令和４年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　令和４年２月 25 日

問題 1 2 3 4 5

1 $2^a3^b + 2^c3^d = 2022$ を満たす 0 以上の整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組を求めよ．

2 $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(1,\ 3\sin 2\theta)$ が三角形をなすとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を求めよ．

3 次の問いに答えよ．

(1) 実数 $x,\ y$ について，「$|x-y| \leqq x+y$」であることの必要十分条件は「$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$」であることを示せ．

(2) 次の不等式で定まる xy 平面上の領域を図示せよ．

$$|1+y-2x^2-y^2| \leqq 1-y-y^2$$

4 t を実数とし，座標空間に点 $\mathrm{A}(t-1,\ t,\ t+1)$ をとる．また，$(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$，$(0,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 1)$ を頂点とする立方体を D とする．点 P が D の内部およびすべての面上を動くとき，線分 AP の動く範囲を W とし，W の体積を $f(t)$ とする．

(1) $f(-1)$ を求めよ．

(2) $f(t)$ のグラフを描き，$f(t)$ の最小値を求めよ．

5 中身の見えない 2 つの箱があり，1 つの箱には赤玉 2 つと白玉 1 つが入っており，もう 1 つの箱には赤玉 1 つと白玉 2 つが入っている．どちらかの箱を選び，選んだ箱の中から玉を 1 つ取り出して元に戻す，という操作を繰り返す．

(1) 1 回目は箱を無作為に選び，2 回目以降は，前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱，前回取り出した玉が白玉なら前回とは異なる箱を選ぶ．n 回目に赤玉を取り出す確率 p_n を求めよ．

(2) 1 回目は箱を無作為に選び，2 回目以降は，前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱，前回取り出した玉が白玉なら箱を無作為に選ぶ．n 回目に赤玉を取り出す確率 q_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $2022 = 2{\cdot}3{\cdot}337$．$2^a3^b$ と 2^c3^d の最大公約数を g とすると，$g \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

［1］$g=1$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(1.1)\ \ 2^x3^y+1=2022 \quad \text{または} \quad (1.2)\ \ 2^x+3^y=2022$$

(1.1) より　$2^x3^y=2021$　右辺は 2 でも 3 で割り切れないので不適．

(1.2) より　$3^y=2022-2^x$　$x \geqq 1$ とすると，右辺は 2 を因数にもち，等式を満たさない．$x=0$ となり，$3^y=2021$．等式の右辺は 3 で割り切れず，不適．

［2］$g=2$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(2.1)\ \ 2(2^x3^y+1)=2022 \quad \text{または} \quad (2.2)\ \ 2(2^x+3^y)=2022$$

(2.1) より　$2^x3^y=1010$．右辺は 5 を因数にもつので，不適．

(2.2) より　$2^x=1011-3^y$．$y \geqq 1$ とすると，右辺は 3 を因数にもち，等式を満たさない．$y=0$ となり，$2^x=1010$．右辺は 5 を因数にもち，不適．

［3］$g=3$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(3.1)\ \ 3(2^x3^y+1)=2022 \quad \text{または} \quad (3.2)\ \ 3(2^x+3^y)=2022$$

(3.1) より　$2^x3^y=673$．右辺は 2，3 で割り切れないので，不適．

(3.2) より　$3^y=674-2^x$．$x \geqq 1$ とすると，右辺は 2 を因数にもち，等式を満たさない．$x=0$ となり，$3^y=673$．右辺は 3 で割り切れず，不適．

［4］$g=6$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(4.1)\ \ 6(2^x3^y+1)=2022 \quad \text{または} \quad (4.2)\ \ 6(2^x+3^y)=2022$$

(4.1) より　$2^x3^y=336$．右辺は 7 を因数にもつので，不適．

(4.2) より　$2^x=337-3^y$．$0 \leqq y \leqq 5$ について調べればよい．

y	0	1	2	3	4	5
$337-3^y$	336	334	328	310	256	94

$2^x=337-3^y$ を満たすのは，$256=2^8$ により　$x=8,\ y=4$

したがって　　$6(2^8+3^4)=2^9{\cdot}3^1+2^1{\cdot}3^5=2022$

対称性に注意して　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d)=(9,\ 1,\ 1,\ 5),\ (1,\ 5,\ 9,\ 1)}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(1,\ 3\sin 2\theta)$ より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OPQ} &= \frac{1}{2}|\cos\theta\cdot 3\sin 2\theta - \sin\theta\cdot 1| \\ &= \frac{1}{2}|6\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta| \\ &= \frac{1}{2}|6\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin\theta| \\ &= \frac{1}{2}|-6\sin^3\theta + 5\sin\theta|\end{aligned}$$

$t = \sin\theta$ とおくと $(0 \leqq \theta < 2\pi)$　$-1 \leqq t \leqq 1$

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}|-6t^3 + 5t|$$

$f(t) = -6t^3 + 5t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ とおくと　$f'(t) = -18t^2 + 5$

$f'(t) = 0$ とすると　$t = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{6}$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{5\sqrt{10}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{10}}{9}$	$\searrow$	-1

$|f(t)| \leqq \dfrac{5\sqrt{10}}{9}$ であるから，求める最大値は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{10}}{9} = \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{10}}{18}}$ ■

3 (1) 同値変形を用いると

$$|x-y| \leqq x+y \iff -(x+y) \leqq x-y \leqq x+y$$
$$\iff \begin{cases} -(x+y) \leqq x-y \\ x-y \leqq x+y \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

(2) $|1+y-2x^2-y^2| \leqq 1-y-y^2$ について

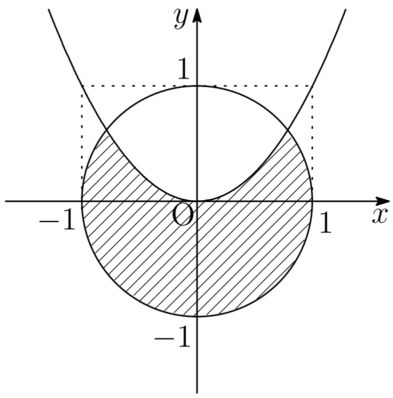
$$A-B = 1+y-2x^2-y^2, \quad A+B = 1-y-y^2$$

とすると　$A = 1-x^2-y^2,\ B = x^2-y$

(1) の結論に適用すると，$A \geqq 0,\ B \geqq 0$ であるから

$$\begin{cases} 1-x^2-y^2 \geqq 0 \\ x^2-y \geqq 0 \end{cases} \quad すなわち \quad \begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ y \leqq x^2 \end{cases}$$

よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



補足 円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=x^2$ の方程式から x を消去すると

$$y^2+y-1=0 \quad これを解いて \quad y = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$0 \leqq y \leqq 1$ に注意して　$y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

これを $y=x^2$ に代入することにより　$x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

したがって，これらの交点の座標は　$\left(\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}},\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$　■

$\boxed{4}$ (1) D の境界面を次の 6 つに分ける．

平面 $x=0$，平面 $x=1$ の部分をそれぞれ $E_{x,0}$，$E_{x,1}$ とする．
平面 $y=0$，平面 $y=1$ の部分をそれぞれ $E_{y,0}$，$E_{y,1}$ とする．
平面 $z=0$，平面 $z=1$ の部分をそれぞれ $E_{z,0}$，$E_{z,1}$ とする．

$E_{\alpha,k}$ $(\alpha=x,y,z,\ k=1,2)$ を底面，点 $\mathrm{A}(t-1,\ t,\ t+1)$ を頂点する四角錐の体積を $V_{\alpha,k}(t)$ とすると

$$\begin{aligned}
V_{x,0}(t)&=\frac{1}{3}|t-1|, & V_{x,1}(t)&=\frac{1}{3}|t-2|,\\
V_{y,0}(t)&=\frac{1}{3}|t|, & V_{y,1}(t)&=\frac{1}{3}|t-1|,\\
V_{z,0}(t)&=\frac{1}{3}|t+1|, & V_{z,1}(t)&=\frac{1}{3}|t|
\end{aligned}$$

ただし，これらの D の領域外の体積は次の範囲にある．

- $V_{x,0}(t)$ は $t\leqq 1$，$V_{x,1}(t)$ は $2\leqq t$
- $V_{y,0}(t)$ は $t\leqq 0$，$V_{y,1}(t)$ は $1\leqq t$
- $V_{z,0}(t)$ は $t\leqq -1$，$V_{z,1}(t)$ は $0\leqq t$

$t=-1$ のとき，$\mathrm{A}(-2,-1,\ 0)$ であるから

$$f(-1)=1^3+V_{x,0}(-1)+V_{y,0}(-1)=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\mathbf{2}$$

(2) 点 $\mathrm{A}(t-1,\ t,\ t+1)$ は，点 $(-1,\ 0,\ 1)$ を通り，方向ベクトルが $(1,\ 1,\ 1)$ の直線上にある．また，点 A は D の外部にあるから

(i) $t\leqq -1$ のとき

$$\begin{aligned}
f(t)&=1^3+V_{x,0}(t)+V_{y,0}(t)+V_{z,0}(t)\\
&=1+\frac{1}{3}|t-1|+\frac{1}{3}|t|+\frac{1}{3}|t+1|\\
&=1+\frac{1}{3}(-t+1)+\frac{1}{3}(-t)+\frac{1}{3}(-t-1)=-t+1
\end{aligned}$$

(ii) $-1\leqq t\leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
f(t)&=1^3+V_{x,0}(t)+V_{y,0}(t)=1+\frac{1}{3}|t-1|+\frac{1}{3}|t|\\
&=1+\frac{1}{3}(-t+1)+\frac{1}{3}(-t)=-\frac{2}{3}t+\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

(iii) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= 1^3 + V_{x,0}(t) + V_{z,1}(t) = 1 + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\ &= 1 + \frac{1}{3}(-t+1) + \frac{1}{3}t = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(iv) $1 \leqq t \leqq 2$ のとき

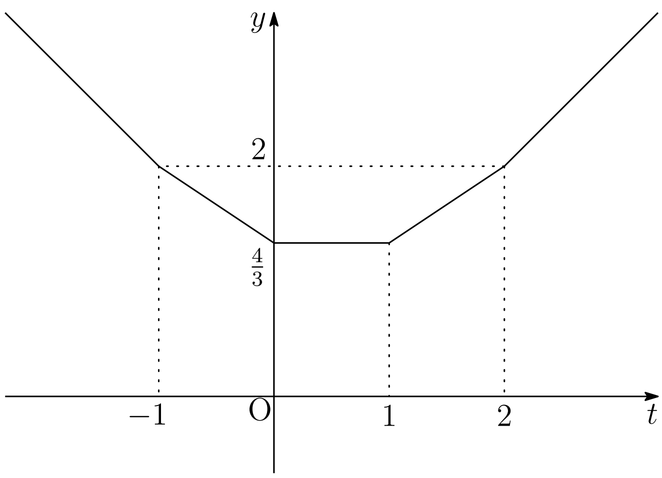
$$\begin{aligned} f(t) &= 1^3 + V_{y,1}(t) + V_{z,1}(t) = 1 + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\ &= 1 + \frac{1}{3}(t-1) + \frac{1}{3}t = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(v) $2 \leqq t$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= 1^3 + V_{x,1}(t) + V_{y,1}(t) + V_{z,1}(t) \\ &= 1 + \frac{1}{3}|t-2| + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\ &= 1 + \frac{1}{3}(t-2) + \frac{1}{3}(t-1) + \frac{1}{3}t = t \end{aligned}$$

(i)〜(v) より $\quad f(t) = \begin{cases} -t+1 & (t \leqq -1) \\ -\dfrac{2}{3}t + \dfrac{4}{3} & (-1 \leqq t \leqq 0) \\ \dfrac{4}{3} & (0 \leqq t \leqq 1) \\ \dfrac{2}{3}t + \dfrac{2}{3} & (1 \leqq t \leqq 2) \\ t & (2 \leqq t) \end{cases}$

$y = f(t)$ のグラフは，下の図のようになる．$f(t)$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$



$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 赤玉 2 つと白玉 1 つが入っている箱を A，赤玉 1 つと白玉 2 つが入っている箱を B とする．n 回目の操作で A を選ぶ確率を x_n とすると

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3}(1 - x_n) = \frac{2}{3} \quad (n \geqq 1)$$

すなわち　$x_1 = \dfrac{1}{2}$，$x_n = \dfrac{2}{3}$ $(n \geqq 2)$

したがって　$p_n = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}(1 - x_n) = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}$　$\cdots$①

よって　$p_1 = \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$$p_n = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{5}{9}} \quad \boldsymbol{(n \geqq 2)}$$

(2) n 回目の操作で A を選ぶ確率を y_n とすると

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1 - y_n) = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{3}$$

ゆえに　$y_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}\left(y_n - \dfrac{2}{3}\right)$　すなわち　$y_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

① と同様にして　$q_n = \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{3}$

よって　$q_n = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} + \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{5}{9} - \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$　■