令和３年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　令和 2 年 2 月 25 日

1 1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ.

2 実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k = 2^{[\sqrt{k}]} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義する．正の整数 n に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$$

を求めよ.

3 次の問いに答えよ.

(1) a，b を実数とし，2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつとする．ただし，重解の場合は $\alpha = \beta$ とする．3 辺の長さが 1，α，β である三角形が存在する $(a,\ b)$ の範囲を求め図示せよ.

(2) 3 辺の長さが 1，α，β である三角形が存在するとき，

$$\frac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2}$$

の値の範囲を求めよ.

4 $k > 0$ とする．円 C を $x^2 + (y-1)^2 = 1$ とし，放物線 S を $y = \dfrac{1}{k}x^2$ とする.

(1) C と S が共有点をちょうど 3 個持つときの k の範囲を求めよ.

(2) k が (1) の範囲を動くとき，C と S の共有点のうちで x 座標が正の点を P とする．P における S の接線と S と y 軸とによって囲まれる領域の面積の最大値を求めよ.

5 サイコロを 3 回投げて出た目を順に a，b，c とするとき，

$$\int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c)\,dx = 0$$

となる確率を求めよ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ n を自然数とすると，連続する整数

$$6n-4,\ 6n-3,\ 6n-2,\ 6n-1,\ 6n,\ 6n+1$$

について，$n=1$ のとき，素数であるのは次の 4 個である． $\cdots(*)$

$$6n-4=2,\quad 6n-3=3,\quad 6n-1=5,\quad 6n+1=7$$

$n>1$ のとき，次は合成数である．

$$6n-4=2(3n-2),\quad 6n-3=3(2n-1),\quad 6n-2=2(3n-1),\quad 6n$$

したがって　p が 5 以上の素数　$\Longrightarrow$　$p\equiv\pm1 \pmod 6$

U を 8 以上 1000 以下の自然数の集合とし，U の部分集合を次とする．

$$A=\{6n+1\,|\,n \text{ は 2 以上 166 以下の自然数}\},$$
$$B=\{6n-1\,|\,n \text{ は 2 以上 166 以下の自然数}\}$$

$6n+1\equiv0 \pmod 5$ とすると，$n\equiv-1 \pmod 5$ を満たす n は，次の 33 個

$$n=4,\ 9,\ 14,\cdots,164$$

$6n+1\equiv0 \pmod 7$ とすると，$n\equiv1 \pmod 7$ を満たす n は，次の 23 個

$$n=8,\ 15,\ 22,\cdots,162$$

$6n+1\equiv0 \pmod{35}$ とすると，$n\equiv-6 \pmod{35}$ を満たす n は，次の 4 個

$$n=29,\ 64,\ 99,\ 134$$

集合 A の要素で 5 または 7 で割り切れる数の個数は

$$33+23-4=52\ (\text{個})$$

集合 A に属する素数の個数は，高々　$165-52=113$ (個)　$\cdots(**)$

$6n-1\equiv0 \pmod 5$ とすると，$n\equiv1 \pmod 5$ を満たす n は，次の 33 個

$$n=6,\ 11,\ 16,\cdots,166$$

集合 B に属する素数の個数は，高々　$165-33=132$ (個)　$\cdots(***)$

$(*)$，$(**)$，$(***)$ より，1000 以下の素数は，高々　$4+113+132=249$ (個)

補足 $6n-1\equiv 0 \pmod 7$ とすると，$n\equiv -1 \pmod 7$ を満たす n は，次の 23 個

$$n=6,\ 13,\ 20,\cdots,160$$

$6n-1\equiv 0 \pmod{35}$ とすると，$n\equiv 6 \pmod{35}$ を満たす n は，次の 5 個

$$n=6,\ 41,\ 76,\ 111,\ 146$$

集合 B の要素で 5 または 7 で割り切れる数の個数は

$$33+23-5=51\ (個)$$

集合 B に属する素数の個数は，高々　$165-51=114$ (個)

1000 以下の素数は，高々　$4+113+114=231$ (個)

別解 $1050=2\times 3\times 5^2\times 7$ より，1 から 1050 の自然数で 2，3，5，7 で割り切れない数の個数は (1 を含む)[1]

$$\varphi(1050)=1050\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=240$$

したがって，1 から 1050 の自然数で，素数は高々

$$240-1+4=243\ (個)$$

よって，1 から 1000 の自然数で，素数は高々　243 (個)

補足 2，3 以外の素数は，法 6 ついて，± 1 と合同である．

2021 京都大学 (文系)

p が素数ならば p^4+14 は素数でないことを示せ．

解答 (i) $p=2$ のとき　$p^4+14=30$　素数ではない

(ii) $p=3$ のとき　$p^4+14=95$　素数ではない

(iii) p が 5 以上の素数のとき，$p\equiv\pm 1 \pmod 6$ であるから

$$p^4+14\equiv 15\equiv 3 \qquad \pmod 6$$

p^4+14 は 3 より大きい 3 の倍数であるから，p^4+14 は素数ではない．

(i)〜(iii) より，p が素数ならば p^4+14 は素数ではない．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6(定理 3) を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a_k = 2^{[\sqrt{k}]}$ より $(k = 1, 2, 3, \cdots)$，$n > 1$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n^2} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k^2}^{k^2+2k} a_j + a_{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k^2}^{k^2+2k} 2^k + 2^n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)2^k + 2^n \\ &= 2\sum_{k=1}^{n-1} k2^k + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k + 2^n \end{aligned}$$

ここで，$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$，$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k2^k$ とおくと，$T_n = \sum_{k=2}^{n} (k-1)2^{k-1}$ より

$$\begin{aligned} T_n = 2T_n - T_n &= 2\sum_{k=2}^{n} (k-1)2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k2^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k-1)2^k - \sum_{k=1}^{n-1} k2^k \\ &= (n-1)2^n + \sum_{k=1}^{n-1} \{(k-1)2^k - k2^k\} \\ &= (n-1)2^n - S_n \end{aligned}$$

$b_n = 2T_n + S_n + 2^n$ であるから，上式より

$$\begin{aligned} b_n &= 2\{(n-1)2^n - S_n\} + S_n + 2^n \\ &= (n-1)2^{n+1} - S_n + 2^n \\ &= (n-1)2^{n+1} - \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} + 2^n \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 \qquad (*) \end{aligned}$$

$b_1 = a_1 = 2^1 = 2$ であるから，$n = 1$ のときも $(*)$ は成立する．

よって，正の整数 n に対して　　$\boldsymbol{b_n = (n-1)2^{n+1} + 2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ は実数解をもつから

$$(-a)^2 - 4b \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b \leqq \frac{a^2}{4} \qquad (*)$$

2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の実数解 $\alpha,\ \beta$ と係数の関係により

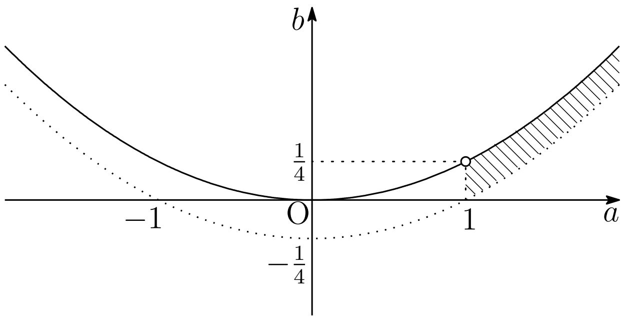
$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

3 辺の長さが $1,\ \alpha,\ \beta$ である三角形が存在するとき

$$|\alpha - \beta| < 1 < \alpha + \beta \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{a^2 - 4b} < 1 < a \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より $\qquad \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{1}{4} < b \leqq \dfrac{a^2}{4} \quad (a > 1)$

したがって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，下の図の斜線部分である．
ただし，境界は，実線部分を含み，点線および $\circ$ は含まない．



(2) (1) の解と係数の関係により

$$\frac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{b + 1}{a^2}$$

さらに，(1) の結果から

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4a^2} < \frac{b + 1}{a^2} \leqq \frac{1}{4} + \frac{1}{a^2}$$

$a > 1$ であるから $\qquad \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4a^2} < \dfrac{1}{4},\quad \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{5}{4}$

よって，求める範囲は $\qquad \boldsymbol{\dfrac{1}{4} < \dfrac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2} < \dfrac{5}{4}}$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $C: x^2+(y-1)^2=1$，$S: y=\dfrac{1}{k}x^2$

C と S から x を消去すると

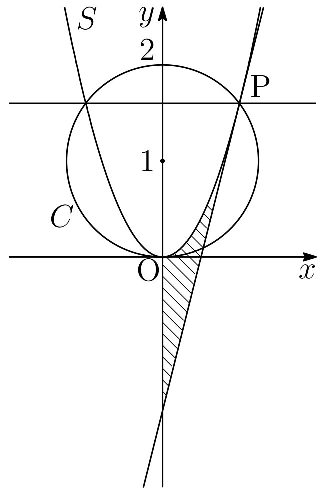
$$ky+(y-1)^2=1$$

整理すると　$y(y+k-2)=0 \quad \cdots(*)$

C と S は x 軸に関して対称で，原点で接する．
右の図から，条件を満たすとき，方程式 $(*)$ の解が

$$y=0, \quad 0<y<2$$

に解を持てばよいから



$$0<2-k<2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0<k<2}$$

(2) 点 P の y 座標が $2-k$ であるから，S 上の点 P の x 座標は $(x>0)$

$$2-k=\frac{1}{k}x^2 \quad \text{ゆえに} \quad x=\sqrt{k(2-k)}$$

$\alpha=\sqrt{k(2-k)}$ とおく．$y=\dfrac{1}{k}x^2$ より　$y'=\dfrac{2x}{k}$

S 上の点 $\mathrm{P}\left(\alpha,\ \dfrac{\alpha^2}{k}\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{\alpha^2}{k}=\frac{2\alpha}{k}(x-\alpha) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{2\alpha}{k}x-\frac{\alpha^2}{k}$$

P における S の接線と S と y 軸で囲まれた図形の面積を T とすると

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\alpha \left(\frac{x^2}{k}-\frac{2\alpha}{k}x+\frac{\alpha^2}{k}\right)dx \\ &= \frac{1}{k}\int_0^\alpha (x-\alpha)^2\,dx = \frac{1}{3k}\Big[\ (x-\alpha)^3\ \Big]_0^\alpha = \frac{\alpha^3}{3k} \\ &= \frac{1}{3k}\{k(2-k)\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{k(2-k)^3} \end{aligned}$$

4 正数 $3k,\ 2-k,\ 2-k,\ 2-k$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3k+3(2-k)}{4} \geqq \sqrt[4]{3k(2-k)^3} \quad \text{したがって} \quad \sqrt{k(2-k)^3} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

ゆえに　$T \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(等号は　$3k=2-k$　すなわち　$k=\dfrac{1}{2}$ のとき)

よって，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $I=\displaystyle\int_{a-3}^{a+3}(x-b)(x-c)\,dx$ とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int_{a-3}^{a+3}\{x^2-(b+c)x+bc\}\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3}-\frac{b+c}{2}x^2+bcx\ \right]_{a-3}^{a+3} \\ &= \frac{1}{3}\{(a+3)^3-(a-3)^3\}-\frac{b+c}{2}\{(a+3)^2-(a-3)^2\} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + bc\{(a+3)-(a-3)\} \\ &= 6a^2+18-6(b+c)a+6bc \end{aligned}$$

$I=0$ であるから

$$a^2+3-(b+c)a+bc=0 \quad \text{ゆえに} \quad (b-a)(c-a)=-3$$

したがって $(*)\begin{cases} b=a\pm 3 \\ c=a\mp 1 \end{cases}$ または $(**)\begin{cases} b=a\pm 1 \\ c=a\mp 3 \end{cases}$

$a,\ b,\ c$ は1以上6以下の整数であるから

$(*)$ より $\begin{cases} b=a+3 \\ c=a-1 \end{cases} \ (a=2,3),\quad \begin{cases} b=a-3 \\ c=a+1 \end{cases} \ (a=4,5)$

$(**)$ より $\begin{cases} b=a+1 \\ c=a-3 \end{cases} \ (a=4,5),\quad \begin{cases} b=a-1 \\ c=a+3 \end{cases} \ (a=2,3)$

条件を満たす場合の総数は　8通り

よって，求める確率は　$\dfrac{8}{6^3}=\mathbf{\dfrac{1}{27}}$