令和６年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　令和 6 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4 5

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k(n-2k) = 2024$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ．

2 a，b を実数とする．曲線 $C : y = x^2$ と曲線 $C' : y = -x^2 + ax + b$ はある点を共有しており，その点におけるそれぞれの接線は直交している．C と C' で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ．

3 $f(x)$ は x に関する 4 次多項式で 4 次の係数は 1 である．$f(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると 1 余り，$(x-1)^2$ で割ると 2 余る．$f(x)$ を求めよ．

4 実数 a，b は $-1 < a < 1$，$-1 < b < 1$ を満たす．座標空間内に 4 点 $\mathrm{A}(a, -1, -1)$，$\mathrm{B}(-1,\ b, -1)$，$\mathrm{C}(-a,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{D}(1, -b,\ 1)$ をとる．

(1) A，B，C，D がひし形の頂点となるとき，a と b の関係を表す式を求めよ．

(2) a，b が (1) の等式を満たすとき，A，B，C，D を頂点とする四角形の面積の最小値を求めよ．

5 n を 3 以上の奇数とする．円に内接する正 n 角形の頂点から無作為に相異なる 3 点を選んだとき，その 3 点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 p_n を求めよ．

解答例

1

$$\sum_{k=1}^{m} k(n-2k) = n\sum_{k=1}^{m} k - 2\sum_{k=1}^{m} k^2$$
$$= n\cdot\frac{1}{2}m(m+1) - 2\cdot\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$
$$= \frac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2) = 2024$$

$2024 = 2^3\cdot11\cdot23$ であるから

$$m(m+1)(3n-4m-2) = 2^4\cdot3\cdot11\cdot23$$

連続する2数 $m,\ m+1$ の一方は奇数1，3，11，23であることに注意すると，次の ①～⑥ の場合が考えられる．

	m	$m+1$	$3n-4m-2$
①	1	2	$2^3\cdot3\cdot11\cdot23$
②	2	3	$2^3\cdot11\cdot23$
③	3	2^2	$2^2\cdot11\cdot23$
④	11	$2^2\cdot3$	$2^2\cdot23$
⑤	$2\cdot11$	23	$2^3\cdot3$
⑥	23	$2^3\cdot3$	$2\cdot11$

①～⑥ をそれぞれ解くと

$$(m,\ n) = (1,\ 2026),\ (2,\ 678),\ (3,\ 342),\ (11,\ 46),\ (22,\ 38),\ \left(23,\ \frac{116}{3}\right)$$

n は自然数であるから，⑥ は不適．

よって，求める $(m,\ n)$ の組は，次の5つである．

$$\boldsymbol{(m,\ n) = (1,\ 2026),\ (2,\ 678),\ (3,\ 342),\ (11,\ 46),\ (22,\ 38)}$$

■

2 $C: y = x^2$ と $C': y = -x^2+ax+b$ の共有点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$.

$$x^2 = -x^2 + ax + b \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - ax - b = 0 \qquad (*)$$

解と係数の関係から，上の第 2 式より

$$\alpha + \beta = \frac{a}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{b}{2}$$

$C,\ C'$ の方程式をそれぞれ微分すると　$y' = 2x,\ \ y' = -2x + a$

それぞれの交点における接線が直交しているから，$\alpha,\ \beta$ は 2 次方程式

$$2x(-2x+a) = -1 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - ax - \frac{1}{2} = 0 \qquad (**)$$

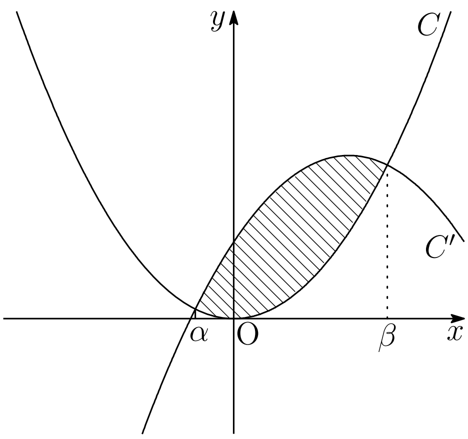
の解であり，$(*)$ と $(**)$ は一致するから，定数項を比較して　$b = \dfrac{1}{2},\ \ \alpha\beta = -\dfrac{1}{4}$

$$(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{a^2}{4} + 1$$

C と C' で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{(-x^2+ax+b) - x^2\}\,dx = -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{4}+1\right)^{\frac{3}{2}} \geqq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

よって，求める面積の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$



■

3 $f(x)$ の x^4 の係数が 1 であることと $f(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが 1 であるから，$f(x)$ を次のようにおける ($p,\ q$ は定数).

$$f(x) = (x+1)^2\{(x-1)^2 + p(x-1) + q\} + 1 \qquad (*)$$

上式を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \{(x-1)^2 + 4(x-1) + 4\}\{(x-1)^2 + p(x-1) + q\} + 1 \\ &= (x-1)^4 + (p+4)(x-1)^3 + (4p+q+4)(x-1)^2 \\ &\qquad\qquad + 4(p+q)(x-1) + 4q + 1 \\ &= (x-1)^2\{(x-1)^2 + (p+4)(x-1) + (4p+q+4)\} \\ &\qquad\qquad + 4(p+q)x - 4p + 1 \end{aligned}$$

また，$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが 2 であるから

$$4(p+q) = 0,\ -4p + 1 = 2 \quad \text{これを解いて} \quad p = -\frac{1}{4},\ q = \frac{1}{4}$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2\left\{(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}\right\} + 1 \\ &= (x^2+2x+1)\left(x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}\right) + 1 \\ &= \boldsymbol{x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}} \end{aligned}$$

別解 $f'(x)$ は $x+1$，$x-1$ を因数にもつ 3 次式で，最高次の係数が 4 であるから

$$f'(x) = (x+1)(x-1)(4x+3A) = 4x^3 + 3Ax^2 - 4x - 3A$$

とおき，これを積分すると ($A,\ B$ は定数)

$$f(x) = x^4 + Ax^3 - 2x^2 - 3Ax + B$$

$f(-1) = 1,\ f(1) = 2$ であるから

$$2A + B - 1 = 1, \quad -2A + B - 1 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{5}{2}$$

よって $\quad \boldsymbol{f(x) = x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}}$ ■

4 (1) 4 点 A$(a, -1, -1)$，B$(-1,\ b, -1)$，C$(-a,\ 1,\ 1)$，D$(1, -b,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1-a,\ 1+b,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2a,\ 2,\ 2),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1-a,\ 1-b,\ 2)$$

上式より $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成立する．
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$ を満たせばよいから

$$(-1-a)^2 + (1+b)^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2 + 2^2$$

整理すると　　$\boldsymbol{b = 1 - a}$
$-1 < b < 1$ であるから

$$-1 < 1-a < 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a < 2$$

$-1 < a < 1$ に注意して　よって　　$\boldsymbol{0 < a < 1,\ \ b = 1 - a}$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 0$ であるから

$$-2a\cdot 2 + 2\cdot(-2b) + 2\cdot 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 1$$

(2) $-1 < b < 1$ であるから，(1) の結果より

$$-1 < 1-a < 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a < 2$$

$-1 < a < 1$ に注意して　　$0 < a < 1$　$\cdots$①

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1-a,\ 2-a,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1-a,\ a,\ 2)$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2(2-a,\ 1+a, -1+a-a^2)$
四角形 ABCD の面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S^2}{4} &= (2-a)^2 + (1+a)^2 + (-1+a-a^2)^2 \\ &= a^4 - 2a^3 + 5a^2 - 4a + 6\end{aligned}$$

$f(a) = \dfrac{S^2}{4}$ とおき，これを微分すると

$$\begin{aligned}f'(a) &= 4a^3 - 6a^2 + 10a - 4 \\ &= 2(2a-1)(a^2 - a + 2) \\ &= 2(2a-1)\left\{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right\}\end{aligned}$$

① の範囲で増減を考えると

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，S の最小値は

$$2\sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)}=2\sqrt{\frac{81}{16}}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

別解 四角形 ABCD はひし形であるから，その面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2a,\ 2,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(2,-2b,\ 2)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2\sqrt{a^2+2},\quad |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=2\sqrt{b^2+2}$$

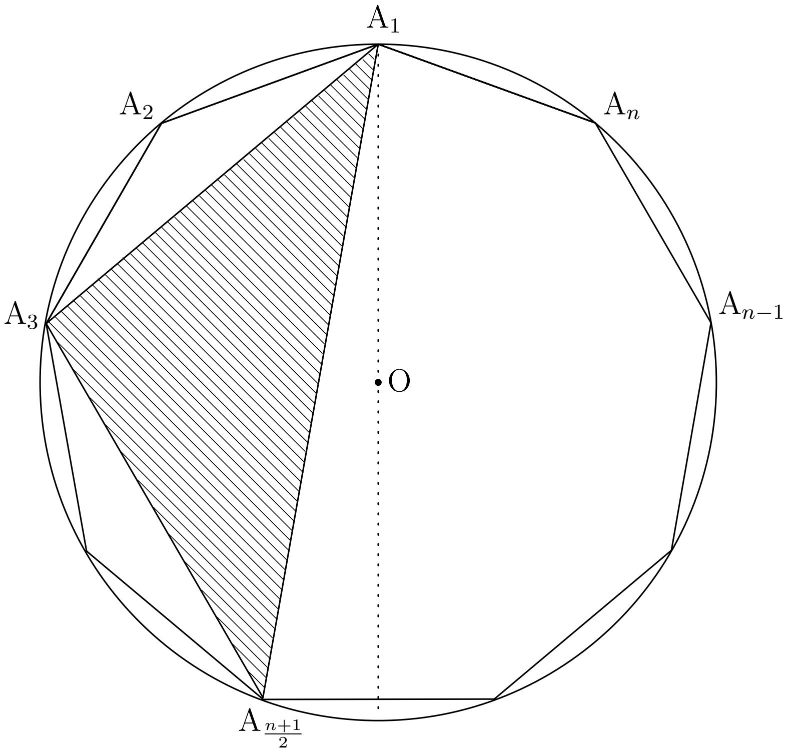
したがって，(1) の結果に注意して

$$\begin{aligned}\frac{S^2}{4}&=(a^2+2)(b^2+2)=a^2b^2+2(a^2+b^2)+4\\&=(2-ab)^2+2(a+b)^2=\{2-a(1-a)\}^2+2\\&=(a^2-a+2)^2+2\\&=\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right\}^2+2\geqq\frac{81}{16}\end{aligned}$$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，S の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$ ■

5 n 個の頂点を反時計回りに $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ をとる (n は 3 以上の奇数).

2 点 $\mathrm{A}_\ell, \mathrm{A}_m$ について，$\ell \equiv m \pmod{n}$ のとき，これらの 2 点は同一の点する.



$i < j < k \leqq i + \frac{n-1}{2}$ とし，点 A_i に対して 2 点 $\mathrm{A}_j, \mathrm{A}_k$ をとると，三角形 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ は ($n \geqq 5$)，その内部に O を含まない．i の選び方 n 通りに対して，2 点 $\mathrm{A}_j, \mathrm{A}_k$ の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りあるから

$$1 - p_n = n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2 \,/\, {}_n\mathrm{C}_3$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2 \,/\, {}_n\mathrm{C}_3 \\ &= 1 - n \times \frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2} - 1\right)}{2\cdot 1} \times \frac{3\cdot 2\cdot 1}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{n+1}{4(n-2)} \end{aligned}$$

$p_3 = 1$ であるから，上式は $n = 3$ のときも成立する.

よって　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{n+1}{4(n-2)}}$

補足　例えば，上の図で A_1 を除く点線の左右には $\dfrac{n-1}{2}$ 個ずつ頂点が存在する. ■