平成 28 年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　平成 28 年 2 月 25 日

- $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から 1 題選択．

$\boxed{\mathbf{1}}$ $6 \cdot 3^{3x} + 1 = 7 \cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ θ を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \cos\theta, \quad a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．すべての n について $a_n = \cos(n-1)\theta$ が成り立つとき，$\cos\theta$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 硬貨が 2 枚ある．最初は 2 枚とも表の状態で置かれている．次の操作を n 回行ったあと，硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ．

［操作］2 枚とも表，または 2 枚とも裏のときには，2 枚の硬貨両方を投げる．
表と裏が 1 枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を実数とし，$f(x) = x^3 - 3ax$ とする．区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする．M の最小値とそのときの a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は零ベクトルではなく，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度は 60° である．このとき

$$r = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|}{|2\vec{a} + \vec{b}|}$$

のとりうる値の範囲を求めよ．

6 x は 0 以上の整数である．次の表は 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 5 人の得点をまとめたものである．

	①	②	③	④	⑤
科目 X の得点	x	6	4	7	4
科目 Y の得点	9	7	5	10	9

(1) $2n$ 個の実数 $a_1,\ a_2,\ ,\cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ について，

$a=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k,\ b=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab$$

が成り立つことを示せ．

(2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ．

(3) x の値を 2 増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった．このとき，r_{XY} の値を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\quad 6{\cdot}3^{3x}+1=7{\cdot}5^{2x} \quad \cdots(*)$

$(*)$ において

x	0	1	2
$6{\cdot}3^{3x}+1$	7	163	4375
$7{\cdot}5^{2x}$	7	175	4375

$x \geqq 3$ のとき

$$\frac{3^{3x}}{5^{2x}}=\left(\frac{27}{25}\right)^x \geqq \left(1+\frac{2}{25}\right)^3 > 1+3{\cdot}\frac{2}{25}=1+\frac{6}{25}>1+\frac{6}{36}=\frac{7}{6}$$

したがって　$x \geqq 3$ のとき　$6{\cdot}3^{3x}>7{\cdot}5^{2x}$　すなわち　$6{\cdot}3^{3x}+1>7{\cdot}5^{2x}$

$x \geqq 3$ において，$(*)$ を満たす整数 x は存在しない．

よって，$(*)$ を満たす 0 以上の整数 x は　**0，2**

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a_1=1$，$a_2=\cos\theta$，$a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$ が

$$a_n=\cos(n-1) \qquad \cdots(*)$$

を満たすから

$n=1$ のとき　$\cos 2\theta=\dfrac{3}{2}\cos\theta-1 \qquad \cdots①$

$n=2$ のとき　$\cos 3\theta=\dfrac{3}{2}\cos 2\theta-\cos\theta \quad \cdots②$

① より　$2\cos^2\theta-1=\dfrac{3}{2}\cos\theta-1$　ゆえに　$\cos\theta\left(\cos\theta-\dfrac{3}{4}\right)=0$

② より　$2\cos 2\theta\cos\theta=\dfrac{3}{2}\cos 2\theta$　ゆえに　$(2\cos^2\theta-1)\left(\cos\theta-\dfrac{3}{4}\right)=0$

上の 2 式を同時に満たすとき　$\cos\theta=\dfrac{3}{4} \quad \cdots③$

$n \leqq 2$ のとき，$(*)$ は定義より成立する．

$n \leqq k+1$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，③ より

$$a_{k+2}=\frac{3}{2}a_{k+1}-a_k=2\cos\theta\cos k\theta-\cos(k-1)\theta$$

$\cos(k+1)\theta+\cos(k-1)\theta=2\cos\theta\cos k\theta$ であるから　$a_{k+2}=\cos(k+1)\theta$

ゆえに，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．よって　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{3}{4}}$

補足 漸化式 $a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_n$ の特性方程式

$$x^2=\frac{3}{2}x-1 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$$

$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{4}$，$\beta=\dfrac{3-\sqrt{7}i}{4}$ とおくと，$a_0=1$，$a_1=\dfrac{3}{4}$ より

$$a_n=\frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{2}$$

$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ とおくと

$$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta,\quad \beta=\cos\theta-i\sin\theta$$

したがって

$$a_n=\frac{1}{2}\left\{(\cos\theta+i\sin\theta)^{n-1}+(\cos\theta-i\sin\theta)^{n-1}\right\}=\cos(n-1)\theta$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 硬貨を n 回投げたあと，表の硬貨の枚数が 0，1，2 である確率をそれぞ p_n，q_n，r_n とすると

$$p_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\quad q=1={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},\quad r_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

操作により，次の確率漸化式が成り立つ．

$$(*)\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{4}r_n \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{2}r_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{1}{4}r_n \end{cases} \qquad (n\geqq 1)$$

$(*)$ により　$p_2=\dfrac{3}{8}$，$q_2=\dfrac{1}{2}$，$r_2=\dfrac{1}{8}$　さらに　$p_3=\dfrac{3}{8}$，$q_3=\dfrac{1}{2}$，$r_3=\dfrac{1}{8}$

したがって　$n\geqq 2$ のとき　$p_n=\dfrac{3}{8}$，$q_n=\dfrac{1}{2}$，$r_n=\dfrac{1}{8}$

よって，求める確率は　$p_n=\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{1}{4}} & \boldsymbol{(n=1)} \\ \boldsymbol{\dfrac{3}{8}} & \boldsymbol{(n\geqq 2)} \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x) = x^3 - 3ax$ より

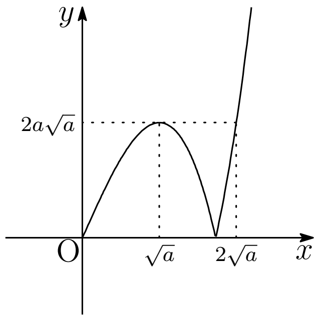
$$f(-x) = -(x^3 - 3ax) = -f(x) \quad \text{ゆえに} \quad |f(-x)| = |f(x)|$$

したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を求めればよい．

$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$ であるから，$a \leqq 0$ のとき $f(x)$ は単調増加．

$a < 0$ のとき，$f(x)$ の増減および $y = |f(x)|$ のグラフは

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2a\sqrt{a}$	$\nearrow$



(i) $a \leqq 0$ のとき　$M = |f(1)| = |1 - 3a| = -3a + 1$

(ii) $0 < 2\sqrt{a} \leqq 1$，すなわち，$0 < a \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき

$$M = |f(1)| = |1 - 3a| = -3a + 1$$

(iii) $\sqrt{a} \leqq 1 < 2\sqrt{a}$，すなわち，$\dfrac{1}{4} < a \leqq 1$ のとき

$$M = |f(\sqrt{a})| = 2a\sqrt{a}$$

(iv) $1 < \sqrt{a}$，すなわち，$1 < a$ のとき

$$M = |f(1)| = |1 - 3a| = 3a - 1$$

(i)〜(iv) より
$$M = \begin{cases} -3a + 1 & \left(a \leqq \frac{1}{4}\right) \\ 2a\sqrt{a} & \left(\frac{1}{4} < a \leqq 1\right) \\ 3a - 1 & (1 < a) \end{cases}$$

M は a の関数で，$a \leqq \dfrac{1}{4}$ で単調減少，$\dfrac{1}{4} \leqq a$ で単調増加である．

よって，M は $a = \dfrac{1}{4}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $r = \dfrac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}$ および $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$ より

$$r^2 = \frac{|\vec{a}+2\vec{b}|^2}{|2\vec{a}+\vec{b}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2}$$

$x = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ とおくと $(x>0)$ $\quad r^2 = \dfrac{1+2x+4x^2}{4+2x+x^2}$

したがって $\quad (r^2-4)x^2+2(r^2-1)x+4r^2-1=0 \quad \cdots(*)$

方程式 $(*)$ は，$r^2-4=0$，すなわち，$r=2$ のとき $\quad 6x+15=0$

これは正の解をもたないので不適．

$r \neq 2$ のとき，$(*)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta = -\frac{2(r^2-1)}{r^2-4}, \quad \alpha\beta = \frac{4r^2-1}{r^2-4}$$

(i) $r=\dfrac{1}{2}$ のとき $\quad \alpha+\beta<0$，$\alpha\beta=0$ より，$(*)$ は正の解をもたない．

(ii) $0<r<\dfrac{1}{2}$，$2<r$ のとき $\quad \alpha+\beta<0,\quad \alpha\beta>0$ より，
$(*)$ は正の解をもたない．

(iii) $\dfrac{1}{2}<r<2$ のとき $\quad \alpha\beta<0$ より，$(*)$ は正の解をもつ．

(i)〜(iii) から，求める r の値の範囲は $\quad \boldsymbol{\dfrac{1}{2}<r<2}$

補足 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β とすると，$\alpha\beta<0$ のとき

$$b^2-4ac = b^2-4a^2\cdot\frac{c}{a} = b^2-4a^2\alpha\beta>0$$

別解 $f(x) = r^2 = \dfrac{1+2x+4x^2}{4+2x+x^2}$ とおくと $(x>0)$

$$f'(x) = \frac{(1+2x+4x^2)'(4+2x+x^2)-(1+2x+4x^2)(4+2x+x^2)'}{(4+2x+x^2)^2}$$

$$= \frac{6(1+5x+x^2)}{(4+2x+x^2)^2} > 0$$

$f(x)$ は単調増加．$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \frac{1}{4}$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$

したがって $\quad \dfrac{1}{4}<r^2<4 \quad$ よって $\quad \dfrac{1}{2}<r<2$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $na=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$nb=\sum_{k=1}^{n}b_k$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)&=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-a\sum_{k=1}^{n}b_k-b\sum_{k=1}^{n}a_k+ab\sum_{k=1}^{n}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-a{\cdot}nb-b{\cdot}na+nab\\&=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab\end{aligned}$$

(2) 科目 X と科目 Y の得点の平均をそれぞれ a，b とすると

$$a=\frac{1}{5}(x+6+4+7+4)=\frac{x+21}{5},\quad b=\frac{1}{5}(9+7+5+10+9)=8$$

科目 X と科目 Y の得点の分散をそれぞれ $s_X{}^2$，$s_Y{}^2$ とすると

$$\begin{aligned}s_{\mathrm{X}}{}^2&=\frac{1}{5}(x^2+6^2+4^2+7^2+4^2)-a^2=\frac{2}{25}(2x^2-21x+72)\\s_{\mathrm{Y}}{}^2&=\frac{1}{5}(9^2+7^2+5^2+10^2+9^2)-b^2=\frac{16}{5}\end{aligned}$$

科目 X と科目 Y の得点の共分散を s_{XY} とすると

$$s_{\mathrm{XY}}=\frac{1}{5}(x{\cdot}9+6{\cdot}7+4{\cdot}5+7{\cdot}10+4{\cdot}9)-ab=\frac{x}{5}$$

よって　$r_{\mathrm{XY}}=\dfrac{s_{\mathrm{XY}}}{s_{\mathrm{X}}s_{\mathrm{Y}}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}x}{4\sqrt{2(2x^2-21x+72)}}}$

(3) r_{XY} は x の値を 2 増やしても値は同じであるから，(2) の結果から

$$\frac{\sqrt{5}(x+2)}{4\sqrt{2}\sqrt{2(x+2)^2-21(x+2)+72}}=\frac{\sqrt{5}x}{4\sqrt{2}\sqrt{2x^2-21x+72}}$$

ゆえに　$x\sqrt{2x^2-13x+38}=(x+2)\sqrt{2x^2-21x+72}$

両辺を平方して整理すると　$7x^2-34x-48=0$

したがって　$(x-6)(7x+8)=0$　x は 0 以上の整数であるから　$x=6$

ゆえに　$r_{\mathrm{XY}}=\dfrac{\sqrt{5}{\cdot}6}{4\sqrt{2(2{\cdot}6^2-21{\cdot}6+72)}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}=\dfrac{2.236\cdots}{4}=0.559\cdots$

よって　$\boldsymbol{r_{\mathrm{XY}}=0.6}$