

平成26年度 一橋大学 2次試験前期日程(数学問題)120分  
商・経済・法・社会学部 数I・II・A・B 平成26年2月25日

問題 1 2 3 4 5

- 1  $a - b - 8$  と  $b - c - 8$  が素数となるような素数の組  $(a, b, c)$  をすべて求めよ.
- 2  $0 < t < 1$  とし, 放物線  $C: y = x^2$  上の点  $(t, t^2)$  における接線を  $l$  とする.  $C$  と  $l$  と  $x$  軸で囲まれる部分の面積を  $S_1$  とし,  $C$  と  $l$  と直線  $x = 1$  で囲まれる部分の面積を  $S_2$  とする.  $S_1 + S_2$  の最小値を求めよ.
- 3 円  $C: x^2 + y^2 = 1$  上の点  $P$  における接線を  $l$  とする. 点  $(1, 0)$  を通り  $l$  と平行な直線を  $m$  とする. 直線  $m$  と円  $C$  の  $(1, 0)$  以外の共有点を  $P'$  とする. ただし,  $m$  が直線  $x = 1$  のときは  $P'$  を  $(1, 0)$  とする.  
円  $C$  上の点  $P(s, t)$  から点  $P'(s', t')$  を得る上記の操作を  $T$  と呼ぶ.
- (1)  $s', t'$  をそれぞれ  $s$  と  $t$  の多項式として表せ,
- (2) 点  $P$  に操作  $T$  を  $n$  回繰り返して得られる点を  $P_n$  とおく.  $P$  が  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$  のとき,  $P_1, P_2, P_3$  を図示せよ.
- (3) 正の整数  $n$  について,  $P_n = P$  となるような点  $P$  の個数を求めよ.
- 4 半径1の球が直円錐に内接している. この直円錐の底面の半径を  $r$  とし, 表面積を  $S$  とする.
- (1)  $S$  を  $r$  を用いて表せ.
- (2)  $S$  の最小値を求めよ.
- 5 数直線上の点  $P$  を次の規則で移動させる. 一枚の硬貨を投げて, 表が出れば  $P$  を  $+1$  だけ移動させ, 裏が出れば  $P$  を原点に関して対称な点に移動させる.  $P$  は初め原点にあるとし, 硬貨を  $n$  回投げた後の  $P$  の座標を  $a_n$  とする.
- (1)  $a_3 = 0$  となる確率を求めよ.
- (2)  $a_4 = 1$  となる確率を求めよ.
- (3)  $n \geq 3$  のとき,  $a_n = n - 3$  となる確率を  $n$  を用いて表せ.

## 解答例

**1**  $a - b - 8, b - c - 8$  は素数であるから

$$a - b - 8 \geq 2, \quad b - c - 8 \geq 2 \quad \text{ゆえに} \quad a \geq b + 10, \quad b \geq c + 10$$

$b, c$  は素数であるから、上式より、 $a, b$  は奇素数である。

これより、 $a - b - 8$  は偶素数となるから

$$a - b - 8 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = b + 10 \quad \dots (*)$$

(i)  $c$  が奇素数のとき、 $b - c - 8$  は偶素数であるから

$$b - c - 8 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad c = b - 10 \quad \dots \textcircled{1}$$

(ii)  $c$  が偶素数、すなわち、 $c = 2$  のとき

$$b - c - 8 = b - 10 \quad \dots \textcircled{2}$$

(\*),  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  において、 $b + 10, b, b - 10$  は素数である。

これらは法 3 について、互いに合同ではないので、これらの 3 数の中に 3 の倍数、すなわち、素数 3 が存在する。このとき、3 数の大小関係に注意して

$$b - 10 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad a = 23, \quad b = 13$$

(i), (ii) より  $(a, b, c) = (23, 13, 3), (23, 13, 2)$  ■

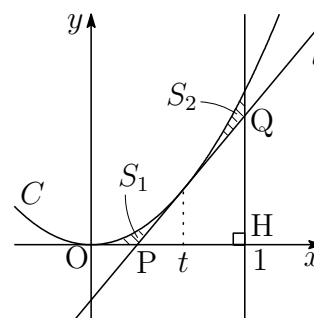
2  $y = x^2$  を微分すると  $y' = 2x$

$C: y = x^2$  上の点  $(t, t^2)$  における接線  $l$  の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2$$

$l$  と  $x$  軸および直線  $x = 1$  との交点をそれぞれ  $P$ ,  $Q$  とすると

$$P\left(\frac{t}{2}, 0\right), \quad Q(1, 2t - t^2)$$



直線  $x = 1$  と  $x$  軸との交点を  $H$  とすると  $H(1, 0)$

$f(t) = S_1 + S_2$  とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 x^2 dx - \triangle PHQ = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \cdot PH \cdot QH \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{2}\right) (2t - t^2) = -\frac{t^3}{4} + t^2 - t + \frac{1}{3}, \\ f'(t) &= -\frac{3}{4}t^2 + 2t - 1 = -\frac{1}{4}(t - 2)(3t - 2) \end{aligned}$$

$f(t)$  の増減表は次のようになる.

$t$	(0)	...	$\frac{2}{3}$	...	(1)
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		↘	極小	↗	

よって 最小値  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{27}$



- 3 (1)  $A(1, 0)$ ,  $\vec{OP} = (s, t)$  に垂直なベクトルを  $\vec{u} = (t, -s)$  とし, 実数  $\alpha, \beta$  を用いて

$$\vec{OA} = \alpha \vec{OP} + \beta \vec{u}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} t \\ -s \end{pmatrix}$$

$s^2 + t^2 = 1$  に注意して, これを解くと  $\alpha = s, \beta = t$

$\vec{OP}' = \alpha \vec{OP} + (-\beta) \vec{u}$  であるから

$$\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} t \\ -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 - t^2 \\ 2st \end{pmatrix}$$

よって  $s' = s^2 - t^2, t' = 2st$

別解 上の図で,  $\angle AOM = \angle P'OM$ .  $(s, t) = (\cos \theta, \sin \theta)$  とおくと,  $(s', t') = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$  であるから

$$s' = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = s^2 - t^2, t' = 2 \sin \theta \cos \theta = 2st$$

(2)  $s^2 + t^2 = 1$  より,  $s = \cos \theta, t = \sin \theta$  とおくと, (1) の結果から

$$s' = s^2 - t^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta,$$

$$t' = 2st = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

したがって,  $P(\cos \theta, \sin \theta)$  のとき  $P_n(\cos 2^n \theta, \sin 2^n \theta) \dots (*)$

$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$  より,  $\theta = \frac{\pi}{6}$  であるから

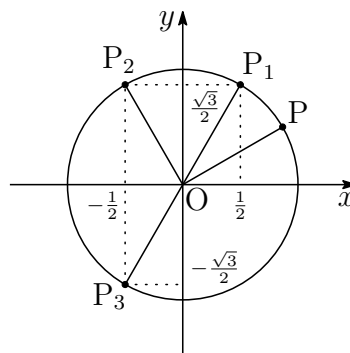
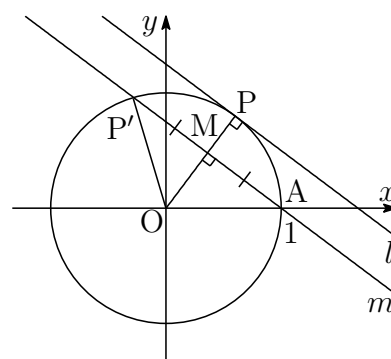
$$P_1\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right), P_2\left(\cos \frac{2}{3}\pi, \sin \frac{2}{3}\pi\right), P_3\left(\cos \frac{4}{3}\pi, \sin \frac{4}{3}\pi\right)$$

ゆえに

$$P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



(3) (\*) より,  $P_n = P$  となる時, 整数  $k$  を用いて

$$2^n \theta = \theta + 2k\pi \quad \text{これを解いて} \quad \theta = \frac{2k}{2^n - 1} \pi$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{より} \quad 0 \leq \frac{2k}{2^n - 1} \pi < 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq k < 2^n - 1$$

よって, 求める点  $P$  の個数は  $2^n - 1$  (個) ■

4 (1) 直円錐の母線の長さを  $l$  とすると, 右の図において

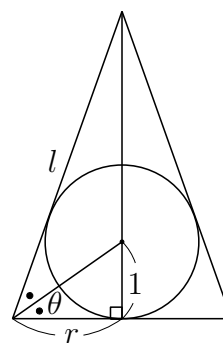
$$l \cos 2\theta = r, \quad \tan \theta = \frac{1}{r}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad \text{より}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \frac{1}{r^2}}{1 + \frac{1}{r^2}} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$$

$$\text{したがって} \quad l = \frac{r}{\cos 2\theta} = \frac{r(r^2 + 1)}{r^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S &= \pi r^2 + \frac{1}{2} l \cdot 2\pi r \\ &= \pi r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r(r^2 + 1)}{r^2 - 1} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi r^4}{r^2 - 1} \end{aligned}$$

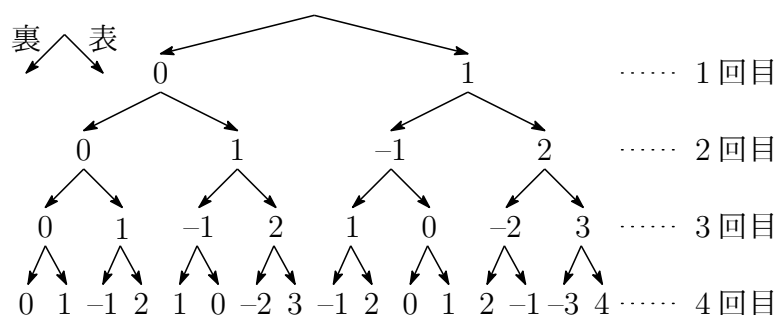


(2) (1) の結果および相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \left( r^2 - 1 + \frac{1}{r^2 - 1} + 2 \right) \\ &\geq 2\pi \left( 2\sqrt{(r^2 - 1) \cdot \frac{1}{r^2 - 1}} + 2 \right) = 8\pi \end{aligned}$$

よって, 求める  $S$  の最小値は  $8\pi$  ■

- 5 (1) 点 P の座標の推移は次のようになる。



よって、 $a_3 = 0$  となる確率は  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

- (2) (1) に示した点 P の推移により、 $a_4 = 1$  となる確率は  $\frac{3}{16}$

- (3)  $n \geq 3$  のとき、 $a_n = 2 - n$  となるのは、硬貨が  $\overbrace{\text{裏表} \cdots \text{表裏}}^{n-2 \text{ 個}}$  の順に出るときで、その確率を  $q_n$  とすると

$$q_n = \frac{1}{2^n}$$

である。  $n \geq 3$  のとき、 $a_n = n - 3$  となる確率を  $p_n$  とすると

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{2} + q_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

この確率漸化式から  $2^{n+1}p_{n+1} - 2^n p_n = 1$  ( $n = 3, 4, \dots$ )

$$n \geq 4 \text{ のとき } \sum_{k=3}^{n-1} (2^{k+1}p_{k+1} - 2^k p_k) = \sum_{k=3}^{n-1} 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^n p_n - 8p_3 = n - 3$$

$$(1) \text{ の結果から, } p_3 = \frac{1}{4} \text{ であるから } 2^n p_n = n - 1 \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{n - 1}{2^n}$$

上式は、 $n = 3$  のときも成立するから  $p_n = \frac{n - 1}{2^n}$  ■