平成25年度　一橋大学　2次試験前期日程(数学問題)120分
商・経済・法・社会学部　数I・II・A・B　平成25年2月25日

1 $3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013$ を満たす正の整数 p，q の組をすべて求めよ．

2 平面上の4点O，A，B，Cが

$$\mathrm{OA} = 4,\quad \mathrm{OB} = 3,\quad \mathrm{OC} = 2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3$$

を満たすとき，△ABCの面積の最大値を求めよ．

3 原点をOとする xy 平面上に，放物線 $C : y = 1 - x^2$ がある．C 上に2点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p < q$ となるようにとる．

(1) 2つの線分OP，OQと放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ．

(2) $q = p + 1$ であるとき S の最小値を求めよ．

(3) $pq = -1$ であるとき S の最小値を求めよ．

4 t を正の定数とする．原点をOとする空間内に，2点 $\mathrm{A}(2t,\ 2t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ t)$ がある．また動点Pは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 3$$

を満たすように動く．OPの最大値が3となるような t の値を求めよ．

5 サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする．また，s_n を $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 10^{n-k}a_k$ で定める．

(1) s_n が4で割り切れる確率を求めよ．

(2) s_n が6で割り切れる確率を求めよ．

(3) s_n が7で割り切れる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=2013$ より

$$\begin{aligned}3(p^3+q^3)-pq(p+q)&=2013\\3(p+q)(p^2-pq+q^2)-pq(p+q)&=2013\\(p+q)(3p^2-4pq+3q^2)&=3{\cdot}11{\cdot}61\end{aligned}$$

ここで　$3p^2-4pq+3q^2=2(p-q)^2+p^2+q^2\geqq p+q$

したがって，次の場合がある．

$$(p+q,\ 3p^2-4pq+3q^2)=(3,\ 11{\cdot}61),\ (11,\ 3{\cdot}61),\ (3{\cdot}11,\ 61)$$

また，$3p^2-4pq+3q^2=3(p+q)^2-10pq$ であるから

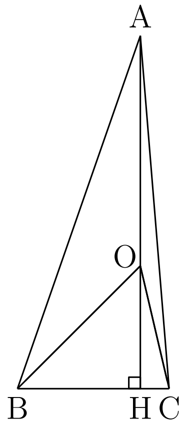
(i) $p+q=3$，$3(p+q)^2-10pq=11{\cdot}61$ のとき　$5pq=-322$
p，q は整数であるから，不適．

(ii) $p+q=11$，$3(p+q)^2-10pq=3{\cdot}61$ のとき　$pq=18$
これを解いて　$(p,\ q)=(2,\ 9),\ (9,\ 2)$

(iii) $p+q=3{\cdot}11$，$3(p+q)^2-10pq=61$ のとき　$5pq=1603$
p，q は整数であるから，不適．

(i)～(iii) より　$\boldsymbol{(p,\ q)=(2,\ 9),\ (9,\ 2)}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\theta = \angle\mathrm{BOC}$ とおくと



$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|} = \frac{3}{3\cdot2} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = 60^\circ$$

$\triangle\mathrm{OBC}$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{OB}^2 + \mathrm{OC}^2 - 2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cos 60^\circ \\ &= 3^2 + 2^2 - 2\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{2} = 7\end{aligned}$$

ゆえに　$\mathrm{BC} = \sqrt{7}$

O から直線 BC に垂線 OH を引くと　$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{OH} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin 60^\circ$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}\sqrt{7}\mathrm{OH} = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　これを解いて　$\mathrm{OH} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が最大となるのは，HO の延長に A があるときで，このとき

$$\mathrm{AH} = \mathrm{OA} + \mathrm{OH} = 4 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

よって，求める $\triangle\mathrm{ABC}$ の最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH} = \frac{1}{2}\sqrt{7}\left(4 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right) = \mathbf{2\sqrt{7} + \frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を通る直線 PQ の方程式は

$$y-(1-p^2)=\frac{1-q^2-(1-p^2)}{q-p}(x-p)$$

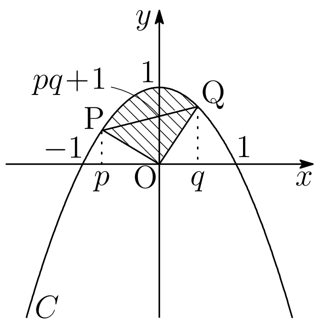
すなわち　　$y=-(p+q)x+pq+1$

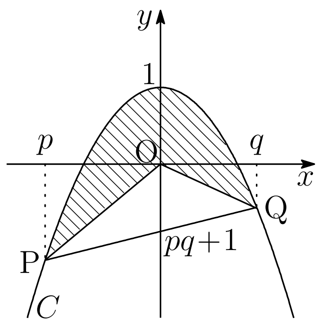
C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると，$p<q$ に注意して

$$\begin{aligned}S_1&=\int_p^q\left(1-x^2-\{-(p+q)x+pq+1\}\right)dx\\&=\int_p^q(x-p)(q-x)dx=\frac{1}{6}(q-p)^3\end{aligned}$$

△OPQ の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}|p(1-q^2)-q(1-p^2)|\\&=\frac{1}{2}|(p-q)(pq+1)|\\&=\frac{1}{2}(q-p)|pq+1|\end{aligned}$$





(i) $pq+1\geqq 0$ のとき

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(pq+1)$$

(ii) $pq+1<0$ のとき

$$S=S_1-S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3-\frac{1}{2}(q-p)(-pq-1)$$

(i),(ii) の結果から

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{6}(q-p)\{(q-p)^2+3pq+3\}\quad\cdots①\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}(q-p)(p^2+pq+q^2+3)}\end{aligned}$$

(2) $q=p+1$ を ① に代入すると

$$S=\frac{1}{6}\{1^2+3p(p+1)+3\}=\frac{1}{2}p(p+1)+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{24}$$

$p=-\frac{1}{2}$ のとき，最小値 $\mathbf{\frac{13}{24}}$ をとる．

(3) $pq=-1$ のとき，$p<0<q$ であるから，$p=-\frac{1}{q}$ を ① に代入すると

$$S=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)^3$$

$q>0$ であるから，相加・相乗平均の関係により

$$q+\frac{1}{q}\geqq 2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}=2$$

等号が成立するのは，$q=\frac{1}{q}$，すなわち，$q=1$ のときであるから

$$S\geqq\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{4}{3}$$

よって，求める S の最小値は　$\mathbf{\frac{4}{3}}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})&=3\\ 3|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=3\\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=1\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2t,\ 2t,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 0,\ t)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ とおくと

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=1\\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+1\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}(2t,\ 2t,\ t)$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|t|=t$

したがって，P は C を中心とする半径 $\sqrt{t^2+1}$ の球面上を動く．

OP が最大となるとき，P は OC の延長線上にあるから

$$\mathrm{OC}+\mathrm{CP}=\mathrm{OP}\quad\text{ゆえに}\quad t+\sqrt{t^2+1}=3$$

$\sqrt{t^2+1}=3-t$ の両辺を平方して　$t^2+1=9-6t+t^2$

$t>0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{t=\frac{4}{3}}$ ■

5 (1) $n=1$ のとき，s_1 が 4 で割り切れるのは，$a_1=4$ の場合である．

したがって，この確率は $\dfrac{1}{6}$

$n \geqq 2$ のとき，$100 \equiv 0 \pmod 4$ であるから

$$s_n \equiv 10a_{n-1}+a_n \pmod 4$$

$s_n \equiv 0 \pmod 4$ となるのは

$$(a_{n-1},\ a_n)=(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 4),\ (3,\ 2),\ (3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (5,\ 2),\ (5,\ 6),\ (6,\ 4)$$

このときの確率は $\dfrac{9}{6^2}=\dfrac{1}{4}$

よって，求める確率は **$n=1$ のとき $\dfrac{1}{6}$，$n \geqq 2$ のとき $\dfrac{1}{4}$**

(2) $n=1$ のとき，s_1 が 6 で割り切れるのは，$a_1=6$ の場合である．

したがって，この確率は $\dfrac{1}{6}$

$n \geqq 2$ のとき

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k=10\sum_{k=1}^{n-1}10^{n-1-k}a_k+a_n=10s_{n-1}+a_n$$

$10 \equiv 4 \pmod 6$ であるから　$s_n \equiv 4s_{n-1}+a_n \pmod 6$

$s_n \equiv 0 \pmod 6$ となる確率を p_n とおく．

$s_n \equiv 0 \pmod 6$ となるのは，法 6 について

$$(s_{n-1},\ a_n)=(0,\ 6),\ (1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 2),\ (5,\ 4)$$

したがって，次の確率漸化式が成立する．

$$p_1=\frac{1}{6},\quad p_n=\frac{1}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1})\quad \text{ゆえに}\quad p_n=\frac{1}{6}$$

よって，求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) $n=1$ のとき，s_1 が 7 で割り切れることはないので，この確率は　0

$n \geqq 2$ のとき

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{n-k} a_k = 10 \sum_{k=1}^{n-1} 10^{n-1-k} a_k + a_n = 10 s_{n-1} + a_n$$

$10 \equiv 3 \pmod 7$ であるから　$s_n \equiv 3 s_{n-1} + a_n \pmod 7$

$s_n \equiv 0 \pmod 7$ となる確率を q_n とおく．

$s_n \equiv 0 \pmod 7$ となるのは，法 7 について

$$(s_{n-1},\ a_n) = (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (3,\ 5),\ (4,\ 2),\ (5,\ 6),\ (6,\ 3)$$

したがって，次の確率漸化式が成立する．

$$q_1 = 0, \quad q_n = \frac{1}{6}(1 - q_{n-1})$$

ゆえに　$q_n - \dfrac{1}{7} = -\dfrac{1}{6}\left(q_{n-1} - \dfrac{1}{7}\right)$　すなわち　$q_n = \dfrac{1}{7}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{7}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$ ■