平成29年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120分
商・経済・法・社会学部　数I・II・A・B　平成29年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 実数 a，b は $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たす.

(1) $\log_3 a + \log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ.

(2) $\log_2 a + \log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ.

2 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 \\ y^2 = zx + 7 \\ z^2 = xy + 7 \end{cases}$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ.

3 $P(0)=1$，$P(x+1)-P(x)=2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ.

4 正の実数 a，b，c は $a+b+c=1$ を満たす．連立方程式

$$|ax+by| \leqq 1, \qquad |cx-by| \leqq 1$$

の表す xy 平面の領域を D とする．D の面積の最小値を求めよ.

5 xy 平面上の直線 $x=y+1$ を k，yz 平面上の直線 $y=z+1$ を l，xz 平面上の直線 $z=x+1$ を m とする．直線 k 上に点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 0)$ をとる．l 上の点 P_2 を $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \perp l$ となるように定め，m 上の点 P_3 を $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 \perp m$ となるように定め，k 上の点 P_4 を $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4 \perp k$ となるように定める．以下，同様の手順で $l,\ m,\ k,\ l,\ m,\ k, \cdots$ 上の点 $\mathrm{P}_5,\ \mathrm{P}_6,\ \mathrm{P}_7,\ \mathrm{P}_8,\ \mathrm{P}_9,\ \mathrm{P}_{10}, \cdots$ を定める.

(1) 点 P_2，P_3 の座標を求めよ.

(2) 線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを n を用いて表せ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たすとき

$$b = 9 - a \geqq 1 \quad ゆえに \quad 1 \leqq a \leqq 8$$

このとき　$\log_3 a + \log_3 b = \log_3 ab = \log_3 a(9-a)$

$f(a) = a(9-a)$ $(1 \leqq a \leqq 8)$ とおくと　$f(a) = -\left(a - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \dfrac{81}{4}$

したがって　　$8 \leqq f(a) \leqq \dfrac{81}{4}$

よって　最大値 $\log_3 \dfrac{81}{4} = \mathbf{4 - 2\log_3 2}$，最小値 $\log_3 8 = \mathbf{3\log_3 2}$

(2) (1) と同様に　$\log_2 a + \log_4 b = \log_4 a^2 b = \log_4 a^2(9-a)$

$g(a) = a^2(9-a) = -a^3 + 9a^2$ $(1 \leqq a \leqq 8)$ とおくと

$$g'(a) = -3a^2 + 18a = -3a(a-6)$$

a	1	$\cdots$	6	$\cdots$	8
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	8	$\nearrow$	極大 108	$\searrow$	64

したがって　　$8 \leqq g(a) \leqq 108$

よって　最大値 $\log_4 108 = \mathbf{1 + 3\log_4 3}$，最小値 $\log_4 8 = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$
$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 & \cdots ① \\ y^2 = zx + 7 & \cdots ② \\ z^2 = xy + 7 & \cdots ③ \end{cases}$$

① − ② より　$x^2 - y^2 = z(y - x)$　ゆえに　$(x - y)(x + y + z) = 0$

② − ③ より　$y^2 - z^2 = x(z - y)$　ゆえに　$(y - z)(x + y + z) = 0$

上の 2 式の結果において，$x + y + z \neq 0$ とすると　$x - y = 0,\quad y - z = 0$

すなわち　$x = y = z$　これは，①〜③ を満たさない．

したがって　$x + y + z = 0 \quad \cdots ④$

条件より，$x \leqq y \leqq z$ であるから，$z < 0$ とすると

$$x \leqq y \leqq z < 0 \quad これは④に反するから \quad z \geqq 0$$

④ から，$x = -(y + z)$ を ① に代入すると

$$(y + z)^2 = yz + 7 \quad ゆえに \quad (2y + z)^2 = 28 - 3z^2$$

第 2 式の左辺が平方数であるから，$z \geqq 0$ に注意して　$z = 1,\ 2,\ 3$

③，④ より，x，y を解とする t に関する 2 次方程式は

$$t^2 - (x + y)t + xy = 0 \quad すなわち \quad t^2 + zt + z^2 - 7 = 0 \quad \cdots (*)$$

(i) $z = 1$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + t - 6 = 0 \quad ゆえに \quad (t + 3)(t - 2) = 0$$

$x \leqq y$ に注意して　$x = -3,\ y = 2$　これは，$y \leqq z$ に反するので不適．

(ii) $z = 2$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad ゆえに \quad (t + 3)(t - 1) = 0$$

$x \leqq y$ に注意して　$x = -3,\ y = 1$

(iii) $z = 3$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \quad ゆえに \quad (t + 2)(t + 1) = 0$$

$x \leqq y$ に注意して　$x = -2,\ y = -1$

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-3,\ 1,\ 2),\ (-2, -1,\ 3)}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $P(x+1)-P(x)=2x$ より，n を自然数とすると

$$\sum_{k=0}^{n-1}\{P(k+1)-P(k)\}=2\sum_{k=0}^{n-1}k$$

したがって　　$P(n)-P(0)=2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$

$P(0)=1$ であるから　$P(n)=n^2-n+1$

$f(x)=P(x)-(x^2-x+1)\cdots(*)$ とおくと

$$f(1)=0,\ f(2)=0,\ \cdots,\ f(n)=0,\cdots$$

$f(x)$ は整式であるから，因数定理により

$$f(x)=g(x)(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\cdots\qquad(g(x)\text{ は整式})$$

$f(x)$ の次数は有限であるから

$$g(x)=0\quad\text{すなわち}\quad f(x)=0$$

$(*)$ より　　$\boldsymbol{P(x)=x^2-x+1}$ ■

$\boxed{4}$ $|ax+by| \leqq 1$，$|cx-by| \leqq 1$ より

$$-1 \leqq ax+by \leqq 1, \quad -1 \leqq cx-by \leqq 1$$

4 本の直線を

$$l_1 : ax+by=1, \qquad m_1 : cx-by=1,$$
$$l_2 : ax+by=-1, \qquad m_2 : cx-by=-1$$

とすると，$l_1 // l_2$，$m_1 // m_2$．D はこれら 4 本の直線で囲まれた平行四辺形の内部および周からなる領域である．

l_1 の点 $(x_1,\ y_1)$ から l_2 へ下ろした垂線の長さを d とすると，$ax_1+by_1=1$ より

$$d = \frac{|ax_1+by_1+1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

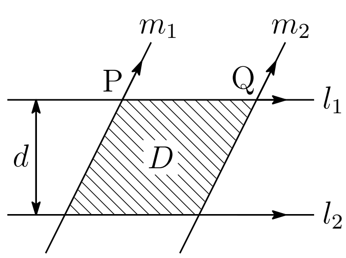
l_1 と m_1 の交点を P をとすると，P の座標は

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx-by=1 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad \mathrm{P}\left(\frac{2}{a+c},\ \frac{-a+c}{b(a+c)}\right)$$

l_1 と m_2 の交点を Q をとすると，Q の座標は

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx-by=-1 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{1}{b}\right)$$

したがって　$\mathrm{PQ} = \dfrac{2\sqrt{a^2+b^2}}{b(a+c)}$



D の面積を S とすると

$$S = \mathrm{PQ} \cdot d = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{b(a+c)} \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{4}{b(a+c)}$$

$a+b+c=1$ より，$a+c=1-b$ であるから　$S = \dfrac{4}{b(1-b)}$

$0<b<1$ であるから　$b(1-b) = -b^2+b = -\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \leqq \dfrac{1}{4}$

よって　$b = \dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $S = \dfrac{4}{\frac{1}{4}} = \mathbf{16}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 直線 k，l，m を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned} k: \ (x,\ y,\ z) &= (1,\ 0,\ 0) + t(1,\ 1,\ 0) \\ l: \ (x,\ y,\ z) &= (0,\ 1,\ 0) + t(0,\ 1,\ 1) \\ m: \ (x,\ y,\ z) &= (0,\ 0,\ 1) + t(1,\ 0,\ 1) \end{aligned}$$

P_2，P_3 はそれぞれ l，m 上にあるから，a_2，a_3 を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} &= (0,\ 1,\ 0) + a_2(0,\ 1,\ 1) = (0,\ 1+a_2,\ a_2) \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_3} &= (0,\ 0,\ 1) + a_3(1,\ 0,\ 1) = (a_3,\ 0,\ 1+a_3) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (1,\ 0,\ 0)$ および上の 2 式から

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = (-1,\ 1+a_2,\ a_2), \quad \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} = (a_3, -1-a_2,\ 1-a_2+a_3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \perp l$ より

$$0\cdot(-1) + 1\cdot(1+a_2) + 1\cdot a_2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 + 2a_2 = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} \perp m$ より

$$1\cdot a_3 + 0\cdot(-1-a_2) + 1(1-a_2+a_3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 - a_2 + 2a_3 = 0$$

これを解いて　　$a_2 = -\dfrac{1}{2}$，$a_3 = -\dfrac{3}{4}$

よって　　$\mathbf{P_2}\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$，$\mathbf{P_3}\left(-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}},\ \mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$

(2) P_n が k 上にあるとき，$\mathrm{P}_n(1+a_n,\ a_n,\ 0)$，$\mathrm{P}_{n+1}(0,\ 1+a_{n+1},\ a_{n+1})$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (-1-a_n,\ 1-a_n+a_{n+1},\ a_{n+1}) \perp l$ であるから

$$(-1-a_n)\cdot 0 + (1-a_n+a_{n+1})\cdot 1 + a_{n+1}\cdot 1 = 0 \quad \cdots①$$

P_n が l 上にあるとき，$\mathrm{P}_n(0,\ 1+a_n,\ a_n)$，$\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ 0,\ 1+a_{n+1})$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (a_{n+1}, -1-a_n,\ 1-a_n+a_{n+1}) \perp m$ であるから

$$a_{n+1}\cdot 1 + (-1-a_n)\cdot 0 + (1-a_n+a_{n+1})\cdot 1 = 0 \quad \cdots②$$

P_n が m 上にあるとき，$\mathrm{P}_n(a_n,\ 0,\ 1+a_n)$，$\mathrm{P}_{n+1}(1+a_{n+1},\ a_{n+1},\ 0)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (1-a_n+a_{n+1},\ a_{n+1}, -1-a_n) \perp k$ であるから

$$(1-a_n+a_{n+1})\cdot 1 + a_{n+1}\cdot 1 + (-1-a_n)\cdot 0 = 0 \quad \cdots③$$

①～③ をそれぞれ整理すると，すべて次式となる．

$$2a_{n+1} - a_n + 1 = 0$$

$a_1 = 0$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n - \dfrac{1}{2}$ であるから

$$a_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(a_n + 1) \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1$$

したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}{}^2 &= (-1 - a_n)^2 + (1 - a_n + a_{n+1})^2 + a_{n+1}{}^2 \\
&= \{-1 - (2^{1-n} - 1)\}^2 \\
&\qquad\quad + \{1 - (2^{1-n} - 1) + (2^{-n} - 1)\}^2 + (2^{-n} - 1)^2 \\
&= 4\cdot2^{-2n} + (1 - 2^{-n})^2 + (2^{-n} - 1)^2 \\
&= 6\cdot2^{-2n} - 4\cdot2^{-n} + 2
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} = \sqrt{6\cdot2^{-2n} - 4\cdot2^{-n} + 2}}$ ■