

平成31年度 一橋大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
 商・経済・法・社会学部 数I・II・A・B 平成31年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 p を自然数とする. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. 数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ.

2 原点を O とする座標平面上の点 Q は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の部分を動く. 点 Q と点 $A(2, 2)$ に対して

$$\vec{OP} = (\vec{OA} \cdot \vec{OQ}) \vec{OQ}$$

を満たす点 P の軌跡を求め, 図示せよ.

3 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とする. また, α は 1 より大きい実数とする. 曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(\alpha, f(\alpha))$ における接線と x 軸の交点を Q とする. 点 Q を通る C の接線の中で傾きが最小のものを ℓ とする.

(1) ℓ と C の接点の x 座標を α の式で表せ.

(2) $\alpha = 2$ とする. ℓ と C で囲まれた部分の面積を求めよ.

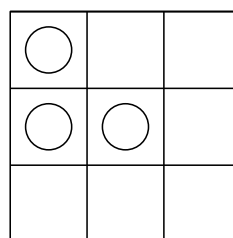
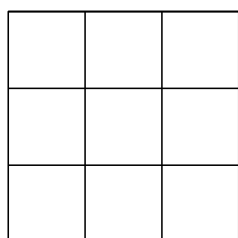
4 原点を O とする座標平面上に, 点 $(2, 0)$ を中心とする半径 2 の円 C_1 と, 点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある. 点 P を中心とする円 C_3 は C_1 に内接し, かつ C_2 に外接する. ただし, P は x 軸上にないものとする. P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を Q とするとき, 三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ.

5 左下の図のような縦3列横3列の9個のマスがある。異なる3個のマスを選び、それぞれに1枚ずつコインを置く。マスの選び方は、どれも同様に確からしいものとする。縦と横の各列について、点数を次のように定める。

- その列に置かれているコインが1枚以下のとき、0点
- その列に置かれているコインがちょうど2枚のとき、1点
- その列に置かれているコインが3枚のとき、3点

縦と横のすべての列の点数の合計を S とする。たとえば、右下の図のようにコインが置かれている場合、縦の1列目と横の2列目の点数が1点、他の列の点数が0点であるから、 $S = 2$ となる。

- (1) $S = 3$ となる確率を求めよ。
- (2) $S = 1$ となる確率を求めよ。
- (3) $S = 2$ となる確率を求めよ。



解答例

$$\boxed{1} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{ゆえに} \quad a_3 = a_2 - a_1 + 13 = p^2 - 1 + 13 = p^2 + 12$$

$$a_4 = a_3 - a_2 + 13 = (p^2 + 12) - p^2 + 13 = 25$$

$$a_5 = a_4 - a_3 + 13 = 25 - (p^2 + 12) + 13 = 26 - p^2$$

数列 $\{a_n\}$ が平方数からなると仮定すると, $a_5 = 26 - p^2$ より, p が自然数であるから, 条件を満たす p は

$$p = 1, 5$$

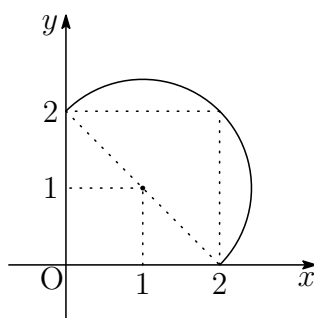
このとき, a_3 は平方数ではないので矛盾を生じる.

よって, 数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在する. ■

$$\boxed{2} \quad P(x, y), Q(\cos \theta, \sin \theta) \text{ とすると } (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}), \quad \overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ}) \overrightarrow{OQ} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} (x, y) &= (2 \cos \theta + 2 \sin \theta)(\cos \theta, \sin \theta) \\ &= (2 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta, 2 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin^2 \theta) \\ &= (\cos 2\theta + \sin 2\theta + 1, \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1) \\ &= \left(\sqrt{2} \cos \left(2\theta - \frac{\pi}{4} \right) + 1, \sqrt{2} \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right) \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ であるから, 点 P の描く軌跡は, 次のようになる.



$$\boxed{3} \quad (1) \quad f(x) = x^3 - 3x + 2 \text{ より } f'(x) = 3x^2 - 3$$

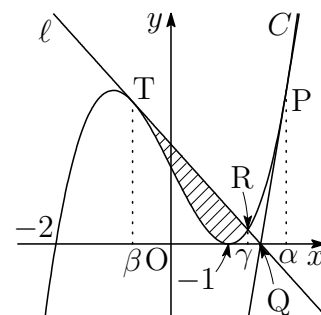
C 上の点 $P(\alpha, f(\alpha))$ における接線は

$$y - (\alpha^3 - 3\alpha + 2) = (3\alpha^2 - 3)(x - \alpha)$$

$$\text{すなわち } y = 3(\alpha^2 - 1)x - 2\alpha^3 + 2 \quad \dots (*)$$

これに $y = 0$ を代入して整理すると

$$(\alpha - 1)\{3(\alpha + 1)x - 2(\alpha^2 + \alpha + 1)\} = 0$$



点 Q の x 座標は, $\alpha > 1$ に注意して $x = \frac{2(\alpha^2 + \alpha + 1)}{3(\alpha + 1)}$

ℓ と C の接点を T とし, その x 座標を β とすると, ℓ と x 軸の交点の x 座標は, $\beta \neq -1$ に注意して

$$\frac{2(\beta^2 + \beta + 1)}{3(\beta + 1)}$$

これが点 Q の x 座標と一致するから

$$\frac{2(\beta^2 + \beta + 1)}{3(\beta + 1)} = \frac{2(\alpha^2 + \alpha + 1)}{3(\alpha + 1)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\beta^2}{\beta + 1} = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1}$$

これを整理すると $(\alpha - \beta)(\alpha\beta + \alpha + \beta) = 0$

$\alpha \neq \beta$ であるから $\beta = -\frac{\alpha}{\alpha + 1}$

(2) C 上の点 T($\beta, f(\beta)$) における接線の方程式は, (*) と同様に

$$y = 3(\beta^2 - 1)x - 2\beta^3 + 2$$

C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^3 - 3x + 2 = 3(\beta^2 - 1)x - 2\beta^3 + 2$$

整理すると $(x - \beta)^2(x + 2\beta) = 0$

T 以外の共有点を R とし, その x 座標を γ とすると $\gamma = -2\beta$

ℓ と C で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\beta}^{\gamma} \{3(\beta^2 - 1)x - 2\beta^3 + 2 - (x^3 - 3x + 2)\} dx \\ &= - \int_{\beta}^{\gamma} (x - \beta)^2(x + 2\beta) dx \\ &= \int_{\beta}^{\gamma} (x - \beta)^2(\gamma - x) dx = \frac{1}{12}(\gamma - \beta)^4 \end{aligned}$$

$\alpha = 2$ のとき, $\beta = -\frac{2}{3}$, $\gamma = \frac{4}{3}$, $\gamma - \beta = 2$ よって $S = \frac{1}{12} \cdot 2^4 = \frac{4}{3}$

補足 積分公式¹

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m(\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

を利用する. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010_kouki.pdf の 1 を参照.

- 4 C_1, C_2 の中心をそれぞれ $A(1, 0), B(2, 0)$ とし, C_3 の半径を r , 中心 P の座標を (x, y) とすると $AP = 1 + r, BP = 2 - r$ であるから

$$(x - 1)^2 + y^2 = (1 + r)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = (2 - r)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } 2x = 6r \text{ ゆえに } x = 3r$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入すると } y^2 = 8r(1 - r)$$

$\triangle OPQ$ の面積を S とすると

$$S^2 = \frac{1}{4}x^2y^2 = \frac{1}{4}(3r)^2 \cdot 8r(1 - r) = 18r^3(1 - r)$$

$0 < r < 1$ より, 4 正数 $r, r, r, 3(1 - r)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

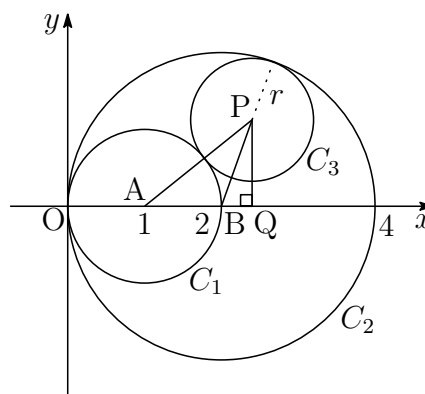
$$\frac{r + r + r + 3(1 - r)}{4} \geq \sqrt[4]{r \cdot r \cdot r \cdot 3(1 - r)} \quad \text{ゆえに} \quad r^3(1 - r) \leq \frac{27}{256}$$

上式において, 等号が成立する条件は

$$r = 3(1 - r) \quad \text{すなわち} \quad r = \frac{3}{4}$$

$$\text{したがって } S^2 \leq 18 \times \frac{27}{256} \quad \text{ゆえに} \quad S \leq \frac{9\sqrt{6}}{16}$$

よって, 求める $\triangle OPQ$ の面積の最大値は $\frac{9\sqrt{6}}{16}$ ■



- 5 (1) 3枚のコインを配置する場合の総数は ${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ (通り)

$S = 3$ となるのは、3枚のコインが縦1列に並ぶ3通りと横1列に並ぶ3通りの計6通り

よって、求める確率は $P(S = 3) = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$

- (2) 縦1列に丁度2枚のコインが並ぶ場合の数は、1列に並ぶ列の選び方が ${}_3C_1$ 通り、その配置法が ${}_3C_2$ 通りあり、さらに残り1枚の配置法が2通りであるから

$${}_3C_1 \times {}_3C_2 \times 2 = 18 \text{ (通り)}$$

同様に、横1列に丁度2枚のコインが並ぶ場合の数は 18 (通り)

よって、求める確率は $P(S = 1) = \frac{18 + 18}{84} = \frac{3}{7}$

- (3) まず、 $S = 0$ となる場合は、3枚のコインのうちどの2枚も同じ縦の列または横の列にない場合であるから、その確率は

$$P(S = 0) = \frac{3!}{84} = \frac{1}{14}$$

$P(S = 2) = 1 - P(S = 0) - P(S = 1) - P(S = 3)$ であるから

求める確率は $1 - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} - \frac{1}{14} = \frac{3}{7}$ ■