

令和2年度 一橋大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分
商・経済・法・社会学部 数I・II・A・B 令和2年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 以下の問いに答えよ.

- (1) 10^{10} を 2020 で割った余りを求めよ.
- (2) 100桁の正の整数で各位の数の和が2となるもののうち, 2020 で割り切れるものの個数を求めよ.

2 a を定数とし, $0 \leq \theta < \pi$ とする. 方程式

$$\tan 2\theta + a \tan \theta = 0$$

を満たす θ の個数を求めよ.

3 半径1の円周上に3点A, B, Cがある. 内積 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ の最大値と最小値を求めよ.

4 $x > 0$ に対し

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} |t-x| dt$$

と定める. $F(x)$ の最小値を求めよ.

5 n を正の整数とする. 1枚の硬貨を投げ, 表が出れば1点, 裏が出れば2点を得る. この試行を繰り返し, 点の合計が n 以上になったらやめる. 点の合計がちょうど n になる確率を p_n で表す.

- (1) p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ.
- (2) $|p_{n+1} - p_n| < 0.01$ を満たす最小の n を求めよ.

解答例

- 1** (1) $2020 \times 5 = 10100$ より, $10100 \equiv 0 \pmod{2020}$ であるから

$$10000 \equiv -100 \quad \text{ゆえに} \quad 10^4 \equiv -10^2 \pmod{2020}$$

$$\text{したがって} \quad 10^6 \equiv -10^2 \cdot 10^2 \equiv -10^4 \equiv -(-10^2) \equiv 10^2 \pmod{2020}$$

$$10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020} \text{ の両辺に } 10^4 \text{ を掛けると} \quad 10^{10} \equiv 10^6 \pmod{2020}$$

$$\text{ゆえに} \quad 10^{10} \equiv 10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020} \quad \text{よって, 求める余りは} \quad \mathbf{100}$$

- (2) $10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$ の両辺に順次 10^4 を掛けると, 法 2020 について

$$10^{98} \equiv 10^{94} \equiv 10^{90} \equiv \dots \equiv 10^{10} \equiv 10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$$

さらに, 上式の辺々に 10 を掛けると

$$10^{99} \equiv 10^{95} \equiv 10^{91} \equiv \dots \equiv 10^{11} \equiv 10^7 \equiv 10^3 \pmod{2020}$$

$$10^{96} \equiv 10^{92} \equiv \dots \equiv 10^{12} \equiv 10^8 \equiv 10^4 \pmod{2020}$$

$$10^{97} \equiv 10^{93} \equiv \dots \equiv 10^{13} \equiv 10^9 \equiv 10^5 \pmod{2020}$$

$10^4 \equiv -10^2$, $10^5 \equiv -10^3 \pmod{2020}$ であるから, 100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 で, 2020 で割り切れるものは

$$10^{99} + 10^n \quad (n = 5, 9, 13, \dots, 93, 97)$$

よって, 求める個数は $\mathbf{24}$ (個) ■

2 $\tan 2\theta + a \tan \theta = 0$ より ($0 \leq \theta < \pi$)

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} + a \tan \theta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \tan \theta \left(\frac{2}{1 - \tan^2 \theta} + a \right) = 0$$

$x = \tan \theta$ ($0 \leq \theta < \pi$) とおくと

$$x \left(\frac{2}{1 - x^2} + a \right) = 0 \quad \dots (*)$$

• $a = 0$ のとき, 原方程式は $\tan 2\theta = 0$ これを解いて $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$

• $a \neq 0$ のとき, (*) より $x = 0$ または $x^2 = \frac{a+2}{a}$

(i) $\frac{a+2}{a} \leq 0$, すなわち, $-2 \leq a < 0$ のとき $x = 0$

(ii) $\frac{a+2}{a} > 0$, すなわち, $a < -2, 0 < a$ のとき $x = 0, \pm \sqrt{\frac{a+2}{a}}$

(i),(ii) に示した x と θ は 1 対 1 に対応するから, 求める θ の個数は

$$\begin{cases} -2 \leq a < 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = 0 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a < -2, 0 < a \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$



- 3 点 A を極 O におき, 点 (1, 0) を中心とする円周上に 2 点 B, C をおき, それぞれの偏角を β, γ とすると $(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2})$

$$AB = 2 \cos \beta, \quad AC = 2 \cos \gamma$$

$\angle BAC = \gamma - \beta$ であるから

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \cdot AC \cos(\gamma - \beta) \\ &= 2 \cos \beta \cdot 2 \cos \gamma \cos(\gamma - \beta) \\ &= 4 \cos \beta \cos \gamma \cos(\gamma - \beta) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$4 \cos \beta \cos \gamma \cos(\gamma - \beta) \leq 4$ であるから (等号が成立するとき $\beta = \gamma = 0$)

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} \leq 4$$

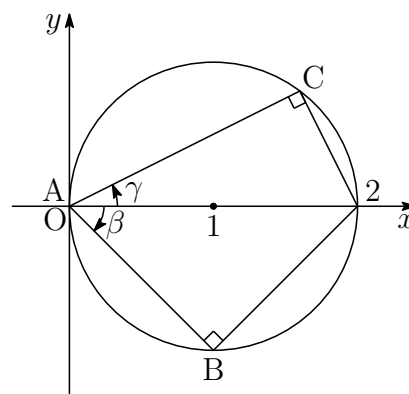
$2 \cos \beta \cos \gamma = \cos(\gamma - \beta) + \cos(\gamma + \beta)$ より

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 2 \{ \cos(\gamma - \beta) + \cos(\gamma + \beta) \} \cos(\gamma - \beta) \\ &= 2 \cos^2(\gamma - \beta) + 2 \cos(\gamma + \beta) \cos(\gamma - \beta) \\ &= 2 \left\{ \cos(\gamma - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\gamma + \beta) \right\}^2 - \frac{1}{2} \cos^2(\gamma + \beta) \geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

上式で等号が成立するとき

$$\begin{cases} \cos(\gamma - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\gamma + \beta) = 0 \\ \cos(\beta + \gamma) = 1 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \beta = -\frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{\pi}{3}$$

よって 最大値 4, 最小値 $-\frac{1}{2}$



4 $F(x) = \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} |t-x| dt$ について ($x > 0$)

(i) $x \leq 2-x$ すなわち $x \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} |t-x| dt = \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} (t-x) dt \\ &= \frac{1}{2x} \left[(t-x)^2 \right]_{2-x}^{2+x} = 4 - 2x \end{aligned}$$

したがって $F(x) \geq F(1) = 2$

(ii) $2-x \leq x$ すなわち $1 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} |t-x| dt \\ &= -\frac{1}{x} \int_{2-x}^x (t-x) dt + \frac{1}{x} \int_x^{2+x} (t-x) dt \\ &= -\frac{1}{2x} \left[(t-x)^2 \right]_{2-x}^x + \frac{1}{2x} \left[(t-x)^2 \right]_x^{2+x} \\ &= 2x + \frac{4}{x} - 4 \end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

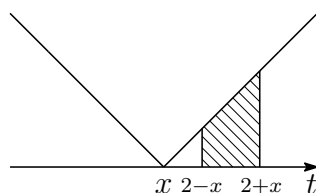
$$2x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{4}{x}} = 4\sqrt{2}$$

上式において、等号が成立するとき

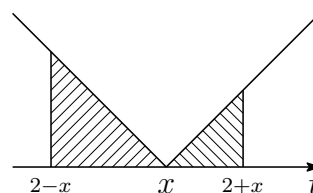
$$2x = \frac{4}{x} \quad \text{すなわち} \quad x = \sqrt{2}$$

したがって $F(x) \geq F(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4$

i) $x \leq 1$ のとき



ii) $1 \leq x$ のとき



よって 最小値 $F(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4$



5 点の合計が1点になるのは、1回目に表が出る確率であるから

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

点の合計が2点になるのは、1回目に裏が出るか、または2回続けて表が出る確率であるから

$$p_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

また、次の確率漸化式が成立する.

$$(*) \quad p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

上式に $n = 1, 2$ を代入すると

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \\ p_4 &= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

(*) より

$$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$$

数列 $\{p_{n+1} - p_n\}$ は初項 $p_2 - p_1 = \frac{1}{4}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_{n+1} - p_n = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad |p_{n+1} - p_n| = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$|p_{n+1} - p_n| = \frac{1}{2^{n+1}} < 0.01$ のとき

$$\frac{1}{2^{n+1}} < 0.01 \quad \text{したがって} \quad 2^{n+1} > 100$$

$2^6 = 64$, $2^7 = 128$ より, 上式を満たす最小の n は

$$n + 1 = 7 \quad \text{すなわち} \quad n = 6$$

