

平成24年度 一橋大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
商・経済・法・社会学部 数I・II・A・B 平成24年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 1つの角が 120° の三角形がある. この三角形の3辺の長さ x, y, z は $x < y < z$ を満たす整数である.

- (1) $x + y - z = 2$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ.
- (2) $x + y - z = 3$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ.
- (3) a, b を0以上の整数とする. $x + y - z = 2^a 3^b$ を満たす x, y, z の組の個数を a と b の式で表せ.

2 a を0以上の定数とする. 関数 $y = x^3 - 3a^2x$ のグラフと方程式 $|x| + |y| = 2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ.

3 定数 a, b, c, d に対して, 平面上の点 (p, q) を点 $(ap + bq, cp + dq)$ に移す操作を考える. ただし, $(a, b, c, d) \neq (1, 0, 0, 1)$ である. k を0でない定数とする. 放物線 $C: y = x^2 - x + k$ 上のすべての点は, この操作によって C 上に移る.

- (1) a, b, c, d を求めよ.
- (2) C 上の点 A における C の接線と, 点 A をこの操作によって移した点 A' における C の接線は, 原点で直交する. このときの k の値および点 A の座標をすべて求めよ.

4 xyz 空間内の平面 $z = 2$ 上に点 P があり, 平面 $z = 1$ 上に点 Q がある. 直線 PQ と xy 平面の交点を R とする.

- (1) $P(0, 0, 2)$ とする. 点 Q が平面 $z = 1$ 上で点 $(0, 0, 1)$ を中心とする半径1の円周上を動くとき, 点 R の軌跡の方程式を求めよ.
- (2) 平面 $z = 1$ 上に4点 $A(1, 1, 1), B(1, -1, 1), C(-1, -1, 1), D(-1, 1, 1)$ をとる. 点 P が平面 $z = 2$ 上で点 $(0, 0, 2)$ を中心とする半径1の円周上を動き, 点 Q が正方形 $ABCD$ の周上を動くとき, 点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し, その面積を求めよ.

5 最初に1の目が上面にあるようにサイコロが置かれている. その後, 4つの側面から1つの面を無作為に選び, その面が上面になるように置き直す操作を n 回繰り返す. なお, サイコロの向かい合う面の目の和は7である.

- (1) 最後に1の目が上面にある確率を求めよ.
- (2) 最後に上面にある目の数の期待値を求めよ.

解答例

1 $x < y < z \cdots$ ① より, 120° の対辺は z であるから, 余弦定理により

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad z^2 = x^2 + xy + y^2$$

$x + y - z = k$ とおいて (k は自然数), $z = x + y - k \cdots$ ② より

$$(x + y - k)^2 = x^2 + xy + y^2 \quad \text{整理すると} \quad xy - 2(x + y)k - k^2 = 0$$

したがって $(x - 2k)(y - 2k) = 3k^2 \quad \cdots$ ③

①, ② より $x < y < x + y - k$ すなわち $k < x < y$

$y - 2k \leq 0$ と仮定すると, $-k < x - 2k < y - 2k \leq 0$ であるから

$$0 \leq (x - 2k)(y - 2k) < k^2$$

これは, ③ に反する. $y - 2k > 0$ となるから, ③ より $x - 2k > 0$

したがって, $x + y - z = k$ (k は自然数) に対して, 次が成立する.

$$(x - 2k)(y - 2k) = 3k^2, \quad 0 < x - 2k < y - 2k \quad \cdots (*)$$

(1) $x + y - z = 2$ のとき, $k = 2$ であるから, (*) より

$$(x - 4)(y - 4) = 12, \quad 0 < x - 4 < y - 4$$

ゆえに $(x - 4, y - 4) = (1, 12), (2, 6), (3, 4)$

このとき, $z = x + y - 2$ であるから

$$(x, y, z) = (5, 16, 19), (6, 10, 14), (7, 8, 13)$$

(2) $x + y - z = 3$ のとき, $k = 3$ であるから, (*) より

$$(x - 6)(y - 6) = 27, \quad 0 < x - 6 < y - 6$$

ゆえに $(x - 6, y - 6) = (1, 27), (3, 9)$

このとき, $z = x + y - 3$ であるから

$$(x, y, z) = (7, 33, 37), (9, 15, 21)$$

(3) $x + y - z = 2^a 3^b$ のとき, $k = 2^a 3^b$ であるから, (*) より

$$(x - 2^{a+1}3^b)(y - 2^{a+1}3^b) = 2^{2a}3^{2b+1}, \quad 0 < x - 2^{a+1}3^b < y - 2^{a+1}3^b$$

積が $2^{2a}3^{2b+1}$ となる正の 2 数の組み合わせの個数は

$$\frac{(2a+1)(2b+2)}{2!} = (2a+1)(b+1)$$

2 $y = x^3 - 3a^2x$ のグラフと $|x| + |y| = 2$ の表す図形は原点に関して対称であるから, $0 < x \leq 2$ における位置関係に注目する.

$f(x) = x^3 - 3a^2x$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2$$

$y = f(x)$ と $y = x - 2$ が点 $(t, t - 2)$ で接するとき,
 $f(t) = t - 2, f'(t) = 1$ より

$$\begin{cases} t^3 - 3a^2t = t - 2 & \dots \textcircled{1} \\ 3t^2 - 3a^2 = 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② から a を消去すると

$$t^3 + (1 - 3t^2)t = t - 2 \quad \text{これを解いて } t = 1$$

$t = 1$ を ② に代入すると, $a \geq 0$ より $a = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

次に, $f(x) = x(x + \sqrt{3}a)(x - \sqrt{3}a)$ より, $y = f(x)$ が点 $(2, 0)$ を通るとき

$$\sqrt{3}a = 2 \quad \text{ゆえに } a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって, 求める共有点の個数は

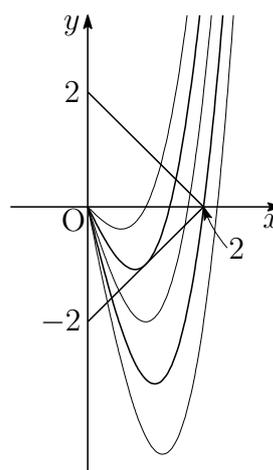
$0 \leq a < \frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 2 個

$a = \frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 4 個

$\frac{\sqrt{6}}{3} < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき 6 個

$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき 4 個

$\frac{2\sqrt{3}}{3} < a$ のとき 2 個



- 3 (1) C 上の点 $A(t, t^2 - t + k)$ が操作により, 点 $A'(x, y)$ に移るとき

$$x = at + b(t^2 - t + k), \quad y = ct + d(t^2 - t + k) \quad \dots (*)$$

点 A' も C 上の点であるから

$$ct + d(t^2 - t + k) = \{at + b(t^2 - t + k)\}^2 - \{at + b(t^2 - t + k)\} + k$$

上式は, t に関する恒等式であるから, t^4 の係数に注目すると $b = 0$

$$\text{したがって} \quad dt^2 + (c - d)t + dk = a^2t^2 - at + k$$

$$\text{ゆえに} \quad d = a^2, \quad c - d = -a, \quad dk = k$$

$$k \neq 0 \text{ であるから } d = 1 \quad \text{ゆえに } (a, c) = (1, 0), (-1, 2)$$

$$(a, b, c, d) \neq (1, 0, 0, 1) \text{ であるから } (a, b, c, d) = (-1, 0, 2, 1)$$

- (2) $y = x^2 - x + k$ より $y' = 2x - 1$

C 上の点 $A(t, t^2 - t + k)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 - t + k) = (2t - 1)(x - t)$$

$$\text{すなわち} \quad y = (2t - 1)x - t^2 + k \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(1) \text{ の結果を } (*) \text{ に適用すると } x = -t, \quad y = t^2 + t + k$$

C 上の点 $A'(-t, t^2 + t + k)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 + t + k) = (-2t - 1)(x + t)$$

$$\text{すなわち} \quad y = (-2t - 1)x - t^2 + k \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② が原点で直交するから

$$(2t - 1)(-2t - 1) = -1, \quad -t^2 + k = 0$$

$$\text{ゆえに } t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k = \frac{1}{2} \quad \text{よって } A' \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \blacksquare$$

- 4 (1) $P(0, 0, 2)$, $Q(\cos \theta, \sin \theta, 1)$, $R(x, y, 0)$ とおくと

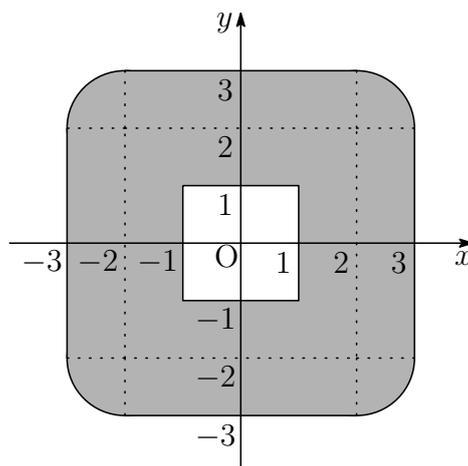
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PQ} \\ (x, y, z) &= (0, 0, 2) + 2(\cos \theta, \sin \theta, -1) \\ &= (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)\end{aligned}$$

よって、求める軌跡の方程式は $x^2 + y^2 = 4, z = 0$

- (2) $P(\cos \theta, \sin \theta, 2)$, $Q(s, t, 1)$ とおくと (Q は正方形 ABCD の周上の点)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PQ} \\ &= (\cos \theta, \sin \theta, 2) + 2(s - \cos \theta, t - \sin \theta, -1) \\ &= 2(s, t, 0) + (\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi), 0)\end{aligned}$$

よって、点 R が動きうる領域は次のようになる。



また、求める領域の面積は

$$6^2 - 2^2 - 4 \left(1^2 - \frac{1}{4} \pi \cdot 1^2 \right) = 28 + \pi$$



- 5 (1) n 回繰り返した後に、上面が 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目である確率はそれぞれ $a_n, b_n, c_n, c_n, b_n, a_n$ とおける。このとき、

$$a_1 = 0, b_1 = c_1 = \frac{1}{4}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n + c_n + b_n) = \frac{1}{2}(b_n + c_n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n + c_n + a_n) = \frac{1}{2}(a_n + c_n) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + b_n + a_n) = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \cdots \textcircled{3}$$

上の 3 式から $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$

$$a_1 + b_1 + c_1 = \frac{1}{2} \text{ であるから } a_n + b_n + c_n = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ から } a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - a_n \right) = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}$$

$$\text{したがって } a_{n+1} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \left(a_n - \frac{1}{6} \right)$$

$$\text{ゆえに } a_n - \frac{1}{6} = \left(a_1 - \frac{1}{6} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{よって } a_n = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

- (2) 求める期待値は、 $\textcircled{4}$ より

$$1a_n + 2b_n + 3c_n + 4c_n + 5b_n + 6a_n = 7(a_n + b_n + c_n) = 7 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

別解 (1) n 回繰り返した後に、1の目が、上面、側面、底面にある確率をそれぞれ x_n, y_n, z_n とすると、次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, y_1 = 1, z_1 = 0 \\ x_{n+1} &= \frac{1}{4}y_n && \cdots \textcircled{1} \\ y_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}y_n + z_n && \cdots \textcircled{2} \\ z_{n+1} &= \frac{1}{4}y_n && \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

上の3式をそれぞれ加えると $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$

$$\text{ゆえに } x_n + y_n + z_n = 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{4} \text{ より } y_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}y_n$$

$$\text{したがって } y_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \left(y_n - \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{ゆえに } y_n - \frac{2}{3} = \left(y_1 - \frac{2}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$y_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

$$\text{これと } \textcircled{1} \text{ より } x_n = \frac{1}{4}y_{n-1} = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

(2) n 回繰り返した後に、1の目が上面にある確率は x_n , 2~5の目が上面にある確率はすべて $\frac{y_n}{4}$, 6の目が上面ある確率は z_n であるから、求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned} E &= 1x_n + (2 + 3 + 4 + 5)\frac{y_n}{4} + 6z_n \\ &= x_n + \frac{7}{2}y_n + 6z_n \end{aligned}$$

ここで、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ により、 $x_n = z_n$ であるから $x_n + 6z_n = \frac{7}{2}(x_n + z_n)$

$$\text{よって } E = \frac{7}{2}(x_n + y_n + z_n) = \frac{7}{2} \quad \blacksquare$$