令和４年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数Ⅰ・Ⅱ・A・B　令和４年２月 25 日

問題 1 2 3 4 5

1 $2^a3^b+2^c3^d=2022$ を満たす 0 以上の整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組を求めよ．

2 $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(1,\ 3\sin 2\theta)$ が三角形をなすとき，$\triangle \mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を求めよ．

3 次の問いに答えよ．

(1) 実数 $x,\ y$ について，「$|x-y| \leqq x+y$」であることの必要十分条件は「$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$」であることを示せ．

(2) 次の不等式で定まる xy 平面上の領域を図示せよ．

$$|1+y-2x^2-y^2| \leqq 1-y-y^2$$

4 t を実数とし，座標空間に点 $\mathrm{A}(t-1,\ t,\ t+1)$ をとる．また，$(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$，$(0,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 1)$ を頂点とする立方体を D とする．点 P が D の内部およびすべての面上を動くとき，線分 AP の動く範囲を W とし，W の体積を $f(t)$ とする．

(1) $f(-1)$ を求めよ．

(2) $f(t)$ のグラフを描き，$f(t)$ の最小値を求めよ．

5 中身の見えない 2 つの箱があり，1 つの箱には赤玉 2 つと白玉 1 つが入っており，もう 1 つの箱には赤玉 1 つと白玉 2 つが入っている．どちらかの箱を選び，選んだ箱の中から玉を 1 つ取り出して元に戻す，という操作を繰り返す．

(1) 1 回目は箱を無作為に選び，2 回目以降は，前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱，前回取り出した玉が白玉なら前回とは異なる箱を選ぶ．n 回目に赤玉を取り出す確率 p_n を求めよ．

(2) 1 回目は箱を無作為に選び，2 回目以降は，前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱，前回取り出した玉が白玉なら箱を無作為に選ぶ．n 回目に赤玉を取り出す確率 q_n を求めよ．

解答例

1 $2022 = 2{\cdot}3{\cdot}337$．$2^a3^b$ と 2^c3^d の最大公約数を g とすると，$g \in \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

［1］$g = 1$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(1.1)\ \ 2^x3^y + 1 = 2022 \quad \text{または} \quad (1.2)\ \ 2^x + 3^y = 2022$$

(1.1) より　$2^x3^y = 2021$　右辺は 2 でも 3 で割り切れないので不適．

(1.2) より　$3^y = 2022 - 2^x$　$x \geqq 1$ とすると，右辺は 2 を因数にもち，等式を満たさない．$x = 0$ となり，$3^y = 2021$．等式の右辺は 3 で割り切れず，不適．

［2］$g = 2$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(2.1)\ \ 2(2^x3^y + 1) = 2022 \quad \text{または} \quad (2.2)\ \ 2(2^x + 3^y) = 2022$$

(2.1) より　$2^x3^y = 1010$．右辺は 5 を因数にもつので，不適．

(2.2) より　$2^x = 1011 - 3^y$．$y \geqq 1$ とすると，右辺は 3 を因数にもち，等式を満たさない．$y = 0$ となり，$2^x = 1010$．右辺は 5 を因数にもち，不適．

［3］$g = 3$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(3.1)\ \ 3(2^x3^y + 1) = 2022 \quad \text{または} \quad (3.2)\ \ 3(2^x + 3^y) = 2022$$

(3.1) より　$2^x3^y = 673$．右辺は 2，3 で割り切れないので，不適．

(3.2) より　$3^y = 674 - 2^x$．$x \geqq 1$ とすると，右辺は 2 を因数にもち，等式を満たさない．$x = 0$ となり，$3^y = 673$．右辺は 3 で割り切れず，不適．

［4］$g = 6$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(4.1)\ \ 6(2^x3^y + 1) = 2022 \quad \text{または} \quad (4.2)\ \ 6(2^x + 3^y) = 2022$$

(4.1) より　$2^x3^y = 336$．右辺は 7 を因数にもつので，不適．

(4.2) より　$2^x = 337 - 3^y$．$0 \leqq y \leqq 5$ について調べればよい．

y	0	1	2	3	4	5
$337 - 3^y$	336	334	328	310	256	94

$2^x = 337 - 3^y$ を満たすのは，$256 = 2^8$ により　$x = 8,\ y = 4$

したがって　$6(2^8 + 3^4) = 2^9{\cdot}3^1 + 2^1{\cdot}3^5 = 2022$

対称性に注意して　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d) = (9,\ 1,\ 1,\ 5),\ (1,\ 5,\ 9,\ 1)}$

別解 与えられた方程式は次の通りである．

$$2^a3^b + 2^c3^d = 2022$$

右辺を素因数分解すると，$2022 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 337$（337 は素数）となる．

左辺の 2 本の項について，素因数 2 および 3 の個数（付値）に着目して絞り込みを行う．

1. **素因数 2 の指数に関する議論**
   左辺から 2 のべき乗を共通因数として括り出すと，その指数は $\min(a, c)$ となる．右辺に含まれる素因数 2 の個数はちょうど 1 個であり，337 は奇数であるから，次が成り立つ必要がある．

   $$\min(a, c) = 1$$

   これにより，a, c のうち一方が 1 であり，もう一方は 1 以上（実際には後述の通り 1 より大）の整数となる．

2. **素因数 3 の指数に関する議論**
   同様に，左辺から 3 のべき乗を共通因数として括り出すと，その指数は $\min(b, d)$ となる．右辺に含まれる素因数 3 の個数もそれぞれちょうど 1 個であり，337 は 3 で割り切れないから，次が成り立つ必要がある．

   $$\min(b, d) = 1$$

   これにより，b, d のうち一方が 1 であり，もう一方は 1 以上の整数となる．

3. **場合分けと解の導出**
   等式の対称性（(a, b) と (c, d) の入れ替え可能性）を考慮すると，実質的に次の 2 つのケースを検証すれば十分である．

   (i) $a = 1$ かつ $b = 1$ のとき
   このとき，$\min(a, c) = 1$ および $\min(b, d) = 1$ より，$c \geqq 1, d \geqq 1$ である．与式に代入すると，

   $$\begin{aligned} 2^1 \cdot 3^1 + 2^c3^d &= 2022 \\ 6 + 2^c3^d &= 2022 \\ 2^c3^d &= 2016 \end{aligned}$$

   2016 を素因数分解すると，$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ となる．左辺 2^c3^d は素因数として 7 を持ち得ないため，このケースは不適である．

(ii) $a > 1$ かつ $b = 1$ のとき

このとき，$\min(a, c) = 1$ より $c = 1$ が確定する．また，$\min(b, d) = 1$ かつ $b = 1$ より，$d \geqq 1$ である．さらに，もし $d = 1$ と仮定すると (i) の対称な議論（$c = 1, d = 1$）に帰着して不適となるため，$d > 1$ である．与式に代入すると，

$$2^a \cdot 3^1 + 2^1 \cdot 3^d = 2022$$
$$6(2^{a-1} + 3^{d-1}) = 2022$$
$$2^{a-1} + 3^{d-1} = 337$$

ここで，$a > 1$ より $a - 1 \geqq 1$ であるから，2^{a-1} は偶数である．和が 337（奇数）となることから，3^{d-1} は奇数でなければならず，これは常に満たされる．

$d-1 \geqq 1$ の範囲で，$3^{d-1} < 337$ を満たすものを探すと，$0 \leqq d-1 \leqq 5$ の範囲を調べればよい．

- $d - 1 = 5 \implies 3^5 = 243$ のとき：$2^{a-1} = 337 - 243 = 94$
  （2 のべき乗にならず不適）
- $d - 1 = 4 \implies 3^4 = 81$ のとき：$2^{a-1} = 337 - 81 = 256 = 2^8$
  $\implies a - 1 = 8$ より $a = 9$.
  このとき $d - 1 = 4$ より $d = 5$ となり，条件（$a > 1, d > 1$）を満たす適解となる．
- $d - 1 \leqq 3$ のとき：$3^{d-1} \leqq 27$ となり，$2^{a-1} \geqq 337 - 27 = 310$ となるが，310 以上の直近の 2 のべき乗は 512 であり，これらを満たす整数 a は存在しない．

したがって，$(a, b, c, d) = (9, 1, 1, 5)$ を得る．

最初に述べた等式の対称性（(a, b) と (c, d) の一括の入れ替え）を考慮することで，もう一つの解である $(1, 5, 9, 1)$ が導かれる．

よって，求める 0 以上の整数の組 (a, b, c, d) は，

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d) = (9,\ 1,\ 1,\ 5),\ (1,\ 5,\ 9,\ 1)}$$

■

2 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(1,\ 3\sin 2\theta)$ より

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{OPQ} &= \frac{1}{2}|\cos\theta\cdot 3\sin 2\theta - \sin\theta\cdot 1| \\ &= \frac{1}{2}|6\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta| \\ &= \frac{1}{2}|6\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin\theta| \\ &= \frac{1}{2}|-6\sin^3\theta + 5\sin\theta|\end{aligned}$$

$t=\sin\theta$ とおくと $(0 \leqq \theta < 2\pi)$　$-1 \leqq t \leqq 1$

$$\triangle \mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}|-6t^3+5t|$$

$f(t)=-6t^3+5t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ とおくと　$f'(t)=-18t^2+5$

$f'(t)=0$ とすると　$t=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{6}$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	↘	$-\frac{5\sqrt{10}}{9}$	↗	$\frac{5\sqrt{10}}{9}$	↘	-1

$|f(t)| \leqq \dfrac{5\sqrt{10}}{9}$ であるから，求める最大値は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{10}}{9} = \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{10}}{18}}$ ■

3 (1) 同値変形を用いると

$$|x-y| \leqq x+y \Longleftrightarrow -(x+y) \leqq x-y \leqq x+y$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -(x+y) \leqq x-y \\ x-y \leqq x+y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

(2) $|1+y-2x^2-y^2| \leqq 1-y-y^2$ について

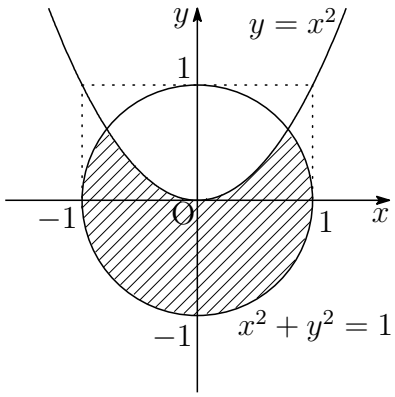
$$A-B = 1+y-2x^2-y^2, \quad A+B = 1-y-y^2$$

とすると　　$A = 1-x^2-y^2, \ \ B = x^2-y$

(1) の結論に適用すると，$A \geqq 0, \ B \geqq 0$ であるから

$$\begin{cases} 1-x^2-y^2 \geqq 0 \\ x^2-y \geqq 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ y \leqq x^2 \end{cases}$$

よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む.



補足 円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=x^2$ の方程式から x を消去すると

$$y^2+y-1=0 \quad \text{これを解いて} \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$0 \leqq y \leqq 1$ に注意して　$y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

これを $y=x^2$ に代入することにより　$x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

したがって，これらの交点の座標は　$\left(\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}, \ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ■

4 (1) D の境界面を次の 6 つに分ける．

平面 $x=0$，平面 $x=1$ の部分をそれぞれ $E_{x,0}$，$E_{x,1}$ とする．
平面 $y=0$，平面 $y=1$ の部分をそれぞれ $E_{y,0}$，$E_{y,1}$ とする．
平面 $z=0$，平面 $z=1$ の部分をそれぞれ $E_{z,0}$，$E_{z,1}$ とする．

$E_{\alpha,k}$ $(\alpha=x,y,z,\ k=0,1)$ を底面，点 $\mathrm{A}(t-1,\ t,\ t+1)$ を頂点とする四角錐の体積を $V_{\alpha,k}(t)$ とすると

$$V_{x,0}(t)=\frac{1}{3}|t-1|,\quad V_{x,1}(t)=\frac{1}{3}|t-2|,$$
$$V_{y,0}(t)=\frac{1}{3}|t|,\qquad V_{y,1}(t)=\frac{1}{3}|t-1|,$$
$$V_{z,0}(t)=\frac{1}{3}|t+1|,\quad V_{z,1}(t)=\frac{1}{3}|t|$$

ただし，これらの D の領域外の体積は次の範囲にある．

- $V_{x,0}(t)$ は $t\leqq 1$，$V_{x,1}(t)$ は $2\leqq t$
- $V_{y,0}(t)$ は $t\leqq 0$，$V_{y,1}(t)$ は $1\leqq t$
- $V_{z,0}(t)$ は $t\leqq -1$，$V_{z,1}(t)$ は $0\leqq t$

$t=-1$ のとき，$\mathrm{A}(-2,-1,\ 0)$ であるから

$$f(-1)=1^3+V_{x,0}(-1)+V_{y,0}(-1)=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\mathbf{2}$$

(2) 点 $\mathrm{A}(t-1,\ t,\ t+1)$ は，点 $(-1,\ 0,\ 1)$ を通り，方向ベクトルが $(1,\ 1,\ 1)$ の直線上にある．また，点 A は D の外部にあるから

(i) $t\leqq -1$ のとき

$$\begin{aligned}f(t)&=1^3+V_{x,0}(t)+V_{y,0}(t)+V_{z,0}(t)\\&=1+\frac{1}{3}|t-1|+\frac{1}{3}|t|+\frac{1}{3}|t+1|\\&=1+\frac{1}{3}(-t+1)+\frac{1}{3}(-t)+\frac{1}{3}(-t-1)=-t+1\end{aligned}$$

(ii) $-1\leqq t\leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned}f(t)&=1^3+V_{x,0}(t)+V_{y,0}(t)=1+\frac{1}{3}|t-1|+\frac{1}{3}|t|\\&=1+\frac{1}{3}(-t+1)+\frac{1}{3}(-t)=-\frac{2}{3}t+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

(iii) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= 1^3 + V_{x,0}(t) + V_{z,1}(t) = 1 + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\ &= 1 + \frac{1}{3}(-t+1) + \frac{1}{3}t = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(iv) $1 \leqq t \leqq 2$ のとき

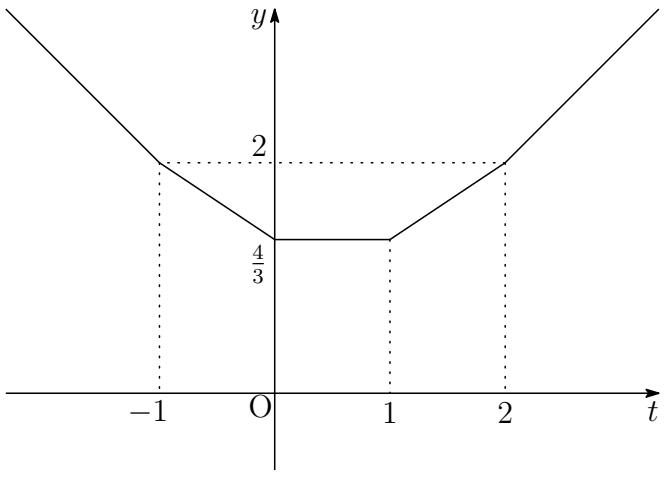
$$\begin{aligned} f(t) &= 1^3 + V_{y,1}(t) + V_{z,1}(t) = 1 + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\ &= 1 + \frac{1}{3}(t-1) + \frac{1}{3}t = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(v) $2 \leqq t$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= 1^3 + V_{x,1}(t) + V_{y,1}(t) + V_{z,1}(t) \\ &= 1 + \frac{1}{3}|t-2| + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\ &= 1 + \frac{1}{3}(t-2) + \frac{1}{3}(t-1) + \frac{1}{3}t = t \end{aligned}$$

(i)〜(v) より $$f(t) = \begin{cases} -t+1 & (t \leqq -1) \\ -\dfrac{2}{3}t + \dfrac{4}{3} & (-1 \leqq t \leqq 0) \\ \dfrac{4}{3} & (0 \leqq t \leqq 1) \\ \dfrac{2}{3}t + \dfrac{2}{3} & (1 \leqq t \leqq 2) \\ t & (2 \leqq t) \end{cases}$$

$y = f(t)$ のグラフは，下の図のようになる．$f(t)$ の最小値は $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$



5 (1) 赤玉 2 つと白玉 1 つが入っている箱を A，赤玉 1 つと白玉 2 つが入っている箱を B とする．n 回目の操作で A を選ぶ確率を x_n とすると

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3}(1 - x_n) = \frac{2}{3} \quad (n \geqq 1)$$

すなわち　$x_1 = \dfrac{1}{2}, \quad x_n = \dfrac{2}{3}$ $(n \geqq 2)$

したがって　$p_n = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}(1 - x_n) = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}$　$\cdots$①

よって　$p_1 = \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$$p_n = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{5}{9}} \quad \boldsymbol{(n \geqq 2)}$$

(2) n 回目の操作で A を選ぶ確率を y_n とすると

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1 - y_n) = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{3}$$

ゆえに　$y_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}\left(y_n - \dfrac{2}{3}\right)$　すなわち　$y_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

① と同様にして　$q_n = \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{3}$

よって　$q_n = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} + \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{5}{9} - \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$ ■