平成 26 年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　平成 26 年 2 月 25 日

$\boxed{1}$ $a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

$\boxed{2}$ $0<t<1$ とし，放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線を l とする．C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし，C と l と直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1+S_2 の最小値を求めよ．

$\boxed{3}$ 円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 P における接線を l とする．点 $(1,\ 0)$ を通り l と平行な直線を m とする．直線 m と円 C の $(1,\ 0)$ 以外の共有点を P$'$ とする．ただし，m が直線 $x=1$ のときは P$'$ を $(1,\ 0)$ とする．

円 C 上の点 P$(s,\ t)$ から点 P$'(s',\ t')$ を得る上記の操作を T と呼ぶ．

(1) s'，t' をそれぞれ s と t の多項式として表せ，

(2) 点 P に操作 T を n 回繰り返して得られる点を P$_n$ とおく．P が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，P$_1$，P$_2$，P$_3$ を図示せよ．

(3) 正の整数 n について，P$_n$ = P となるような点 P の個数を求めよ．

$\boxed{4}$ 半径 1 の球が直円錐に内接している．この直円錐の底面の半径を r とし，表面積を S とする．

(1) S を r を用いて表せ．

(2) S の最小値を求めよ．

$\boxed{5}$ 数直線上の点 P を次の規則で移動させる．一枚の硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$ だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる．P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする．

(1) $a_3=0$ となる確率を求めよ．

(2) $a_4=1$ となる確率を求めよ．

(3) $n \geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を n を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ $a-b-8$，$b-c-8$ は素数であるから

$$a-b-8 \geqq 2, \quad b-c-8 \geqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad a \geqq b+10, \quad b \geqq c+10$$

b，c は素数であるから，上式より，a，b は奇素数である．

これより，$a-b-8$ は偶素数となるから

$$a-b-8=2 \quad \text{ゆえに} \quad a=b+10 \quad \cdots(*)$$

(i) c が奇素数のとき，$b-c-8$ は偶素数であるから

$$b-c-8=2 \quad \text{ゆえに} \quad c=b-10 \quad \cdots ①$$

(ii) c が偶素数，すなわち，$c=2$ のとき

$$b-c-8=b-10 \quad \cdots ②$$

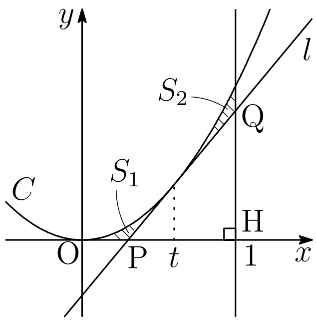
$(*)$，①，② において，$b+10$，b，$b-10$ は素数である．

これらは法 3 について，互いに合同ではないので，これらの 3 数の中に 3 の倍数，すなわち，素数 3 が存在する．このとき，3 数の大小関係に注意して

$$b-10=3 \quad \text{ゆえに} \quad a=23,\ b=13$$

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(23,\ 13,\ 3),\ (23,\ 13,\ 2)}$ ■

2 $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$



$C : y = x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線 l の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2$$

l と x 軸および直線 $x = 1$ との交点をそれぞれ P，Q とすると

$$\mathrm{P}\left(\frac{t}{2},\ 0\right), \quad \mathrm{Q}\,(1,\ 2t - t^2)$$

直線 $x = 1$ と x 軸との交点を H とすると　H$(1,\ 0)$

$f(t) = S_1 + S_2$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 x^2\,dx - \triangle\mathrm{PHQ} = \left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\mathrm{PH}\cdot\mathrm{QH} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)(2t - t^2) = -\frac{t^3}{4} + t^2 - t + \frac{1}{3}, \\ f'(t) &= -\frac{3}{4}t^2 + 2t - 1 = -\frac{1}{4}(t - 2)(3t - 2) \end{aligned}$$

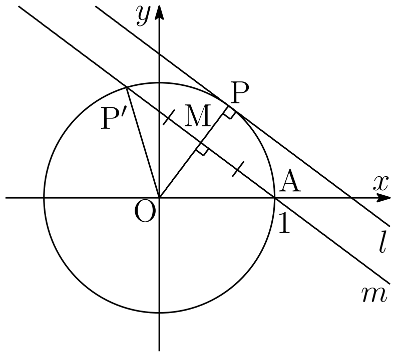
$f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小	↗	

よって　　最小値 $f\left(\frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{27}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) A(1, 0)，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s,\ t)$ に垂直なベクトルを $\vec{u}=(t,-s)$ とし，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\beta\vec{u}$$



とおくと

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}t\\-s\end{pmatrix}$$

$s^2+t^2=1$ に注意して，これを解くと　$\alpha=s$，$\beta=t$

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(-\beta)\vec{u}$ であるから

$$\begin{pmatrix}s'\\t'\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}t\\-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s^2-t^2\\2st\end{pmatrix}$$

よって　　$\boldsymbol{s'=s^2-t^2,\quad t'=2st}$

別解 上の図で，$\angle\mathrm{AOM}=\angle\mathrm{P'OM}$．$(s,\ t)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，$(s',\ t')=(\cos2\theta,\ \sin2\theta)$ であるから

$$s'=\cos^2\theta-\sin^2\theta=s^2-t^2,\quad t'=2\sin\theta\cos\theta=2st$$

(2) $s^2+t^2=1$ より，$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ とおくと，(1) の結果から

$$s'=s^2-t^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos2\theta,$$
$$t'=2st=2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$$

したがって，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ のとき　$\mathrm{P}_n(\cos2^n\theta,\ \sin2^n\theta)$　$\cdots(*)$

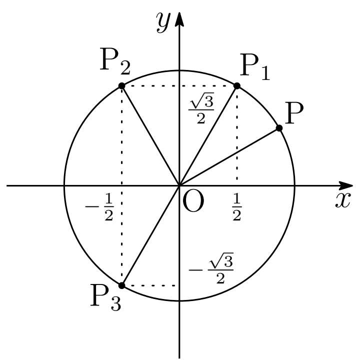
$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ より，$\theta=\frac{\pi}{6}$ であるから

$$\mathrm{P}_1\left(\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}\right),\ \mathrm{P}_2\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right),\ \mathrm{P}_2\left(\cos\frac{4}{3}\pi,\ \sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

ゆえに　　$\mathrm{P}_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\mathrm{P}_2\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\mathrm{P}_3\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



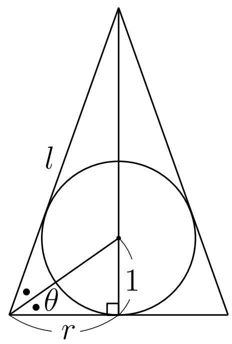
(3) (∗) より，$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}$ となるとき，整数 k を用いて

$$2^n\theta = \theta + 2k\pi \quad \text{これを解いて} \quad \theta = \frac{2k}{2^n - 1}\pi$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$0 \leqq \dfrac{2k}{2^n - 1}\pi < 2\pi$　ゆえに　$0 \leqq k < 2^n - 1$

よって，求める点 P の個数は　$\boldsymbol{2^n - 1}$ (個)　■

$\boxed{4}$ (1) 直円錐の母線の長さを l とすると，右の図において



$$l\cos 2\theta = r, \quad \tan\theta = \frac{1}{r}$$

$\cos 2\theta = \dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$ より

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \frac{1}{r^2}}{1 + \frac{1}{r^2}} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$$

したがって　$l = \dfrac{r}{\cos 2\theta} = \dfrac{r(r^2 + 1)}{r^2 - 1}$

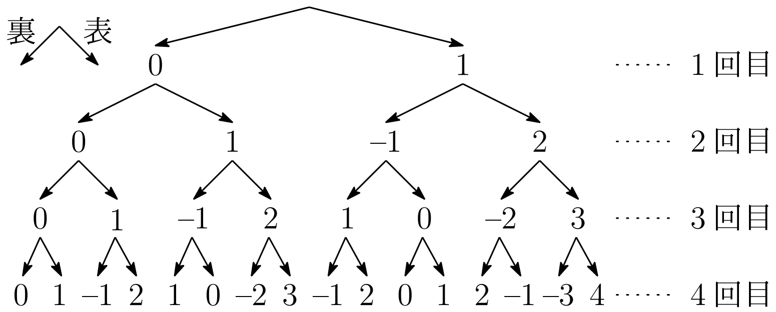
よって
$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 + \frac{1}{2}l\cdot 2\pi r \\ &= \pi r^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{r(r^2+1)}{r^2-1}\cdot 2\pi r = \boldsymbol{\frac{2\pi r^4}{r^2 - 1}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果および相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\left(r^2 - 1 + \frac{1}{r^2 - 1} + 2\right) \\ &\geqq 2\pi\left(2\sqrt{(r^2 - 1)\cdot\frac{1}{r^2 - 1}} + 2\right) = 8\pi \end{aligned}$$

よって，求める S の最小値は　$\boldsymbol{8\pi}$　■

$\boxed{5}$ (1) 点 P の座標の推移は次のようになる．



よって，$a_3 = 0$ となる確率は　$\dfrac{2}{8} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2) (1) に示した点 P の推移により，$a_4 = 1$ となる確率は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{16}}$

(3) $n \geqq 3$ のとき，$a_n = 2 - n$ となるのは，硬貨が 裏 $\overbrace{\text{表}\cdots\text{表}}^{n-2\text{ 個}}$ 裏 の順に出るときで，その確率を q_n とすると

$$q_n = \frac{1}{2^n}$$

である．$n \geqq 3$ のとき，$a_n = n - 3$ となる確率を p_n とすると

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{2} + q_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

この確率漸化式から　$2^{n+1}p_{n+1} - 2^n p_n = 1 \quad (n = 3, 4, \cdots)$

$n \geqq 4$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}(2^{k+1}p_{k+1} - 2^k p_k) = \sum_{k=3}^{n-1}$　ゆえに　$2^n p_n - 8p_3 = n - 3$

(1) の結果から，$p_3 = \dfrac{1}{4}$ であるから　$2^n p^n = n - 1$　ゆえに　$p_n = \dfrac{n-1}{2^n}$

上式は，$n = 3$ のときも成立するから　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{n-1}{2^n}}$ ■