平成 31 年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　平成 31 年 2 月 25 日

1 p を自然数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ．

2 原点を O とする座標平面上の点 Q は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ の部分を動く．点 Q と点 A(2, 2) に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}})\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

を満たす点 P の軌跡を求め，図示せよ．

3 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とする．また，α は 1 より大きい実数とする．曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線と x 軸の交点を Q とする．点 Q を通る C の接線の中で傾きが最小のものを ℓ とする．

(1) ℓ と C の接点の x 座標を α の式で表せ．

(2) $\alpha = 2$ とする．ℓ と C で囲まれた部分の面積を求めよ．

4 原点を O とする座標平面上に，点 (2, 0) を中心とする半径 2 の円 C_1 と，点 (1, 0) を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．点 P を中心とする円 C_3 は C_1 に内接し，かつ C_2 に外接する．ただし，P は x 軸上にないものとする．P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を Q とするとき，三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 左下の図のような縦 3 列横 3 列の 9 個のマスがある．異なる 3 個のマスを選び，それぞれに 1 枚ずつコインを置く．マスの選び方は，どれも同様に確からしいものとする．縦と横の各列について，点数を次のように定める．

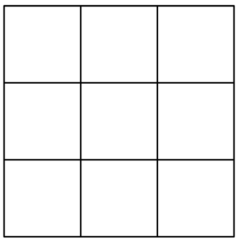
- その列に置かれているコインが 1 枚以下のとき，0 点
- その列に置かれているコインがちょうど 2 枚のとき，1 点
- その列に置かれているコインが 3 枚のとき，3 点

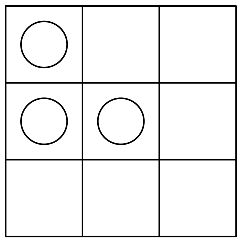
縦と横のすべての列の点数の合計を S とする．たとえば，右下の図のようにコインが置かれている場合，縦の 1 列目と横の 2 列目の点数が 1 点，他の列の点数が 0 点であるから，$S = 2$ となる．

(1) $S = 3$ となる確率を求めよ．

(2) $S = 1$ となる確率を求めよ．

(3) $S = 2$ となる確率を求めよ．





解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a_1=1,\quad a_2=p^2,\quad a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+13\quad (n=1,2,3,\cdots)$

ゆえに　$a_3=a_2-a_1+13=p^2-1+13=p^2+12$

$a_4=a_3-a_2+13=(p^2+12)-p^2+13=25$

$a_5=a_4-a_3+13=25-(p^2+12)+13=26-p^2$

数列 $\{a_n\}$ が平方数からなると仮定すると，$a_5=26-p^2$ より，p が自然数であるから，条件を満たす p は

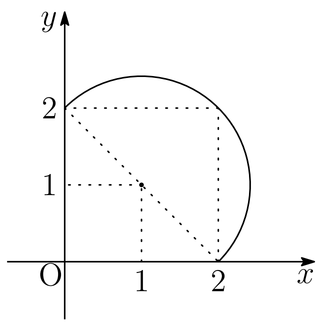
$$p=1,\ 5$$

このとき，a_3 は平方数ではないので矛盾を生じる．
よって，数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=(2\cos\theta+2\sin\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)\\&=(2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta)\\&=(\cos2\theta+\sin2\theta+1,\ \sin2\theta-\cos2\theta+1)\\&=\left(\sqrt{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1,\ \sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ であるから，点 P の描く軌跡は，次のようになる．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=x^3-3x+2$ より　$f'(x)=3x^2-3$

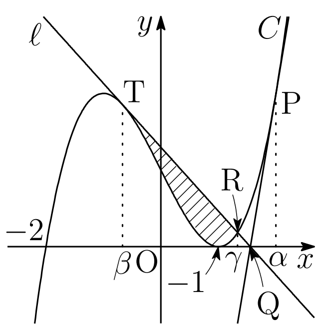
C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線は

$$y-(\alpha^3-3\alpha+2)=(3\alpha^2-3)(x-\alpha)$$

すなわち　$y=3(\alpha^2-1)x-2\alpha^3+2\quad\cdots(*)$

これに $y=0$ を代入して整理すると

$$(\alpha-1)\{3(\alpha+1)x-2(\alpha^2+\alpha+1)\}=0$$



点 Q の x 座標は，$\alpha>1$ に注意して　$x=\dfrac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)}$

ℓ と C の接点を T とし，その x 座標を β とすると，ℓ と x 軸の交点の x 座標は，$\beta\neq-1$ に注意して

$$\frac{2(\beta^2+\beta+1)}{3(\beta+1)}$$

これが点 Q の x 座標と一致するから

$$\frac{2(\beta^2+\beta+1)}{3(\beta+1)}=\frac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{\beta^2}{\beta+1}=\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$$

これを整理すると　$(\alpha-\beta)(\alpha\beta+\alpha+\beta)=0$

$\alpha\neq\beta$ であるから　$\beta=\boldsymbol{-\dfrac{\alpha}{\alpha+1}}$

(2) C 上の点 $\mathrm{T}(\beta,\ f(\beta))$ における接線の方程式は，$(*)$ と同様に

$$y=3(\beta^2-1)x-2\beta^3+2$$

C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^3-3x+2=3(\beta^2-1)x-2\beta^3+2$$

整理すると　$(x-\beta)^2(x+2\beta)=0$

T 以外の共有点を R とし，その x 座標を γ とすると　$\gamma=-2\beta$

ℓ と C で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_\beta^\gamma\{3(\beta^2-1)x-2\beta^3+2-(x^3-3x+2)\}dx\\&=-\int_\beta^\gamma(x-\beta)^2(x+2\beta)\,dx\\&=\int_\beta^\gamma(x-\beta)^2(\gamma-x)\,dx=\frac{1}{12}(\gamma-\beta)^4\end{aligned}$$

$\alpha=2$ のとき，$\beta=-\dfrac{2}{3}$，$\gamma=\dfrac{4}{3}$，$\gamma-\beta=2$　よって　$S=\dfrac{1}{12}\cdot2^4=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

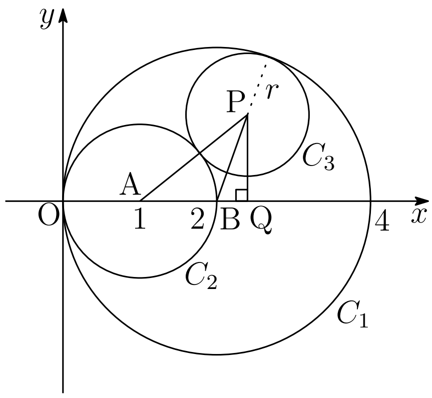
補足 積分公式[1]

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用する．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

4 C_1，C_2 の中心をそれぞれ A(1, 0)，B(2, 0) とし，C_3 の半径を r，中心 P の座標を $(x,\ y)$ とすると $\mathrm{AP} = 1+r,\ \mathrm{BP} = 2-r$ であるから



$$(x-1)^2 + y^2 = (1+r)^2 \quad \cdots ①$$
$$(x-2)^2 + y^2 = (2-r)^2 \quad \cdots ②$$

① − ② より　$2x = 6r$　ゆえに　$x = 3r$

これを ① に代入すると　$y^2 = 8r(1-r)$

△OPQ の面積を S とすると

$$S^2 = \frac{1}{4}x^2y^2 = \frac{1}{4}(3r)^2 \cdot 8r(1-r) = 18r^3(1-r)$$

$0 < r < 1$ より，4 正数 $r,\ r,\ r,\ 3(1-r)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{r+r+r+3(1-r)}{4} \geqq \sqrt[4]{r \cdot r \cdot r \cdot 3(1-r)} \quad ゆえに \quad r^3(1-r) \leqq \frac{27}{256}$$

上式において，等号が成立する条件は

$$r = 3(1-r) \quad すなわち \quad r = \frac{3}{4}$$

したがって　$S^2 \leqq 18 \times \dfrac{27}{256}$　ゆえに　$S \leqq \dfrac{9\sqrt{6}}{16}$

よって，求める △OPQ の面積の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{6}}{16}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 3枚のコインを配置する場合の総数は　${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = 84$ (通り)

$S = 3$ となるのは，3枚のコインが縦1列に並ぶ3通りと横1列に並ぶ3通りの計6通り

よって，求める確率は　$P(S = 3) = \dfrac{6}{84} = \mathbf{\dfrac{1}{14}}$

(2) 縦1列に丁度2枚のコインが並ぶ場合の数は，1列に並ぶ列の選び方が ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り，その配置法が ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りあり，さらに残り1枚の配置法が2通りであるから

$$ {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times 2 = 18 \ \text{(通り)} $$

同様に，横1列に丁度2枚のコインが並ぶ場合の数は　18 (通り)

よって，求める確率は　$P(S = 1) = \dfrac{18 + 18}{84} = \mathbf{\dfrac{3}{7}}$

(3) まず，$S = 0$ となる場合は，3枚のコインのうちどの2枚も同じ縦の列または横の列にない場合であるから，その確率は

$$ P(S = 0) = \frac{3!}{84} = \frac{1}{14} $$

$P(S = 2) = 1 - P(S = 0) - P(S = 1) - P(S = 3)$ であるから

求める確率は　　$1 - \dfrac{1}{14} - \dfrac{3}{7} - \dfrac{1}{14} = \mathbf{\dfrac{3}{7}}$