令和２年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　令和 2 年 2 月 25 日

1 以下の問いに答えよ．

(1) 10^{10} を 2020 で割った余りを求めよ．

(2) 100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるもののうち，2020 で割り切れるものの個数を求めよ．

2 a を定数とし，$0 \leqq \theta < \pi$ とする．方程式

$$\tan 2\theta + a \tan \theta = 0$$

を満たす θ の個数を求めよ．

3 半径 1 の円周上に 3 点 A，B，C がある．内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の最大値と最小値を求めよ．

4 $x > 0$ に対し

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} |t - x| \, dt$$

と定める．$F(x)$ の最小値を求めよ．

5 n を正の整数とする．1 枚の硬貨を投げ，表が出れば 1 点，裏が出れば 2 点を得る．この試行を繰り返し，点の合計が n 以上になったらやめる．点の合計がちょうど n になる確率を p_n で表す．

(1) p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ．

(2) $|p_{n+1} - p_n| < 0.01$ を満たす最小の n を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $2020 \times 5 = 10100$ より，$10100 \equiv 0 \pmod{2020}$ であるから

$$10000 \equiv -100 \quad \text{ゆえに} \quad 10^4 \equiv -10^2 \pmod{2020}$$

したがって　$10^6 \equiv -10^2 \cdot 10^2 \equiv -10^4 \equiv -(-10^2) \equiv 10^2 \pmod{2020}$

$10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$ の両辺に 10^4 を掛けると　$10^{10} \equiv 10^6 \pmod{2020}$

ゆえに　$10^{10} \equiv 10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$　よって，求める余りは　**100**

(2) $10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$ の両辺に順次 10^4 を掛けると，法 2020 について

$$10^{98} \equiv 10^{94} \equiv 10^{90} \equiv \cdots \equiv 10^{10} \equiv 10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$$

さらに，上式の辺々に 10 を掛けると

$$\begin{aligned} 10^{99} \equiv 10^{95} \equiv 10^{91} \equiv \cdots \equiv 10^{11} \equiv 10^7 \equiv 10^3 &\pmod{2020} \\ 10^{96} \equiv 10^{92} \equiv \cdots \equiv 10^{12} \equiv 10^8 \equiv 10^4 &\pmod{2020} \\ 10^{97} \equiv 10^{93} \equiv \cdots \equiv 10^{13} \equiv 10^9 \equiv 10^5 &\pmod{2020} \end{aligned}$$

$10^4 \equiv -10^2,\ 10^5 \equiv -10^3 \pmod{2020}$ であるから，100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 で，2020 で割り切れるものは

$$10^{99} + 10^n \quad (n = 5, 9, 13, \cdots, 93, 97)$$

よって，求める個数は　**24** (個)

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\tan 2\theta + a\tan\theta = 0$ より $(0 \leqq \theta < \pi)$

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + a\tan\theta = 0 \quad ゆえに \quad \tan\theta\left(\frac{2}{1-\tan^2\theta} + a\right) = 0$$

$x = \tan\theta$ $(0 \leqq \theta < \pi)$ とおくと

$$x\left(\frac{2}{1-x^2} + a\right) = 0 \quad \cdots(*)$$

- $a = 0$ のとき，原方程式は　$\tan 2\theta = 0$　これを解いて　$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$
- $a \neq 0$ のとき，$(*)$ より　$x = 0$　または　$x^2 = \dfrac{a+2}{a}$

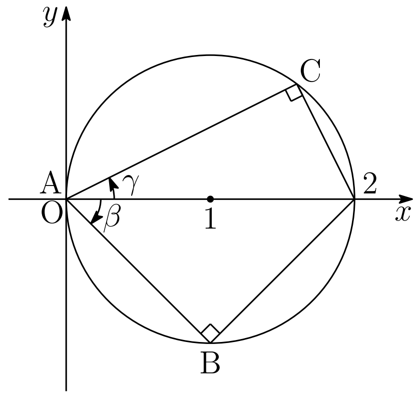
　(i) $\dfrac{a+2}{a} \leqq 0$，すなわち，$-2 \leqq a < 0$ のとき　$x = 0$

　(ii) $\dfrac{a+2}{a} > 0$，すなわち，$a < -2,\ 0 < a$ のとき　$x = 0,\ \pm\sqrt{\dfrac{a+2}{a}}$

(i),(ii) に示した x と θ は 1 対 1 に対応するから，求める θ の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-2 \leqq a < 0} \text{ のとき} & \mathbf{1}\text{ 個} \\ \boldsymbol{a = 0} \text{ のとき} & \mathbf{2}\text{ 個} \\ \boldsymbol{a < -2,\ 0 < a} \text{ のとき} & \mathbf{3}\text{ 個} \end{cases}$$

3 点 A を極 O におき，点 $(1,\ 0)$ を中心とする円周上に 2 点 B，C をおき，それぞれの偏角を $\beta,\ \gamma$ とすると $(-\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2})$



$$\mathrm{AB} = 2\cos\beta, \quad \mathrm{AC} = 2\cos\gamma$$

$\angle\mathrm{BAC} = \gamma - \beta$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos(\gamma-\beta)\\ &= 2\cos\beta\cdot 2\cos\gamma\cos(\gamma-\beta)\\ &= 4\cos\beta\cos\gamma\cos(\gamma-\beta) \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

$4\cos\beta\cos\gamma\cos(\gamma-\beta) \leqq 4$ であるから (等号が成立するとき $\beta = \gamma = 0$)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \leqq 4$$

$2\cos\beta\cos\gamma = \cos(\gamma-\beta) + \cos(\gamma+\beta)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= 2\{\cos(\gamma-\beta)+\cos(\gamma+\beta)\}\cos(\gamma-\beta)\\ &= 2\cos^2(\gamma-\beta) + 2\cos(\gamma+\beta)\cos(\gamma-\beta)\\ &= 2\left\{\cos(\gamma-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\gamma+\beta)\right\}^2 - \frac{1}{2}\cos^2(\gamma+\beta) \geqq -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

上式で等号が成立するとき

$$\begin{cases}\cos(\gamma-\beta)+\dfrac{1}{2}\cos(\gamma+\beta) = 0\\ \cos(\beta+\gamma) = 1\end{cases} \qquad \text{すなわち} \quad \beta = -\frac{\pi}{3},\ \ \gamma = \frac{\pi}{3}$$

よって　**最大値 4，最小値 $-\dfrac{1}{2}$**

$\boxed{\mathbf{4}}$ $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2-x}^{2+x} |t-x|\,dt$ について $(x>0)$

(i) $x \leqq 2-x$　すなわち　$x \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x} |t-x|\,dt = \frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x} (t-x)\,dt \\ &= \frac{1}{2x}\Big[\,(t-x)^2\,\Big]_{2-x}^{2+x} = 4-2x \end{aligned}$$

したがって　　$F(x) \geqq F(1) = 2$

(ii) $2-x \leqq x$　すなわち　$1 \leqq x$ のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x} |t-x|\,dt \\ &= -\frac{1}{x}\int_{2-x}^{x}(t-x)\,dt + \frac{1}{x}\int_{x}^{2+x}(t-x)\,dt \\ &= -\frac{1}{2x}\Big[\,(t-x)^2\,\Big]_{2-x}^{x} + \frac{1}{2x}\Big[\,(t-x)^2\,\Big]_{x}^{2+x} \\ &= 2x + \frac{4}{x} - 4 \end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

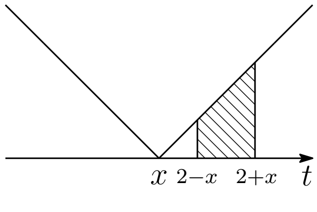
$$2x + \frac{4}{x} \geqq 2\sqrt{2x\cdot\frac{4}{x}} = 4\sqrt{2}$$

上式において，等号が成立するとき

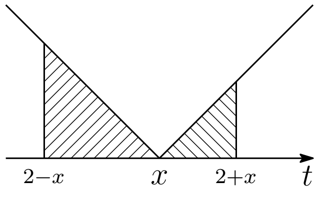
$$2x = \frac{4}{x} \quad \text{すなわち} \quad x = \sqrt{2}$$

したがって　$F(x) \geqq F(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4$

i) $x \leqq 1$ のとき



ii) $1 \leqq x$ のとき



よって　最小値 $\boldsymbol{F(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 点の合計が 1 点になるのは，1 回目に表が出る確率であるから

$$p_1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

点の合計が 2 点になるのは，1 回目に裏が出るか，または 2 回続けて表が出る確率であるから

$$p_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

また，次の確率漸化式が成立する．

$$(*) \quad p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

上式に $n = 1,\ 2$ を代入すると

$$p_3 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{5}{8}}$$
$$p_4 = \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \mathbf{\frac{11}{16}}$$

$(*)$ より

$$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$$

数列 $\{p_{n+1} - p_n\}$ は初項 $p_2 - p_1 = \frac{1}{4}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_{n+1} - p_n = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad |p_{n+1} - p_n| = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$|p_{n+1} - p_n| = \frac{1}{2^{n+1}} < 0.01$ のとき

$$\frac{1}{2^{n+1}} < 0.01 \quad \text{したがって} \quad 2^{n+1} > 100$$

$2^6 = 64$，$2^7 = 128$ より，上式を満たす最小の n は

$$n + 1 = 7 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{n = 6}$$