平成 24 年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　平成 24 年 2 月 25 日

$\boxed{1}$ 1 つの角が 120° の三角形がある．この三角形の 3 辺の長さ x，y，z は $x < y < z$ を満たす整数である．

(1) $x + y - z = 2$ を満たす x，y，z の組をすべて求めよ．

(2) $x + y - z = 3$ を満たす x，y，z の組をすべて求めよ．

(3) a，b を 0 以上の整数とする．$x + y - z = 2^a 3^b$ を満たす x，y，z の組の個数を a と b の式で表せ．

$\boxed{2}$ a を 0 以上の定数とする．関数 $y = x^3 - 3a^2 x$ のグラフと方程式 $|x| + |y| = 2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ．

$\boxed{3}$ 定数 a，b，c，d に対して，平面上の点 $(p,\ q)$ を点 $(ap + bq,\ cp + dq)$ に移す操作を考える．ただし，$(a,\ b,\ c,\ d) \neq (1,\ 0,\ 0,\ 1)$ である．k を 0 でない定数とする．放物線 $C : y = x^2 - x + k$ 上のすべての点は，この操作によって C 上に移る．

(1) a，b，c，d を求めよ．

(2) C 上の点 A における C の接線と，点 A をこの操作によって移した点 A$'$ における C の接線は，原点で直交する．このときの k の値および点 A の座標をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ xyz 空間内の平面 $z = 2$ 上に点 P があり，平面 $z = 1$ 上に点 Q がある．直線 PQ と xy 平面の交点を R とする．

(1) P$(0,\ 0,\ 2)$ とする．点 Q が平面 $z = 1$ 上で点 $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 R の軌跡の方程式を求めよ．

(2) 平面 $z = 1$ 上に 4 点 A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(1, -1,\ 1)$，C$(-1, -1,\ 1)$，D$(-1,\ 1,\ 1)$ をとる．点 P が平面 $z = 2$ 上で点 $(0,\ 0,\ 2)$ を中心とする半径 1 の円周上を動き，点 Q が正方形 ABCD の周上を動くとき，点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ．

$\boxed{5}$ 最初に 1 の目が上面にあるようにサイコロが置かれている．その後，4 つの側面から 1 つの面を無作為に選び，その面が上面になるように置き直す操作を n 回繰り返す．なお，サイコロの向かい合う面の目の和は 7 である．

(1) 最後に 1 の目が上面にある確率を求めよ．

(2) 最後に上面にある目の数の期待値を求めよ．

解答例

1 $x < y < z \cdots$ ① より，120° の対辺は z であるから，余弦定理により

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad z^2 = x^2 + xy + y^2$$

$x + y - z = k$ とおいて (k は自然数)，$z = x + y - k \cdots$ ② より

$$(x + y - k)^2 = x^2 + xy + y^2 \quad \text{整理すると} \quad xy - 2(x + y)k - k^2 = 0$$

したがって　　$(x - 2k)(y - 2k) = 3k^2 \quad \cdots$ ③

①，② より　$x < y < x + y - k$　すなわち　$k < x < y$

$y - 2k \leqq 0$ と仮定すると，$-k < x - 2k < y - 2k \leqq 0$ であるから

$$0 \leqq (x - 2k)(y - 2k) < k^2$$

これは，③ に反する．$y - 2k > 0$ となるから，③ より　$x - 2k > 0$
したがって，$x + y - z = k$ (k は自然数) に対して，次が成立する．

$$(x - 2k)(y - 2k) = 3k^2, \quad 0 < x - 2k < y - 2k \quad \cdots (*)$$

(1) $x + y - z = 2$ のとき，$k = 2$ であるから，$(*)$ より

$$(x - 4)(y - 4) = 12, \quad 0 < x - 4 < y - 4$$

ゆえに　　$(x - 4,\ y - 4) = (1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4)$

このとき，$z = x + y - 2$ であるから

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (5,\ 16,\ 19),\ (6,\ 10,\ 14),\ (7,\ 8,\ 13)}$$

(2) $x + y - z = 3$ のとき，$k = 3$ であるから，$(*)$ より

$$(x - 6)(y - 6) = 27, \quad 0 < x - 6 < y - 6$$

ゆえに　　$(x - 6,\ y - 6) = (1,\ 27),\ (3,\ 9)$

このとき，$z = x + y - 3$ であるから

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (7,\ 33,\ 37),\ (9,\ 15,\ 21)}$$

(3) $x+y-z=2^a3^b$ のとき，$k=2^a3^b$ であるから，$(*)$ より

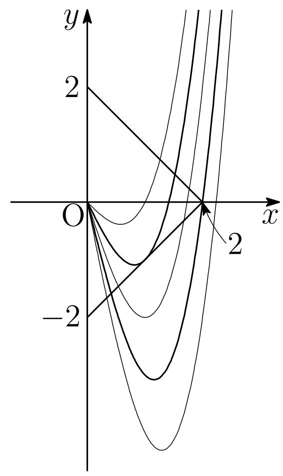
$$(x-2^{a+1}3^b)(y-2^{a+1}3^b)=2^{2a}3^{2b+1},\quad 0<x-2^{a+1}3^b<y-2^{a+1}3^b$$

積が $2^{2a}3^{2b+1}$ となる正の 2 数の組み合せの個数は

$$\frac{(2a+1)(2b+2)}{2!}=\boldsymbol{(2a+1)(b+1)}$$

■

2 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと $|x|+|y|=2$ の表す図形は原点に関して対称であるから，$0<x\leqq 2$ における位置関係に注目する．



$f(x)=x^3-3a^2x$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3a^2$$

$y=f(x)$ と $y=x-2$ が点 $(t,\ t-2)$ で接するとき，$f(t)=t-2$，$f'(t)=1$ より

$$\begin{cases} t^3-3a^2t=t-2 & \cdots ① \\ 3t^2-3a^2=1 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② から a を消去すると

$$t^3+(1-3t^2)t=t-2 \quad これを解いて \quad t=1$$

$t=1$ を ② に代入すると，$a\geqq 0$ より　$a=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

次に，$f(x)=x(x+\sqrt{3}a)(x-\sqrt{3}a)$ より，$y=f(x)$ が点 $(2,\ 0)$ を通るとき

$$\sqrt{3}a=2 \quad ゆえに \quad a=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって，求める共有点の個数は

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{0\leqq a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}}\textbf{のとき} & \textbf{2 個} \\
\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}}\textbf{のとき} & \textbf{4 個} \\
\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}\textbf{のとき} & \textbf{6 個} \\
\boldsymbol{a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}\textbf{のとき} & \textbf{4 個} \\
\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<a}\ \textbf{のとき} & \textbf{2 個}
\end{array}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^2-t+k)$ が操作により，点 $\mathrm{A}'(x,\ y)$ に移るとき

$$x = at + b(t^2-t+k), \quad y = ct + d(t^2-t+k) \quad \cdots (*)$$

点 A' も C 上の点であるから

$$ct + d(t^2-t+k) = \{at + b(t^2-t+k)\}^2 - \{at + b(t^2-t+k)\} + k$$

上式は，t に関する恒等式であるから，t^4 の係数に注目すると　$b=0$

したがって　　$dt^2 + (c-d)t + dk = a^2t^2 - at + k$

ゆえに　　　$d = a^2,\ c-d = -a,\ dk = k$

$k \neq 0$ であるから　$d=1$　ゆえに　$(a,\ c) = (1,\ 0),\ (-1,\ 2)$

$(a,\ b,\ c,\ d) \neq (1,\ 0,\ 0,\ 1)$ であるから　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d) = (-1,\ 0,\ 2,\ 1)}$

(2) $y = x^2 - x + k$ より　$y' = 2x - 1$

C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^2-t+k)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2-t+k) = (2t-1)(x-t)$$

すなわち　　$y = (2t-1)x - t^2 + k \qquad \cdots ①$

(1) の結果を $(*)$ に適用すると　$x = -t,\quad y = t^2 + t + k$

C 上の点 $\mathrm{A}'(-t,\ t^2+t+k)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2+t+k) = (-2t-1)(x+t)$$

すなわち　　$y = (-2t-1)x - t^2 + k \qquad \cdots ②$

①，② が原点で直交するから

$$(2t-1)(-2t-1) = -1, \quad -t^2 + k = 0$$

ゆえに　$t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \boldsymbol{k = \dfrac{1}{2}}$　よって　$\mathbf{A}'\left(\pm\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}},\ \mathbf{1} \mp \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right)$　■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 1)$，$\mathrm{R}(x,\ y,\ 0)$ とおくと

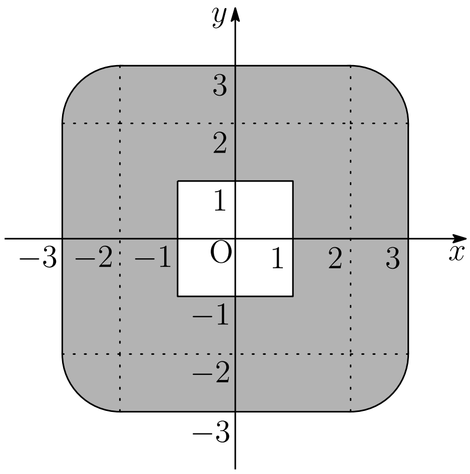
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\ (x,\ y,\ z) &= (0,\ 0,\ 2) + 2(\cos\theta,\ \sin\theta, -1)\\ &= (2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 0)\end{aligned}$$

よって，求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{x^2+y^2=4,\ z=0}$

(2) $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 2)$，$\mathrm{Q}(s,\ t,\ 1)$ とおくと (Q は正方形 ABCD の周上の点)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\ &= (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 2) + 2(s-\cos\theta,\ t-\sin\theta, -1)\\ &= 2(s,\ t,\ 0) + (\cos(\theta+\pi),\ \sin(\theta+\pi),\ 0)\end{aligned}$$

よって，点 R が動きうる領域は次のようになる．



また，求める領域の面積は

$$6^2 - 2^2 - 4\left(1^2 - \frac{1}{4}\pi\cdot 1^2\right) = \boldsymbol{28+\pi}$$

■

5 (1) n 回繰り返した後に，上面が 1，2，3，4，5，6 の目である確率はそれぞれ a_n，b_n，c_n，c_n，b_n，a_n とおける．このとき，

$$a_1 = 0,\ b_1 = c_1 = \frac{1}{4}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n + c_n + b_n) = \frac{1}{2}(b_n + c_n) \quad \cdots ①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n + c_n + a_n) = \frac{1}{2}(a_n + c_n) \quad \cdots ②$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + b_n + a_n) = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \cdots ③$$

上の 3 式から　$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$

$a_1 + b_1 + c_1 = \dfrac{1}{2}$ であるから　$a_n + b_n + c_n = \dfrac{1}{2} \quad \cdots ④$

①，④ から　$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - a_n\right) = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{4}$

したがって　$a_{n+1} - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{2}\left(a_n - \dfrac{1}{6}\right)$

ゆえに　$a_n - \dfrac{1}{6} = \left(a_1 - \dfrac{1}{6}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{6}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

(2) 求める期待値は，④ より

$$1a_n + 2b_n + 3c_n + 4c_n + 5b_n + 6a_n = 7(a_n + b_n + c_n) = 7 \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

別解　(1) n 回繰り返した後に，1 の目が，上面，側面，底面にある確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,\ y_1 = 1,\ z_1 = 0 \\ x_{n+1} &= \frac{1}{4}y_n & \cdots ① \\ y_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}y_n + z_n & \cdots ② \\ z_{n+1} &= \frac{1}{4}y_n & \cdots ③ \end{aligned}$$

上の 3 式をそれぞれ加えると　$x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$

ゆえに　　$x_n + y_n + z_n = 1 \quad \cdots ④$

②，④ より　　$y_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{2}y_n$

したがって　　$y_{n+1} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(y_n - \dfrac{2}{3}\right)$

ゆえに　　$y_n - \dfrac{2}{3} = \left(y_1 - \dfrac{2}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$y_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

これと ① より　$x_n = \dfrac{1}{4}y_{n-1} = \dfrac{1}{6}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

(2) n 回繰り返した後に，1 の目が上面にある確率は x_n，2〜5 の目が上面にある確率はすべて $\dfrac{y_n}{4}$，6 の目が上面ある確率は z_n であるから，求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned} E &= 1x_n + (2+3+4+5)\frac{y_n}{4} + 6z_n \\ &= x_n + \frac{7}{2}y_n + 6z_n \end{aligned}$$

ここで，①，③ により，$x_n = z_n$ であるから　$x_n + 6z_n = \dfrac{7}{2}(x_n + z_n)$

よって　　$E = \dfrac{7}{2}(x_n + y_n + z_n) = \dfrac{7}{2}$　■