平成30年度　一橋大学　2次試験前期日程(数学問題)120分
商・経済・法・社会学部　数I・II・A・B　平成30年2月25日

$\boxed{1}$ 正の整数 n の各位の数の和を $S(n)$ で表す．たとえば

$$S(3)=3, \quad S(10)=1+0=1, \quad S(516)=5+1+6=12$$

である．

(1) $n \geqq 10000$ のとき，不等式 $n > 30S(n)+2018$ を示せ．

(2) $n=30S(n)+2018$ を満たす n を求めよ．

$\boxed{2}$ $-1 \leqq t \leqq 1$ とし，曲線 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{2}\right)$ における接線を l とする．半円 $x^2+y^2=1$ $(y \leqq 0)$ と l で囲まれた部分の面積を S とする．S のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{3}$ 3個のさいころを投げる．

(1) 出た目の積が6となる確率を求めよ．

(2) 出た目の積が k となる確率が $\dfrac{1}{36}$ であるような k をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ p, q を正の実数とする．原点をOとする座標空間内の3点 $\mathrm{P}(p,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ q,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 1)$ は $\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{6}$ を満たす．四面体OPQRの体積の最大値を求めよ．

$\boxed{5}$ a を実数とし，$f(x)=x-x^3$，$g(x)=a(x-x^2)$ とする．2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は $0<x<1$ の範囲に共有点を持つ．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた2つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $10^k \geqq n < 10^{k+1}$ とすると $(k \geqq 4)$

$$n \geqq 10^k = (9+1)^k > 9^k + {}_k\mathrm{C}_1 \cdot 9^{k-1} > 9^4 + {}_k\mathrm{C}_1 \cdot 9^3 = 6561 + 729k$$
$$> 30(9k+9) + 2018 \geqq 30S(n) + 2018$$

よって　$n \geqq 10000$ のとき　$n > 30S(n) + 2018$

(2) (1) の結果から
$$n = 30S(n) + 2018 \quad \cdots (*)$$
を満たす正の整数 n の必要条件は
$$n < 10000$$
また，$(*)$ から，n の一位の数が 8 であることに注意すると，9 以下の負でない整数 a，b，c を用いて
$$n = 1000a + 100b + 10c + 8$$
とおき，$(*)$ に代入すると
$$1000a + 100b + 10c + 8 = 30(a+b+c+8) + 2018$$
整理すると　　$7b - 2c = 225 - 97a \quad \cdots$ ①

$-18 \leqq 7b - 2c \leqq 63$ であるから
$$-18 \leqq 225 - 97a \leqq 63 \qquad \text{ゆえに} \quad a = 2$$
これを ① に代入して　　$7b - 2c = 31$

b，c の条件に注意してこれを解くと　$(b,\ c) = (5,\ 2),\ (7,\ 9)$

よって，求める n は　　**2528，2798**

$\boxed{\mathbf{2}}$ $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ より　$y'=x$

曲線 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{2}\right)$ における接線 l の方程式は

$$y-\frac{t^2-1}{2}=t\,(x-t)+\frac{t^2-1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad tx-y-\frac{t^2+1}{2}=0$$

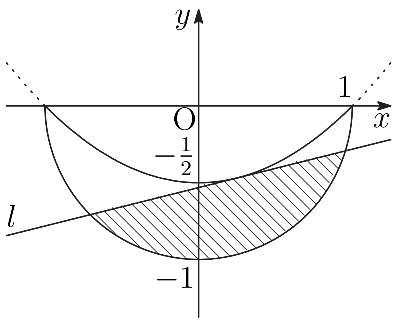
原点 O と直線 l の距離を d とすると

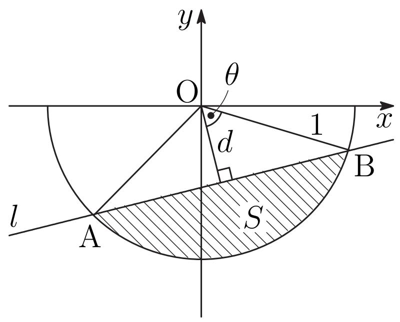
$$d=\frac{|-\frac{t^2+1}{2}|}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}\qquad (-1\leqq t\leqq 1)$$

l と半円 $x^2+y^2=1$ $(y\leqq 0)$ との交点を A，B とし，$2\theta=\angle\mathrm{AOB}$ とすると

$$\cos\theta=d=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}\quad \cdots①$$

したがって　　$S=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta-\dfrac{1}{2}\cdot1^2\sin2\theta=\theta-\dfrac{1}{2}\sin2\theta\quad\cdots②$





S は d が最大のとき最小となり，d が最小のとき最大となるから ①，② より，

$$t=\pm1\quad \text{すなわち}\quad \theta=\frac{\pi}{4}\ \text{のとき}\quad S\ \text{は最小値}\ \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},$$

$$t=0\quad \text{すなわち}\quad \theta=\frac{\pi}{3}\ \text{のとき}\quad S\ \text{は最大値}\ \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\leqq S\leqq\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 出た目の積が6となる3個のサイコロの目の組合せは

$$\{1,\ 2,\ 3\},\quad \{1,\ 1,\ 6\}$$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{3!+{}_3\mathrm{C}_1}{6^3}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}}$

(2) 3個のさいころの出た目を $a,\ b,\ c$ とすると $\quad k=abc$

k となる確率が $\dfrac{1}{36}$ となるのは，次の (A)，(B) の場合である．

(A) k が3数 $a,\ a,\ ar^2$ または $ar, ar,\ ar^2$ の積として表される $(r\neq 1)$，
すなわち，1, 1, 4 または 2, 2, 4 の積であるから $\quad k=4,\ 16$

(B) k が相異なる3数 $a,\ b,\ c$ の積として一意的に表される．

ここで，$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$，$Y=\{5\}$ とする．

(i) $a,\ b,\ c$ が X の要素であるとき，k は

$$1{\cdot}2{\cdot}3,\quad 1{\cdot}2{\cdot}4,\quad 1{\cdot}2{\cdot}6=1{\cdot}3{\cdot}4,\quad 1{\cdot}3{\cdot}6,$$
$$1{\cdot}4{\cdot}6=2{\cdot}3{\cdot}4,\quad 2{\cdot}3{\cdot}6,\quad 2{\cdot}4{\cdot}6,\quad 3{\cdot}4{\cdot}6$$

これらは，(B) を満たさない．

(ii) $a,\ b,\ c$ の1つが Y の要素であるとき，$c=5$ とすると，$a,\ b$ は X の要素である．このとき

$$4=1{\cdot}4=2{\cdot}2,\quad 6=1{\cdot}6=2{\cdot}3,\quad 12=2{\cdot}6=3{\cdot}4$$

であることに注意すると，(B) を満たす $\{a,\ b\}$ の組合せは

$$\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{3,\ 6\},\ \{4,\ 6\}$$

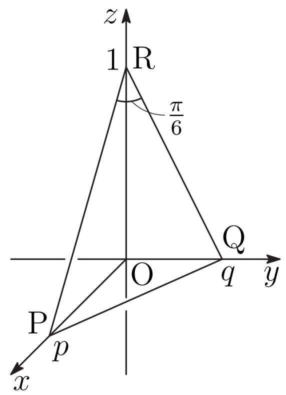
したがって，(B) を満たす k の値は

$$k=1{\cdot}2{\cdot}5,\ 1{\cdot}3{\cdot}5,\ 2{\cdot}4{\cdot}5,\ 3{\cdot}5{\cdot}6,\ 4{\cdot}5{\cdot}6$$

(A) および (ii) から

$$\boldsymbol{k=4,\ 10,\ 15,\ 16,\ 40,\ 90,\ 120}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\mathrm{P}(p,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ q,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 1)$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(p,\ 0,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(0,\ q,-1)$$

$\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{6}$，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{RP}}||\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|\cos\dfrac{\pi}{6}$ より

$$1=\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに　$(p^2+1)(q^2+1)=\dfrac{4}{3}$　$\cdots$①

四面体 OPQR の体積を V とすると　$V=\dfrac{1}{6}pq$　$\cdots$②

① より　$p^2q^2+p^2+q^2=\dfrac{1}{3}$　ゆえに　$(p-q)^2=-p^2q^2-2pq+\dfrac{1}{3}$　$\cdots$①$'$

したがって　$-p^2q^2-2pq+\dfrac{1}{3}\leqq 0$　ゆえに　$(pq)^2+2pq-\dfrac{1}{3}\leqq 0$

$p>0,\ q>0$ に注意して　$0<pq\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1$

上式において等号が成立するのは，①$'$ より　$p=q=\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1}$

② より，このとき V は最大値

$$\frac{1}{6}pq=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}-3}{18}}$$

をとる．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=x(1-x)(1+x)$,

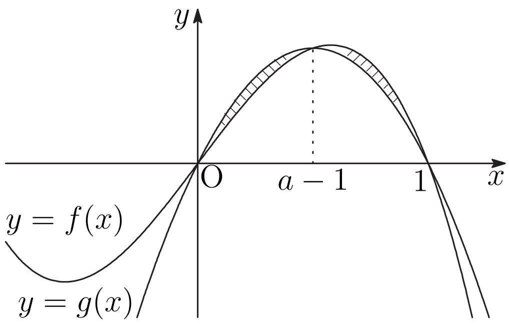
$g(x)=ax(1-x)$ より

$f(x)-g(x)=x(1-x)(x-a+1)$

$f(x)=g(x)$ の解は $x=0,\ 1,\ a-1$

$0<x<1$ に解があるから

$0<a-1<1$ よって $\mathbf{1<\boldsymbol{a}<2}$



(2) $f(x)-g(x)=x(1-x)(x-a+1)$ より

$0 \leqq x \leqq a-1$ のとき $f(x) \leqq g(x)$, $a-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $f(x) \geqq g(x)$

$$S_1=\int_0^{a-1}\{g(x)-f(x)\}\,dx,\quad S_2=\int_{a-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

とおくと

$$\begin{aligned}
S_2-S_1&=\int_{a-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx-\int_0^{a-1}\{g(x)-f(x)\}\,dx\\
&=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^1 x(1-x)(x-a+1)\,dx\\
&=\int_0^1 x^2(1-x)\,dx+(1-a)\int_0^1 x(1-x)\,dx\\
&=\frac{1}{12}+(1-a)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}(3-2a)
\end{aligned}$$

$S_2-S_1=0$ であるから $\boldsymbol{a}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

補足 積分公式[1]

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用する.

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照.