平成27年度　一橋大学　２次試験前期日程(数学問題)120分
商・経済・法・社会学部　数I・II・A・B　平成27年2月25日

- $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から1題選択.

$\boxed{\mathbf{1}}$ n を2以上の整数とする．n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が1となるものの個数を $E(n)$ で表す．たとえば

$$E(2)=1,\quad E(3)=2,\quad E(4)=2,\quad \cdots,\quad E(10)=4,\quad \cdots$$

である．

(1) $E(1024)$ を求めよ．

(2) $E(2015)$ を求めよ．

(3) m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする．$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上の原点をOとする．点A$(a,\ 0)$，点B$(0,\ b)$ および点Cが

$$\mathrm{OC}=1,\quad \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$$

を満たしながら動く．

(1) $s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする．s と t の関係を表す等式を求めよ．

(2) $\triangle$ABCの面積のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を4以上の整数とする．正 n 角形の2つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を l とする．さらに，残りの $n-2$ 個の頂点から2つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を m とする．直線 l と m が平行になる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径1の円周上を点Pが動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径1の円周上を点Qが動く．

(1) 線分PQの長さの最小値と，そのときの点P，Qの座標を求めよ．

(2) 線分PQの長さの最大値と，そのときの点P，Qの座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_k = k + \cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ で定める．n を正の整数とする．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} a_k$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ a，b，c は異なる 3 つの正の整数とする．次のデータは 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 10 人の得点をまとめたものである．

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
科目 X の得点	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
科目 Y の得点	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a

科目 X の得点の平均値と科目 Y の得点の平均値とは等しいとする．

(1) 科目 X の得点の分散を ${s_{\mathrm{X}}}^2$，科目 Y の得点の分散を ${s_{\mathrm{Y}}}^2$ とする．$\dfrac{{s_{\mathrm{X}}}^2}{{s_{\mathrm{Y}}}^2}$ を求めよ．

(2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数を，四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．

(3) 科目 X の得点の中央値が 65，科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるとき，a，b，c の組を求めよ，

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $1024 = 2^{10}$ であるから　$E(1024) = 1024\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \mathbf{512}$

(2) $2015 = 5 \times 13 \times 31$ であるから

$$\begin{aligned} E(2015) &= 2015 - \left(\frac{2015}{5} + \frac{2015}{13} + \frac{2015}{31}\right. \\ &\qquad \left. - \frac{2015}{5{\cdot}13} - \frac{2015}{13{\cdot}31} - \frac{2015}{31{\cdot}5} + \frac{2015}{5{\cdot}13{\cdot}31}\right) \\ &= 2015\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\left(1-\frac{1}{31}\right) \\ &= 4 \times 12 \times 30 = \mathbf{1440} \end{aligned}$$

(3) $n = p^m q^m$ であるから

$$E(n) = n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{p{\cdot}q}\right) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

したがって　$\dfrac{E(n)}{n} = \left(1-\dfrac{1}{p}\right)\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$

p，q は異なる素数であるから，一般性を失うことなく $p < q$ とすると

$$p \geqq 2, \quad q \geqq 3$$

であるから

$$1 - \frac{1}{p} \geqq \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{1}{q} \geqq \frac{2}{3}$$

よって　$\dfrac{E(n)}{n} = \left(1-\dfrac{1}{p}\right)\left(1-\dfrac{1}{q}\right) \geqq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

補足 p_1，$p_2, \cdots, p_l$ を素数，k_1，$k_2, \cdots, k_l$ を正の整数とすると

$$n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$E(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

本題の $E(n)$ はオイラー (Euler) の $\varphi(n)$ 関数である [1]．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$．点 C の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{OC}^2 = 1, \quad \mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2$$

であるから

$$x^2 + y^2 = 1, \quad a^2 + b^2 = x^2 + (y-b)^2 = (x-a)^2 + y^2$$

整理すると　　$2by = 1 - a^2$，$2ax = 1 - b^2$

ゆえに　　$2aby = a(1 - a^2)$，$2abx = b(1 - b^2)$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}\{a(1-a^2)\}^2 + \{b(1-b^2)\}^2 &= (2aby)^2 + (2abx)^2 \\ &= 4a^2b^2(x^2+y^2) = 4a^2b^2\end{aligned}$$

整理すると　　$a^6 + b^6 - 2(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + a^2 + b^2 = 0$

したがって　　$(a^2+b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2+b^2) - 2(a^2+b^2)^2 + (a^2+b^2) = 0$

$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 \neq 0$ であるから

$$(a^2+b^2)^2 - 3(ab)^2 - 2(a^2+b^2) + 1 = 0$$

$s = a^2 + b^2$，$t = ab$ であるから

$$s^2 - 3t^2 - 2s + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{(s-1)^2 = 3t^2}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}^2 \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s$

ここで　　$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = s + 2t \geqq 0$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = s - 2t \geqq 0$

したがって　$-\dfrac{s}{2} \leqq t \leqq \dfrac{s}{2}$　　ゆえに　$t^2 \leqq \dfrac{s^2}{4}$

これを (1) の結果に代入すると

$$(s-1)^2 \leqq \frac{3}{4}s^2 \quad \text{ゆえに} \quad s^2 - 8s + 4 \leqq 0$$

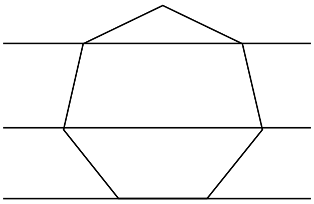
これを解いて　　$4 - 2\sqrt{3} \leqq s \leqq 4 + 2\sqrt{3}$

よって　　$\boldsymbol{\sqrt{3} - \dfrac{3}{2} \leqq \triangle\mathrm{ABC} \leqq \sqrt{3} + \dfrac{3}{2}}$

3 直線 l および m の選び方の総数は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2 \times {}_{n-2}\mathrm{C}_2}{2!} = \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$
$$= \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3) \quad (\text{通り})$$

(i) n が奇数のとき，直線 l を含めた平行な直線群には正 n 角形の辺が 1 本だけ存在し，この直線群の本数は $\dfrac{n-1}{2}$ であるから，直線 l と m が平行になる場合の総数は

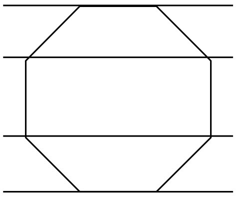


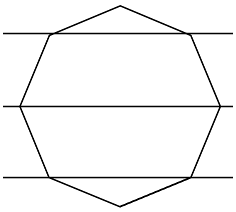
$$n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2 = n \times \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}$$
$$= \frac{1}{8}n(n-1)(n-3)$$

このとき，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)} = \boldsymbol{\frac{1}{n-2}}$$

(ii) n が偶数のとき，直線 l を含めた平行な直線群には正 n 角形の辺が 2 本存在する場合と辺が 1 本も存在しない場合がある．





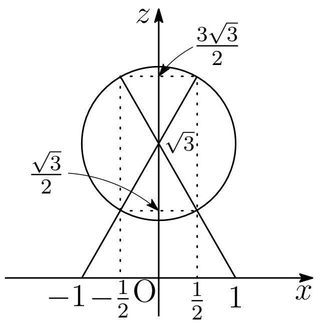
それぞれの直線群の本数は $\dfrac{n}{2}$，$\dfrac{n-2}{2}$ であるから，直線 l と m が平行になる場合の総数は

$$\frac{n}{2!} \times {}_{\frac{n}{2}}\mathrm{C}_2 + \frac{n}{2!} \times {}_{\frac{n-2}{2}}\mathrm{C}_2 = \frac{n}{2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n-2}{2} + \frac{n}{2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}$$
$$= \frac{1}{8}n(n-2)^2$$

このとき，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{8}n(n-2)^2}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)} = \boldsymbol{\frac{n-2}{(n-1)(n-3)}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 線分 PQ の長さが最小となるとき，P，Q は zx 平面上にある．右の図から



$$\mathbf{P(\pm 1,\ 0,\ 0),\quad Q\left(\pm\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

のとき (複号同順)，PQ は最小値 $\mathbf{1}$ をとる．

(2) 線分 PQ の長さが最大となるとき，P，Q は zx 平面上にある．上の図から

$$\mathbf{P(\pm 1,\ 0,\ 0),\quad Q\left(\mp\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$$

のとき (複号同順)，PQ は最大値 $\mathbf{3}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $a_k = k + \cos\dfrac{k\pi}{6}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n} a_k &= \sum_{k=1}^{12n} k + \sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 12n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12}\cos\frac{12j+k}{6}\pi\\ &= 6n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12}\cos\frac{k}{6}\pi\\ &= 6n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1} 0 = \boldsymbol{6n(12n+1)}\end{aligned}$$

(2) ${a_k}^2 = k^2 + 2k\cos\dfrac{k\pi}{6} + \cos^2\dfrac{k\pi}{6} = k^2 + \dfrac{1}{2} + 2k\cos\dfrac{k\pi}{6} + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{k\pi}{3}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n}\left(k^2+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{6}\cdot 12n(12n+1)(2\cdot 12n+1) + \frac{1}{2}\cdot 12n\\ &= 2n(12n+1)(24n+1) + 6n\\ &= 8n(72n^2+9n+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n} k\cos\frac{k\pi}{6} &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12}(12j+k)\cos\frac{12j+k}{6}\pi\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 12j\sum_{k=1}^{12}\cos\frac{k\pi}{6} + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{12} k\cos\frac{k\pi}{6}\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 12j\times 0 + \sum_{j=0}^{n-1} 6 = 6n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{3} &= \sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{k=1}^{6}\cos\frac{6j+k}{3}\pi\\ &= \sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{k=1}^{6}\cos\frac{k}{3}\pi = \sum_{j=0}^{2n-1}\times 0 = 0\end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n}{a_k}^2 &= 8n(72n^2+9n+1) + 2\times 6n + 0\\ &= \boldsymbol{4n(144n^2+18n+5)}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) X と Y の平均をそれぞれ $\overline{X}$，$\overline{Y}$ とすると

$$\overline{X}=\frac{1}{10}(3a+3b+4c),\quad \overline{Y}=\frac{1}{10}(5a+5b)=\frac{1}{2}(a+b)$$

$\overline{X}=\overline{Y}$ であるから

$$3a+3b+4c=5a+5b \quad \text{すなわち} \quad \overline{X}=\overline{Y}=c=\frac{a+b}{2} \qquad \cdots①$$

したがって
$$\begin{aligned}
{s_{\mathrm{X}}}^2&=\frac{1}{10}(3a^2+3b^2+4c^2)-c^2=\frac{3}{10}(a^2+b^2-2c^2)\\
&=\frac{3}{10}\left\{a^2+b^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}=\frac{3}{20}(a-b)^2,\\
{s_{\mathrm{Y}}}^2&=\frac{1}{10}(5a^2+5b^2)-c^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2c^2)\\
&=\frac{1}{2}\left\{a^2+b^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}=\frac{1}{4}(a-b)^2 \qquad \cdots②
\end{aligned}$$

よって
$$\frac{{s_{\mathrm{X}}}^2}{{s_{\mathrm{Y}}}^2}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\mathbf{\frac{3}{5}}$$

(2) 科目 X と Y の共分散を s_{XY} とすると

$$\begin{aligned}
s_{\mathrm{XY}}&=\frac{1}{10}(2a^2+2b^2+2ab+2bc+2ca)-\overline{X}\cdot\overline{Y}\\
&=\frac{1}{10}\{2a^2+2b^2+2ab+2c(a+b)\}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\\
&=\frac{1}{10}\{2a^2+2b^2+2ab+(a+b)^2\}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\\
&=\frac{1}{20}(a-b)^2
\end{aligned}$$

(1) の結果から $\quad {s_{\mathrm{X}}}^2{s_{\mathrm{Y}}}^2=\dfrac{3}{80}(a-b)^4 \quad$ ゆえに $\quad s_{\mathrm{X}}s_{\mathrm{Y}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}(a-b)^2$

したがって．相関係数は $\quad \dfrac{s_{\mathrm{XY}}}{s_{\mathrm{X}}s_{\mathrm{Y}}}=\dfrac{\frac{1}{20}(a-b)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}(a-b)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

$3<\sqrt{15}<4$ より，$0.25=\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{\sqrt{15}}<\dfrac{1}{3}<0.34$ であるから

よって，求める相関係数は $\quad$ **0.3**

(3) $a < c$，$b < c$ と仮定すると $\dfrac{a+b}{2} < c$ となり，① に反する．

また，$a > c$，$b > c$ と仮定すると $\dfrac{a+b}{2} > c$ となり，① に反する．

よって，c は科目 X の最大値でもなく，最小値でもない．a 点が 3 人，b 点が 3 人，c 点が 4 人であるから，科目 X の中央値は c である．

したがって　　$c = 65$　① より　$a + b = 130$　$\cdots$③

科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるから，② より

$$\frac{1}{2}|a-b| = 11 \quad \text{ゆえに} \quad |a-b| = 22 \quad \cdots④$$

③，④ を解いて　$(a,\ b) = (54,\ 76),\ (76,\ 54)$

よって　　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (54,\ 76,\ 65),\ (76,\ 54,\ 65)}$