平成 23 年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　平成 23 年 2 月 25 日

1 (1) 自然数 x，y は，$1 < x < y$ および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

をみたす．x，y の組をすべて求めよ．

(2) 自然数 x，y，z は，$1 < x < y < z$ および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}$$

をみたす．x，y，z の組をすべて求めよ．

2 点 O を中心とする半径 r の円周上に，2 点 A，B を $\angle\mathrm{AOB} < \dfrac{\pi}{2}$ となるようにとり $\theta = \angle\mathrm{AOB}$ とおく．この円周上に点 C を，線分 OC が線分 AB と交わるようにとり，線分 AB 上に点 D をとる．また，点 P は線分 OA 上を，点 Q は線分 OB 上を，それぞれ動くとする．

(1) $\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$ の最小値を r と θ で表せ．

(2) $a = \mathrm{OD}$ とおく．$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値を a と θ で表せ．

(3) さらに，点 D が線分 AB 上を動くときの $\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値を r と θ で表せ．

3 xy 平面上に放物線 $C : y = -3x^2 + 3$ と 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{P}(0,\ 3p)$ がある．線分 AP と C は，A とは異なる点 Q を共有している．

(1) 定数 p の存在する範囲を求めよ．

(2) S_1 を，C と線分 AQ で囲まれた領域とし，S_2 を，C，線分 QP，および y 軸とで囲まれた領域とする．S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ．

4 a，b，c を正の定数とする．空間内に 3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ がある．

(1) 辺 AB を底辺とするとき，△ABC の高さを a，b，c で表せ．

(2) △ABC，△OAB，△OBC，△OCA の面積をそれぞれ S，S_1，S_2，S_3 とする．ただし，O は原点である．このとき，不等式

$$\sqrt{3}S \geqq S_1 + S_2 + S_3$$

が成り立つことを示せ．

(3) (2) の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ．

5 A と B の 2 人が，1 個のサイコロを次の手順により投げ合う．

1 回目は A が投げる．

1，2，3 の目が出たら，次の回には同じ人が投げる．

4，5 の目が出たら，次の回には別の人が投げる．

6 の目が出たら，投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない．

(1) n 回目に A がサイコロを投げる確率 a_n を求めよ．

(2) ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率 p_n を求めよ．

(3) n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$ より $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{2}{3}$

したがって　$4xy-6x-6y=6$　ゆえに　$(2x-3)(2y-3)=15$

$1<x<y$ より，$-1<2x-3<2y-3$ に注意して

$(2x-3,\ 2y-3)=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$　よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)}$

(2) $1<x<y<z$ より，$1+\dfrac{1}{x}>1+\dfrac{1}{y}>1+\dfrac{1}{z}$ であるから，$x\geqq 3$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\leqq\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)=2$$

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$ をみたすとき，$x=2$ であるから

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}\quad\text{ゆえに}\quad\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{8}{5}$$

したがって　$9yz-15y-15z=15$　ゆえに　$(3y-5)(3z-5)=40$

$2<y<z$ より，$1<3y-5<3z-5$ に注意して

$$\begin{cases}3y-5=4\\3z-5=10\end{cases}\quad\text{すなわち}\quad y=3,\ z=5$$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)}$ ■

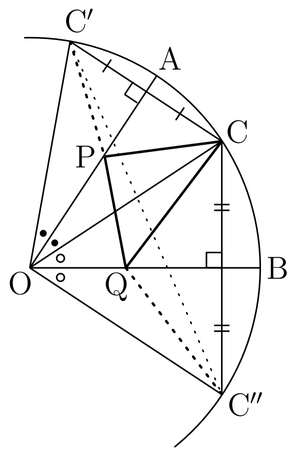
2 (1) 線分 OA，OB に関して C と対称な点をそれぞれ C$'$，C$''$ とすると

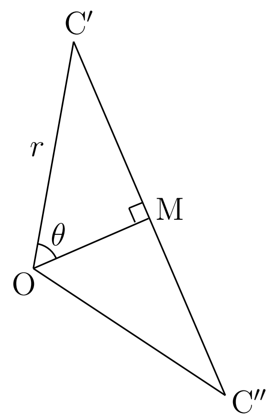
$$\mathrm{CP}=\mathrm{C'P},\quad \mathrm{QC}=\mathrm{QC''},\quad \angle\mathrm{C'OC''}=2\theta$$

したがって　$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}=\mathrm{C'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC''}\geqq\mathrm{C'C''}$

求める最小値は線分 C$'$C$''$ であるから，C$'$C$''$ の中点を M とすると

$$\mathrm{C'C''}=2\mathrm{C'M}=\boldsymbol{2r\sin\theta}$$



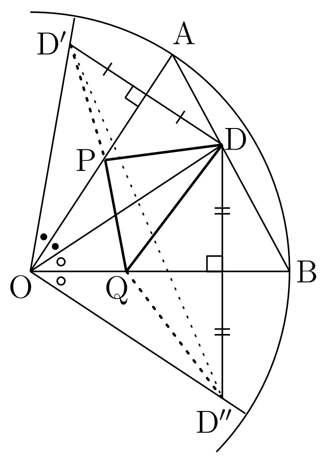


(2) 線分 OA，OB に関して D と対称な点をそれぞれ D$'$，D$''$ とすると，

$$\mathrm{OD}=\mathrm{OD'}=\mathrm{OD''}=a$$

よって，(1) と同様に，求める最小値は

$$\boldsymbol{2a\sin\theta}$$



(3) D が AB の中点であるとき，$\angle\mathrm{AOD}=\dfrac{\theta}{2}$ となり

$$a=r\cos\angle\mathrm{AOD}=r\cos\frac{\theta}{2}$$

このとき，a は最小となり，これを (2) の結果に代入して

$$\boldsymbol{2r\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta}$$

■

3 (1) 直線 AP の方程式は

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{3p}=1 \quad すなわち \quad y=-3px+3p$$

これと $C: y=-3x^2+3$ から y を消去すると

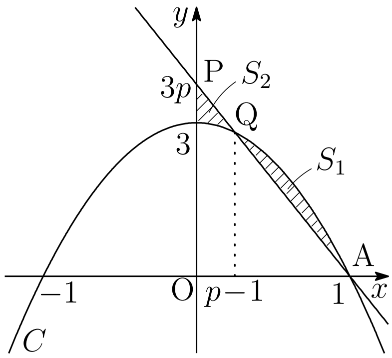
$$-3px+3p=-3x^2+3 \quad ゆえに \quad (x-1)(x-p+1)=0$$

Q は A と異なる線分 AP 上の点であるから，Q の x 座標 $p-1$ について

$$0 \leqq p-1<1 \quad すなわち \quad \boldsymbol{1 \leqq p < 2}$$

(2) S_1 は C の x^2 の係数に注意して

$$S_1=\frac{3}{6}\{1-(p-1)\}^3$$
$$=\frac{1}{2}(2-p)^3 \quad \cdots ①$$



C と $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_0^1(-3x^2+3)\,dx=\Big[-x^3+3x\Big]_0^1=2$$

$\triangle$OAP の面積は $\frac{3}{2}p$ であるから

$$2-S_1=\frac{3}{2}p-S_2 \quad ゆえに \quad S_2=S_1+\frac{3}{2}p-2 \quad \cdots ②$$

①，② より，$f(p)=S_1+S_2$ とおくと

$$f(p)=S_1+S_2=2S_1+\frac{3}{2}p-2=(2-p)^3+\frac{3}{2}p-2,$$
$$f'(p)=-3(p-2)^2+\frac{3}{2}=-3\left\{(p-2)^2-\frac{1}{2}\right\}$$

(1) の結果に注意して，$f'(p)=0$ を解くと $\quad p=2-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$

p	1	$\cdots$	$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	(2)
$f'(p)$		$-$	0	$+$	
$f(p)$		↘	極小	↗	

よって，求める p の値は $\quad \boldsymbol{p=\frac{4-\sqrt{2}}{2}}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-a,\ 0,\ c)$ より，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$\begin{aligned}2S &= \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-(a^2)^2}=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\end{aligned}$$

求める高さは $\quad \dfrac{2S}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(0,\ 0,\ c)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから　$2S_1=ab$，$2S_2=bc$，$2S_3=ca$
$\vec{u}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}=(ab,\ bc,\ ca)$ について，$|\vec{u}||\vec{v}|\geqq\vec{u}\cdot\vec{v}$ であるから

$$\sqrt{3}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geqq ab+bc+ca$$

よって $\quad \sqrt{3}S\geqq S_1+S_2+S_3$

(3) (2) の等号が成立するとき，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ向きであるから

$$ab=bc=ca \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a=b=c}$$

■

$\boxed{5}$ (1) n 回目に A，B がサイコロを投げる確率をそれぞれ a_n，b_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$a_1 = 1$，$b_1 = 0$ であるから

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = \dfrac{5}{6}(a_n + b_n) \\ a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{6}(a_n - b_n) \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} a_n + b_n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} \\ a_n - b_n = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} \end{cases}$$

よって $\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$

(2) (1) の結果から $p_n = \dfrac{1}{6}a_n = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}\left\{\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^{n} p_k = \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\right\} \\ &= \frac{1}{12}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\frac{1}{6}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n} \end{aligned}$$

■