つの正の約数 p，q，r で，$p > q > r$ と $p + q + r = n$ を満たす組 $(p,\ q,\ r)$ の個数を $f(n)$ とする．ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n) = 0$ とする．n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ．また，$f(n) = M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ．

解答例

1　(1)　$g(x) = x(x-4)^2 = x^3 - 8x^2 + 16x$ より



$$g'(x) = 3x^2 - 16x + 16$$
$$= (x-4)(3x-4)$$

$g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって　極大値 $g\left(\dfrac{4}{3}\right) = \mathbf{\dfrac{256}{27}}$，　極小値 $g(4) = \mathbf{0}$

(2)　$y = f(x)$ と $y = g(x)$ から y を消去すると

$$ax^2 = x(x-4)^2 \quad ゆえに \quad x\{x^2 - (a+8)x + 16\} = 0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $x^2 - (a+8)x + 16 = 0$ の係数について，$a > 0$ であるから

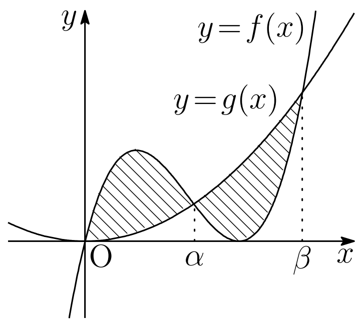
$$D = (a+8)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}16 = a(a+16) > 0$$

方程式 $x^2 - (a+8)x + 16 = 0$ は 0 でない異なる 2 つの実数解をもつので，
方程式 $(*)$ は異なる 3 つの解をもつ．
よって　$y = f(x)$，$y = g(x)$ は相異なる 3 点で交わる

(3)　(2) の結果から，方程式 $(*)$ の 3 つの解を 0，α，β とすると $(\alpha < \beta)$

$$\alpha + \beta = a + 8 > 0, \quad \alpha\beta = 16 \quad \cdots(**) \quad ゆえに \quad 0 < \alpha < \beta$$

条件より



$$\int_0^\alpha \{g(x) - f(x)\}\,dx = \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^\beta \{g(x) - f(x)\}\,dx = 0$

ここで　$g(x) - f(x) = x\{x^2 - (a+8)x + 16\}$
$= x(x-\alpha)(x-\beta)$
$= -x^2(\beta - x) + \alpha x(\beta - x)$

$$\text{したがって}\quad -\int_0^\beta x^2(\beta - x)\,dx + \alpha\int_0^\beta x(\beta - x)\,dx = 0$$
$$-\frac{1}{12}\beta^4 + \alpha\cdot\frac{1}{6}\beta^3 = 0$$
$$\beta = 2\alpha$$

これを $(**)$ に代入すると

$$\alpha + 2\alpha = a + 8,\quad \alpha\cdot 2\alpha = 16$$

$\alpha > 0$ に注意して　$\alpha = 2\sqrt{2}$，$\beta = 4\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a = 6\sqrt{2} - 8}$

2 つの曲線の交点の x 座標は　　$\mathbf{0}$，$\mathbf{2\sqrt{2}}$，$\mathbf{4\sqrt{2}}$

補足 次の公式[2]を利用するとよい．

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

■

$\boxed{2}$ (1) 与えられた規則により，次の確率漸化式が成立する．

$$p_1 = 1,\ q_1 = 0,\ r_1 = 0$$
$$(*)\left\{\begin{array}{l} p_{n+1} = \dfrac{2}{3}q_n \\ q_{n+1} = \dfrac{2}{3}p_n + r_n \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{3}q_n \end{array}\right. \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$(*)$ に $n = 1$ を代入すると

$$p_2 = \frac{2}{3}q_1 = \mathbf{0},\quad q_2 = \frac{2}{3}p_1 + r_1 = \mathbf{\frac{2}{3}},\quad r_2 = \frac{1}{3}q_1 = \mathbf{0}$$

$(*)$ に $n = 2$ を代入すると，上の結果により

$$p_3 = \frac{2}{3}q_2 = \mathbf{\frac{4}{9}},\quad q_3 = \frac{2}{3}p_2 + r_2 = \mathbf{0},\quad r_3 = \frac{1}{3}q_2 = \mathbf{\frac{2}{9}}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

(2) $(*)$ の第 2 式から $\quad q_{n+2} = \dfrac{2}{3}p_{n+1} + r_{n+1}$

これに $(*)$ の第 1 式，第 3 式を代入すると

$$q_{n+2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_n + \frac{1}{3}q_n \quad \text{すなわち} \quad q_{n+2} = \frac{7}{9}q_n$$

(i) n が奇数のとき $(n \geqq 1)$ $\quad q_n = q_1\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 0$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = 0, \quad r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n = 0$$

(ii) n が偶数のとき $(n \geqq 2)$ $\quad q_n = q_2\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$
$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

(i)，(ii) の結果から

$\boldsymbol{n}$ **が偶数のとき** $\quad \boldsymbol{p_n = 0,\ q_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}},\ r_n = 0}$

$\boldsymbol{n}$ **が奇数のとき** $\quad \boldsymbol{p_n = \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}},\ q_n = 0,\ r_n = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n \neq 1)}$

(3) $s_m = \dfrac{1}{3}p_{2m-1}$ であるから

$$s_1 = \frac{1}{3}p_1 = \boldsymbol{\frac{1}{3}},$$
$$s_m = \frac{1}{3}p_{2m-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{(2m-1)-3}{2}} = \boldsymbol{\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}} \quad \boldsymbol{(m \geqq 2)}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $0 < a < b < c$ より，$\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$ であるから

$\dfrac{3}{c} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < \dfrac{3}{a}$ ゆえに $\dfrac{3}{c} < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{a}$ すなわち $a < 6 < c$

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} > 0$ より $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{2}$ ゆえに $a > 2$

a は自然数であるから $a = 3,\ 4,\ 5$

(i) $a = 3$ のとき $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{6}$

ゆえに $(b-6)(c-6) = 36$

$b < c$，$c > 6$ に注意して

$$(b-6,\ c-6) = (1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9)$$

すなわち $(b,\ c) = (7,\ 42),\ (8,\ 24),\ (9,\ 18),\ (10,\ 15)$

(ii) $a = 4$ のとき $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{4}$

ゆえに $(b-4)(c-4) = 16$

$b < c$，$c > 6$ に注意して

$$(b-4,\ c-4) = (1,\ 16),\ (2,\ 8)$$

すなわち $(b,\ c) = (5,\ 20),\ (6,\ 12)$

(iii) $a = 5$ のとき $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{3}{10}$

ゆえに $(3b-10)(3c-10) = 100$

$a < b < c$ より，$b \geqq 6$，$c \geqq 7$ であるから，$3b - 10 \geqq 8$，$3c - 10 \geqq 11$

このとき，自然数 $(b,\ c)$ の組は存在しない．

(i)〜(iii) から

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (3,\ 7,\ 42),\ (3,\ 8,\ 24),\ (3,\ 9,\ 18),\ (3,\ 10,\ 15),}$$
$$\boldsymbol{(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12)}$$

(2) $p,\ q,\ r\ (p>q>r)$ は偶数 $2n\ (n \geqq 1)$ の正の約数であるから

$$\frac{2n}{p}=a,\quad \frac{2n}{q}=b,\quad \frac{2n}{r}=c$$

をみたす自然数 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$ が存在する．上式より

$$p=\frac{2n}{a},\quad q=\frac{2n}{b},\quad r=\frac{2n}{c}\quad \cdots(*)$$

$p+q+r=n$ より

$$\frac{2n}{a}+\frac{2n}{b}+\frac{2n}{c}=n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$

上式を満たす自然数 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$ の組は (1) の結果である．
これらの自然数の組を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}(p,\ q,\ r)=&\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{7},\ \frac{2n}{42}\right),\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{8},\ \frac{2n}{24}\right),\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{9},\ \frac{2n}{18}\right),\\&\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{10},\ \frac{2n}{15}\right),\left(\frac{2n}{4},\ \frac{2n}{5},\ \frac{2n}{20}\right),\left(\frac{2n}{4},\ \frac{2n}{6},\ \frac{2n}{12}\right)\end{aligned}$$

p，q，r が自然数となるのは，n がそれぞれ 21，12，9，15，10，6 の倍数のときである．とくに

$$21=3\cdot 7,\quad 12=2^2\cdot 3,\quad 9=3^2,\quad 15=3\cdot 5,\quad 10=2\cdot 5,\quad 6=2\cdot 3$$

の最小公倍数が $2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=1260$ であるから，n が 1260 の倍数のとき，$f(n)$ は最大値 6 をとる．よって　$\boldsymbol{M=6}$，最小の n は **1260** ■

3.4　2018 年

1 a，b を実数とし，少なくとも一方は 0 でないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 連立不等式

$$3x + 2y + 4 \geqq 0, \quad x - 2y + 4 \geqq 0, \quad ax + by \geqq 0$$

の表す領域，または連立不等式

$$3x + 2y + 4 \geqq 0, \quad x - 2y + 4 \geqq 0, \quad ax + by \leqq 0$$

の表す領域が三角形であるために a，b がみたすべき条件を求めよ．さらに，その条件をみたす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

(2) (1) の三角形の面積を S とするとき，S を a，b を用いて表せ．

(3) $S \geqq 4$ を示せ．

2 次の問に答えよ．

(1) 整数 α，β の少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ は奇数であることを示せ．

(2) n を奇数とする．このとき $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2n$ をみたす整数 α，β は存在しないことを示せ．

(3) c を実数とする．このとき 3 次方程式 $x^3 - 2018x + c = 0$ の解のうち整数であるものは 1 個以下であることを示せ．

3 図1のように2つの正方形ABCDとCDEFを並べた図形を考える．2点P，Qが6個の頂点A，B，C，D，E，Fを以下の規則(a)，(b)に従って移動する．

(a) 時刻0では図2のように点Pは頂点Aに，点Qは頂点Cにいる．

(b) 点P，Qは時刻が1増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．

時刻 n まで2点P，Qが同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す．また時刻 n まで2点P，Qが同時に同じに頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に2点P，Qがともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 時刻1での点P，Qの可能な配置を，図2にならってすべて図示せよ．

(2) a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ．

(3) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ．

(4) $p_n \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を示せ．

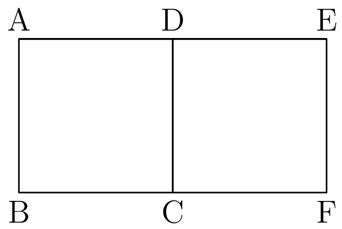


図1

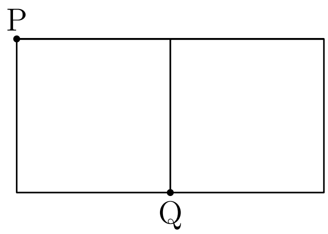
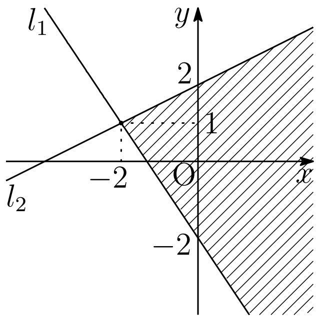


図2

解答例

$\boxed{1}$ (1) 連立不等式

$$3x+2y+4 \geqq 0, \quad x-2y+4 \geqq 0$$



の表す領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．
2 直線

$$l_1 : 3x+2y+4=0, \quad l_2 : x-2y+4=0$$

の傾きはそれぞれ $-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}$ である．

$b \neq 0$ のとき，直線 $l : ax+by=0$ の傾きを m とすると，l によって領域が三角形となるのは

$$(*) \quad m < -\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} < m \quad \text{すなわち} \quad -\frac{a}{b} < -\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} < -\frac{a}{b}$$

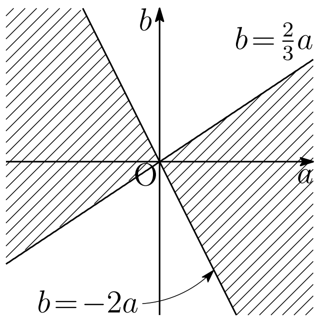
ゆえに　$\dfrac{a}{b} < -\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2} < \dfrac{a}{b}$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{3}{2}\right) > 0$$

上式より $a \neq 0$ であることに注意して

$$\left(\frac{b}{a}+2\right)\left(\frac{b}{a}-\frac{2}{3}\right) < 0 \quad \cdots①$$

したがって　$-2 < \dfrac{b}{a} < \dfrac{2}{3}$

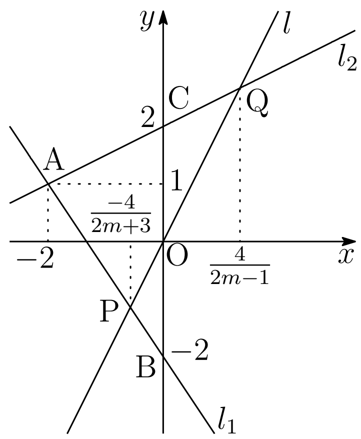


$b=0$ のとき，条件より $a \neq 0$ であるから，l は直線 $x=0$ となる．このときも，l により領域は三角形となる．よって，点 $(a,\ b)$ の満たす不等式は

$$-2 < \frac{b}{a} < \frac{3}{2}$$

その領域は，右の図の斜線部分で境界を含まない．

(2) $(*)$ を満たすとき，$l : y = mx$ と



$$l_1 : 3x + 2y + 4 = 0,\quad l_2 : x - 2y + 4 = 0$$

との交点をそれぞれ P，Q とすると，2 点 P，Q の x 座標は，それぞれ

$$-\frac{4}{2m+3},\quad \frac{4}{2m-1}$$

また，l_1 と l_2 の交点 A の x 座標は -2 であり，l_1，l_2 の y 軸との交点をそれぞれ B$(0, -2)$，C$(0,\ 2)$ とすると

$$\triangle\mathrm{ABC} = 4,\quad \triangle\mathrm{OBP} = \frac{4}{|2m+3|},\quad \triangle\mathrm{OCQ} = \frac{4}{|2m-1|}$$

(i) $\dfrac{1}{2} < m$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{APQ} = \triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{OCQ} - \triangle\mathrm{OBP} \\ &= 4 + \frac{4}{|2m-1|} - \frac{4}{|2m+3|} = 4 + \frac{4}{2m-1} - \frac{4}{2m+3} \end{aligned}$$

(ii) $m < -\dfrac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{APQ} = \triangle\mathrm{ABC} - \triangle\mathrm{OCQ} + \triangle\mathrm{OBP} \\ &= 4 - \frac{4}{|2m-1|} + \frac{4}{|2m+3|} = 4 + \frac{4}{2m-1} - \frac{4}{2m+3} \end{aligned}$$

(i)，(ii) から，$(*)$ を満たすとき

$$\begin{aligned} S &= 4 + \frac{16}{(2m-1)(2m+3)} = 4 + \frac{16}{\left(-\frac{2a}{b} - 1\right)\left(-\frac{2a}{b} + 3\right)} \\ &= 4 + \frac{16b^2}{(2a+b)(2a-3b)} \end{aligned}$$

$b = 0$ のとき，$l : ax + by = 0$ は，直線 $x = 0$ であるから，$S = \triangle\mathrm{ABC} = 4$ より，上式を満たす．よって

$$\boldsymbol{S = 4 + \frac{16b^2}{(2a+b)(2a-3b)}}$$

(3) ① より，$(2a+b)(2a-3b) > 0$ であるから，(2) の結果より　$S \geqq 4$　■

2 (1) α，β の一方が奇数で他方が偶数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ の偶奇は

$$(\text{奇数})^2+(\text{奇数})(\text{偶数})+(\text{偶数})^2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{奇数}$$

α，β がともに奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ の偶奇は

$$(\text{奇数})^2+(\text{奇数})(\text{奇数})+(\text{奇数})^2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{奇数}$$

よって，α，β の少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ は奇数．

(2) $2n$ は偶数であるから

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n \quad \cdots(*)$$

を満たすとき，(1) の結果から，α，β はともに偶数で

$$\alpha=2k, \quad \beta=2l$$

とおくと (k, l は整数)

$$(2k)^2+2k\cdot 2l+(2l)^2=2n \qquad 2(k^2+kl+l^2)=n$$

上の第 2 式の左辺は偶数であるから，n が奇数であることに反する．
よって，$(*)$ を満たす α，β は存在しない．

(3) 3 次方程式

$$x^3-2018x+c=0 \quad \cdots(**)$$

の解を α, β, γ すると (c は実数)，解と係数の関係により

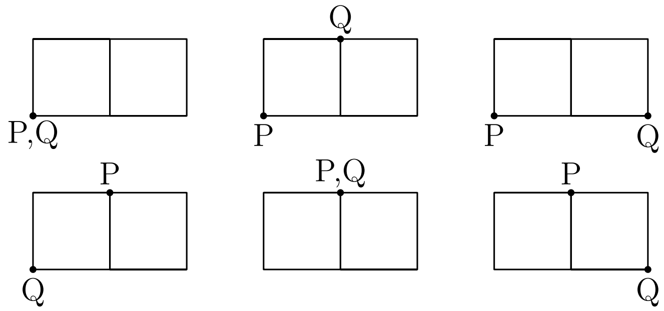
$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2018$$

α, β が整数であると仮定し，上の 2 式から γ を消去すると

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2\cdot 1009$$

(2) の結果から，上式を満たす整数 α, β は存在しないので，仮定に反する．
よって，3 次方程式 $(*)$ の整数解の個数は 1 個以下である．■

3 (1) 時刻 1 で動点 P，Q の可能な配置は，次の 6 通り



(2) (1) の 6 通りの配置は同様に確からしい．

a_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある，すなわち，

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q})=(\mathrm{B},\mathrm{D}),\ (\mathrm{D},\mathrm{B}),\ (\mathrm{D},\mathrm{F})$$

にある確率であるから　$a_1=\dfrac{3}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

b_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上にない，すなわち，$(\mathrm{P},\mathrm{Q})=(\mathrm{B},\mathrm{F})$ にある確率であるから　$b_1=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

動点 P，Q が頂点 B，D，F 上にあるのは偶数時刻で，頂点 A，C，E 上にあるのは奇数時刻である．動点 P，Q が時刻 n まで同じ頂点にないという条件を満たしながら時刻 n において，動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある確率 a_n，動点 P，Q が A と E または B と F にある確率 b_n について次の確率漸化式が成立する．

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n,\quad b_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{4}b_n\qquad\cdots(*)$$

したがって　$a_2=\dfrac{1}{2}a_1+\dfrac{1}{2}b_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$$b_2=\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{4}b_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

(3) $(*)$ より　$\boldsymbol{a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n,\quad b_{n+1}=\dfrac{1}{6}a_n+\dfrac{1}{4}b_n}$

(4) $a_0=1$，$b_0=0$，$(*)$ より，$a_n\geqq 0$，$b_n\geqq 0$ であるから

$$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{3}{4}b_n\leqq\frac{3}{4}(a_n+b_n)$$

ゆえに　$p_0=1$，$p_{n+1}\leqq\dfrac{3}{4}p_n$　よって　$p_n\leqq\left(\dfrac{3}{4}\right)^n p_0=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ ■

3.5　2019 年

1 a を実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax-a$ と $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を考える．関数 $y=F(x)-f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ．

2 非負の整数 n に対して P_n を xy 平面上の点とする．P_0 の座標を $(1,\ 0)$ とし，P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ と P_{n+1} の座標 $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ は

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - k(y_n + y_{n+1})\\
y_{n+1} &= y_n + k(x_n + x_{n+1})
\end{aligned}
$$

をみたすとする．ただし k を正の実数とする．

(1) $k=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ とする．ただし $0<\alpha<\pi$ とする．このとき P_1，P_2 の座標 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を α を用いて表せ．

(2) P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ を (1) の α と n を用いて表せ．

(3) O を xy 平面の原点とするとき，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ の面積を k を用いて表せ．

3 1 つのサイコロを 3 回投げる．1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする．なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

(1) 2 次方程式 $x^2-bx+c=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ．

(2) 2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$ のすべての解が整数である確率を求めよ．

(3) 2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x (t^2+at-a)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-at\right]_0^x=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-ax$

$g(x)=F(x)-f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-ax-(x^2+ax-a)\\&=\frac{1}{3}x^3+\frac{a-2}{2}x^2-2ax+a,\\g'(x)&=x^2+(a-2)x-2a=(x+a)(x-2)\end{aligned}$$

したがって，3 次関数 $y=g(x)$ の極値は

$$\begin{aligned}g(-a)&=\frac{1}{3}(-a)^3+\frac{a-2}{2}\cdot(-a)^2-2a\cdot(-a)+a=\frac{1}{6}a(a^2+6a+6),\\g(2)&=\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{a-2}{2}\cdot 2^2-2a\cdot 2+a=-a-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

$y=g(x)$ のグラフが，x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件は，

$$g(-a)g(2)<0$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}a(a^2+6a+6)\left(-a-\frac{4}{3}\right)&<0\\a\left(a+\frac{4}{3}\right)(a^2+6a+6)&>0\\a\left(a+\frac{4}{3}\right)(a+3+\sqrt{3})(a+3-\sqrt{3})&>0\end{aligned}$$

よって，$-3-\sqrt{3}<-\dfrac{4}{3}<-3+\sqrt{3}<0$ に注意して

$$\boldsymbol{a<-3-\sqrt{3},\quad -\frac{4}{3}<a<-3+\sqrt{3},\quad 0<a}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた漸化式から

$$x_{n+1}+ky_{n+1}=x_n-ky_n,\quad -kx_{n+1}+y_{n+1}=kx_n+y_n$$

ゆえに
$$x_{n+1}=\frac{1-k^2}{1+k^2}x_n-\frac{2k}{1+k^2}y_n,$$
$$y_{n+1}=\frac{2k}{1+k^2}x_n+\frac{1-k^2}{1+k^2}y_n$$

$k=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ より $\dfrac{1-k^2}{1+k^2}=\cos\alpha,\ \dfrac{2k}{1+k^2}=\sin\alpha$

したがって
$$(*)\begin{cases} x_{n+1}=x_n\cos\alpha-y_n\sin\alpha \\ y_{n+1}=x_n\sin\alpha+y_n\cos\alpha \end{cases}$$

$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$ であるから，$(*)$ より

$$\begin{aligned}(x_1,\ y_1)&=\boldsymbol{(\cos\alpha,\ \sin\alpha)},\\ (x_2,\ y_2)&=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\ 2\sin\alpha\cos\alpha)\\ &=\boldsymbol{(\cos2\alpha,\ \sin2\alpha)}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から
$$\begin{cases} x_n=\cos n\alpha, \\ y_n=\sin n\alpha \end{cases}\quad\cdots(\mathrm{A})$$
であると推測し，これを数学的帰納法により示す．

［1］ $n=0$ のとき，(A) は成立する．

［2］ $n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，$(*)$ より

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=\cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha=\cos(k+1)\alpha\\ y_{k+1}&=\cos k\alpha\sin\alpha+\sin k\alpha\cos\alpha=\sin(k+1)\alpha\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］，［2］より，すべての非負の整数 n について，(A) は成立する．

よって　$\boldsymbol{x_n=\cos n\alpha,\ \ y_n=\sin n\alpha}$

(3) (2) の結果から，$\mathrm{OP}_n=\mathrm{OP}_{n+1}=1,\ \angle\mathrm{P_nOP_{n+1}}=\alpha$

よって　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2k}{1+k^2}=\boldsymbol{\dfrac{k}{1+k^2}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2次方程式 $x^2-bx+c=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha \leqq \beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=b, \quad \alpha\beta=c$$

上の第1式から，解の一方が整数であるとき，他の解も整数である．$b,\ c$ は1から6までの整数であるから，条件を満たすのは次の7通り．

$c=1$ のとき　$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 1)$　ゆえに　$b=2$
$c=2$ のとき　$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2)$　ゆえに　$b=3$
$c=3$ のとき　$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 3)$　ゆえに　$b=4$
$c=4$ のとき　$(\alpha,\ \beta)=(2,\ 2),\ (1,\ 4)$　ゆえに　$b=4,\ 5$
$c=5$ のとき　$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 5)$　ゆえに　$b=6$
$c=6$ のとき　$(\alpha,\ \beta)=(2,\ 3)$　ゆえに　$b=5$

よって，求める確率は　$\dfrac{7}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{7}{36}}$

(2) 2次方程式 $ax^2-bx+c=0$，すなわち，2次方程式

$$x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \cdots (*)$$

のすべての解が整数であるから，解と係数の関係により，$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{c}{a}$ は整数で，これらは1以上6以下の整数であるから，2次方程式 $(*)$ は，(1) で示した2次方程式

$$x^2-2x+1=0, \quad x^2-3x+2=0, \quad x^2-4x+3=0,$$
$$x^2-4x+4=0, \quad x^2-5x+4=0, \quad x^2-6x+5=0,$$
$$x^2-5x+6=0$$

と一致する．すなわち，2次方程式 $ax^2-bx+c=0$ は，これらと同型 (monic) であるから，上の第1式を2, 3倍および第2式を2倍した次の3つの2次方程式も含む．

$$2x^2-4x+2=0, \quad 3x^2-6x+3=0, \quad 2x^2-6x+4=0$$

よって，求める確率は　$\dfrac{7+3}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{108}}$

(3) 2 次方程式

$$ax^2 - bx + c = 0 \quad \cdots (**)$$

が少なくとも 1 つ整数解をもつとき，$a = 1$ の場合については (1) で調べているので，$a \geqq 2$ の場合について調べる．2 次方程式 $(**)$ の解を $p,\ q$ とすると，解と係数の関係により

$$p + q = \frac{b}{a}, \quad pq = \frac{c}{a}$$

このとき，$0 < \dfrac{b}{a} \leqq 3$，$0 < \dfrac{c}{a} \leqq 3$ であるから，整数解は　1　または　2

(i) 方程式 $(**)$ が 1 を解にもつとき　$a + c = b \quad \cdots$①
これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の 10 組．

a	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
b	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
c	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1

(ii) 方程式 $(**)$ が 2 を解にもつとき　$c = 2(b - 2a) \quad \cdots$②
これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の 2 組．

$$(a,\ b,\ c) = (2,\ 5,\ 2),\ (2,\ 6,\ 4)$$

(iii) 方程式 $(**)$ が 1 と 2 を解にもつ，すなわち，①，② を同時に満たす $(a,\ b,\ c)$ は次の 1 組である．

$$(a,\ b,\ c) = (2,\ 6,\ 4)$$

よって，求める確率は (1) および (i)〜(iii) により

$$\frac{7 + 10 + 2 - 1}{6^3} = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

補足 整数を係数とする 2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が有理数を解に持つための必要十分条件は

$$b^2-4ac \text{ が平方数}$$

$b=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について，これを満たす ac の値を求める．

(i) $b=2$ のとき，$ac=1$ であるから，次の 1 組．

$$x^2-2x+1=0$$

(ii) $b=3$ のとき，$ac=2$ であるから，次の 2 組．

$$x^2-3x+2=0, \qquad 2x^2-3x+1=0$$

(iii) $b=4$ のとき，$ac=3,\ 4$ であるから，次の 5 組．

$$x^2-4x+3=0, \quad 3x^2-4x+1=0, \quad x^2-4x+4=0,$$
$$2x^2-4x+2=0, \quad \underline{4x^2-4x+1=0}$$

(iv) $b=5$ のとき，$ac=4,\ 6$ であるから，次の 7 組．

$$x^2-5x+4=0, \quad 2x^2-5x+2=0, \quad 4x^2-5x+1=0,$$
$$x^2-5x+6=0, \quad 2x^2-5x+3=0, \quad 3x^2-5x+2=0,$$
$$\underline{6x^2-5x+1=0}$$

(v) $b=6$ のとき，$ac=5,\ 8,\ 9$ であるから，次の 5 組．

$$x^2-6x+5=0, \quad 5x^2-6x+1=0, \quad 2x^2-6x+4=0,$$
$$4x^2-6x+2=0, \quad 3x^2-6x+3=0$$

2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が有理数を解にもつのは，(i)〜(v) の 20 組あり，そのうち，整数解を持たないのは，次の 2 組である．

$$4x^2-4x+1=0, \qquad 6x^2-5x+1=0$$

したがって，少なくとも 1 つ整数解を持つのは　$20-2=18$ (組)
実際，設問 (1) についても，$a=1$ であるものを数えるとよい．また，設問 (2) については，上に示した 20 個の方程式のうち，ともに整数解であるものを確認すればよい． ■

第 4 章　京都大学

出題分野 (2010-2019) 120 分

◀	京都大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2 次関数				1						2
	図形と計量			2			2				
	データの分析										
II	式と証明						5				1·5
	複素数と方程式					1		5			
	図形と方程式	2									3
	三角関数			5					4		
	指数関数と対数関数		5			4			2		1
	微分法と積分法	1	3·4	1·3	4	2	1	1	1	1·2	
A	場合の数と確率	3	1		5		3	2	5	5	4
	整数の性質				3			3		3	
	図形の性質	4		4						4	
B	平面上のベクトル				2						
	空間のベクトル	5	2			3	4	4	3		
	数列										
	確率分布と統計					5					

数字は問題番号

4.1　2015 年

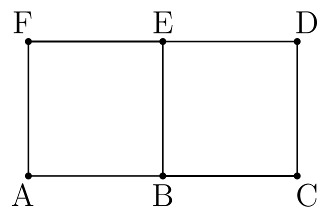
$\boxed{1}$ 直線 $y = px + q$ が，$y = x^2 - x$ のグラフとは交わるが，$y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフとは交わらないような $(p,\ q)$ の範囲を図示し，その面積を求めよ．

$\boxed{2}$ 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものを求めよ．

(a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である．

(b) 半径 1 の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう．

$\boxed{3}$ 6 個の点 A，B，C，D，E，F が右図のように長さ 1 の線分で結ばれているとする．各線分をそれぞれ独立に確率 $\dfrac{1}{2}$ で赤または黒で塗る．赤く塗られた線分だけを通って点 A から点 E に至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする．そのような経路がない場合は X を 0 とする．このとき，$n = 0, 2, 4$ について，$X = n$ となる確率を求めよ．



$\boxed{4}$ xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える．点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 P$(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 ℓ と平面 $z = 0$ との交点を R とおく．R の動く範囲を求め，図示せよ．

$\boxed{5}$ a，b，c，d，e を正の有理数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$g(x) = dx + e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ $y=px+q$ と $y=x^2-x$ から y を消去すると

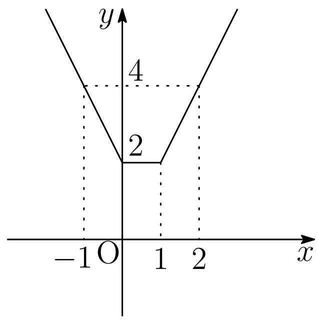
$$px+q=x^2-x \quad \text{ゆえに} \quad x^2-(p+1)x-q=0$$

判別式を D とすると，このとき，$D \geqq 0$ であるから

$$(p+1)^2+4q \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2$$

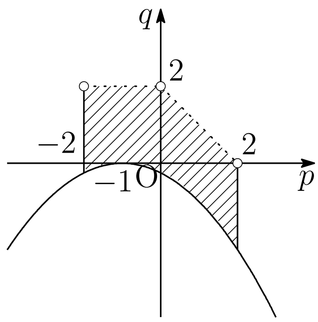
$y=|x|+|x-1|+1$ は

$$y=\begin{cases} -2x+2 & (x<0) \\ \quad 2 & (0 \leqq x<1) \\ \quad 2x & (1 \leqq x) \end{cases}$$



$f(x)=px+q$ とおくと，直線 $y=f(x)$ が上のグラフと共有点を持たないとき，傾き p に注意して

$$-2 \leqq p \leqq 2$$



上のグラフから，$f(0)<2$，$f(1)<2$ であるから

$$q<2, \quad p+q<2$$

したがって，$(p,\ q)$ の満たす領域は

$$-2 \leqq p \leqq 2,\ q<2,\ q<-p+2,\ q \geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2$$

右の図の斜線分で，点線および $\circ$ は除く．

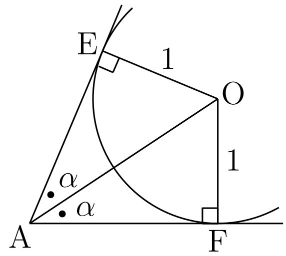
よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2+4)\cdot 2+\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}(p+1)^2\,dp \\ &= 6+\Big[\ \frac{1}{12}(p+1)^3\ \Big]_{-2}^{2}=6+\frac{1}{12}(3^3+1)=\mathbf{\frac{25}{3}} \end{aligned}$$

■

2 右の図の四角形 OEAF について

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AF} = \frac{1}{\tan\alpha}$$



四角形 OEAF の面積は $\dfrac{1}{\tan\alpha}$

条件 (a)，(b) を満たす四角形の 4 つの角の大きさを 2α，2β，2γ，2δ とし，その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma} + \frac{1}{\tan\delta} \quad \cdots (*)$$

一般性を失うことなく　$2\gamma = 2\delta = 90^\circ$，$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$

上の 2 式から　$\beta = 90^\circ - \alpha$，$\gamma = \delta = 45^\circ$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} + \frac{1}{\tan 45^\circ} + \frac{1}{\tan 45^\circ} \\ &= \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} + 2 = \frac{(\tan\alpha - 1)^2}{\tan\alpha} + 4 \geqq 4 \end{aligned}$$

よって，S は $\alpha = 45^\circ$，すなわち，四角形 ABCD が正方形のとき，最小値　**4**

■

3 $X = 2$ となるのは，A → B → E または A → F → E の経路があるときで，それぞれの事象を R，S とすると

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \boldsymbol{\frac{7}{16}} \end{aligned}$$

A → B → C → D → E，B → E の経路がある事象をそれぞれ Y，Z とすると

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= P(Y \cap \overline{Z} \cap \overline{S}) = P(Y)P(\overline{Z})P(\overline{S}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \boldsymbol{\frac{3}{128}} \end{aligned}$$

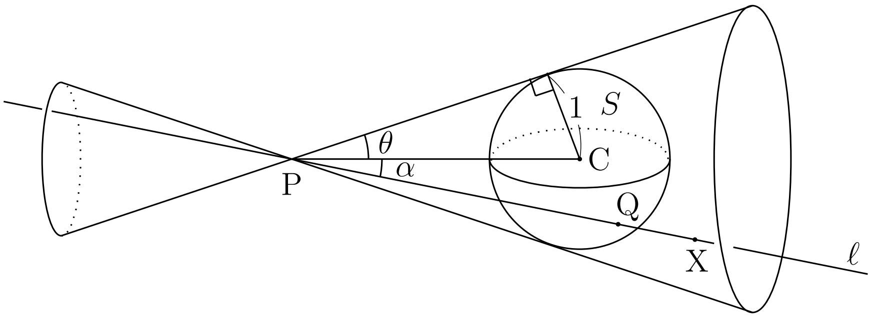
$P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) = 1$ であるから

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 1 - P(X = 2) - P(X = 4) \\ &= 1 - \frac{7}{16} - \frac{3}{128} = \boldsymbol{\frac{69}{128}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ 球面 S の中心 $(0,\ 0,\ 1)$ を C とし，S に接する P を頂点とする円錐面の母線と PC のなす角を θ とする．直線 ℓ 上の点を $\mathrm{X}(x,\ y,\ z)$ とし，PC と PX のなす角を α とすると

$$0 \leqq \alpha \leqq \theta,\quad \pi-\theta \leqq \alpha \leqq \pi \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\alpha \geqq \cos^2\theta$$



$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ より　$\mathrm{PC}=\sqrt{2}$　ゆえに　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(-1,\ 0, -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=(x-1,\ y,\ z-2)$，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PX}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PX}}|}=\cos\alpha$ より

$$\frac{3-x-z}{\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2}}=\cos\alpha$$

したがって　$$\frac{(3-x-z)^2}{2\{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2\}}=\cos^2\alpha \geqq \cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

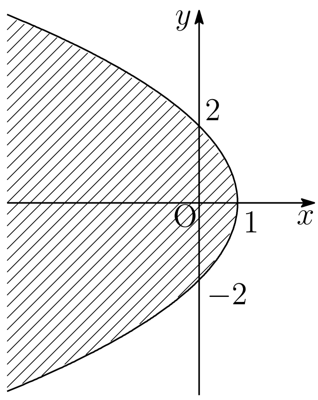
ゆえに　$$(3-x-z)^2-\{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2\} \geqq 0$$

この図形の xy 平面 $(z=0)$ 上の領域は

$$(3-x)^2-\{(x-1)^2+y^2+(-2)^2\} \geqq 0$$

よって　$$\boldsymbol{x \leqq -\frac{1}{4}y^2+1}$$

R の動く範囲は，右の図の斜線部分で，境界を含む．



別解　$\mathrm{R}(X,\ Y,\ 0)$ とおくと，Q は直線 PR 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OR}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= t(X,\ Y,\ 0) + (1-t)(1,\ 0,\ 2)\\ &= (tx+1-t,\ tY,\ 2-2t)\end{aligned}$$

また，Q は球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 上の点であるから

$$\{t(X-1)+1\}^2+(tY)^2+(1-2t)^2=1$$
$$\{(X-1)^2+Y^2+4\}t^2+2(X-3)t+1=0$$

$t \neq 0$，$(X-1)^2+Y^2+4 \neq 0$ に注意して，上式の t に関する係数について

$$(X-3)^2-\{(X-1)^2+Y^2+4\}\cdot 1 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad X \leqq -\frac{1}{4}Y^2+1$$

よって，R の動く範囲は　　$x \leqq -\dfrac{1}{4}y^2+1$　■

5　$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を $px+q$，余りを $r \neq 0$ (p，q，r は有理数) とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = px+q+\frac{r}{g(x)},\quad p=\frac{a}{d}>0$$

したがって　　$\dfrac{f(n)}{g(n)} = pn+q+\dfrac{r}{g(n)}$

$p=\dfrac{A}{B}$，$q=\dfrac{C}{D}$ とおくと ($A,\ B,\ C,\ D$ は整数)

$$\left|BD\cdot\frac{f(n)}{g(n)}-ADn-BC\right| = \left|\frac{rBD}{g(n)}\right| \quad \cdots (*)$$

$d>0$ より，$g(n)=dn+e$ は十分大きな n に対し，

$$0<\left|\frac{rBD}{g(n)}\right|<1$$

となり，$(*)$ の左辺が整数であることに反する．

よって，$r=0$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる．　■

4.2　2016年

1 xy 平面内の領域

$$x^2 + y^2 \leqq 2, \quad |x| \leqq 1$$

で，曲線 $C : y = x^3 + x^2 - x$ の上側にある部分の面積を求めよ．

2 ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある．「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする．この装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は 36%である．1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには，このボタンを最低何回押せばよいか．必要なら $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を用いてよい．

3 n を 4 以上の自然数とする．数 2，12，1331 がすべて n 進法で表記されているとして，

$$2^{12} = 1331$$

が成り立っている．このとき n はいくつか．十進法で答えよ．

4 四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ．

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は
対面の重心を通る．

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう．

5 実数を係数とする 3 次式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に対し，次の条件を考える．

(イ) 方程式 $f(x) = 0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x) = 0$ の解である．

(ロ) 方程式 $f(x) = 0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ．

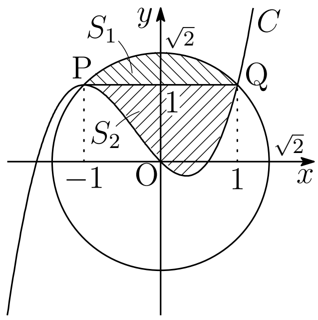
この 2 つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $y = x^3 + x^2 - x$ を微分すると $(-1 \leqq x \leqq 1)$

$$y' = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	1



曲線 C と円 $x^2 + y^2 = 2$ の交点を $\mathrm{P}(-1,\ 1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1)$ とし，直線 PQ の上側で円の内部の面積を S_1，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，直線 PQ と C で囲まれた部分の面積を S_2 とする．$\angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \triangle\mathrm{POQ} = \frac{\pi}{2} - 1, \\ S_2 &= \int_{-1}^{1} \{1 - (x^3 + x^2 - x)\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x+1)^2(1-x)\,dx = \frac{1}{12}\{1-(-1)\}^4 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

求める面積を S とすると　　$S = S_1 + S_2 = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}}$

補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[1]． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

$\boxed{2}$ 「はずれ」が表示される確率を p とすると，ボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」が出る確率が 36% であるから

$$1-p^{20}=\frac{36}{100}\quad\text{ゆえに}\quad p^{10}=\frac{8}{10}\qquad\cdots①$$

ボタンを n 回押したとき,「あたり」の出る確率が 90% 以上となるとき

$$1-p^{n}\geqq\frac{90}{100}\quad\text{ゆえに}\quad p^{n}\leqq\frac{1}{10}\qquad\cdots②$$

①，② から p を消去すると

$$\left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{n}{10}}\leqq\frac{1}{10}\quad\text{ゆえに}\quad n\geqq\frac{10}{1-3\log 2}\qquad\cdots③$$

$0.3010<\log_{10}2<0.3010$ であるから　$\dfrac{967}{10000}<1-3\log 2<\dfrac{97}{1000}$

したがって　$\dfrac{10000}{97}<\dfrac{10}{1-3\log 2}<\dfrac{100000}{967}$

ここで　$\dfrac{10000}{97}=103+\dfrac{9}{97}$，$\dfrac{100000}{967}=103+\dfrac{399}{967}$

よって，③ を満たす最小の自然数 n は　**104**　■

$\boxed{3}$ $n\geqq 4$ より，n 進法で標記された数 2^{12} と 1331 が等しいから

$$2^{n+2}=n^3+3n^2+3n+1\quad\text{ゆえに}\quad 2^{\frac{n+2}{3}}=n+1\qquad\cdots(*)$$

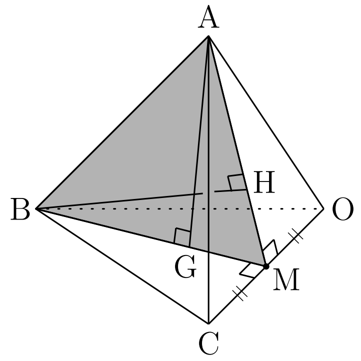
ここで，指数関数 $y=2^{\frac{x+2}{3}}$ のグラフと直線 $y=x+1$ の交点は高々2 個．

このとき，$x+2\equiv 0 \pmod 3$ に注意して，交点の x 座標を求めると

$$x=1,\ 7$$

よって，$(*)$ を満たす 4 以上の自然数 n は　**7**　■

4 辺 CO の中点を M とし，△OBC，△OAC の重心をそれぞれ G，H とする．
AG は平面 OBC と垂直であるから，AG⊥CO．
BH は平面 OAC と垂直であるから，BH⊥CO．
ゆえに，CO は平面 ABM と垂直である．
したがって　AC = AO，BC = BO　$\cdots(*)$
また，辺 BO の中点をとり，同様の議論を行うと，$(*)$ の B と C を交換して



$$\mathrm{AB} = \mathrm{AO},\quad \mathrm{CB} = \mathrm{CO} \quad \cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$\mathrm{AO} = \mathrm{AB} = \mathrm{AC},\ \ \mathrm{OB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CO} \quad \cdots(*\,*\,*)$

$\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MH}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{GA}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2 = 0,\quad \overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2 = 0$$

上の 2 式から　$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$　すなわち　MA = MB

したがって　△ACM ≡ △BCM　ゆえに　AC = BC

これと $(*\,*\,*)$ より，四面体のすべての辺の長さが等しいので，四面体 OABC は正四面体である． ■

5 3 次方程式 $f(x)=0$ の解を $\alpha,\ \overline{\alpha},\ k$ とする (α を虚数，k を実数).

(i) α^3 が実数のとき　$\alpha^3=k$，$k^3=k$
α は虚数であるから，$k\neq 0$ であることに注意して　$k=\pm 1$
$k=1$ のとき　$\alpha^3=1$　ゆえに　$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$
$\alpha\neq 1$ であるから，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから

$$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$$

$k=-1$ のとき　$\alpha^3=-1$　ゆえに　$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$
$\alpha\neq -1$ であるから，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2-x+1=0$ の解であるから

$$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$$

(ii) α^3 が虚数のとき　$\alpha^3=\overline{\alpha}$，$k^3=k$
第 1 式から　$\alpha^4=\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$　ゆえに　$\alpha=\pm\sqrt{|\alpha|}\,i$
$|\alpha|^2=|\alpha|$ となるから　$|\alpha|=1$　すなわち　$\alpha=\pm i$
したがって，α および $\overline{\alpha}$ は方程式 $x^2+1=0$ の解
$k^3=k$ より，$k=0,\ \pm 1$ であるから

$$f(x)=(x-k)(x^2+1)\quad (k=0,\ 1,-1)$$

(i)，(ii) より，求める $f(x)$ は

$$\boldsymbol{x^3-1,\ x^3+1,\ x^3+x,\ x^3-x^2+x-1,\ x^3+x^2+x+1}$$

■

4.3 2017年

1 曲線 $y = x^3 - 4x + 1$ を C とする．直線 l は C の接線であり，点 P(3, 0) を通るものとする．また，l の傾きは負であるとする．このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

2 次の問に答えよ．ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることをは用いてよい．

(1) 100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ．

(2) 100 桁の自然数で，2 と 5 以外に素因数を持たないものの個数を求めよ．

3 座標空間において原点 O と点 A(0, −1, 1) を通る直線を l とし，点 B(0, 2, 1) と点 C(−2, 2, −3) を通る直線を m とする．l 上の 2 点 P，Q と，m 上の点 R を △PQR が正三角形となるようにとる．このとき，△PQR の面積が最小となるような P，Q，R の座標を求めよ．

4 p，q を自然数，α，β を

$$\tan\alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan\beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 次の条件

$$\text{(A)} \quad \tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ のうち，$q \leqq 3$ であるものをすべて求めよ．

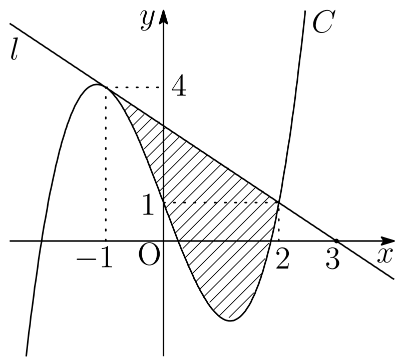
(2) 条件 (A) を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ で，$q > 3$ であるものは存在しないことを示せ．

5 n を 2 以上の自然数とする．さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M - L$ を X とする．

(1) $X = 1$ である確率を求めよ．

(2) $X = 5$ である確率を求めよ．

解答例



$\boxed{1}$ $f(x) = x^3 - 4x + 1$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - 4t + 1) = (3t^2 - 4)(x - t)$$

すなわち　$y = (3t^2 - 4)x - 2t^3 + 1 \quad \cdots (*)$

これが点 $(3,\ 0)$ を通るから

$$(3t^2 - 4)\cdot 3 - 2t^3 + 1 = 0 \quad ゆえに \quad (t+1)(2t^2 - 11t + 11) = 0$$

$f'(-1) = -1 < 0$ であるから，$t = -1$ は条件を満たす．

$2t^2 - 11t + 11 = 0$ のとき，$t^2 = \dfrac{11}{2}(t-1)$，$t = \dfrac{11 \pm \sqrt{33}}{4}$ より

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 - 4 = 3\cdot\frac{11}{2}(t-1) - 4 = \frac{33}{8}\left(4t - 4 - \frac{32}{33}\right) \\ &= \frac{33}{8}\left\{(11 \pm \sqrt{33}) - 4 - \frac{32}{33}\right\} = \frac{33}{8}\left\{(6 \pm \sqrt{33}) + \frac{1}{33}\right\} > 0 \end{aligned}$$

したがって，条件を満たすのは，$t = -1$ に限る．$(*)$ より　$l : y = -x + 3$

$$\begin{aligned} (-x+3) - (x^3 - 4x + 1) &= -(x^3 - 3x - 2) \\ &= -(x+1)^2(x-2) = (x+1)^2(2-x) \end{aligned}$$

C と l の共有点の x 座標は　$x = -1,\ 2$

$-1 \leqq x \leqq 2$ において　$(-x+3) - (x^3 - 4x) = (x+1)^2(2-x) \geqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^{2} (x+1)^2(2-x)\,dx = \frac{1}{12}\{2 - (-1)\}^4 = \mathbf{\frac{27}{4}}$$

補足 次の公式[2] に $m = 2$，$n = 1$，$\alpha = -1$，$\beta = 2$ を代入する．

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{2}$ (1) 100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数を持たない数は

$$1 \leqq 2^m < 10^{100} \quad (m \text{ は 0 以上の整数})$$

辺々の常用対数をとると

$$0 \leqq m\log_{10} 2 < 100 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq m < \frac{100}{\log_{10} 2} \qquad \cdots(*)$$

$$\frac{100}{0.3011} < \frac{100}{\log_{10} 2} < \frac{100}{0.3010},\ \frac{100}{0.3011} = 332.1\cdots,\ \frac{100}{0.3010} = 332.2\cdots$$

$(*)$ を満たす整数は $0 \leqq m \leqq 332$ よって，求める個数は **333 個**

(2) 100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数を持たない数 N は

$$N = 2^p{\cdot}5^q \quad (p,\ q \text{ は 0 以上の整数},\ 10^{99} \leqq N < 10^{100})$$

(i) $p \geqq q$ のとき，$p = q + m$ とおくと $N = 2^{q+m}{\cdot}5^q = 2^m{\cdot}10^q$

100 桁以下の自然数 2^m について，N が 100 桁の自然数となるのとき，
(1) で求めたそれぞれの m に対して，一意に q が定まる．
したがって，これらの個数は 333 個．

(ii) $p \leqq q$ のとき，$q = p + n$ とおくと $N = 2^p{\cdot}5^{p+n} = 5^n{\cdot}10^p$
100 桁以下の自然数で，5 以外の素因数を持たない数は

$$1 \leqq 5^n < 10^{100} \quad (n \text{ は 0 以上の整数})$$

辺々の常用対数をとると

$$0 \leqq n\log_{10} 5 < 100 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq n < \frac{100}{\log_{10} 5}$$

100 桁以下の自然数 5^n について，N が 100 桁の自然数となるのとき，
それぞれの n に対して，一意に p が定まる．

$$0 \leqq n < \frac{100}{\log_{10} 5} \qquad \cdots(**)$$

$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2$ ゆえに $0.6989 < \log_{10} 5 < 0.6990$

$$\frac{100}{0.6990} < \frac{100}{\log_{10} 5} < \frac{100}{0.6989},\ \frac{100}{0.6990} = 143.06\cdots,\ \frac{100}{0.6989} = 143.08\cdots$$

$(**)$ を満たす整数は $0 \leqq n \leqq 143$ これらの個数は 144 個．

$p = q = 99$ は (i)，(ii) で重複しているから $333 + 144 - 1 =$ **476 (個)**

■

3 原点 O と点 A$(0, -1,\ 1)$ を通る直線 l 上の点 $(x,\ y,\ z)$ は，媒介変数 s を用いて

$$(x,\ y,\ z) = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (0, -s,\ s) \quad \cdots ①$$

B$(0,\ 2,\ 1)$，C$(-2,\ 2, -3)$ より $\qquad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-2,\ 0, -4) = -2(1,\ 0,\ 2)$

2 点 B，C を通る直線 m 上の点 $(x,\ y,\ z)$ は，媒介変数 t を用いて

$$(x,\ y,\ z) = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t(1,\ 0,\ 2) = (t,\ 2,\ 2t+1) \quad \cdots ②$$

①，② を同時に満たす $(x,\ y,\ z)$ は存在しない．

P$(0, -p,\ p)$，Q$(0, -q,\ q)$，R$(r,\ 2,\ 2r+1)$ とおくと $(p \neq q)$

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= 2(p-q)^2, \\ \mathrm{PR}^2 &= r^2 + (p+2)^2 + (2r+1-p)^2, \\ \mathrm{QR}^2 &= r^2 + (q+2)^2 + (2r+1-q)^2 \end{aligned}$$

$\mathrm{PR}^2 - \mathrm{QR}^2 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} (p+2)^2 - (q+2)^2 + (2r+1-p)^2 - (2r+1-q)^2 &= 0 \\ (p+q+4)(p-q) + (4r+2-p-q)(-p+q) &= 0 \\ (p-q)(2p+2q-4r+2) &= 0 \end{aligned}$$

$p \neq q$ であるから，$r = \dfrac{1}{2}(p+q+1) \cdots ③$ より

$$\mathrm{PR}^2 = \frac{1}{4}(p+q+1)^2 + (p+2)^2 + (q+2)^2$$

$\mathrm{PR}^2 - \mathrm{PQ}^2 = 0$ であるから

$$\frac{1}{4}(p+q+1)^2 + (p+2)^2 + (q+2)^2 - 2(p-q)^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

ここで

$$\begin{aligned} (p+q+1)^2 &= (p+q)^2 + 2(p+q) + 1, \\ (p+2)^2 + (q+2)^2 &= p^2 + q^2 + 4(p+q) + 8 \\ &= \frac{1}{2}\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} + 4(p+q) + 8 \end{aligned}$$

これらの 2 式を $(*)$ に代入して整理すると

$$(p+q)^2 - 2(p-q)^2 + 6(p+q) + 11 = 0$$

したがって $\qquad \mathrm{PQ}^2 = 2(p-q)^2 = (p+q+3)^2 + 2$

正三角形 PQR の面積が最小になるとき，PQ^2 が最小となるから

$p+q+3 = 0,\ \ |p-q| = 1$ 　これを解いて 　$(p,\ q) = (-1, -2),\ (-2, -1)$

③ より $r = -1$ 　よって 　R$\boldsymbol{(-1,\ 2, -1)}$，P，Q は $\boldsymbol{(0,\ 1, -1)}$，$\boldsymbol{(0,\ 2, -2)}$

別解 O，A$(0,-1,\ 1)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,-1,\ 1)$

B$(0,\ 2,\ 1)$，C$(-2,\ 2,-3)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 0,-4)=-2(1,\ 0,\ 2)$

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，2直線 l，m の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{u}=(0,-1,\ 1)$，$\vec{v}=(1,\ 0,\ 2)$ とおく．l 上の点Sを $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\vec{u}$，$m$ 上の点Tを $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\vec{b}+t\vec{v}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}=-s\vec{u}+t\vec{v}+\vec{b}$$

STが最小となるとき，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ST}}=0$，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ST}}=0$ であるから

$$\vec{u}\cdot(-s\vec{u}+t\vec{v}+\vec{b})=0,\quad \vec{v}\cdot(-s\vec{u}+t\vec{v}+\vec{b})=0$$

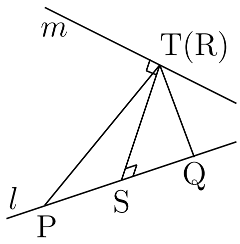
したがって　$s\vec{u}\cdot\vec{u}-t\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{b},\quad s\vec{u}\cdot\vec{v}-t\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{b}$

すなわち　$2s-2t=-1,\ \ 2s-5t=2$　これを解いて　$s=-\dfrac{3}{2},\ t=-1$

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}}=\frac{3}{2}\vec{u}-\vec{v}+\vec{b}=\frac{3}{2}(0,-1,\ 1)-(1,\ 0,\ 2)+(0,\ 2,\ 1)=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{ST}=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

SはP，Qの中点で，TをRにとればよい．



このとき　$\mathrm{SP}=\mathrm{SQ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{ST}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{1}{2}\vec{u}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=-\dfrac{3}{2}\vec{u}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\frac{1}{2}\vec{u}=-\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{u}=-\vec{u}=(0,\ 1,-1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\frac{1}{2}\vec{u}=-\frac{3}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}=-2\vec{u}=(0,\ 2,-2)$$

よって　R$\boldsymbol{(-1,\ 2,-1)}$，P，Qは $\boldsymbol{(0,\ 1,-1)}$，$\boldsymbol{(0,\ 2,-2)}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ より，$q=1$ のとき，$\beta = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ (n は整数) であるから

$$\tan(\alpha+2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -p\ (\neq 2)$$

したがって　$q \neq 1$

$\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ $(q\neq 1)$ より　$\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q^2}} = \dfrac{2q}{q^2-1}$

正接の加法定理により

$$\tan\alpha = \tan\{(\alpha+2\beta)-2\beta\} = \frac{\tan(\alpha+2\beta)-\tan 2\beta}{1+\tan(\alpha+2\beta)\tan 2\beta}$$

条件により　$\dfrac{1}{p} = \dfrac{2-\frac{2q}{q^2-1}}{1+2\cdot\frac{2q}{q^2-1}} = \dfrac{2(q^2-q-1)}{q^2+4q-1}$　ゆえに　$p = \dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}$

$q=2$ のとき $p=\dfrac{11}{2}$，$q=3$ のとき $p=2$　よって　$\boldsymbol{(p,\ q)=(2,\ 3)}$

(2) (1) の計算から　$2p-1 = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$

$2p-1$ は正の奇数，$q^2-q-1 = q(q-2)+q-1>0$ より $(q \geqq 2)$

$$\frac{5q}{q^2-q-1} \geqq 1 \quad ゆえに \quad q^2-6q-1 \leqq 0$$

したがって　$|q-3| \leqq \sqrt{10}$

これを満たす自然数 q は　$q=2,3,4,5,6$

(1) の結果に注意すると，$q=4,5,6$ について調べればよい．

ここで，$f(q) = \dfrac{5q}{q^2-q-1}$ とすると

$$f(4)=\frac{20}{11},\quad f(5)=\frac{25}{19},\quad f(6)=\frac{30}{29}$$

よって，$q>3$ であるものは存在しない． ■

5 (1) $X=1$ となるのは　$(L,\ M)=(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$

$(L,\ M)=(2,\ 1)$ であるとき，n 回とも1または2で，n 回とも1のときと n 回とも2のときを除くから

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

他の場合も同様であるから，求める確率は

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\boldsymbol{5\left(\frac{1}{3}\right)^n-10\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

(2) $X=5$ となるのは　$(L,\ M)=(1,\ 6)$

$L=1$，$M=6$ となる事象をそれぞれ A，B とすると

$$P(A)=P(B)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

また　　$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=\left(\frac{4}{6}\right)^n$

ゆえに　　$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}+\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}-\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\\&=\boldsymbol{1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}\end{aligned}$$

■

4.4　2018 年

1 a は正の実数とし，座標平面内の点 $(x_0,\ y_0)$ は 2 つの曲線

$$C_1 : y = |x^2 - 1|, \quad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり，$|x_0| \neq 1$ を満たすとする．C_1 と C_2 が $(x_0,\ y_0)$ で共通の接線をもつとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

2 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，辺 BC 上に B とは異なる点 P を取り，線分 AP の垂直 2 等分線が辺 AB，辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q，R とする．

(1) 線分 QR の長さを $\sin\angle\mathrm{BAP}$ を用いて表せ．

(2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ．

3 $n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

4 四面体 ABCD は AC = BD，AD = BC を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする．

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ．

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける．このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ．

5 整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して，次の一連の操作を考える．ただし各球に書かれている整数は 1 つのみとする．

(i) 袋から無作為に球を 1 個取り出し，その球に書かれている整数を k とする．

(ii) $k \neq 0$ の場合，整数 k が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．

(iii) $k = 0$ の場合，袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より 1 大きい整数が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．

整数 0 が書かれている球が 1 個入っており他の球が入っていない袋を用意する．この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に，袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする．例えば X_1 は常に 1 である．以下 $n \geqq 2$ として次の問に答えよ．

(1) $X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ．

(2) $X_n \leqq n + 1$ である確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $f(x) = |x^2 - 1|$，$g(x) = x^2 - 2ax + 2$ とおくと

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & (|x| > 1) \\ -2x & (|x| < 1) \end{cases}, \quad g'(x) = 2x - 2a$$

$f(x_0) = g(x_0)$，$f'(x_0) = g'(x_0)$ であるから

(i) $|x_0| > 1$ のとき

$$x_0{}^2 - 1 = x_0{}^2 - 2ax_0 + 2, \quad 2x_0 = 2x_0 - 2a$$

上の第 2 式から，$a = 0$ となり，$a > 0$ に反するので不適.

(ii) $|x_0| < 1$ のとき

$$-x_0{}^2 + 1 = x_0{}^2 - 2ax_0 + 2, \quad -2x_0 = 2x_0 - 2a$$

整理すると $\begin{cases} 2x_0{}^2 - 2ax_0 + 1 = 0 \\ x_0 = \dfrac{a}{2} \end{cases}$

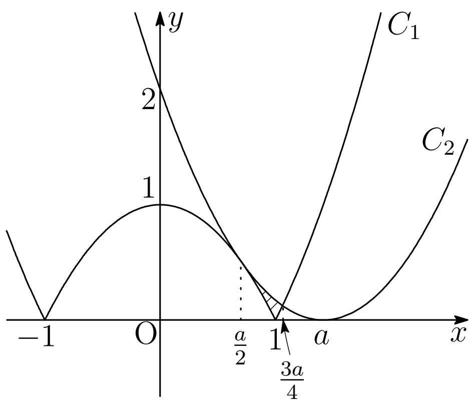
上の第 2 式を第 1 式に代入すると $-\dfrac{a^2}{2} + 1 = 0$

$a > 0$ および $|x_0| < 1$ に注意して $a = \sqrt{2}$，$x_0 = \dfrac{a}{2}$

$C_1 : y = |x^2 - 1|$ と $C_2 : y = (x - a)^2$ の接点以外の共有点の x 座標は

$$x^2 - 1 = (x - a)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a^2 + 1}{2a} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3a}{4}$$

求める面積は，下の図の斜線部分の面積である.

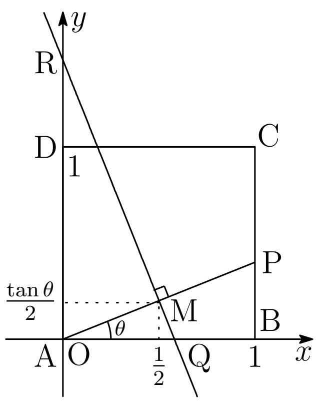


よって，求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} \{(x-a)^2 - |x^2-1|\}\,dx \\
&= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} (x-a)^2\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^{1} (x^2-1)\,dx - \int_{1}^{\frac{3a}{4}} (x^2-1)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{\frac{a}{2}}^{1} - \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{\frac{3a}{4}} \\
&= -\frac{7a^3}{48} + \frac{5a}{4} - \frac{4}{3} = \boldsymbol{\frac{23}{24}\sqrt{2} - \frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$

■

2 (1) $\theta = \angle\mathrm{BAP}$ とし $(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{4})$，正方形 ABCD を右の図のように座標平面にとる．線分 AP の中点を $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, \frac{\tan\theta}{2}\right)$ とすると，AP の垂直二等分線は，M を通り傾き $-\frac{1}{\tan\theta}$ の直線であるから



$$y - \frac{\tan\theta}{2} = -\frac{1}{\tan\theta}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

すなわち　$y = -\dfrac{x}{\tan\theta} + \dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}$　$\cdots(*)$

$(*)$ の方程式から　$\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\right)$

$(*)$ に $y=0$ を代入すると　$x = \dfrac{1}{2\cos^2\theta}$　ゆえに　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2\cos^2\theta},\ 0\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \dfrac{1}{2\cos\theta}\left(-\dfrac{1}{\cos\theta},\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{QR} = |\overrightarrow{\mathrm{QR}}| &= \frac{1}{2\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}} \\
&= \frac{1}{2\sin\theta\cos^2\theta} = \frac{1}{2\sin\theta(1-\sin^2\theta)} \quad \cdots(*)
\end{aligned}
$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{QR} = \dfrac{1}{2\sin\angle\mathrm{BAP}(1-\sin^2\angle\mathrm{BAP})}}$

(2) $t = \sin\theta$ とすると　$0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$f(t) = 2t(1-t^2)$ とおくと　$f'(t) = 2 - 6t^2 = 2(1-3t^2)$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(*)$ より，線分 QR の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$ ■

3 与えらえた整式を変形すると

$$n^3 - 7n + 9 = (n-1)n(n+1) - 3(2n-3) \quad \cdots (*)$$

連続する 3 整数の積 $(n-1)n(n+1)$ は 3 の倍数であるから，$(*)$ は 3 の倍数である．これが素数であるとき，その値は 3 であるから

$$n^3 - 7n + 9 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad (n-1)(n-2)(n+3) = 0$$

よって，求める整数 n は　$\boldsymbol{n = 1,\ 2, -3}$ ■

4　(1) △ACD と △BDC について

$$\mathrm{AC}=\mathrm{BD},\ \mathrm{AD}=\mathrm{BC},\ \mathrm{CD}\ は共通$$

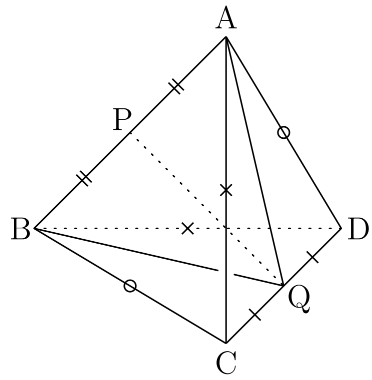
3 辺相等により　$\triangle\mathrm{ACD}\equiv\triangle\mathrm{BDC}$

したがって　$\angle\mathrm{ACQ}=\angle\mathrm{BDQ}$

△ACQ と △BDQ について，2 辺夾角相等により　$\triangle\mathrm{ACQ}\equiv\triangle\mathrm{BDQ}$

したがって　$\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}$

よって，PQ は二等辺三角形 ABQ の中線であるから　$\mathrm{AB}\perp\mathrm{PQ}$



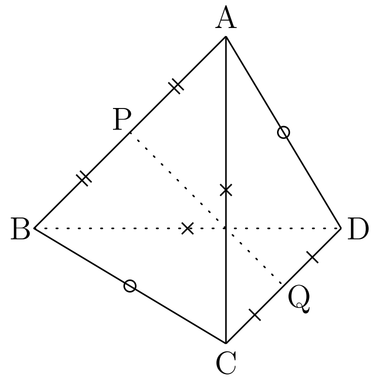
別解

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$ に注意して，上の 2 式の辺々を加えて 2 倍すると

$$4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$



したがって

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})+(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\quad よって\quad \mathrm{AB}\perp\mathrm{PQ}$$

補足　同様にして

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+(\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+(\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0\quad よって\quad \mathrm{CD}\perp\mathrm{PQ}$$

(2) $\triangle$ABC と $\triangle$ABD について

$$AC = BD,\ BC = AD,\ AB \text{ は共通}$$

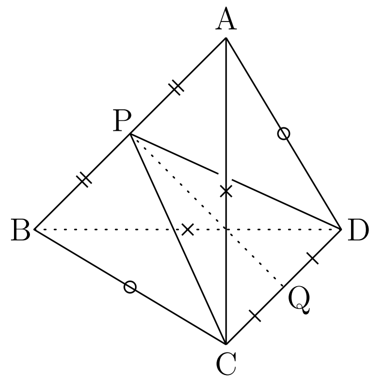
3 辺相等により $\triangle ABC \equiv ABD$

したがって $\angle CAP = \angle DBP$

$\triangle$CAP と $\triangle$DBP について，2 辺夾角相等により $\triangle CAP \equiv \triangle DBP$

したがって CP = DP

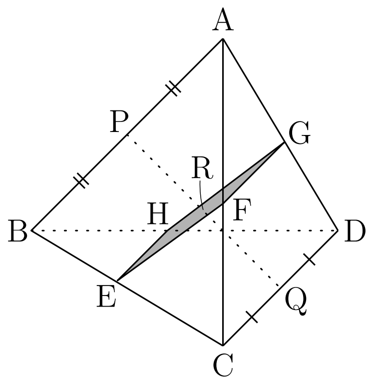
よって，PQ は二等辺三角形 CDP の中線であるから CD$\perp$PQ

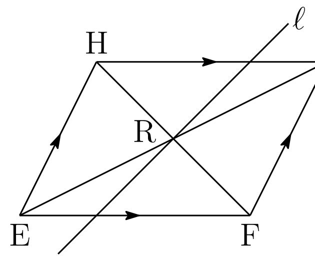


線分 PQ 上に点 R とり，R を通り線分 PQ に垂直な平面と辺 BC，AC，AD，BD との交点を，それぞれ，E，F，G，H とすると

$$BA/\!/EF,\quad BA/\!/HG,\quad CD/\!/EH,\quad CD/\!/FG$$

ゆえに EF//HG，EH//FG すなわち 四角形 EFGH は平行四辺形





PQ を含む平面 α と平行四辺形 EFGH との交線を ℓ とすると，ℓ によって平行四辺形 EFGH の面積は二等分される．

よって，α によって，四面体 ABCD の体積は二等分される． ■

5 (1) (i) n 回とも整数 0 が書かれた球を取り出すとき

$$X_n = 0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \geqq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdots\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n!}$

(ii) $n-1$ 回目まで整数 0 が書かれた球を取り出し，n 回目に整数 $n-1$ が書かれた球を取り出すとき

$$\begin{aligned} X_n &= 0+1+2+\cdots+(n-1)+n-1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2}-1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2} \end{aligned}$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdots\dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n!}$

(i),(ii) 以外のとき，$X_n < \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ となるから，求める確率は

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!} = \boldsymbol{\frac{2}{n!}}$$

(2) (i) 2 回目以降すべて整数 1 が書かれた球を取り出すとき

$$X_n = 0+\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{n\,個} = n \leqq n+1$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$

(ii) 2 回目以降，j 回目だけ整数 0 が書かれた球を取り出し，j 回目以外はすべて整数 1 が書かれた球を取り出すとき $(j=2,3,\cdots,n)$

$$X_n = 0+1+1+1+\cdots+1+\overset{j\,回目}{2}+1+\cdots+1 = n+1$$

このときの確率は $\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{j-2}{j-1}\cdot\dfrac{1}{j}\cdot\dfrac{j-1}{j+1}\cdots\dfrac{n-2}{n} = \dfrac{(n-2)!}{n!}$

(i),(ii) 以外のとき，$X_n > n+1$ となるから，求める確率は

$$\frac{1}{n}+\frac{(n-2)!}{n!}\cdot(n-1) = \frac{1}{n}+\frac{1}{n} = \boldsymbol{\frac{2}{n}}$$

■

4.5　2019 年

1　次の各問に答えよ．

(1) a は実数とする．x に関する整式 $x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2$ を整式 x^3+x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とする．$R(x)$ の x の 1 次の項の係数が 1 のとき，a の値を定め，さらに $Q(x)$ と $R(x)$ を求めよ．

(2) 8.94^{18} の整数部分は何桁か．また最高位からの 2 桁の数字を求めよ．例えば，12345.6789 の最高位からの 2 桁は 12 を指す．

2　a は実数とし，b は正の定数とする．x の関数 $f(x)=x^2+2(ax+b|x|)$ の最小値 m を求めよ．さらに，a の値が変化するとき，a の値を横軸に，m の値を縦軸にとって m のグラフをかけ．

3　a，b，c は実数とする．次の命題が成立するための，a と c がみたすべき必要十分条件を求めよ．さらに，この $(a,\ c)$ の範囲を図示せよ．

命題：すべての実数 b に対して，ある実数 x が不等式 $ax^2+bx+c<0$ をみたす．

4　1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，$X_2, \cdots, X_n$ とする．このとき次の条件をみたす確率を n を用いて表せ．ただし $X_0=0$ としておく．

条件：$1 \leqq k \leqq n$ をみたす k のうち，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような k の値はただ 1 つである．

5　半径 1 の球面上の 5 点 A，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{B_3}$，$\mathrm{B_4}$ は，正方形 $\mathrm{B_1B_2B_3B_4}$ を底面とする四角錐をなしている．この 5 点が球面上を動くとき，四角錐 $\mathrm{AB_1B_2B_3B_4}$ の体積の最大値を求めよ．

常用対数表は次ページにある．

常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで掲載している．

常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで掲載している．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2=(x^3+x^2+x+1)(x^2+x+a-2)$
$+(3-a)x^2+(4-a)x+4-a$

$R(x)$ の 1 次の項の係数が 1 であるから

$$4-a=1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=3}$$

よって　$\boldsymbol{Q(x)=x^2+x+1}$, $\boldsymbol{R(x)=x+1}$

補足 $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ であるから，法 x^3+x^2+x+1 について

$$x^4\equiv 1, \quad x^5\equiv x, \quad x^3\equiv -x^2-x-1,$$

$$\begin{aligned} x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2 &\equiv x+2\cdot 1+a(-x^2-x-1)+3x^2+3x+2 \\ &\equiv (3-a)x^2+(4-a)x+4-a \end{aligned}$$

したがって　$R(x)=(3-a)x^2+(4-a)x+4-a$

(2) 常用対数表から，$0.95125\leqq \log_{10}8.94<0.95135$ であるから

$$\begin{aligned} 18\times 0.95125 \leqq 18\log_{10}8.94 &< 18\times 0.95135 \\ 17.1225 \leqq \log_{10}8.94^{18} &< 17.1243 \\ 10^{0.1225}\times 10^{17} \leqq 8.94^{18} &< 10^{0.1243}\times 10^{17} \end{aligned}$$

常用対数表から，$\log_{10}1.32<0.12065$，$0.12705\leqq \log_{10}1.34$ であるから

$$1.32\times 10^{17}<8.94^{18}<1.34\times 10^{17}$$

よって　整数部分の桁数は　**18** 桁，最高位の 2 桁は　**13** ■

2 $g(x) = x^2 + 2(a+b)x$，$h(x) = x^2 + 2(a-b)x$ とおくと

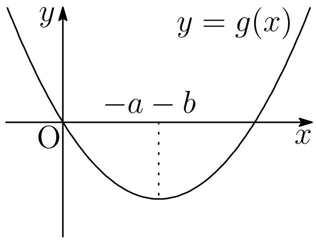
$$f(x) = x^2 + 2(ax + 2b|x|) = \begin{cases} g(x) & (x \geqq 0) \\ h(x) & (x \leqq 0) \end{cases}$$

(i) $g(x) = (x+a+b)^2 - (a+b)^2$ であるから $(x \geqq 0)$

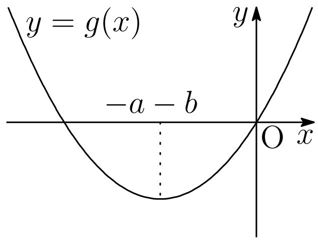
$-a-b \geqq 0$，すなわち，$a \leqq -b$ のとき $m = g(-a-b) = -(a+b)^2$

$-a-b \leqq 0$，すなわち，$-b \leqq a$ のとき $m = g(0) = 0$

$a \leqq -b$ のとき



$-b \leqq a$ のとき

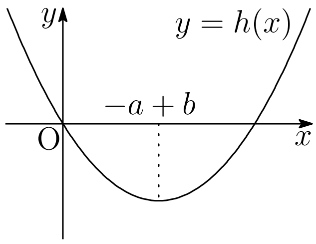


(ii) $h(x) = (x+a-b)^2 - (a-b)^2$ であるから $(x \leqq 0)$

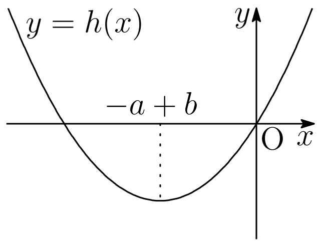
$-a+b \geqq 0$，すなわち，$a \leqq b$ のとき $m = h(0) = 0$

$-a+b \leqq 0$，すなわち，$b \leqq a$ のとき $m = h(-a+b) = -(a-b)^2$

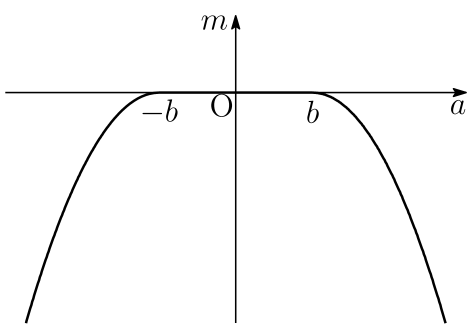
$a \leqq b$ のとき



$b \leqq a$ のとき



(i)，(ii) の結果から $\quad m = \begin{cases} -(a+b)^2 & (a \leqq -b) \\ 0 & (-b \leqq a \leqq b) \\ -(a-b)^2 & (b \leqq a) \end{cases}$



3 関数 $y = ax^2 + bx + c \quad \cdots (*)$

(i) $a < 0$ のとき，放物線 $(*)$ は，b，c の値に関係なく，$y < 0$ を満たす x が存在する．

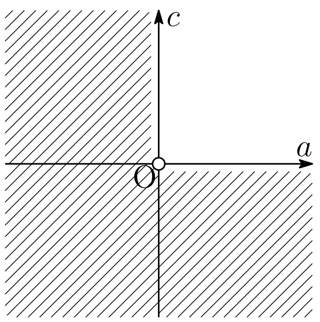
(ii) $a = 0$ のとき，直線 $y = bx + c$ は，すべての b について，$c < 0$ のとき，$y < 0$ を満たす x $(x = 0)$ が存在する．

(iii) $a > 0$ のとき，放物線 $(*)$ が，$y < 0$ を満たす x をもつとき，係数について

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{ゆえに} \quad ac < \frac{b^2}{4}$$

すべての実数 b について，上式が成立するから　$ac < 0$　ゆえに　$c < 0$

(i)〜(iii) から　　$\boldsymbol{a < 0}$ **または「$\boldsymbol{a \geqq 0}$ かつ $\boldsymbol{c < 0}$」**



■

4 連続して i 回 4 以下の事象を A_i，連続して j 回 5 以上の事象を B_j とすると，$A_iB_jA_k$ の順に起きる確率であるから $(i, k \geqq 0,\ j \geqq 1,\ i + j + k = n)$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i,k\geqq 0, j\geqq 1,\\ i+j+k=n}} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{\substack{i\geqq 0, k\geqq 0,\\ i+k\leqq n-1}} \frac{2^{i+k}}{3^n} = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \sum_{i=0}^{n-k-1} 2^i \\
&= \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k(2^{n-k} - 1) = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2^n - 2^k) \\
&= \frac{1}{3^n}\{n\cdot 2^n - (2^n - 1)\} = \boldsymbol{\frac{(n-1)\cdot 2^n + 1}{3^n}}
\end{aligned}$$

■

5 原点Oを中心とする球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上に 4 点 $(\pm a, \pm a,\ b)$ および点 $(0,\ 0,\ 1)$ の 5 点を頂点する四角錐の体積 V とすると $(a>0)$

$$2a^2+b^2=1, \quad V=\frac{1}{3}(2a)^2(1-b)=\frac{4}{3}a^2(1-b)$$

a を消去すると $V=\dfrac{2}{3}(1-b^2)(1-b)=\dfrac{2}{3}(1+b)(1-b)^2 \quad \cdots$①

$-1<b<1$ であるから，3 正数 $2(1+b)$，$1-b$，$1-b$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2(1+b)+(1-b)+(1-b)}{3} \geqq \sqrt[3]{2(1+b)(1-b)^2}$$

したがって $(1+b)(1-b)^2 \leqq \dfrac{32}{27} \quad \cdots$②

② で等号が成立するとき $2(1+b)=1-b$ すなわち $b=-\dfrac{1}{3}$

①，② より $V \leqq \dfrac{64}{81}$ よって，最大値は $\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$ ■

第 5 章　大阪大学

出題分野 (2010-2019) 90 分

◀	大阪大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	数と式										
I	2 次関数										2
	図形と計量										
	データの分析										
	式と証明						1				
	複素数と方程式										
II	図形と方程式			3	1	1					1
	三角関数					2				1	
	指数関数と対数関数	2	1								
	微分法と積分法	1	2		3	3	2	2	1·2		
	場合の数と確率	3		1	2					2	
A	整数の性質			2				1			
	図形の性質										
	平面上のベクトル		3				3				
B	空間のベクトル									3	3
	数列							3	3		
	確率分布と統計										

数字は問題番号

5.1 2015年

1 実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ．

2 直線 $\ell : y = kx + m \ (k > 0)$ が円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と放物線 $C_2 : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ の両方に接している．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) k と m を求めよ．

(2) 直線 ℓ と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

3 平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある．2 点 A，B を除く C 上の点 P に対し，AP $=$ AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる．また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle$AQR の面積を $\theta = \angle$PAB を用いて表せ．

(2) 点 P を動かして $\triangle$AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
=&x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2x\sqrt{1-y^2}\cdot y\sqrt{1-x^2} \\
=&\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \geqq 0, \\
&1-(x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \\
=&x^2y^2+(1-x^2)(1-y^2)-2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \\
=&\left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

よって　$0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$

別解 $x=\cos\alpha$，$y=\cos\beta$ とおくと $(0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi)$

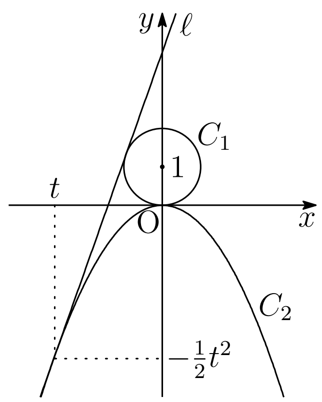
$$\begin{aligned}
&x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
=&x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
=&\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\
=&(\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha)^2= \sin^2(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

このとき，$0 \leqq \sin^2(\alpha+\beta) \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

■

$\boxed{2}$ (1) $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ を微分すると　$y'=-x$



C_2 上の点 $\left(t, -\dfrac{1}{2}t^2\right)$ における接線の方程式は

$$y+\frac{1}{2}t^2=-t(x-t)$$

すなわち　$y=-tx+\dfrac{1}{2}t^2$

これが ℓ に一致するとき　$k=-t$，$m=\dfrac{1}{2}t^2$

上の 2 式より，$m=\dfrac{1}{2}k^2\cdots$ ① であるから　$\ell: kx-y+\dfrac{1}{2}k^2=0$

このとき，C_1 の中心 $(0,\ 1)$ と ℓ の距離が 1 であるから

$$\frac{|-1+\frac{1}{2}k^2|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(-1+\frac{1}{2}k^2\right)^2=k^2+1$$

整理すると　$\dfrac{1}{4}k^4-2k^2=0$　ゆえに　$k^2(k^2-8)=0$

$k>0$ であるから　$\boldsymbol{k=2\sqrt{2}}$　① より　$\boldsymbol{m=4}$

(2) $k=-t$ であるから，(1) の結果より　$t=-2\sqrt{2}$，$\ell: y=2\sqrt{2}x+4$

求める図形の面積を S とすると

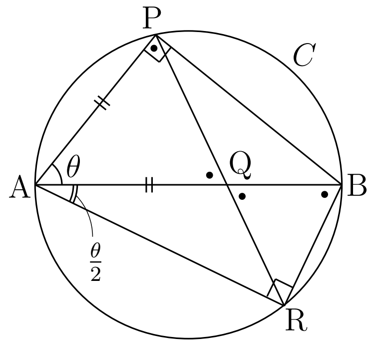
$$\begin{aligned}
S &= \int_{-2\sqrt{2}}^{0}\left\{(2\sqrt{2}x+4)-\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right\}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{2}}^{0}(x+2\sqrt{2})^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x+2\sqrt{2})^3\right]_{-2\sqrt{2}}^{0} = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}}
\end{aligned}$$

■

3 (1) $\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}$ より　$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{AQP}$

$\overset{\frown}{\mathrm{AR}}$ の円周角により　$\angle\mathrm{APR}=\angle\mathrm{ABR}$

$\angle\mathrm{AQP}=\angle\mathrm{RQB}$ であるから (対頂角)



$$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{AQP}=\frac{\pi-\theta}{2}$$

ゆえに　$\angle\mathrm{BAR}=\angle\mathrm{BPR}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{APQ}=\dfrac{\theta}{2}$

したがって　$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}=2\cos\theta$，$\mathrm{BR}=\mathrm{QR}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\mathrm{AR}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$

よって　$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{AQR}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AR}\sin\angle\mathrm{QAR}\\&=\frac{1}{2}\cdot2\cos\theta\cdot2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\cos\theta\sin\theta=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sin2\theta}\end{aligned}$$

(2) $\triangle\mathrm{APQ}$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\sin\theta}=\frac{2\cos\theta}{\sin\frac{\pi-\theta}{2}}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{PQ}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

したがって　$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}&=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}:2\sin\tfrac{\theta}{2}\\&=2\sin\theta\cos\theta:\sin\theta=2\cos\theta:1\end{aligned}$$

ゆえに，点 R は線分 PQ を $(2\cos\theta+1):1$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(2\cos\theta+1)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(2\cos\theta+1)-1}=-\frac{1}{2\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{2\cos\theta+1}{2\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{2\cos\theta}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\frac{1}{2\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{2\cos\theta+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$\triangle\mathrm{AQR}$ を最大にするとき　$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

このとき　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ ■

5.2 2016 年

1 次の問いに答えよ．

(1) a を正の実数とし，k を 1 以上の実数とする．x についての 2 次方程式

$$x^2 - kax + a - k = 0$$

は，不等式

$$-\frac{1}{a} < s \leqq 1$$

をみたすような実数解 s をもつことを示せ．

(2) a を 3 以上の整数とする．$n^2 + a$ が $an + 1$ で割り切れるような 2 以上のすべての整数 n を a を用いて表せ．

2 曲線 $C : y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 6\right| - 2x$ を考える．

(1) C と直線 $L : y = -x + t$ が異なる 4 点で交わるような t の値の範囲を求めよ．

(2) C と L が異なる 4 点で交わるとし，その交点を x 座標が小さいものから順に P_1，P_2，P_3，P_4 とするとき，

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}| + |\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}|} = 4$$

となるような t の値を求めよ．

(3) t が (2) の値をとるとき，C と線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

3 1 以上 6 以下の 2 つの整数 a，b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次の条件 (ア)，(イ)，(ウ) で定める．

(ア) $f_1(x) = \sin(\pi x)$

(イ) $f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(ウ) $f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

以下の問いに答えよ．

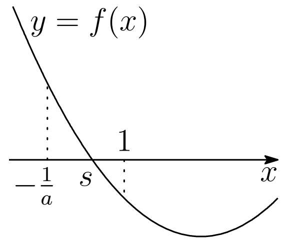
(1) $a = 2$，$b = 3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ．

(2) 1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = x^2 - kax + a - k$ とおくと $(a > 0,\ k \geqq 1)$

$$f\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2} + a > 0,$$
$$f(1) = 1 - ka + a - k$$
$$= (1 + a)(1 - k) \leqq 0$$



$f(s) = 0$ をみたす $-\dfrac{1}{a} < s \leqq 1$ が存在する．よって，x に関する 2 次方程式 $x^2 - kax + a - k = 0$ は解 s $\left(-\dfrac{1}{a} < s \leqq 1\right)$ をもつ．

(2) $n^2 + a$ が $an + 1$ で割り切れるとき (a は 3 以上の整数，n は 2 以上の整数)，$k = \dfrac{n^2 + a}{an + 1}$ とおくと，k は 1 以上の整数で，次式が成り立つ．

$$n^2 - kan + a - k = 0$$

これから，n は 2 次方程式

$$f(x) = 0 \quad \cdots (*)$$

の解の 1 つである．したがって，(1) で示した s と n は $(*)$ の解であるから，解と係数の関係により

$$s + n = ka \quad ゆえに \quad s = ka - n \quad \cdots ①$$

このとき，$ka - n$ は整数であるから，s は整数でその値の範囲から

$$s = 0 \quad または \quad s = 1$$

0 が $(*)$ の解であるとき，$f(0) = a - k = 0$ より　$k = a$

1 が $(*)$ の解であるとき，$f(1) = (1 + a)(1 - k) = 0$ より　$k = 1$

① より　$(s,\ k) = (0,\ a)$ のとき　$n = a^2$

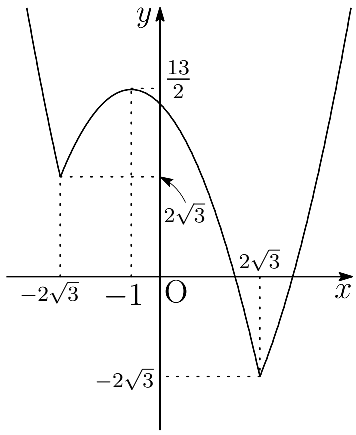
　　　　$(s,\ k) = (1,\ 1)$ のとき　$n = a - 1$

よって　　$\boldsymbol{n = a^2,\ a - 1}$ ■

2 (1) $C: y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 6\right| - 2x$ と $L: y = -x + t$ の2式から y を消去すると $\left|\frac{1}{2}x^2 - 6\right| - x = t$

$y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 6\right| - x \cdots (*)$ のグラフは

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{13}{2} & (|x| \geqq 2\sqrt{3}) \\ -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{13}{2} & (|x| \leqq 2\sqrt{3}) \end{cases}$$



C と L が異なる4点で交わるのは，$(*)$ と直線 $y = t$ は異なる4点で交わるときであるから

$$\boldsymbol{2\sqrt{3} < t < \frac{13}{2}}$$

(2) x_1，x_4 は $(x_1 < x_4)$

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{13}{2} = t$$

これを解いて　$x_1 = 1 - \sqrt{13+2t}$

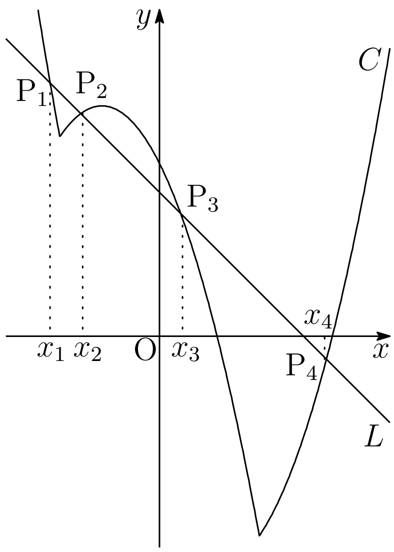
$x_4 = 1 + \sqrt{13+2t}$

また，x_2，x_3 は $(x_2 < x_3)$

$$-\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{13}{2} = t$$

これを解いて　$x_2 = -1 - \sqrt{13-2t}$

$x_3 = -1 + \sqrt{13-2t}$



直線 L の傾きは -1 であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}| = \sqrt{2}(x_2 - x_1),\quad |\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}| = \sqrt{2}(x_3 - x_2),\quad |\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}| = \sqrt{2}(x_4 - x_3)$$

これらを $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}| + |\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}|} = 4$ に代入すると

$$\frac{\sqrt{2}(x_2 - x_1) + \sqrt{2}(x_4 - x_3)}{\sqrt{2}(x_3 - x_2)} = 4 \quad ゆえに \quad x_4 - x_1 = 5(x_3 - x_2)$$

したがって　$\sqrt{13+2t} = 5\sqrt{13-2t}$　これを解いて　$\boldsymbol{t = 6}$

(3) (2) の結果から，$t=6$，$x_2=-2$，$x_3=0$．求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0}\left\{-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{13}{2}-(-x+6)\right\}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x(x+2)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{0-(-2)\}^3 = \mathbf{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

（ア）$f_1(x)=\sin(\pi x)$

（イ）$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right)$　　$(n=1,2,3,\cdots)$

（ウ）$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　　$(n=1,2,3,\cdots)$

ゆえに

$$\begin{aligned} f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) &= f_{2n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-(-x)\right) \\ &= f_{2n-1}\left(x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

したがって　$f_5(x)=f_1\left(x+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)$

よって，$a=2$，$b=3$ のとき，$x=0$ とすると

$$f_5(0)=f_1\left(\frac{5}{3}\right)=\sin\frac{5}{3}\pi=-\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $(**)$ より　$f_6(x)=f_1\left(3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-x\right)$

これに $x=0$ を代入すると，(ア) により

$$f_6(0)=f_1\left(3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)=\sin 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\pi$$

$f_6(0)=0$ となるのは，$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ が整数になるときで，次の 8 組．

$$(a,b)=(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 6),\ (6,\ 2),\ (3,\ 3),\ (6,\ 6)$$

よって，求める確率は　$\frac{8}{6^2}=\mathbf{\frac{2}{9}}$

■

5.3 2017年

1 b，c を実数，q を正の実数とする．放物線 $P : y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ．

2 実数 x，y，z が

$$x + y + z = 1, \quad x + 2y + 3z = 5$$

を満たすとする．

(1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ の最小値を求めよ．

(2) $z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ．

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8{a_n}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく．b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく．数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ 放物線 $y = -x^2 + bx + c$ のグラフの頂点の y 座標 q は

$$q = -\frac{b^2 - 4\cdot(-1)c}{4\cdot(-1)} = \frac{b^2 + 4c}{4}$$

2次方程式 $-x^2+bx+c = 0$ の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$ $\alpha+\beta = b$ $\alpha\beta = -c$

ゆえに $(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 + 4c = 4q$ したがって $\beta - \alpha = 2\sqrt{q}$

よって $S = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}(2\sqrt{q})^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}q\sqrt{q}}$

別解 放物線の頂点を $(p,\ q)$ とすると，x^2 の係数に注意して

$$y = -(x-p)^2 + q$$

とおく．この放物線の x 軸との共有点の x 座標は

$$-(x-p)^2 + q = 0 \quad これを解いて \quad x = p \pm \sqrt{q}$$

よって，求める面積 S は

$$S = \frac{1}{6}\{(p+\sqrt{q}) - (p-\sqrt{q})\}^3 = \frac{1}{6}(2\sqrt{q})^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}q\sqrt{q}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\begin{cases} x+y=1-z \\ x+2y=5-3z \end{cases}$　ゆえに　$(*)\begin{cases} x=z-3 \\ y=-2z+4 \end{cases}$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$,
$x+y+z=1$ より

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \\ &= (z-3)^2+(-2z+4)^2+z^2 \\ &\qquad -(z-3)(-2z+4)-(-2z+4)z-z(z-3) \\ &= 9z^2-33z+37 \\ &= 9\left(z-\frac{11}{6}\right)+\frac{27}{4}\end{aligned}$$

よって　$z=\dfrac{11}{6}$ で，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$ をとる．

(2) $(*)$ より　$\begin{aligned} xyz &= (z-3)(-2z+4)z \\ &= -2z^3+10z^2-12z \end{aligned}$

$f(z)=-2z^3+10z^2-12z$ とおくと $(z \geqq 0)$

$$f'(z)=-6z^2+20z-12=-2(3z^2-10z+6)$$

$f'(z)=0$ とすると　$z=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$

z	0	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(z)$	0	↘	極小	↗	極大	↘

$f(2)=f(3)=0$，$2<\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}<3$ であるから，上の増減表により，xyz が最大となる z の値は

$$\boldsymbol{z=\frac{5+\sqrt{7}}{3}}$$

補足 $f(z)=f'(z)\left(\dfrac{1}{3}z-\dfrac{5}{9}\right)+\dfrac{4}{9}(7z-15)$ より

$$f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{4}{9}\left(7\times\frac{5+\sqrt{7}}{3}-15\right)=\frac{4}{27}(7\sqrt{7}-10)>0$$

■

3 (1) $a_{n+1} = 8{a_n}^2 \cdots (*)$ より　$a_n > 0$ のとき，$a_{n+1} > 0$

$a_1 = 2$ であるから，すべての自然数 n について　$a_n > 0$

$(*)$ の両辺を底を 2 とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8{a_n}^2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + 3$$

よって　　$\boldsymbol{b_{n+1} = 2b_n + 3}$

(2) $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$，(1) の結果から　$b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$

数列 $\{b_n + 3\}$ は，初項 $b_1 + 3 = 4$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n + 3 = 4{\cdot}2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_n = 2^{n+1} - 3}$$

(3) $P_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$ より

$$\begin{aligned}\log_2 P_n = \log_2 a_1a_2a_3\cdots a_n &= \sum_{k=1}^{n}\log_2 a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k\\ &= \sum_{k=1}^{n}(2^{k+1} - 3) = \frac{2^2(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n\\ &= 2^{n+2} - 3n - 4 \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}}$

(4) $P_n > 10^{100}$ より　$\log_2 P_n > \log_2 10^{100} = 100\log_2 10$

$(*)$ より　$2^{n+2} - 3n - 4 > 100\log_2 10$

ここで　$\log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16$ より　$300 < 100\log_2 10 < 400$

また，$q_n = 2^{n+2} - 3n - 4$ とおくと $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$q_{n+1} - q_n = (2^{n+3} - 3n - 7) - (2^{n+2} - 3n - 4) = 2^{n+2} - 3 > 0$$

$\{q_n\}$ は単調増加列であることに注意して

$$q_6 = 2^8 - 3{\cdot}6 - 4 = 234, \quad q_7 = 2^9 - 3{\cdot}7 - 4 = 487$$

よって，求める最小の自然数 n は　**7**　■

5.4　2018 年

1 関数 $f(t) = (\sin t - \cos t)\sin 2t$ を考える．

(1) $x = \sin t - \cos t$ とおくとき，$f(t)$ を x を用いて表せ．

(2) t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき，$f(t)$ の最大値と最小値を求めよ．

2 1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする．

(1) $\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx = 0$ である確率を求めよ．

(2) a，b が 2 以上かつ $2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1$ である確率を求めよ．

3 座標空間に 6 点

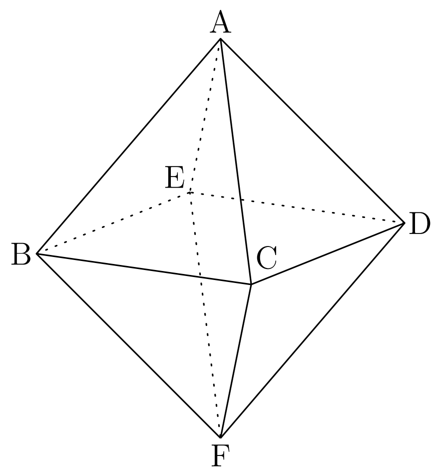
$$\mathrm{A}(0,0,1),\ \mathrm{B}(1,0,0),\ \mathrm{C}(0,1,0),\ \mathrm{D}(-1,0,0),\ \mathrm{E}(0,-1,0),\ \mathrm{F}(0,0,-1)$$

を頂点とする正八面体 ABCDEF がある．s，t を $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ を満たす実数とする．線分 AB，AC をそれぞれ $1-s : s$ に内分する点を P，Q とし，線分 FD，FE をそれぞれ $1-t : t$ に内分する点を R，S とする．

(1) 4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあることを示せ．

(2) 線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする．s，t が $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ．

(3) 正八面体 ABCDEF の 4 点 P，Q，R，S を通る平面による切り口の面積を X とする．線分 LM の長さが (2) の値 m をとるとき，X を最大とするような s，t の値と，そのときの X の値を求めよ．



解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x = \sin t - \cos t$ より

$$x^2 = 1 - 2\sin t\cos t = 1 - \sin 2t \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2t = 1 - x^2$$

よって　$f(t) = (\sin t - \cos t)\sin 2t = x(1 - x^2) = \boldsymbol{-x^3 + x}$

(2) $x = \sin t - \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ より $(0 \leqq t \leqq \pi)$

$$-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}$$

$y = -x^3 + x$ とすると $(-1 \leqq x \leqq \sqrt{2})$

$$y' = -3x^2 + 1 = -3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$，最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{2}}$ ■

2 (1) $\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx = \int_a^c (x-a)\{(x-a)+(a-b)\}\,dx$

$$= \int_a^c (x-a)^2\,dx + (a-b)\int_a^c (x-a)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(c-a)^3 + \frac{1}{2}(a-b)(c-a)^2$$

$$= \frac{1}{6}(c-a)^2(a-3b+2c)$$

$\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx = 0$ であるとき　$(c-a)^2(a-3b+2c)=0$

したがって　$a=c$　または　$a+2c=3b$

(i) $a=c$ のとき　6^2 通り

(ii) $a+2c=3b$ のとき，次の 12 通り

$b=1$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 1)$

$b=2$ のとき　$(a,\ c)=(4,\ 1),\ (2,\ 2)$

$b=3$ のとき　$(a,\ c)=(5,\ 2),\ (3,\ 3),\ (1,\ 4)$

$b=4$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 3),\ (4,\ 4),\ (2,\ 5)$

$b=5$ のとき　$(a,\ c)=(5,\ 5),\ (3,\ 6)$

$b=6$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 6)$

(iii) $a=c$ かつ $a+2c=3b$ すなわち $a=b=c$ のとき　6 通り

(i)〜(iii) より，求める確率は　$\dfrac{6^2+12-6}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{7}{36}}$

(2) $2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1$ より $2\log_a b - 2\log_a c + \dfrac{\log_a c}{\log_a b} = 1$

ゆえに $(2\log_a b - 1)(\log_a b - \log_a c) = 0$

したがって $a = b^2$ または $b = c$ $(a \geqq 2,\ b \geqq 2)$

(i) $a = b^2$ のとき 次の 6 通り

$$(a,\ b,\ c) = (4,\ 2,\ i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

(ii) $b = c$ のとき 次の 5^2 通り

$$(a,\ b,\ c) = (j,\ k,\ k) \quad (j, k = 2, 3, 4, 5, 6)$$

(iii) $a = b^2$ かつ $b = c$ すなわち $(a,\ b,\ c) = (4,\ 2,\ 2)$ の 1 通り

(i)〜(iii) より，求める確率は $\dfrac{6 + 5^2 - 1}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$ ■

3 (1) $\vec{a} = (0, 0, 1)$，$\vec{b} = (1, 0, 0)$，$\vec{c} = (0, 1, 0)$ とすると，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(-\vec{b})$，E$(-\vec{c})$，F$(-\vec{a})$ であるから

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + (1 - s)\vec{b}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{a} + (1 - s)\vec{c}, \\
&\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t(-\vec{a}) + (1 - t)(-\vec{b}) = -t\vec{a} + (t - 1)\vec{b}, \\
&\overrightarrow{\mathrm{OS}} = t(-\vec{a}) + (1 - t)(-\vec{c}) = -t\vec{a} + (t - 1)\vec{c}
\end{aligned}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1 - s)(\vec{c} - \vec{b}) = (1 - s)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{SR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OS}} = (t - 1)(\vec{b} - \vec{c}) = (1 - t)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{SR}}$ であるから，4 点 P，Q，R，S は同一平面上にある．

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}}{2} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} = -(s+t)\vec{a} + \frac{1}{2}(s+t-2)(\vec{b}+\vec{c})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \left(\frac{s+t-2}{2},\ \frac{s+t-2}{2}, -(s+t)\right)$

ここで，$s+t=2u$ とおくと $(0<u<1)$　$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = (u-1,\ u-1, -2u)$

$$m^2 = |\overrightarrow{\mathrm{LM}}|^2 = (u-1)^2+(u-1)^2+(-2u)^2$$
$$= 6u^2-4u+2 = 6\left(u-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$

よって，$u=\frac{1}{3}$，すなわち，$s+t=\frac{2}{3}$ のとき，m は最小値 $\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

(3) 直線 LM と xy 平面との交点を H とすると，$\vec{a}$ の係数に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{t\overrightarrow{\mathrm{OL}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{s+t} = \frac{t(1-s)+s(t-1)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$

したがって

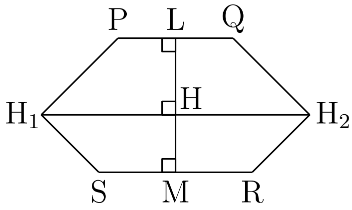
$$\overrightarrow{\mathrm{HL}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$
$$= s\vec{a} + \frac{s(2-s-t)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$
$$= -t\vec{a} + \frac{t(s+t-2)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$

$s+t=\frac{2}{3}$ を上の2式に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{HL}} = s(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (s,\ s,\ s),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = -t(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (-t, -t, -t)$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{HL}}| = \sqrt{3}s$，$|\overrightarrow{\mathrm{HM}}| = \sqrt{3}t$

平面 PQRS と線分 BE，CD のとの交点を
それぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

ゆえに $\quad |\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{2}$

(1) の結果から $\quad |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = (1-s)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-s)\sqrt{2}$，

$\quad |\overrightarrow{\mathrm{SR}}| = (1-t)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-t)\sqrt{2}$

X は 2 つの台形 $\mathrm{PH_1H_2Q}$，$\mathrm{H_1SRH_2}$ の和であるから

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}(\mathrm{PQ} + \mathrm{H_1H_2})\mathrm{HL} + \frac{1}{2}(\mathrm{SR} + \mathrm{H_1H_2})\mathrm{HM} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(1-s)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\}\sqrt{3}s + \frac{1}{2}\left\{(1-t)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\}\sqrt{3}t \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t = \frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t) - (s^2+t^2)\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\{4(s+t) - (s+t)^2 - (s-t)^2\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{4\cdot\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - (s-t)^2\right\} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{\frac{20}{9} - (s-t)^2\right\}
\end{aligned}$$

よって，$s-t=0$，すなわち，$s=t=\dfrac{1}{3}$ のとき，X は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{6}}{9}}$ ■

5.5　2019 年

1 xy 平面において，連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi, \quad 2\sin(x+y) - 2\cos(x+y) \geqq \sqrt{2}$$

の表す領域を D とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

2 p を実数の定数とする．x の 2 次方程式

$$x^2 - (2p + |p| - |p+1| + 1)x + \frac{1}{2}(2p + 3|p| - |p+1| - 1) = 0$$

について以下の問いに答えよ．

(1) この 2 次方程式は実数解をもつことを示せ．

(2) この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解 α，β をもち，かつ $\alpha^2 + \beta^2 \leqq 1$ となるような定数 p の値の範囲を求めよ．

3 座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$

と

$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

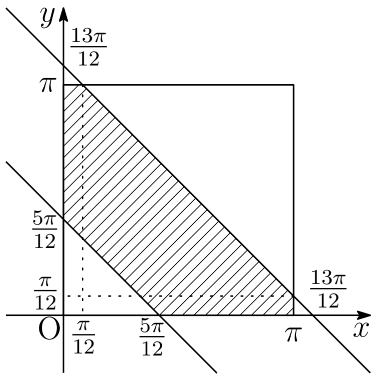
を考える．S_1 と S_2 の共通部分を C とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ．

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ．

解答例

1　(1)　$2\sin(x+y)-2\cos(x+y) \geqq \sqrt{2}$ より



$$\sin\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right) \geqq \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \pi$ より，
$0 \leqq x+y \leqq 2\pi$ に注意して

$$\frac{\pi}{6} \leqq x+y-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{5\pi}{6}$$

したがって，D の表す不等式は

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi, \quad \frac{5\pi}{12} \leqq x+y \leqq \frac{13\pi}{12}$$

よって，領域 D は，右の図の斜線部分で，境界線を含む．

(2)　$2x+y=k$ とおくと　$y=-2x+k$
これは，傾き -2，切片 k の直線を表す．
D において，k が最大・最小となるのは，それぞれ

$$x=\pi, \quad y=\frac{\pi}{12} \text{のとき　最大値 } \boldsymbol{\frac{25}{12}\pi}$$
$$x=0, \quad y=\frac{5\pi}{12} \text{のとき　最小値 } \boldsymbol{\frac{5}{12}\pi}$$

■

2　(1)　2 次方程式

$$x^2-(2p+|p|-|p+1|+1)x+\frac{1}{2}(2p+3|p|-|p+1|-1)=0 \quad \cdots(*)$$

において

$$|p| = \begin{cases} p & (p \geqq 0) \\ -p & (p < 0) \end{cases} \qquad |p+1| = \begin{cases} p+1 & (p \geqq -1) \\ -p-1 & (p < -1) \end{cases}$$

したがって，次の (i)〜(iii) の場合分けを行う．

(i) $p < -1$ のとき，2次方程式 $(*)$ は

$$x^2 - (2p+2)x = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0,\ 2p+2$$

このとき，2次方程式 $(*)$ は実数解をもつ．

(ii) $-1 \leqq p < 0$ のとき，2次方程式 $(*)$ は

$$x^2 - p - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{p+1} \quad (p+1 \geqq 0)$$

このとき，2次方程式 $(*)$ は実数解をもつ ($p = -1$ のとき重解)．

(iii) $0 \leqq p$ のとき，2次方程式 $(*)$ は

$$x^2 - 2px + 2p - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x-2p+1) = 0$$

これを解いて $x = 1,\ 2p-1$

このとき，2次方程式 $(*)$ は実数解をもつ ($p = 1$ のとき重解)．

(i)〜(iii) より，2次方程式 $(*)$ は，実数解をもつ．

(2) (1) の結果と同じ場合分けを行う．

i) $p < -1$ のとき

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0^2 + (2p+2)^2 \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad (2p+1)(2p+3) \leqq 0$$

このとき，$p < -1$ に注意して $\quad -\dfrac{3}{2} \leqq p < -1$

ii) $-1 \leqq p < 0$ のとき

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\sqrt{p+1})^2 + (-\sqrt{p+1})^2 < 1 \quad \text{ゆえに} \quad p \leqq -\frac{1}{2}$$

このとき，$-1 \leqq p < 0$ に注意して $\quad -1 \leqq p \leqq -\dfrac{1}{2}$

iii) $0 \leqq p$ のとき

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1^2 + (2p-1)^2 \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad (2p-1)^2 \leqq 0$$

このとき，$0 \leqq p$ に注意して $\quad p = \dfrac{1}{2}$

i)〜iii) において $p \neq -1,\ 1$ であることに注意して

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq p < -1,\quad -1 < p \leqq -\frac{1}{2},\quad p = \frac{1}{2}}$$

■

3 (1) 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7$$
$$S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

の中心は，それぞれ $(1,\ 1,\ 1)$，$(2,\ 3,\ 3)$ であり，この 2 点間の距離は

$$\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(3-1)^2}=3$$

また，S_1，S_2 の半径は，それぞれ $\sqrt{7}$，1 より

$$\sqrt{7}-1<3<\sqrt{7}+1$$

したがって，S_1 と S_2 の共通部分 C は円である．S_1 と S_2 の方程式から $x^2+y^2+z^2$ の項を消去すると，円 C が存在する次の平面の方程式を得る．

$$2x+4y+4z-25=0$$

これから，S_1 との共通部分が C となる球面の方程式は，実数 k を用いて

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-7+k(2x+4y+4z-25)=0$$
$$(x+k-1)^2+(y+2k-1)^2+(z+2k-1)^2=9k^2+15k+7 \quad \cdots (*)$$

ゆえに　$9k^2+15k+7=9\left(k+\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

球面の半径が最小になるのは，$k=-\dfrac{5}{6}$ ときで，その方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{3}{4}}$$

(2) 球面の半径が $\sqrt{3}$ になるとき　$9k^2+15k+7=3$

ゆえに　$(3k+1)(3k+4)=0$　これを解いて　$k=-\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3}$

上の結果を $(*)$ に代入することにより，求める球面の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3,}$$
$$\boldsymbol{\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3}$$

■

第 6 章　神戸大学

出題分野 (2010-2019) 80 分

◀	神戸大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	数と式										
I	2 次関数	1									
	図形と計量										
	データの分析										
	式と証明			3							
	複素数と方程式										
II	図形と方程式		2	1	2		1				
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法		1	2		1		2	1·2		1
	場合の数と確率		3		3		3	3	3	3	
A	整数の性質	3				2					2
	図形の性質										
	平面上のベクトル										3
B	空間のベクトル	2			1	3		1		1	
	数列						2			2	
	確率分布と統計										

数字は問題番号

6.1　2015 年

1 s，t を $s < t$ をみたす実数とする．座標平面上の 3 点 A$(1,\ 2)$，B$(s,\ s^2)$，C$(t,\ t^2)$ が一直線上にあるとする．以下の問に答えよ．

(1) s と t の間の関係式を求めよ．

(2) 線分 BC の中点を M$(u,\ v)$ とする．u と v の間の関係式を求めよ．

(3) s，t が変化するとき，v の最小値と，そのときの u，s，t の値を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が $a_1 = 5$，$b_1 = 7$ をみたし，さらにすべての実数 x とすべての自然数 n に対して

$$x(a_{n+1}x + b_{n+1}) = \int_{c_n}^{x+c_n} (a_n t + b_n)\, dt$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $c_n = 3^{n-1}$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $c_n = n$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

3 a，b，c を 1 以上 7 以下の自然数とする．次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ 3 辺の長さが a，b，c である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する．

以下の問に答えよ．

(1) $a = b > c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(2) $a > b > c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(3) 条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) A$(1,\ 2)$，B$(s,\ s^2)$，C$(t,\ t^2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s-1, s^2-2), \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (t-s)(1,\ s+t)$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから $(s<t)$

$$(s-1)(s+t)-(s^2-2)\cdot 1 = 0 \quad \text{整理すると} \quad \boldsymbol{st = s+t-2}$$

(2) 線分 BC の中点 M$(u,\ v)$ は

$$u = \frac{s+t}{2}, \quad v = \frac{s^2+t^2}{2} \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の第 1 式および (1) の結果から　$s+t = 2u,\ st = 2u-2 \quad \cdots (**)$

よって　$v = \dfrac{s^2+t^2}{2} = \dfrac{(s+t)^2-2st}{2} = \dfrac{(2u)^2-2(2u-2)}{2}$

$= \boldsymbol{2u^2-2u+2}$

(3) (2) の結果から　$v = 2\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$

したがって　$\boldsymbol{u = \dfrac{1}{2}}$ のとき v は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ をとる．

$u = \dfrac{1}{2}$ を $(**)$ に代入すると　$s+t = 1, \quad st = -1$

2 数 s，t を解とする 2 次方程式は

$$x^2-x-1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$s<t$ であるから　$\boldsymbol{s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$，$\boldsymbol{t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ■

$\boxed{2}$ (1) $x(a_{n+1}x+b_{n+1}) = \displaystyle\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)\,dt = \left[\frac{a_nt^2}{2}+b_nt\right]_{c_n}^{x+c_n}$

$$= \frac{a_n}{2}(x^2+2c_nx)+b_nx = \frac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$$

したがって　$a_{n+1}x^2+b_{n+1}x = \dfrac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$

同じ次数の項の係数が等しいから

$$(*)\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} \\ b_{n+1} = a_nc_n+b_n \end{cases}$$

$\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 5$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから　$\boldsymbol{a_n = 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(2) $c_n = 3^{n-1}$ のとき，(1) の結果を $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$b_{n+1} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times 3^{n-1} + b_n \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = b_n + 5\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき，$b_1 = 7$ より

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 5\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = 7 + 5\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \\ &= 7 + 10\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right\} = 10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3 \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{b_n = 10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3}$

(3) $c_n = n$ のとき，(1) の結果を $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$\text{ゆえに} \quad b_{n+1} = b_n + 5n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \cdots (**)$$

ここで，$r = \dfrac{1}{2}$ とし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} rS_n &= \sum_{k=1}^{n} kr^k = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)r^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-1} + nr^n \\ &= S_n - \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} + nr^n \end{aligned}$$

したがって　$(1-r)S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} - nr^n = \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$

ゆえに　$(1-r)S_n = 2 - (n+2)r^n$　すなわち　$S_n = 4 - (n+2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$(**)$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + 5\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 7 + 5S_{n-1} \\ &= 7 + 5\left\{4 - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} = 27 - 5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{b_n = 27 - 5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$ ■

3 (1) a，b，c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a=b>c$ のとき　$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　　$b+c>a$　かつ　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

このとき，$a=b>c$ であるから　$\dfrac{2}{b}>\dfrac{1}{c}$　すなわち　$2c>b>c$

ゆえに　$c=1$ のとき　$2>b>1$ より　なし
$c=2$ のとき　$4>b>2$ より　$a=b=3$
$c=3$ のとき　$6>b>3$ より　$a=b=4,\ 5$
$c=4$ のとき　$8>b>4$ より　$a=b=5,\ 6,\ 7$
$c=5$ のとき　$10>b>5$ より　$a=b=6,\ 7$
$c=6$ のとき　$12>b>6$ より　$a=b=7$
$c=7$ のとき　$14>b>7$ より　なし

よって，求める組の個数は　$1+2+3+2+1=\mathbf{9}$ (個)

(2) a，b，c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a>b>c$ のとき　$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　　$b+c>a$　かつ　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

ゆえに　　$a-b<c$　かつ　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

このとき，$a>b>c$ であるから　$1\leqq c\leqq 5$

(i) $a>b>c=1$ のとき　$a-b<1$,　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>1$

これをみたす $(a,\ b)$ の組はなし

(ii) $a>b>c=2$ のとき　$a-b<2$,　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{2}$

よって，$(a,\ b)=(4,\ 3)$ の 1 個

(iii) $a>b>c=3$ のとき　$a-b<3$,　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{3}$

よって，$(a,\ b)=(5,\ 4),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (7,\ 5)$ の 4 個

(iv) $a>b>c=4$ のとき　$a-b<4$,　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{4}$

よって，$(a,\ b)=(6,\ 5),\ (7,\ 5),\ (7,\ 6)$ の 3 個

(v) $a>b>c=5$ のとき　$a-b<5$,　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{5}$

よって，$(a,\ b)=(7,\ 6)$ の 1 個

したがって，求める組の個数は　$1+4+3+1=\mathbf{9}$　(個)

(3) a，b，c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a > b = c$ のとき $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$

条件 (∗) をみたすとき $b + c > a$ かつ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$

このとき，$a > b = c$ であるから $c + c > a$ すなわち $2c > a > c$

これは (1) の個数に等しいから 9 (個)

また，$a = b = c$ となる個数は 7 個であるから，以上をまとめると

- $a = b > c$ の場合が 9 個であるから，
  $b = c > a$，$c = a > b$ の場合もそれぞれ 9 個
- $a > b = c$ の場合が 9 個であるから，
  $b > c = a$，$c > a = b$ の場合もそれぞれ 9 個
- $a > b > c$ の場合が 9 個であるから，
  $$a > c > b,\ b > a > c,\ b > a > c,\ c > a > b,\ c > b > a$$
  の場合もそれぞれ 9 個
- $a = b = c$ の場合が 7 個

よって，条件 (∗) をみたす a，b，c の個数は

$$9 \times 3 + 9 \times 3 + 9 \times 6 + 7 = \mathbf{115} \quad (\text{個})$$

■

6.2　2016 年

1 四面体OABCにおいて，PをOAの中点，Qを辺OBを2 : 1に内分する点，Rを辺BCの中点とする．P，Q，Rを通る平面と辺ACの交点をSとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}| : |\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ．

(3) 四面体OABCを1辺の長さが1の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ．

2 a を正の定数とし，$f(x) = |x^2 + 2ax + a|$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) $y = f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 2)$ を通るときの a の値を求めよ．また，そのときの $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) $a = 2$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ．

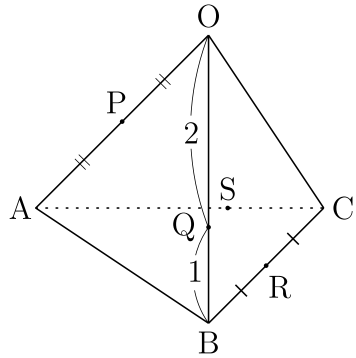
3 さいころを4回振って出た目を順に a，b，c，d とする．以下の問に答えよ．

(1) $ab \geqq cd + 25$ となる確率を求めよ．

(2) $ab = cd$ となる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$= \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} = \boldsymbol{\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}}$$

(2) S は平面 PQR 上の点であるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$$

$$= \frac{1}{2}(1-s-t)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}s + \frac{t}{2}\right)\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}$$

このとき，S は直線 AC 上の点であるから

$$\frac{1}{2}(1-s-t) + \frac{t}{2} = 1, \quad \frac{2}{3}s + \frac{t}{2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = -1,\ t = \frac{4}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AS}}| : |\overrightarrow{\mathrm{SC}}| = 2 : 1}$

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{QS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|^2$$
$$= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 8\vec{b}\cdot\vec{c} + 4\vec{c}\cdot\vec{a})$$

このとき　$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot1\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2 = \frac{1}{9}(1+4+4-2-4+2) = \frac{5}{9}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{QS}}| = \frac{\sqrt{5}}{3}}$ ■

2 (1) $g(x)=x^2+2ax+a$ とおくと　$g(x)=(x+a)^2-a^2+a$

$a>0$ に注意すると

(i) $-a^2+a \geqq 0$，すなわち，$0<a\leqq 1$ のとき，$g(x)\geqq 0$ であるから

$$f(x)=|g(x)|=g(x)$$

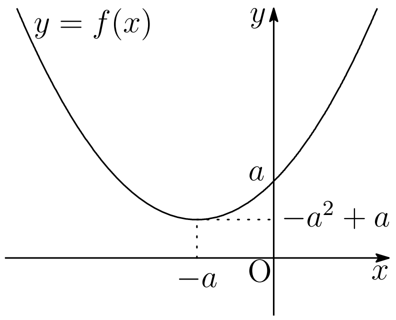
(ii) $-a^2+a<0$，すなわち，$1<a$ のとき，

$g(x)=0$ の解は　$x=-a\pm\sqrt{a^2-a}$

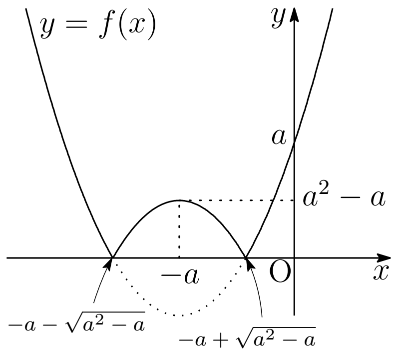
$$f(x)=|g(x)|=\begin{cases} g(x) & (x\leqq -a-\sqrt{a^2-a},\ -a+\sqrt{a^2-a}\leqq x) \\ -g(x) & (-a-\sqrt{a^2-a}\leqq x\leqq -a+\sqrt{a^2-a}) \end{cases}$$

(i)，(ii) より，$y=f(x)$ のグラフは，次のようになる．

(i) $0<a\leqq 1$ のとき



(ii) $1<a$ のとき



(2) $y=f(x)$ が点 $(-1,\ 2)$ を通るから，$f(-1)=2$ より

$$|1-a|=2 \quad \text{このとき}, a>0 \text{ に注意して解くと} \quad a=3$$

(1) で示したグラフから，$y=f(x)$ と x 軸との交点の x 座標は　$-3\pm\sqrt{6}$

よって　$-\displaystyle\int_{-3-\sqrt{6}}^{-3+\sqrt{6}}(x^2+6x+3)\,dx=\frac{1}{6}\{(-3+\sqrt{6})-(-3-\sqrt{6})\}=\mathbf{8\sqrt{6}}$

(3) $a=2$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は，(1)(ii) のグラフに $a=2$ を代入して

$$x=-2\pm\sqrt{2}$$

また，$g(x)=x^2+4x+2$ であるから，$g'(x)=2x+4$ より

$$g'(-2+\sqrt{2})=2(-2+\sqrt{2})+4=2\sqrt{2}>2$$

点 $(-2+\sqrt{2},\ 0)$ が直線 $y=2x+b$ の上側またはこの直線上にあるときで

$$0\geqq 2(-2+\sqrt{2})+b \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b\leqq 4-2\sqrt{2}}$$

■

3 (1) ab の値の集合を M とすると

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$$

$m \in M$ に対する $ab = m$ となる組 (a, b) の個数を $S(m)$ とすると

m	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
$S(m)$	1	2	2	3	2	4	2	1	2	4

m	15	16	18	20	24	25	30	36
$S(m)$	2	1	2	2	2	1	2	1

また，cd の値の集合も M に等しい．

$ab \geqq cd + 25 \geqq 26$ より，ab は 30 または 36.

$ab = 30$ のとき　$cd = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$ab = 36$ のとき　$cd = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10$

$S(30) = 2$，S(36)=1，

$S(1) + S(2) + S(3) + S(4) + S(5) = 1 + 2 + 2 + 3 + 2 = 10$

$S(6) + S(8) + S(9) + S(10) = 4 + 2 + 1 + 2 = 9$

よって，求める確率は　$\dfrac{2 \times 10 + 1 \times (10 + 9)}{6^4} = \boldsymbol{\dfrac{13}{432}}$

(2) $S(m) = 1$ となる m は $1,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$ の 5 通り

$S(m) = 2$ となる m は $2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 15,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30$ の 10 通り

$S(m) = 3$ となる m は 4 の 1 通り

$S(m) = 4$ となる m は $6,\ 12$ の 2 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{1^2 \times 5 + 2^2 \times 10 + 3^2 \times 1 + 4^2 \times 2}{6^4} = \boldsymbol{\dfrac{43}{648}}$　■

6.3　2017 年

1 t を正の実数とする．$f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $2t^3 - 3t^2 + 1$ を因数分解せよ．

(2) $f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ．

(3) $-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ．

2 次の 2 つの条件をみたす x の 2 次式 $f(x)$ を考える．

(i) $y = f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通る．

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 15$.

以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つの解を α，β とするとき，α と β のみたす関係式を求めよ．

(3) (2) における α，β がともに正の整数となるような $f(x)$ をすべて求めよ．

3 $\vec{v}_1 = (1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}_2 = (1, -1, -1)$，$\vec{v}_3 = (-1,\ 1, -1)$，$\vec{v}_4 = (-1, -1,\ 1)$ とする．座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ (1，2，3，4 の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る) をふるごとに，出た目が k $(k = 1, 2, 3, 4)$ のときは $\vec{v}_k$ だけ移動する．すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \vec{v}_k$$

である．ただし，$\mathrm{P}_0 = \mathrm{O}$ である．以下の問に答えよ．

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \perp \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ．

(3) 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $2t^3 - 3t^2 + 1 = \boldsymbol{(2t+1)(t-1)^2}$

(2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2-1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 3(t^2-1) = 3(x^2+2x+1-t^2) \\ &= 3\{(x+1)^2 - t^2\} = 3(x+1+t)(x+1-t) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$-1-t$	$\cdots$	$-1+t$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $4t^3$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x = -1+t$ で極小値 0 をとる．

補足 $f(x) = (x+1)^3 - 3t^2(x+1) + 2t^3$ であるから，$x+1 = X$ とおくと

$$X^3 - 3t^2X + 2t^3 = (X-t)^2(X+2t)$$

ゆえに $\quad f(x) = (x+1-t)^2(x+1+2t)$

(3) $f(-1) = 2t^3$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) - f(-1) &= (x+1)^3 - 3t^2(x+1) = (x+1)\{(x+1)^2 - 3t^2\} \\ &= (x+1)(x+1+\sqrt{3}\,t)(x+1-\sqrt{3}\,t) \end{aligned}$$

$-1+t \leqq 2$，すなわち，$0 < t \leqq 3$ のとき

$$m = f(-1+t)$$

$2 \leqq -1+t$，すなわち，$t \geqq 3$ のとき

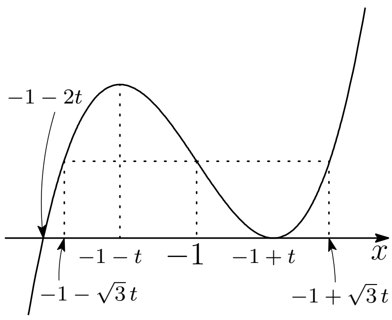
$$m = f(2)$$

$-1+\sqrt{3}t \leqq 2$，すなわち，$0 < t \leqq \sqrt{3}$ のとき

$$M = f(2)$$

$2 \leqq -1+\sqrt{3}t$，すなわち，$t \geqq \sqrt{3}$ のとき

$$M = f(-1)$$



よって $\quad \boldsymbol{m = \begin{cases} 0 & (0 < t \leqq 3) \\ 2t^3 - 9t^2 + 27 & (t \geqq 3) \end{cases}}$

$$\boldsymbol{M = \begin{cases} 2t^3 - 9t^2 + 27 & (0 < t \leqq \sqrt{3}) \\ 2t^3 & (t \geqq \sqrt{3}) \end{cases}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと，(i) より，$f(1) = 4$ であるから

$$a + b + c = 4 \quad \cdots ①$$

(ii) より，$\displaystyle\int_{-1}^{2}(ax^2 + bx + c)\,dx = 15$ であるから

$$\left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-1}^{2} = 15 \quad \text{ゆえに} \quad a + \frac{b}{2} + c = 5 \quad \cdots ②$$

①，② より　$a + c = 6$，$b = -2$　よって，求める1次の係数は　$\mathbf{-2}$

(2) (1) の結果から

$$f(x) = ax^2 - 2x + 6 - a \quad \cdots (*)$$

とおける．2次方程式 $f(x) = 0$ の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{2}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{6-a}{a} = \frac{6}{a} - 1 \quad \cdots (**)$$

上の2式から a を消去すると

$$\alpha\beta = 3(\alpha + \beta) - 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(\alpha - 3)(\beta - 3) = 8}$$

(3) α，β がともに正の整数であるから，$1 \leqq \alpha \leqq \beta$ とすると，$-2 \leqq \alpha - 3 \leqq \beta - 3$ に注意すると，(2) の結果から

$$(\alpha - 3,\ \beta - 3) = (1,\ 8),\ (2,\ 4) \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha,\ \beta) = (4,\ 11),\ (5,\ 7)$$

$(**)$ の第1式より，$a = \dfrac{2}{\alpha + \beta}$ であるから　　$a = \dfrac{2}{15},\ \dfrac{1}{6}$

これを $(*)$ に代入して

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{15}x^2 - 2x + \frac{88}{15}} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{f(x) = \frac{1}{6}x^2 - 2x + \frac{35}{6}}$$

■

3 (1) $i, j = 1, 2, 3, 4$ とし，$\vec{v}_i + \vec{v}_j$ が x 軸と平行になる組み合わせは

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = (2,\ 0,\ 0)$$
$$\vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = (-2,\ 0,\ 0)$$

したがって，求める確率は　$\dfrac{2! + 2!}{4^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2) $\vec{e}_1 = (1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e}_2 = (0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e}_3 = (0,\ 0,\ 1)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，次のベクトルからなる．

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1 + \vec{v}_1 = 2\vec{v}_1, && \vec{v}_2 + \vec{v}_2 = 2\vec{v}_2,\\
&\vec{v}_3 + \vec{v}_3 = 2\vec{v}_3, && \vec{v}_4 + \vec{v}_4 = 2\vec{v}_4,\\
&\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_1, && \vec{v}_1 + \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_2,\\
&\vec{v}_1 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_3, && \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_3,\\
&\vec{v}_2 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_2, && \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = -2\vec{e}_1
\end{aligned}$$

$\vec{v}_j \cdot \vec{e}_k \neq 0$ であるから $(j = 1, 2, 3, 4,\ k = 1, 2, 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}} \perp \overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ となるのは，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ が座標軸に平行で，互いに垂直な場合について調べればよい．(1) の結果と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，x 軸，y 軸，z 軸と平行となる確率は $\dfrac{1}{4}$ であるから，求める確率は

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \times {}_3\mathrm{P}_2 = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(3) $i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i$ のとき，$\vec{v}_i$，$\vec{v}_j$，$\vec{v}_k$ は 1 次独立であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}$ がすべて異なる場合を除く確率であるから

$$1 - \frac{{}_4\mathrm{P}_3}{4^3} = 1 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \boldsymbol{\frac{5}{8}}$$

■

6.4　2018 年

1 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする．辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする．また $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ．

(3) t が (2) で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ．

2 $f(x) = (2x-1)^3$ とする．数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

> $x_1 = 2$ であり，x_{n+1} $(n \geqq 1)$ は点 $(x_n,\ f(x_n))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点の x 座標とする．

以下の問に答えよ．

(1) 点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ．また $t \neq \dfrac{1}{2}$ のときに，その接線と x 軸の交点の x 座標を求めよ．

(2) $x_n > \dfrac{1}{2}$ を示せ．また x_n を n の式で表せ．

(3) $|x_{n+1} - x_n| < \dfrac{3}{4} \times 10^{-5}$ を満たす最小の n を求めよ．ただし $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$，$0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ は用いてよい．

3 さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \cdots (*)$$

を考える．以下の問に答えよ．

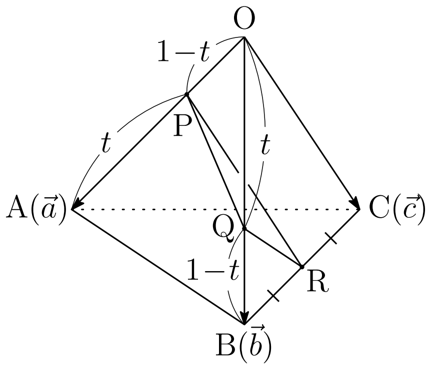
(1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ．

(2) $(*)$ が整数を解にもつとする．このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ．

(3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{b}$$

$$=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

(2) $\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ であるから

$$\{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right\}=0$$

ゆえに $\quad (1-t)\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{2}(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}-t\left(\dfrac{1}{2}-t\right)|\vec{b}|^2-\dfrac{1}{2}t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

上式に $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$|\vec{b}|=1$ を代入すると

$$\frac{1}{2}(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)+\frac{1}{4}(1-t)-t\left(\frac{1}{2}-t\right)-\frac{1}{4}t=0$$

整理すると $\quad 6t^2-7t+2=0 \quad$ ゆえに $\quad (2t-1)(3t-2)=0$

$0<t<1$ に注意して，これを解くと $\qquad \boldsymbol{t=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}}$

(3) (i) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき $\quad \overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{2}|\vec{c}|=\dfrac{1}{2}$

ゆえに $\quad |\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2-2\cdot\frac{1}{2}+1^2}=\dfrac{1}{2}$

よって $\quad \triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

(ii) $t=\dfrac{2}{3}$ のとき $\quad \overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{1}{6}(-\vec{a}+3\vec{c})$

ゆえに $\quad |\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\dfrac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}=\dfrac{1}{3}\sqrt{1^2-4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot1^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\quad |\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2}=\dfrac{1}{6}\sqrt{1^2-6\cdot\frac{1}{2}+9\cdot1^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$

よって $\quad \triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{6}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{36}}$ ■

2 (1) $f(x) = (2x-1)^3$ より　$f'(x) = 6(2x-1)^2$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (2t-1)^3 = 6(2t-1)^2(x-t)$$

したがって　$\boldsymbol{y = (2t-1)^2(6x-4t-1)}$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$6x - 4t - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{x = \frac{4t+1}{6}}$$

(2) (1) の結果より，$x_{n+1} = \dfrac{4x_n+1}{6}$ であるから (ニュートン法[1])

$$x_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(x_n - \frac{1}{2}\right)$$

数列 $\left\{x_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $x_1 - \dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$x_n - \frac{1}{2} = \left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x_n = \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}}$$

これから　$x_n > \dfrac{1}{2}$

(3) (2) の結果から　$x_{n+1} - x_n = \dfrac{9}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} - \dfrac{9}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = -\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$|x_{n+1} - x_n| < \dfrac{3}{4} \times 10^{-5}$ のとき

$$\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{3}{4} \times 10^{-5} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n < 10^{-5}$$

常用対数をとると　$n(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) < -5$

したがって　$n > \dfrac{5}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} \quad \cdots (*)$

ここで，$0.477 - 0.302 < \log_{10} 3 - \log_{10} 2 < 0.478 - 0.301$ であるから

$$28 + \frac{44}{177} = \frac{5}{0.177} < \frac{5}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} < \frac{5}{0.175} = 28 + \frac{4}{7}$$

よって，$(*)$ を満たす最小の n は　**29**　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf (p.17 を参照)

3 (1) 2次方程式 $x^2-ax+b=0\cdots(*)$ が $x=1$ を解にもつから　$b=a-1$

$1\leqq a\leqq 6$，$2\leqq b\leqq 12$ であるから

$$(a,\ b)=(3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$$

a の値に対する確率は $\frac{1}{6}$，それぞれの b の値に対する確率は

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}\right)=\frac{10}{216}=\mathbf{\frac{5}{108}}$$

(2) 2次方程式 $(*)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=a,\quad \alpha\beta=b$$

$(*)$ の整数解を α とすると，上の第1式から

$$\beta=a-\alpha$$

上式の右辺は整数であるから，β も整数である．

2整数 α，β について，$\alpha\leqq\beta$ とおいても一般性を失わないから

$$2\alpha\leqq\alpha+\beta=a\leqq 6\quad ゆえに\quad \alpha\leqq 3$$

(3) (i) $x=2$ が2次方程式 $(*)$ の解のとき　$b=2a-4$

$$(a,\ b)=(3,\ 2),\ (4,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 8)$$

(ii) $x=3$ が2次方程式 $(*)$ の解のとき　$b=3a-9$

$$(a,\ b)=(4,\ 3),\ (5,\ 6)\ (6,\ 9)$$

(1),(i),(ii) より

a	3	4	4,5	6	5	6	6
b	2	3	4	5	6	8	9

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}\cdot 2+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}\right)=\frac{27}{216}=\mathbf{\frac{1}{8}}$$

■

6.5　2019 年

1 a，b，c を実数とし，$a \neq 0$ とする．2 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

で定める．曲線 $y = f(x)$ は点 $\left(2,\ 2 - \dfrac{c}{2}\right)$ を通り，

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{9}{2}$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を a を用いて表せ．

(2) 点 $(1,\ f(1))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を ℓ とする．直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ．

(3) $0 < a < \dfrac{1}{2}$ とする．(2) で求めた直線 ℓ の $y \geqq 0$ の部分と曲線 $y = f(x)$ の $x \geqq 0$ の部分および x 軸で囲まれた図形の面積 S の最大値と，そのときの a の値を求めよ．

2 次のように 1，3，4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする．

$$1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\cdots$$

すなわち，$a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_3 = 4$ で，4 以上の自然数 n に対し，$a_n = a_{n-3}$ とする．この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の問に答えよ．

(1) S_n を求めよ．

(2) $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ．

(3) どのような自然数 k に対しても，$S_n = k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ．

3 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2$ をみたす $\triangle$PAB を考え，辺 AB の中点を M，$\triangle$PAB の重心を G とする．以下の問に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ．

(3) 点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{5}{4}$ をみたすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ．ただし，$0 < \angle\mathrm{ABG} < \pi$ とする．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 曲線 $y = ax^2 + bx + c$ が点 $\left(2,\ 2 - \dfrac{c}{2}\right)$ を通るから

$$4a + 2b + c = 2 - \frac{c}{2} \quad ゆえに \quad 4a + 2b + \frac{3}{2}c = 2 \quad \cdots ①$$

$\displaystyle\int_0^3 (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{9}{2}$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right]_0^3 = \frac{9}{2} \quad ゆえに \quad 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{9}{2} \quad \cdots ②$$

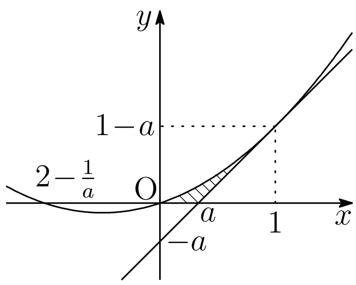
①，② より　$b = 1 - 2a$，$c = 0$　よって　$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + (1 - 2a)x}$

(2) (1) の結果から　$f(1) = 1 - a$，$f'(x) = 2ax + 1 - 2a$ から　$f'(1) = 1$

よって，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - (1 - a) = 1(x - 1) \quad すなわち \quad \boldsymbol{y = x - a}$$

(3) (1)，(2) の結果から



$$\begin{aligned} f(x) - (x - a) &= ax^2 + (1 - 2a)x - (x - a) \\ &= a(x - 1)^2 \end{aligned}$$

3 点 O，$(a,\ 0)$，$(0, -a)$ を頂点とする三角形の面積は $\dfrac{a^2}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 a(x - 1)^2\,dx - \frac{a^2}{2} = \left[\frac{a}{3}(x - 1)^3\right]_0^1 - \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{a}{3} - \frac{a^2}{2} = -\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{18} \end{aligned}$$

$0 < a < \dfrac{1}{2}$ より，S は，$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$ をとる． ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)　(i)　$n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_3 + (1+3+4)\frac{n-3}{3} = 8 + \frac{8}{3}(n-3) = \frac{8n}{3}$$

(ii)　$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_1 + (3+4+1)\frac{n-1}{3} = 1 + \frac{8}{3}(n-1) = \frac{8n-5}{3}$$

(iii)　$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_2 + (4+1+3)\frac{n-2}{3} = 4 + \frac{8}{3}(n-2) = \frac{8n-4}{3}$$

よって　$$\boldsymbol{S_n = \begin{cases} \dfrac{8n}{3} & (n \equiv 0 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-5}{3} & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-4}{3} & (n \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}}$$

(2)　$n = 3m + r$ とおくと $(r = 0,\ 1,\ 2)$

$r = 0$ のとき　$S_{3m} = \dfrac{8 \cdot 3m}{3} = 8m$

$r = 1$ のとき　$S_{3m+1} = \dfrac{8(3m+1)-5}{3} = 8m+1$

$r = 2$ のとき　$S_{3m+2} = \dfrac{8(3m+2)-4}{3} = 8m+4$

$2019 \equiv 3 \pmod 8$ であるから，$S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しない．

(3)　i)　$k \equiv 0, \pm 4 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 0 \pmod 8$

ii)　$k \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 1 \pmod 8$

iii)　$k \equiv \pm 2 \pmod 8$ のとき　$k^2 \equiv 4 \pmod 8$

i)〜iii) および (2) の結果から，どのような自然数 k に対しても，

$$S_n = k^2$$

となる自然数 n が存在する．　■

3 (1) 点Mは辺ABの中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2)+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\quad\cdots①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=2$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=4\quad \text{ゆえに}\quad |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=4+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

上の結果を①に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{1}{4}(4+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+1}$$

(2) 点Gは△PABの重心であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=3\overrightarrow{\mathrm{GM}}\quad\cdots②$

また，$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}})$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\dfrac{3}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}})\quad\cdots③$

$\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}=0\quad\text{および}\quad|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=2^2=4$$

③より
$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{9}{4}|\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2=\frac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2)$$
$$=\frac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2)=\frac{9}{4}\cdot4=9$$

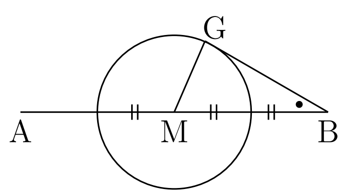
これを(1)の結果に代入して　$9=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+1$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=8}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ を(1)の結果に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=1+\frac{5}{4}\quad\text{ゆえに}\quad|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=\frac{3}{2}$$

これに②を代入することにより　$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MG}}|=\dfrac{1}{2}$

したがって，GはMを中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にある．Bからこの円に引いた接線と辺ABのなす角が求める最大値であるから，MB $=1$ より



$$\angle\mathbf{ABG}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

■

第 7 章　広島大学

出題分野 (2010-2019) 120 分

◀	広島大学	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2 次関数		1								
	図形と計量			3				2			
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式				4	1			2		4
	三角関数								1		
	指数関数と対数関数		2	1							
	微分法と積分法	1·3	3	2	1	2	1·4	1	4	1·3	
A	場合の数と確率	4		4	5	5		4	3	4	2
	整数の性質	5		5							
	図形の性質										4
B	平面上のベクトル	2	4		2		3				
	空間のベクトル					3		3			
	数列				3	4	2·5			2	1·3
	確率分布と統計		5					5			

数字は問題番号

7.1 2015 年

1 a，b，c を実数とし，$a<1$ とする．座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = x^2 - x, \quad C_2 : y = x^3 + bx^2 + cx - a$$

を考える．C_1 と C_2 は，点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ と，それとは異なる点 Q を通る．また，点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいものとする．点 P における C_1 の接線を ℓ_1，点 Q における C_1 の接線を ℓ_2，点 Q における C_2 の接線を ℓ_3 とする．次の問いに答えよ．

(1) b，c および点 Q の座標を a を用いて表せ．

(2) ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が三角形をつくらないような a の値を求めよ．

(3) ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が直角三角形をつくるような a の値の個数を求めよ．

2 n を自然数とし，p_n，q_n を実数とする．ただし，p_1，q_1 は ${p_1}^2 - 4q_1 = 4$ を満たすとする．2 次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ は異なる実数解 α_n，β_n をもつとする．ただし，$\alpha_n < \beta_n$ とする．$c_n = \beta_n - \alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n，r_{n+1} を用いて表せ．

(2) c_n を n の式で表せ．

(3) $p_n = n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ．

3 座標平面上に原点 O と 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ をとり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．点 C は $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$，$0^\circ < \angle\mathrm{AOC} < 90^\circ$，$0^\circ < \angle\mathrm{BOC} < 90^\circ$ を満たすとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(2) 線分 AB と線分 OC の交点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(3) 点 C から線分 OA に引いた垂線と線分 AB の交点を E とする．D は (2) で定めた点とする．このとき，$\triangle\mathrm{OBD}$ と $\triangle\mathrm{CDE}$ の面積の和を t を用いて表せ．

4 α，β は $\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\alpha + \beta < 1$ を満たす実数とする．三つの放物線

$$C_1 : y = x(1-x), \quad C_2 : y = x(1-\beta-x), \quad C_3 : y = (x-\alpha)(1-x)$$

を考える．C_2 と C_3 の交点の x 座標を γ とする．また，C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1) γ を α，β を用いて表せ．

(2) S を α，β を用いて表せ．

(3) α，β が $\alpha + \beta = \dfrac{1}{4}$ を満たしながら動くとき，S の最大値を求めよ．

5 n を自然数とする．A，B，C，D，E の 5 人が 1 個のボールをパスし続ける．最初に A がボールを持っていて，A は自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，ボールを受けた人は，また自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，以後同様にパスを続ける．n 回パスしたとき，B がボールを持っている確率を p_n とする．ここで，たとえば，A $\to$ C $\to$ D $\to$ A $\to$ E の順にボールをパスすれば，4 回パスしたと考える．次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = x^2 - x$，$g(x) = x^3 + bx^2 + cx - a$ とおくと

$$f'(x) = 2x - 1, \quad g'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

このとき，$g(1) = 0$，$g'(1) = f'(1)$ であるから

$$1 + b + c - a = 0, \quad 3 + 2b + c = 1$$

上の 2 式から　　$\boldsymbol{b = -a - 1,\ c = 2a}$

$C_1 : y = x^2 - x$，$C_2 : y = x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a$ から y を消去すると

$$x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a = x^2 - x \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2(x-a) = 0$$

$a < 1$ であるから，点 P$(1,\ 0)$ と異なる C_1，C_2 の交点 Q は　$\boldsymbol{(a,\ a^2 - a)}$

(2) ℓ_1 は点 P$(1,\ 0)$ を通り，傾き 1 の直線であるから　　$\ell_1 : y = x - 1$

ℓ_2 の傾きは　　$f'(a) = 2a - 1$

ℓ_3 の傾きは　　$g'(a) = 3a^2 - 2(a+1)a + 2a = a^2$

ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が三角形をつくらないのは，これら 3 本の直線のうち少なくとも 2 本が平行であるか，3 本の直線が 1 点で交わるときである．

(i) $a < 1$ より，$f'(a) = 2a - 1 < 1$ であるから　$\ell_1 \not\parallel \ell_2$

(ii) $a < 1$ より，$g'(a) - f'(a) = (a-1)^2 \neq 0$ であるから　$\ell_2 \not\parallel \ell_3$

(iii) $\ell_3 /\!/ \ell_1$ のとき　$a^2 = 1$　このとき $a < 1$ に注意して　$a = -1$

(iv) 3 直線が 1 点で交わるとき，すなわち，ℓ_1 が点 Q を通るとき

$$a^2 - a = a - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a-1)^2 = 0$$

$a < 1$ であるから，これを満たす a は存在しない．

(i)〜(iv) より，求める a の値は　　$\boldsymbol{a = -1}$

(3) ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 が直角三角形をつくるのは，これらの 3 本のうち 2 本だけが垂直である場合であり，(2) の結果より，$a \neq -1$ に注意する．

(i) $\ell_1 \perp \ell_2$ のとき　$1\cdot(2a-1) = -1$　すなわち　$a = 0$

(ii) $\ell_2 \perp \ell_3$ のとき　$(2a-1)\cdot a^2 = -1$　整理すると　$2a^3 - a^2 + 1 = 0$

$h(a) = 2a^3 - a^2 + 1$ とおくと　$h'(a) = 6a^2 - 2a = 2a(3a-1)$

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$h'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(a)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{26}{27}$	$\nearrow$

$h(-1) = -2 \neq 0$ であるから，$h(a) = 0$ を満たす a が，$-1 < a < 0$ の範囲に唯一存在する．

(iii) $\ell_3 \perp \ell_1$ のとき　$a^2\cdot 1 = -1$　これを満たす実数 a は存在しない．

(i)〜(iii) から，求める a の個数は　**2 個**　■

2 (1) $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \log_2 \sqrt{n}(n+1)$ より

$$\sqrt{n}(n+1) = 2^{r_n} \quad さらに \quad \sqrt{n+1}(n+2) = 2^{r_{n+1}}$$

よって

$$\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)} = \boldsymbol{\frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}}$$

(2) $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ であるから，(1) の結果より

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}} \quad ゆえに \quad \frac{c_{n+1}}{2^{r+1}} = \frac{c_n}{2^{r_n}}$$

ここで，$c_1 = \sqrt{p_1{}^2 - 4q_1} = 2$，$r_1 = \log_2 2 = 1$ であるから

$$\frac{c_n}{2^{r_n}} = \frac{c_1}{2^{r_1}} = \frac{2}{2^1} = 1 \quad よって \quad c_n = 2^{r_n} = \boldsymbol{\sqrt{n}(n+1)}$$

(3) $x^2 - p_n x + q_n = 0$ の異なる 2 つの実数解が α_n，β_n であるから $(\alpha_n < \beta_n)$

$$\alpha_n = \frac{p_n - \sqrt{p_n{}^2 - 4q_n}}{2}, \quad \beta_n = \frac{p_n + \sqrt{p_n{}^2 - 4q_n}}{2}$$

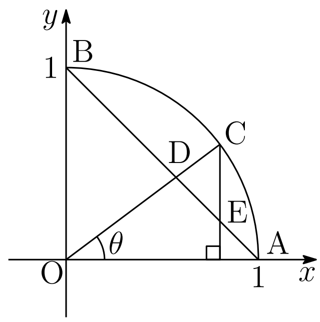
したがって　$c_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{p_n{}^2 - 4q_n}$　ゆえに　$c_n{}^2 = p_n{}^2 - 4q_n$

これに (2) の結果および $p_n = n\sqrt{n}$ を代入すると

$$n(n+1)^2 = n^3 - 4q_n \quad よって \quad \boldsymbol{q_n = -\frac{2n^2+n}{4}}$$

■

3 (1) 与えられた条件により，点Cは原点を中心とする単位円周上の第1象限にある．OCのx軸の正の向きとなす角をθとすると$(0^\circ < \theta < 90^\circ)$



$$\mathrm{C}(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t$ であるから　$\cos\theta = t$

ゆえに　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-t^2}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \cos\theta(1,\ 0) + \sin\theta(0,\ 1)$
$= \boldsymbol{t\vec{a} + \sqrt{1-t^2}\,\vec{b}}$

(2) 点Dは，直線OC : $y = x\tan\theta$ と直線AB : $y = -x+1$ の交点であるから

$$\left(\frac{1}{1+\tan\theta},\ \frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta},\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)$$

よって
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\left\{(\cos\theta)\vec{a} + (\sin\theta)\vec{b}\right\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}(t\vec{a}+\sqrt{1-t^2}\,\vec{b})}$$

(3) $\triangle\mathrm{OBD} \backsim \triangle\mathrm{CED}$ であるから，(1)，(2)の結果から

$$\mathrm{OD} : \mathrm{OC} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} : \cos\theta = 1 : \cos\theta+\sin\theta$$

その相似比は　$\mathrm{OD} : \mathrm{DC} = 1 : \cos\theta+\sin\theta-1$

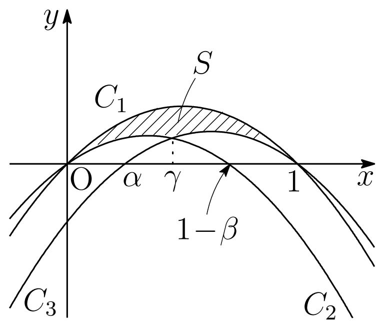
$$\triangle\mathrm{OBD} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{2(\cos\theta+\sin\theta)}$$

求める面積をSとすると

$$S = \frac{\cos\theta}{2(\cos\theta+\sin\theta)}\left\{1+(\cos\theta+\sin\theta-1)^2\right\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{t\{1+(t+\sqrt{1-t^2}-1)^2\}}{2(t+\sqrt{1-t^2})}}$$

■

4 (1) C_2，C_3 の方程式から y を消去すると



$$x(1-\beta-x)=(x-\alpha)(1-x)$$

整理すると　　$(\alpha+\beta)x=\alpha$

$\alpha>0$，$\beta>0$ より，$\alpha+\beta\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{\gamma=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

(2) S は，右上の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\gamma}\{x(1-x)-x(1-\beta-x)\}\,dx\\&\qquad\qquad+\int_{\gamma}^{1}\{x(1-x)-(x-\alpha)(1-x)\}\,dx\\&=\beta\int_0^{\gamma}x\,dx-\alpha\int_{\gamma}^{1}(x-1)\,dx\\&=\beta\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\gamma}-\alpha\left[\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_{\gamma}^{1}=\frac{1}{2}\beta\gamma^2+\frac{1}{2}\alpha(\gamma-1)^2\\&=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2+\frac{1}{2}\alpha\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2\\&=\frac{\alpha^2\beta}{2(\alpha+\beta)^2}+\frac{\alpha\beta^2}{2(\alpha+\beta)^2}=\boldsymbol{\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}}\end{aligned}$$

(3) $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\beta=\dfrac{1}{4}-\alpha>0$ より，$0<\alpha<\dfrac{1}{4}$ であるから

$$S=\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}=2\alpha\beta=2\alpha\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)=-2\left(\alpha-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{32}$$

よって　$\alpha=\beta=\dfrac{1}{8}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$ をとる．

別解 $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ のとき，(2) の結果から　$S=2\alpha\beta$

$\alpha>0$，$\beta>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\geqq\sqrt{\alpha\beta}\quad\text{ゆえに}\quad\sqrt{\alpha\beta}\leqq\frac{1}{8}$$

$\alpha\beta\leqq\dfrac{1}{64}$ であるから　$S=2\alpha\beta\leqq\dfrac{1}{32}$

よって　S は最大値 $\dfrac{1}{32}$　$\left(\alpha=\beta=\dfrac{1}{8}\right)$ ■

5　(1) n 回パスしたとき，A，B，C，D，E それぞれがボールを持っている確率を a_n，b_n，c_n，d_n，e_n とすると (n は自然数)

$$a_1 = 0,\quad b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = \frac{1}{4}$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n + d_n + e_n)$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n + d_n + e_n)$$
$$c_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + d_n + e_n)$$
$$d_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + e_n)$$
$$e_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + d_n)$$

$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 1$ であるから，上の第2式より

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(1 - b_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{4}\left(b_n - \frac{1}{5}\right)$$

数列 $\left\{b_n - \dfrac{1}{5}\right\}$ は，初項 $b_1 - \dfrac{1}{5}$，公比 $-\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{5} = \left(b_1 - \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{1}{5}\left\{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$p_n = b_n$ であるから　　$p_n = \dfrac{1}{5}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right\} \quad \cdots (*)$

$(*)$ より　　$\boldsymbol{p_1 = \dfrac{1}{4},\ p_2 = \dfrac{3}{16},\ p_3 = \dfrac{13}{64},\ p_4 = \dfrac{51}{256}}$

(2) $(*)$ より　　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{5}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}}$　■

7.2 2016 年

1 a を正の定数とし，座標平面上において，

$$円\ C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad 放物線\ C_2 : y = ax^2 + 1$$

を考える．C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 ℓ は点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ で C_2 に接している．次の問いに答えよ．

(1) s，t および a を求めよ．

(2) C_2，ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) 円 C_1 上の点が点 P から点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ まで反時計回りに動いてできる円弧を C_3 とする．C_2，ℓ および C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ．

2 四角形 ABCD において，

$$\angle \mathrm{DAB} = \angle \mathrm{DBC} = 90^\circ, \quad \angle \mathrm{BCD} = 60^\circ, \quad \mathrm{AB} = \mathrm{AD}, \quad \mathrm{BC} = 1$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) 対角線 BD の長さの 2 乗 BD^2 を求めよ．

(2) 対角線 AC の長さの 2 乗 AC^2 を求めよ．

(3) $\angle \mathrm{BAC} = \alpha$，$\angle \mathrm{ACD} = \beta$ とおくとき，$\cos^2 \alpha$，$\cos^2 \beta$ を求めよ．

3 座標空間に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(s,\ s,\ s),\ \mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$

がある．ただし，$s>0$ とする．t，u，v を実数とし，

$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u，v を s を用いて表せ．

(3) (2) のとき，2 点 D，E を

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$$

となる点とする．四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ．

4 xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う．

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く．ただし，点 $(3,\ 1)$ に到達したら Q は原点に戻る．

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ．

(2) $(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ．

(3) $x_8+y_8\leqq 4$ となる確率を求めよ．

(4) $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ．ここで k は n 以下の自然数とする．

5 n を 2 以上の自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) 変量 x のデータの値が x_1，x_2，$\cdots$，x_n であるとし，

$$f(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$$

とする．$f(a)$ を最小にする a は x_1，x_2，$\cdots$，x_n の平均値で，そのときの最小値は x_1，x_2，$\cdots$，x_n の分散であることを示せ．

(2) c を定数として，変量 y，z の k 番目のデータの値が

$$y_k=k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$
$$z_k=ck \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

であるとする．このとき y_1，y_2，$\cdots$，y_n の分散が z_1，z_2，$\cdots$，z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ．

(3) 変量 x のデータの値が x_1，x_2，$\cdots$，x_n であるとし，その平均値を $\overline{x}$ とする．新たにデータを得たとし，その値を x_{n+1} とする．x_1，x_2，$\cdots$，x_n，x_{n+1} の平均値を x_{n+1}，$\overline{x}$ および n を用いて表せ．

(4) 次の 40 個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど 40，670，35 であった．

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が 40 であった．このとき，41 個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ．ただし，得られた値が整数でない場合は，小数第 1 位を四捨五入せよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $C_1 : x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ における接線 ℓ の方程式は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=1 \quad \text{すなわち} \quad y=\sqrt{3}x-2$$

点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ は C_2 上の点であるから，$\mathrm{Q}(s,\ as^2+1)$
$C_2 : y=ax^2+1$ を微分すると　$y'=2ax$
C_2 上の点 Q における接線の方程式は

$$y-(as^2+1)=2as(x-s) \quad \text{ゆえに} \quad y=2asx-as^2+1$$

これが ℓ に一致するから

$$\begin{cases} 2as=\sqrt{3} \\ -as^2+1=-2 \end{cases} \qquad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\frac{1}{4},\ s=2\sqrt{3}}$$

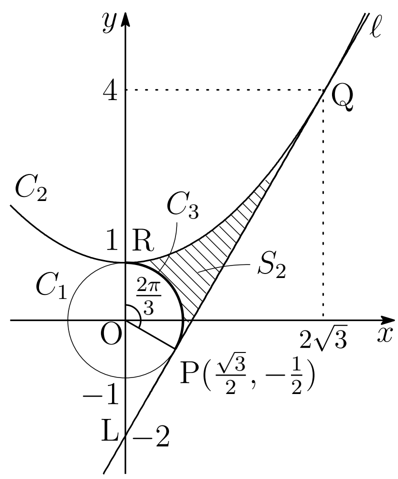
また　$t=as^2+1=\dfrac{1}{4}(2\sqrt{3})^2+1=\mathbf{4}$

(2) (1) の結果より，$C_2 : y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ であるから，求める面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_0^{2\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{4}x^2+1-(\sqrt{3}x-2)\right\}dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{3}}(x-2\sqrt{3})^2\,dx$$
$$=\frac{1}{12}\Big[\,(x-2\sqrt{3})^3\,\Big]_0^{2\sqrt{3}}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

(3) ℓ と y 軸との交点を L とし，求める面積を S_2 とすると，$\angle\mathrm{POR}=\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

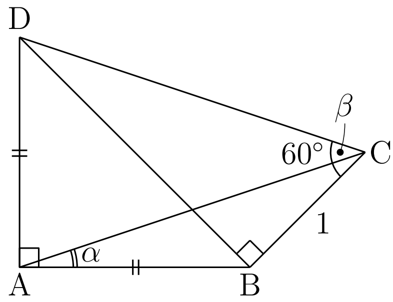
$$S_2=S_1-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\triangle\mathrm{OLP}$$
$$=2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}}$$



2 (1) 直角三角形 BCD に着目すると

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BC}\tan 60^\circ = 1\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{BD^2 = 3}$$

(2) 直角二等辺三角形 ABD に着目すると



$$\mathrm{AB} = \mathrm{BD}\cos 45^\circ = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

△ABC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AC}^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 1^2 - 2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 1\cos 135^\circ$$
$$= \boldsymbol{\frac{5}{2} + \sqrt{3}}$$

(3) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}} = \frac{\frac{3}{2} + \left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) - 1}{2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{AC}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{6}\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\cos^2\alpha = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{6\mathrm{AC}^2} = \frac{6(2 + \sqrt{3})}{3(5 + 2\sqrt{3})} = \boldsymbol{\frac{2}{13}(4 + \sqrt{3})}$$

△ACD に余弦定理を適用すると

$$\cos\beta = \frac{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{CD}^2 - \mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}} = \frac{\left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) + 4 - \frac{3}{2}}{4\mathrm{AC}} = \frac{5 + \sqrt{3}}{4\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\cos^2\beta = \frac{(5 + \sqrt{3})^2}{16\mathrm{AC}^2} = \frac{2(14 + 5\sqrt{3})}{8(5 + 2\sqrt{3})} = \boldsymbol{\frac{1}{52}(40 - 3\sqrt{3})}$$

■

3 (1) O(0, 0, 0), A(s, s, s), B(-1, 1, 1), C(0, 0, 1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = s(1,\ 1,\ 1),$$
$$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 1,\ 1) - t(s,\ s,\ s)$$
$$= (-1 - st,\ 1 - st,\ 1 - st)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \vec{d}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{d} = 0$ であるから ($s > 0$)，

$$1(-1 - st) + 1(1 - st) + 1(1 - st) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t = \frac{1}{3s}}$$

(2) (1) の結果から，$st = \dfrac{1}{3}$ より $\vec{d} = \left(-1 - \dfrac{1}{3},\ 1 - \dfrac{1}{3},\ 1 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}(-2,\ 1,\ 1)$

$$\vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - u\overrightarrow{\mathrm{OA}} - v\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ 0,\ 1) - u(s,\ s,\ s) - v(-1,\ 1,\ 1)$$
$$= (-us + v, -us - v,\ 1 - us - v)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \vec{e}$, $\vec{d} \perp \vec{e}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{e} = 0$, $\vec{d} \cdot \vec{e} = 0$ であるから

$$1(-us + v) + 1(-us - v) + 1(1 - us - v) = 0,$$
$$-2(-us + v) + 1(-us - v) + 1(1 - us - v) = 0$$

整理すると $\begin{cases} -3us - v + 1 = 0 \\ -4v + 1 = 0 \end{cases}$ よって $\boldsymbol{u = \dfrac{1}{4s},\ v = \dfrac{1}{4}}$

(3) (2) の結果から，$su = v = \dfrac{1}{4}$ であるから

$$\vec{e} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}(0, -1.\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{e}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OE}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

このとき，四面体 OADE の体積が 2 であるから，$\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = 2$ より

$$\frac{1}{6} \cdot s\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{s = 6}$$

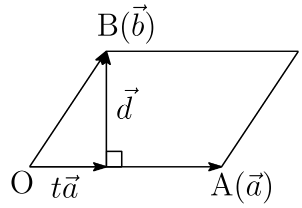
解説

座標空間に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$$

があるとき，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

$\vec{d}=\vec{b}-t\vec{a}$ が $\vec{a}\perp\vec{d}$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{d}=0$ より



$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-t\vec{a})=0 \quad ゆえに \quad t|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S^2 &= (|\vec{a}||\vec{d}|)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}-t\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2(|\vec{b}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{a}|^2) \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-2t|\vec{a}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})+(t|\vec{a}|^2)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \end{aligned}$$

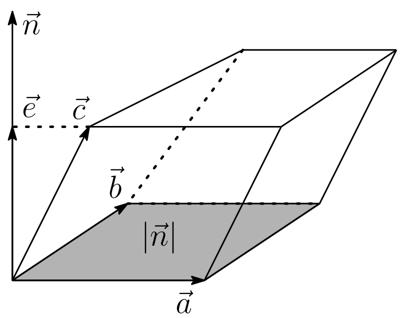
$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ であるから

$$\begin{aligned} S^2 &= ({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\ &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 \end{aligned}$$

ここで，$\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$ とおくと

$$|\vec{n}|=S, \quad \vec{n}\cdot\vec{a}=0, \quad \vec{n}\cdot\vec{b}=0$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および $\vec{n}$ に平行なベクトル $\vec{e}$ を用いて



$$\vec{c}=\vec{e}+u\vec{a}+v\vec{b} \quad (u,\ v \text{ は定数})$$

とかける．このとき

$$\vec{n}\cdot\vec{e}=\vec{n}\cdot(\vec{c}-u\vec{a}-v\vec{b})=\vec{n}\cdot\vec{c}$$

$\vec{n}$ と $\vec{e}$ のなす角は 0° または 180° であるから　$|\vec{n}\cdot\vec{e}|=|\vec{n}||\vec{e}|$

この平行六面体の体積を V とすると，$V=|\vec{n}||\vec{e}|$ であるから

$$V=|\vec{n}\cdot\vec{e}|=|\vec{n}\cdot\vec{c}|=|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3|$$

よって，四面体 OABC の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}S\cdot|\vec{e}|=\dfrac{1}{6}|\vec{n}||\vec{e}|=\dfrac{1}{6}V$ より

$$\frac{1}{6}|(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3|$$

■

4 (1) $(x_4,\ y_4) = (0,\ 0)$ となるのは，硬貨を 4 回投げて，表が 3 回，裏が 1 回出る確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(2) $(x_8,\ y_8) = (5,\ 3)$ となるのは，点 $(3, 1)$ を通らずに，点 $(5,\ 3)$ に到達する確率であるから，(1) の結果を利用して

$$ {}_8\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{4} \times {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7}{32} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \boldsymbol{\frac{1}{8}} $$

(3) $x_8 + y_8 \leqq 4$ となるのは，4 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達することである．したがって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \boldsymbol{\frac{1}{4}} $$

(4) $x_{4n} + y_{4n} \leqq 4k$ となるのは，4 回目，8 回目，$\cdots$，$4(n-k)$ 回目に点 $(3,\ 1)$ に到達する，すなわち，ちょうど $n-k$ 回原点に戻る．よって，(1) の結果から，求める確率は

$$ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} = \boldsymbol{\frac{1}{4^{n-k}}} $$

■

5 (1) $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の平均を $\overline{x}$ とすると

$$ \begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - 2a\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - 2a\overline{x} + a^2 = (a - \overline{x})^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - \overline{x}^2 \end{aligned} $$

$f(a)$ は，$a = \overline{x}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - \overline{x}^2$ をとる．これは $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の分散である．

(2) $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ の平均を $\overline{y}$ とし，${y_1}^2,\ {y_2}^2,\ \cdots,\ {y_n}^2$ の平均を $\overline{y^2}$ とすると

$$ \begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n+1), \\ \overline{y^2} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) \end{aligned} $$

y_1，y_2，$\cdots$，y_n の分散は

$$\overline{y^2}-\overline{y}^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)-\left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}^2=\frac{1}{12}(n+1)(n-1)$$

z_1，z_2，$\cdots$，z_n の平均を $\overline{z}$ とし，${z_1}^2$，${z_2}^2$，$\cdots$，${z_n}^2$ の平均を $\overline{z^2}$ とすると，$z_k=cy_k$ であるから

$$\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k=c\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=c\overline{y},$$

$$\overline{z^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{z_k}^2=c^2\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2=c^2\overline{y^2}$$

z_1，z_2，$\cdots$，z_n の分散は

$$\overline{z^2}-\overline{z}^2=c^2\overline{y^2}-(c\overline{y})=c^2(\overline{y^2}-\overline{y}^2)$$

$n\geqq 2$ より，$\overline{y^2}-\overline{y}^2>0$ であるから，条件を満たす c の範囲は

$$c^2<1\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{-1<c<1}$$

(3) $\overline{x}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ より，求める平均は

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}x_k=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(n\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n\overline{x}+x_{n+1}}{n+1}}$$

(4) (3) の結果を利用すると，平均値は

$$\frac{40\overline{x}+x_{41}}{41}=\frac{40\cdot 40+40}{41}=\mathbf{40}$$

$\dfrac{1}{40}(x_k-40)^2=670$ および $x_{41}=40$ より，分散は

$$\frac{1}{41}\sum_{k=1}^{41}(x_k-40)^2=\frac{1}{41}\left\{\sum_{k=1}^{40}(x_k-40)^2+(x_{41}-40)^2\right\}$$
$$=\frac{40}{41}\cdot\frac{1}{40}\sum_{k=1}^{40}(x_k-40)^2=\frac{40}{41}\times 670\fallingdotseq 653.6\cdots$$

よって，分散は　**654**

40 個のデータで中央値 35 に一致するデータ 35 は存在しないので，小さい方から 20 番目が 30 で，21 番目が 40 である．したがって，データ 40 を追加したとき，これら 41 個のデータについて，小さい方から 21 番目に該当する，すなわち，中央値は **40** である．■

7.3　2017 年

$\boxed{1}$ 座標平面上の 2 点 A$(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，B$(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ を考え，A，B 間の距離を L とする．ただし，θ は条件

$$(*) \qquad 0 \leqq \theta < 2\pi \quad \text{かつ} \quad \sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $(*)$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(2) $t = \sin\theta\cos\theta$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) L を (2) の t を用いて表せ．

(4) L の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 座標平面上の 3 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0), \quad \mathrm{A}(3,\ 0), \quad \mathrm{B}(1,\ 2)$$

を考える．C を線分 OA 上にあり，$\angle\mathrm{OBC} = 45^\circ$ を満たす点とする．また，P を x 座標が t である直線 OA 上の点とする．点 Q，R，P$'$ を次により定める．

(a) 点 P を通り傾きが 1 の直線と，直線 AB の交点を Q とする．

(b) 点 Q を通り直線 OB に垂直な直線と，直線 OB の交点を R とする．

(c) 点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線と，直線 OA の交点を P$'$ とする．

次の問いに答えよ．

(1) 点 Q の座標を t を用いて表せ．

(2) 点 R の座標を t を用いて表せ．

(3) 点 P$'$ の座標を t を用いて表せ．

(4) 点 P$'$ の x 座標を $f(t)$ とする．数列 $\{t_n\}$ を

$$t_1 = 2, \quad t_{n+1} = f(t_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．数列 $\{t_n\}$ の一般項を求めよ．

3 n を 2 以上の整数とする．n 個のさいころを投げ，出た目のすべての積を X とする．次の問いに答えよ．

(1) X が 5 の倍数である確率を n を用いて表せ.

(2) X が 5 の倍数である確率が 0.99 より大きくなる最小の n を求めよ．ただし，$\log_2 3 = 1.585$，$\log_2 5 = 2.322$ とする．

(3) X が 3 でも 5 でも割り切れない確率を n を用いて表せ.

(4) X が 15 の倍数である確率を n を用いて表せ.

4 座標平面上の二つの曲線

$$C_1 : y = 4x^3 - 1, \quad C_2 : y = x^3$$

を考える．$a > 0$ に対して，x 座標が a である C_1 上の点を A とし，A における C_1 の接線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標を p とする．p の値を求めよ．

(2) 直線 ℓ の方程式を，a を用いて表せ.

(3) 直線 ℓ が C_2 に接するとき，a の値を求めよ．

(4) (3) のとき，直線 ℓ と C_2 の接点を B とする．C_1，C_2 と線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$ より

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4} < \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{7}{4}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi}$$

(2) $$t = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots(*)$$

(1) の結果から，$\pi < 2\theta < 2\pi$ であるから $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2} \leqq t < 0}$

(3) $\mathrm{A}(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ より

$$\begin{aligned} L^2 &= (\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)^2 \\ &= (\sin\theta - \cos\theta)^2\{1 + (\sin\theta + \cos\theta)^2\} \\ &= (1 - 2\sin\theta\cos\theta)(2 + 2\sin\theta\cos\theta) \\ &= (1 - 2t)(2 + 2t) = 2(1 + t)(1 - 2t) \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{L = \sqrt{2(1+t)(1-2t)}}$

(4) (3) の結果から $L^2 = -4t^2 - 2t + 2 = -4\left(t + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$

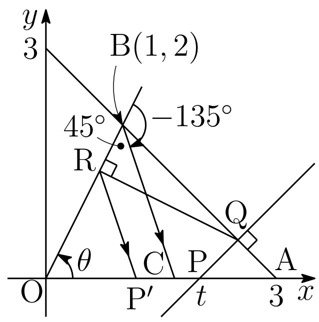
上式および $(*)$ より L は

$t = -\dfrac{1}{4}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi}$ のとき最大値 $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

$t = -\dfrac{1}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{3}{4}\pi}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

■

2 (1) 点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ を通り，傾きが1の直線は



$$y = x - t$$

2点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る直線は

$$y = -x + 3$$

この2直線の交点Qは　$\boldsymbol{\left(\dfrac{3+t}{2},\ \dfrac{3-t}{2}\right)}$

(2) 点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3+t}{2},\ \dfrac{3-t}{2}\right)$ を通り，直線OBに垂直な直線は

$$y - \frac{3-t}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3+t}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{9-t}{4}$$

これと直線OB : $y = 2x$ との交点Rは　$\boldsymbol{\left(\dfrac{9-t}{10},\ \dfrac{9-t}{5}\right)}$

(3) 直線OBと x 軸の正の向きとなす角を θ とすると　$\tan\theta = 2$

直線BCの傾きは　$\tan(\theta - 135^\circ) = \dfrac{\tan\theta - \tan 135^\circ}{1 + \tan\theta\tan 135^\circ} = \dfrac{2 - (-1)}{1 + 2\cdot(-1)} = -3$

点 $\mathrm{R}\left(\dfrac{9-t}{10},\ \dfrac{9-t}{5}\right)$ を通り，直線BCと平行な直線は

$$y - \frac{9-t}{5} = -3\left(x - \frac{9-t}{10}\right) \quad \text{ゆえに} \quad y = -3x + \frac{9-t}{2}$$

この直線と直線OAの交点P′は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{9-t}{6},\ 0\right)}$

(4) (3)の結果より，P′の x 座標が $f(t)$ であるから　$f(t) = \dfrac{9-t}{6}$

$t_{n+1} = f(t_n)$ より　$t_{n+1} = \dfrac{9-t_n}{6}$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

したがって　$t_{n+1} - \dfrac{9}{7} = -\dfrac{1}{6}\left(t_n - \dfrac{9}{7}\right)$

数列 $\left\{t_n - \dfrac{9}{7}\right\}$ は初項 $t_1 - \dfrac{9}{7} = 2 - \dfrac{9}{7} = \dfrac{5}{7}$，公比 $-\dfrac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$t_n - \frac{9}{7} = \left(t_1 - \frac{9}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t_n = \frac{9}{7} + \frac{5}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}$$

■

3 (1) X が5の倍数となる事象を A とすると

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \boldsymbol{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

(2) (1) の結果を利用して $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.99$ ゆえに $\left(\frac{6}{5}\right)^n > 100$

2を底とする対数をとると $n\log_2\frac{6}{5} > \log_2 100$

したがって

$$n(1 + \log_2 3 - \log_2 5) > 2(1 + \log_2 5)$$
$$n > \frac{2(1 + \log_2 5)}{1 + \log_2 3 - \log_2 5}$$

$$\frac{2(1 + \log_2 5)}{1 + \log_2 3 - \log 25} = \frac{2(1 + 2.322)}{1 + 1.585 - 2.322} = \frac{6.644}{0.263} \fallingdotseq 25.2\cdots$$

よって，求める最小の整数 n は **26**

(3) X が3の倍数となる事象を B とすると，求める確率は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(4) (3) の結果から $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

したがって $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$P(\overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n$ ゆえに $P(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

よって X が15の倍数である確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &= \boldsymbol{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n} \end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $C_1 : y = 4x^3 - 1$ と $C_2 : y = x^3$ の交点の x 座標が p であるから

$$4p^3 - 1 = p^3 \quad \text{ゆえに} \quad p^3 = \frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$$

(2) $y = 4x^3 - 1$ を微分すると　$y' = 12x^2$

C_1 上の点 $(a,\ 4a^3 - 1)$ における接線 l の方程式は

$$y - (4a^3 - 1) = 12a^2(x - a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 12a^2x - 8a^3 - 1}$$

(3) $y = x^3$ を微分すると　$y' = 3x^2$

l と C_2 との接点の x 座標を t とすると，接線の傾きと y 座標により

$$\begin{cases} 3t^2 = 12a^2 & \cdots ① \\ t^3 = 12a^2t - 8a^3 - 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① から　$t^2 = 4a^2$　ゆえに　$t = \pm 2a$

(i) $t = 2a$ を ② に代入すると　$(2a)^3 = 12a^2 \cdot 2a - 8a^3 - 1$

整理すると　$8a^3 = 1$　ゆえに　$a = \dfrac{1}{2}$，$t = 1$

(ii) $t = -2a$ を ② に代入すると　$(-2a)^3 = 12a^2 \cdot (-2a) - 8a^3 - 1$

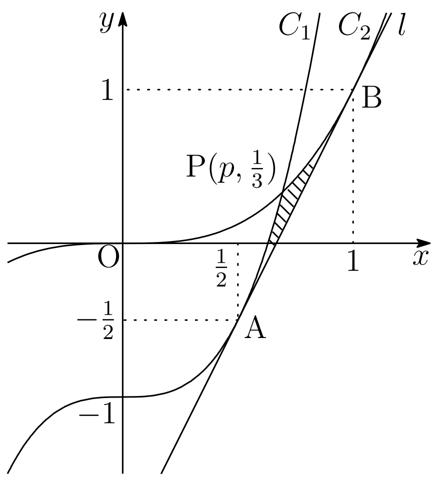
整理すると　$24a^3 = -1$　これは $a > 0$ であることに反するので不適

よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

(4) 2点 A，B の x 座標は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$，1

(2),(3) の結果から　$l : y = 3x - 2$

求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^{p} (4x^3 - 1)\,dx + \int_{p}^{1} x^3\,dx \\ &\qquad - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (3x - 2)\,dx \\ &= \Big[\, x^4 - x \,\Big]_{\frac{1}{2}}^{p} + \Big[\, \frac{1}{4}x^4 \,\Big]_{p}^{1} \\ &\qquad - \Big[\, \frac{3}{2}x^2 - 2x \,\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \frac{3}{4}p^4 - p + \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$p^4 = p^3p = \dfrac{1}{3}p$ に注意して　$S = -\dfrac{3}{4}p + \dfrac{9}{16} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} + \dfrac{9}{16}}$　■

7.4 2018年

1 次の問いに答えよ．

(1) t の2次関数 $s = \left(t - \dfrac{1}{5}\right)\left(t - \dfrac{3}{5}\right)$ のグラフを図示せよ．

(2) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(A) 2次式 $t^2 - ut + v$ は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される．

(3) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(B) 2次式 $t^2 - ut + v$ は，$0 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される．

(4) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が4点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x + y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ．

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 実数 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，不等式

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} < 1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \quad \left(0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

により定まる実数 α は，θ についての整数 $f(\theta)$ を用いて $\alpha = f(\theta)$ と表すことができる．このような $f(\theta)$ を一つ求めよ．

(3) (2) で求めた $f(\theta)$ を用いて，数列 $\{\theta_n\}$ を

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{n+1} = f(\theta_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) (3) の数列 $\{\theta_n\}$ に対し，

$$|\theta_{n+1} - \theta_n| \leqq \frac{\pi}{1000}$$

となる最小の自然数 n を求めよ．

$\boxed{3}$ O を原点とする座標平面上の曲線

$$C : y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{13}{6}$$

を考える．C 上の点 D$(-1,\ 2)$ における C の接線を ℓ とし，D と異なる C と ℓ の共有点を E とする．次の問いに答えよ．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) E の座標を求めよ．

(3) 原点 O を中心とする半径 1 の円の周上の点 A$(a,\ b)$ を考える．ただし，a と b はともに正であるとする．直線 ℓ 上の動点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が P の位置によらず一定であるとき，A の座標を求めよ．

(4) A を (3) で求めた点とする．点 Q が C 上を D から E まで動くときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を求めよ．

4 座標平面上で，三つの不等式

$$y \geqq 0, \quad x+y \geqq 4, \quad 2x+3y \leqq 12$$

によって表される領域を D とする．次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．D に含まれる格子点をすべて求めよ．

(3) 1個のさいころを2回投げるとき，1回目に出た目の数を X，2回目に出た目の数を Y とする．点 $(X,\ Y)$ が D に含まれる確率を求めよ．

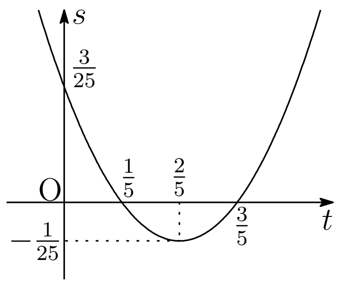
(4) 1個のさいころを n 回投げるとき，出た目の数の中の最小の数を Z，最大の数を W とする．点 $(Z,\ W)$ が D に含まれる確率 P_n を求めよ．ただし，n は2以上の自然数とする．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $s = \left(t-\dfrac{1}{5}\right)\left(t-\dfrac{3}{5}\right)$ より

$$s = \left(t-\frac{2}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}$$

グラフの概形は右の図のようになる．



(2) $f(t) = t^2 - ut + v$ とおくと $f(t) = \left(t-\dfrac{u}{2}\right)^2 + v - \dfrac{u^2}{4}$

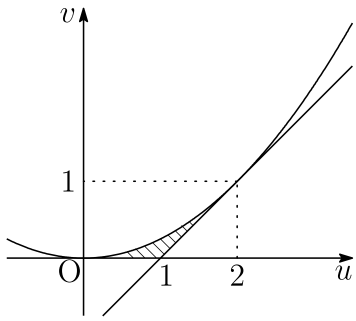
2 次方程式 $f(t) = 0$ の実数解 x, y が $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たすから，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \geqq 0$ および上式より

$$v \geqq 0, \quad 1 - u + v \geqq 0, \quad 0 \leqq \frac{u}{2} \leqq 1, \quad v - \frac{u^2}{4} \leqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} 0 \leqq u \leqq 2 \\ v \geqq 0 \\ v \geqq u - 1 \\ v \leqq \dfrac{u^2}{4} \end{cases}$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．



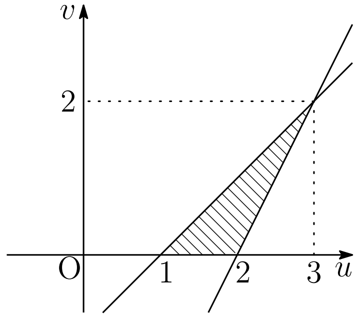
(3) 2 次方程式 $f(t) = 0$ の実数解 x, y が $0 \leqq x \leqq 1 \leqq y \leqq 2$ を満たすから，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \leqq 0$，$f(2) \geqq 0$ より

$$v \geqq 0, \quad 1 - u + v \leqq 0, \quad 4 - 2u + v \geqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} v \geqq 0 \\ v \leqq u - 1 \\ v \geqq 2u - 4 \end{cases}$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．



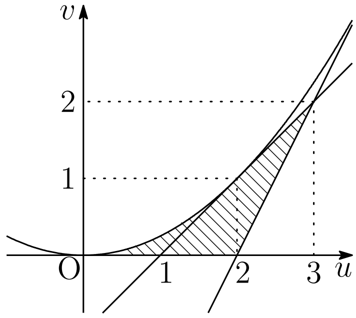
(4) $A=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$，$B=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 1\leqq y\leqq 2\}$ とすると，$(x,\ y)$ が 4 点 $(0,0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部は $A\cup B$ である．(1)，(2) で求めた領域をそれぞれ E，F とすると

$$点\,(x+y,\ xy)\quad すなわち\quad 点\,(u,\ v)$$

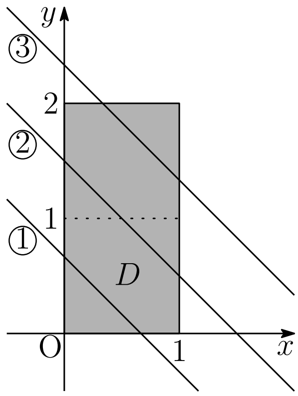
の表す領域は $E\cup F$ で，右の図のようになる．

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^2\frac{u^2}{4}\,du+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1$$
$$=\left[\frac{u^3}{12}\right]_0^2+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{7}{6}}$$



別解　$D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2\}$ とし，直線 $x+y=u$ 上の点 $(x,\ y)\in D$ における $v=xy$ のとる値の範囲を求める．



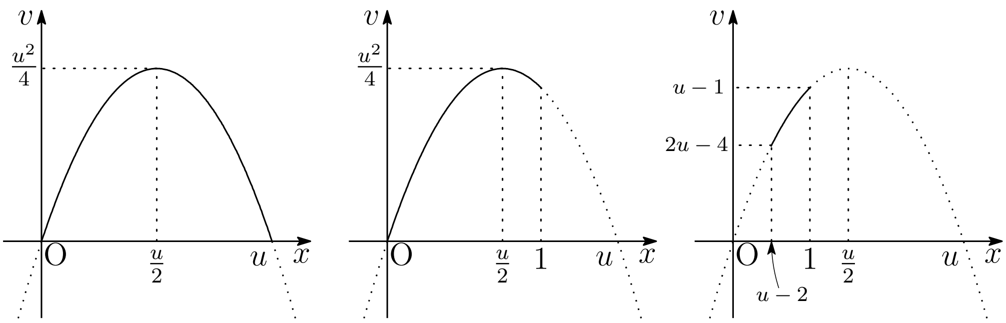
$$v=x(u-x)=-\left(x-\frac{u}{2}\right)^2+\frac{u^2}{4}$$

① $0\leqq u\leqq 1$ のとき　$0\leqq x\leqq u$

② $1\leqq u\leqq 2$ のとき　$0\leqq x\leqq 1$

③ $2\leqq u\leqq 3$ のとき　$u-2\leqq x\leqq 1$

① $0\leqq u\leqq 1$　　② $1\leqq u\leqq 2$　　③ $2\leqq u\leqq 3$



(i) $0\leqq u\leqq 2$ のとき　$0\leqq v\leqq\dfrac{u^2}{4}$

(ii) $2\leqq u\leqq 3$ のとき　$2u-4\leqq v\leqq u-1$

よって　$S=\displaystyle\int_0^2\frac{u^2}{4}\,du+\int_2^3\{(u-1)-(2u-4)\}\,du=\frac{7}{6}$　■

$\boxed{2}$ (1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$0 \leqq \cos\theta \leqq 1$　ゆえに　$0 \leqq \dfrac{1-\cos\theta}{2} \leqq \dfrac{1}{2}$

よって　$\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} \leqq \sqrt{\dfrac{1}{2}} < 1$

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ $\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$2\cos^2\alpha - 1 = -\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos 2\alpha = \cos(\pi-\theta)$$

このとき，$0 \leqq 2\alpha \leqq \pi$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \pi - \theta \leqq \pi$ であるから，第 2 式から

$$2\alpha = \pi - \theta \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}$$

(3) $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ より，(2) の結果から　$\theta_{n+1} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta_n}{2}$

したがって　$\theta_{n+1} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(\theta_n - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ より　$\theta_n - \dfrac{\pi}{3} = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　よって　$\boldsymbol{\theta_n = \dfrac{\pi}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$

(4) (3) の結果から　$\theta_{n+1} - \theta_n = \dfrac{\pi}{3}\left\{-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} = -\pi\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

したがって　$|\theta_{n+1} - \theta_n| = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

$|\theta_{n+1} - \theta_n| \leqq \dfrac{\pi}{1000}$ より

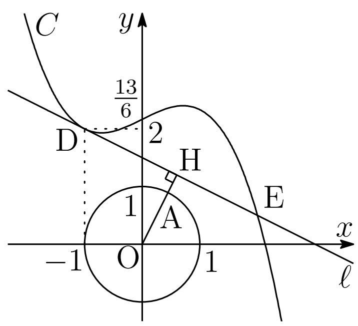
$$\frac{\pi}{2^{n+1}} \leqq \frac{\pi}{1000} \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n+1} \geqq 1000$$

$2^9 = 512$，$2^{10} = 1024$ より，上式を満たす最小の自然数 n は

$$n + 1 = 10 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{n = 9}$$

■

3　(1) $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}$ より　$y'=-x^2+\frac{1}{2}$



$x=-1$ のとき　　$y'=-\frac{1}{2}$

ℓ は点 D$(-1,\ 2)$ を通り，傾き $-\frac{1}{2}$ の直線である

$y-2=-\frac{1}{2}(x+1)$　すなわち　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

(2) C と ℓ の共有点は　　$(*)\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6} \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}$

$(*)$ から y を消去すると　$-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

整理すると　$x^3-3x-2=0$　ゆえに　$(x+1)^2(x-2)=0$

E の x 座標は $x\neq -1$ に注意して　$x=2$　これを $(*)$ に代入して　E$\boldsymbol{\left(2,\ \frac{1}{2}\right)}$

(3) O から ℓ に垂線 OH を引くと，直線 OH の方程式は　$y=2x$

直線 OH と ℓ の交点 H の座標は　$\left(\frac{3}{5},\ \frac{6}{5}\right)$

ℓ の方向ベクトルを $\vec{v}=(2,-1)$ とし，直線 OH の方向ベクトルを $\vec{n}=(1,\ 2)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+t\vec{v}=t\vec{v}+\frac{3}{5}\vec{n}\quad (t \text{ は媒介変数})$$

$(1,\ 0)=\frac{1}{5}(2\vec{v}+\vec{n})$，$(0,\ 1)=\frac{1}{5}(-\vec{v}+2\vec{n})$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(a,\ b)=a(1,\ 0)+b(0,1)\\ &=\frac{a}{5}(2\vec{v}+\vec{n})+\frac{b}{5}(-\vec{v}+2\vec{n})=\frac{2a-b}{5}\vec{v}+\frac{a+2b}{5}\vec{n}\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2a-b}{5}t|\vec{v}|^2+\frac{3}{25}(a+2b)|\vec{n}|^2=(2a-b)t+\frac{3}{5}(a+2b)$

上式は t の値によらず一定であるから　$2a-b=0$　$\cdots$①

点 A$(a,\ b)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上の第 1 象限にあるから

$$a^2+b^2=1\ (a>0,\ b>0)\quad\cdots②$$

①，② を解いて　$a=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$b=\frac{2}{\sqrt{5}}$　よって　A$\boldsymbol{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$

(4) 点 Q$(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は，$(**)$ と同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x,\ y)=\frac{2x-y}{5}\vec{v}+\frac{x+2y}{5}\vec{n}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{n}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\frac{x+2y}{5\sqrt{5}}|\vec{n}|^2=\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{3}x^3+2x+\frac{13}{3}\right)\end{aligned}$$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-\dfrac{2}{3}x^3+2x+\dfrac{13}{3}\right)$ とおくと $(-1\leqq x\leqq 2)$

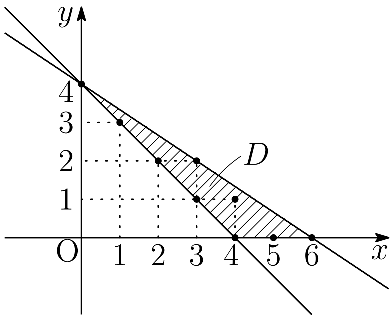
$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x^2+2)=-\frac{2}{\sqrt{5}}(x+1)(x-1)$$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$	$\nearrow$	$\frac{17}{3\sqrt{5}}$	$\searrow$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$

よって，Q$\left(1,\ \dfrac{7}{3}\right)$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{17\sqrt{5}}{15}}$ をとる．

補足 点 Q が C 上を D から E まで動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を与える点における接線は ℓ に平行である． ■

4 (1) 三つの不等式



$$y \geqq 0, \quad x+y \geqq 4, \quad 2x+3y \leqq 12$$

すなわち $\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \geqq -x+4 \\ y \leqq -\dfrac{2}{3}x+4 \end{cases}$

この連立不等式の表す領域 D は，右の図の斜線部分で境界線を含む．

(2) (1) の図から，求める格子点は

$$\mathbf{(0,\ 4),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 0),\ (4,\ 1),\ (5,\ 0),\ (6,\ 0)}$$

(3) 点 $(X,\ Y)$ が D に含まれるものは，次の5通り．

$$(X,\ Y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

よって，求める確率は $\dfrac{5}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$

(4) $1 \leqq Z \leqq W \leqq 6$ である $(Z,\ W)$ の組は $(Z,\ W)=(1,\ 3),\ (2,\ 2)$

(i) $(Z,\ W)=(1,\ 3)$ のとき
$1 \leqq Z \leqq W \leqq 3$，$1 \leqq Z \leqq W \leqq 2$，$2 \leqq Z \leqq W \leqq 3$ である事象をそれぞれ A，B，C とすると，このときの確率は

$$\begin{aligned} P(A)-P(B\cup C) &= P(A)-P(B)-P(C)+P(B\cap C) \\ &= \frac{3^n}{6^n}-\frac{2^n}{6^n}-\frac{2^n}{6^n}+\frac{1^n}{6^n} \\ &= \frac{3^n-2^{n+1}+1}{6^n} \end{aligned}$$

(ii) $(Z,\ W)=(2,\ 2)$ のとき，$Z=W=2$ であるから，このときの確率は

$$\frac{1^n}{6^n}=\frac{1}{6^n}$$

(i),(ii) は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3^n-2^{n+1}+1}{6^n}+\frac{1}{6^n}=\boldsymbol{\frac{3^n-2^{n+1}+2}{6^n}}$$

■

7.5 2019 年

$\boxed{1}$ $a > 0$，$r > 0$ とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする．また，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される．

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) b_n を a，r および n を用いて表せ．

(2) 一般項が

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ．

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする．すなわち，

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k$$

とする．このとき，一般項が

$$d_n = 2^{M_n}$$

である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ．

$\boxed{2}$ n を自然数とし，p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする．一方の面に 0，もう一方の面に 1 と書いたカードがある．最初，このカードは 0 と書かれた面が上になるように置いてある．表の出る確率が p のコインを投げ，裏が出たときだけカードを裏返すという試行を n 回繰り返して行う．n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 である確率を P_n とおく．次の問いに答えよ．

(1) P_n を p および n を用いて表せ．

(2) $n \geqq 2$ とする．n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 であり，さらに，途中でカードが少なくとも 1 回裏返されたことがわかっている．このとき，ちょうど 2 回裏返された確率を p および n を用いて表せ．

3 座標平面上の二つの曲線

$$C : y = x^3, \quad C' : y = 8x^3$$

と曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ を考える．点 P_1 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_1 とし，点 Q_1 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_2 とする．次に，点 P_2 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_2 とし，点 Q_2 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_3 とする．このように，自然数 n に対して，点 P_n を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_n とし，点 Q_n を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする．点 P_n の x 座標を a_n とおく．次の問いに答えよ．

(1) a_n を n を用いて表せ．

(2) 点 P_{n+1} における曲線 C の接線，直線 $x = a_n$ および曲線 C で囲まれる部分のうち，$a_{n+1} \leqq x \leqq a_n$ の領域にある面積を S_n とする．S_n を n を用いて表せ．

(3) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とおく．T_n を n を用いて表せ．

4 原点を O とする座標平面上において，点 A(0, 3)，B(0, −1) および x 軸上の正の部分を動く点 P(t, 0) があり，∠APB は鈍角でないとする．△ABP の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする．次の問いに答えよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている．その交点のことを，三角形の垂心という．

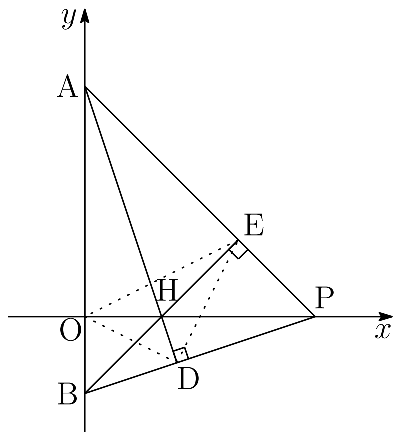
(1) ∠APB が直角となる t の値を求めよ．

(2) 点 H の座標を t を用いて表せ．

以下では，t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする．

(3) 点 H が △ODE の内心であることを証明せよ．ただし，1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい．

(4) △ODE の内接円の半径を t を用いて表せ．



解答例

$\boxed{1}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公比 r の等比数列であるから $(a>0,\ r>0)$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$b_1 = a_1 = a$，$b_{n+1} = b_n a_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = ar^n$

$n \geqq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{b_k} = \prod_{k=1}^{n-1} ar^k \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_n}{a} = a^{n-1}r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$n=1$ のときも，上式は成立することから　$\boldsymbol{b_n = a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)}}$

(2) (1) の結果から　$\log_2 b_n = n\log_2 a + \dfrac{1}{2}n(n-1)\log_2 r$

したがって　$c_n = \dfrac{\log_2 b_n}{n} = \log_2 a + \dfrac{1}{2}(n-1)\log_2 r$

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $\log_2 a$，公差 $\dfrac{1}{2}\log_2 r$ の等差数列

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{\log_2 a + \frac{1}{2}(k-1)\log_2 r\right\} = n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r$$

ゆえに

$$\begin{aligned} M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k &= \frac{1}{n}\left\{n\log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1)\log_2 r\right\} \\ &= \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1)\log_2 r \end{aligned}$$

したがって　$d_n = 2^{M_n} = ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$

よって，数列 $\{d_n\}$ は，初項 a，公比 $r^{\frac{1}{4}}$ の等比数列である．■

2 (1) 条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$P_1 = p, \quad P_{n+1} = pP_n + (1-p)(1-P_n) \qquad (n \geqq 1)$$

ゆえに $$P_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$$

したがって $$P_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}\left(p - \frac{1}{2}\right)$$

よって $$\boldsymbol{P_n = \frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\}}$$

(2) n 回の試行で少なくとも 1 回裏返されて，n 回終了後にカードの上の面が 0 である事象を A とし，n 回の試行でちょうど 2 回裏返される事象を B とする．

$$P(A) = P_n - p^n = \frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\} - p^n$$
$$P(A \cap B) = {}_n\mathrm{C}_2 \cdot p^{n-2}(1-p)^2 = \frac{1}{2}n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{\frac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\} - p^n}$$
$$= \boldsymbol{\frac{n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{1 + (2p-1)^n - 2p^n}}$$

■

3 (1) P_n，P_{n+1} は $C: y=x^3$ 上の点であるから

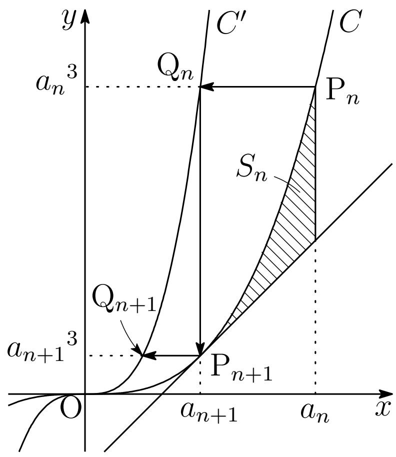
$$\mathrm{P}_n(a_n,\ {a_n}^3),\quad \mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ {a_{n+1}}^3)$$

右の図から，Q_n の座標は，P_{n+1} の x 座標および P_n の y 座標と等しいから

$$\mathrm{Q}_n\left(a_{n+1},\ {a_n}^3\right)$$

Q_n は $C': y=8x^3$ 上の点であるから

$${a_n}^3=8{a_{n+1}}^3 \quad ゆえに \quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$$



$a_1=1$ であるから，上式より $\quad a_n=a_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2^{n-1}}}$

(2) $C: y=x^3$ より $\quad y'=3x^2$

ここで，C 上の点 $(\alpha,\ \alpha^3)$ における接線を ℓ とすると，その方程式は

$$y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha) \quad ゆえに \quad y=3\alpha^2x-2\alpha^3$$

C と ℓ で囲まれる部分のうち，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の領域にある面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\{x^3-(3\alpha^2x-2\alpha^3)\}\,dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x+2\alpha)\,dx\\&=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^3+3\alpha(x-\alpha)^2\}\,dx=\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4+\alpha(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta\\&=\frac{1}{4}(3\alpha+\beta)(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

上式に $\alpha=a_{n+1}=\dfrac{1}{2^n}$，$\beta=a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ を代入することにより

$$S_n=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\right)^3=\boldsymbol{\frac{5}{2^{4n+2}}}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{k=1}^n S_k=\sum_{k=1}^n\frac{5}{2^{4k+2}}=\frac{5}{64}\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{16}\right)^{k-1}\\&=\frac{5}{64}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n}{1-\frac{1}{16}}=\boldsymbol{\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{2^{4n}}\right)}\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 3 点 A$(0,\ 3)$，B$(0, -1)$，P$(t,\ 0)$ $(t > 0)$ により

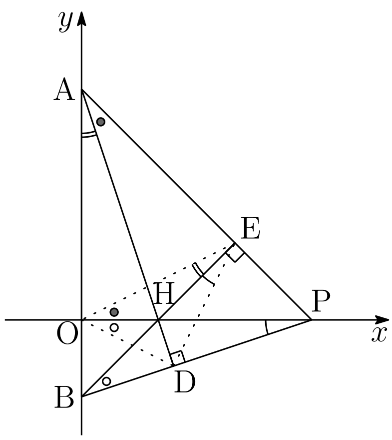
$$\text{直線 AP の傾きは } -\frac{3}{t},\quad \text{直線 BP の傾きは } \frac{1}{t}$$

2 直線 AP，BP は直交するから $-\frac{3}{t}\cdot\frac{1}{t} = -1$ よって $\boldsymbol{t = \sqrt{3}}$

(2) 直線 BE は点 B$(0, -1)$ を通り，傾き $\frac{t}{3}$ であるから (直線 AP に垂直)

$$y = \frac{t}{3}x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{t}{3}\left(x - \frac{3}{t}\right) \quad \text{よって} \quad \mathbf{H}\left(\boldsymbol{\frac{3}{t},\ 0}\right)$$

(3) 四角形 AOHE，四角形 OBDH，四角形 HDPE は，それぞれ対角の和が 180° であるから，円に内接する．



四角形 AOHE において　$\angle\text{EOH} = \angle\text{EAH}$

$\angle\text{OEH} = \angle\text{OAH}$

四角形 OBDH において　$\angle\text{HOD} = \angle\text{HBD}$

四角形 HDPE において　$\angle\text{HED} = \angle\text{HPD}$

$\triangle\text{AHE} \backsim \triangle\text{BHD}$ より　$\angle\text{EAH} = \angle\text{HBD}$

$\triangle\text{AHO} \backsim \triangle\text{PHD}$ より　$\angle\text{OAH} = \angle\text{HPD}$

上の第 1，第 3，第 5 式から

$$\angle\text{EOH} = \angle\text{HOD} \quad \cdots①$$

同様に，上の第 2，第 4，第 6 式から

$$\angle\text{OEH} = \angle\text{HED} \quad \cdots②$$

①，② より，△ODE において，線分 OH，EH は，それぞれ ∠O，∠E の二等分線である．よって，点 H は △ODE の内心である．

(4) 点 E は，直線 AP : $y = -\frac{3}{t}x + 3$ と (2) の直線 $y = \frac{t}{3}x - 1$ 交点である．

これらの連立方程式を解くと　$\text{E}\left(\frac{12t}{t^2+9},\ \frac{3t^2-9}{t^2+9}\right)$

ゆえに，直線 OE の方程式は　$y = \frac{3t^2-9}{12t}x$　すなわち　$(t^2-3)x - 4ty = 0$

△ODE の内接円の半径は，点 $\text{H}\left(\frac{3}{t},\ 0\right)$ から直線 OE までの距離であるから $(t > \sqrt{3})$

$$\frac{\left|(t^2-3)\cdot\frac{3}{t} - 4t\cdot 0\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2 + (-4t)^2}} = \boldsymbol{\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}}$$

■