平成22年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　平成22年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 実数 p，q，r に対して，3次多項式 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ と定める．実数 a，c，および0でない実数 b に対して，$a + bi$ と c はいずれも方程式 $f(x) = 0$ の解であるとする．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) $y = f(x)$ のグラフにおいて，点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし，点 $(c,\ f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする．$a \neq c$ のとき，$s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ．

(2) さらに，a，c は整数であり，b は0でない整数であるとする．次を証明せよ．

(i) p，q，r はすべて整数である．

(ii) p が2の倍数であり，q が4の倍数であるならば，a，b，c はすべて2の倍数である．

2 a を実数とする．傾きが m である2つの直線が，曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ とそれぞれ点A，点Bで接している．

(1) 線分ABの中点をCとすると，Cは曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ 上にあることを示せ．

(2) 直線ABの方程式が $y = -x - 1$ であるとき，a，m の値を求めよ．

3 原点をOとする xyz 空間内で，x 軸上の点A，xy 平面上の点B，z 軸上の点Cを，次をみたすように定める．

$$\angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{OBC} = \theta, \quad \angle \mathrm{AOB} = 2\theta, \quad \mathrm{OC} = 3$$

ただし，Aの x 座標，Bの y 座標，Cの z 座標はいずれも正であるとする．さらに，△ABC内の点のうち，Oからの距離が最小の点をHとする．また，$t = \tan\theta$ とおく．

(1) 線分OHの長さを t の式で表せ．

(2) Hの z 座標を t の式で表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 0 以上の整数 a_1，a_2 があたえられたとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

により定める．

(1) $a_1 = 1$，$a_2 = 2$ のとき，a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ．

(2) $a_2 = 3a_1$ のとき，$a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ n を 3 以上の自然数とする．サイコロを n 回投げ，出た目の数をそれぞれ順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．$i = 2, 3, \cdots, n$ に対して $X_i = X_{i-1}$ となる事象を A_i とする．

(1) A_2，A_3，$\cdots$，A_n のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n を求めよ．

(2) A_2，A_3，$\cdots$，A_n のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $a+bi$，c が実係数の 3 次方程式 $f(x)=0$ の解であるから，$a-bi$ もこの方程式である．方程式の解と係数の関係により

$$\begin{aligned}(a+bi)+(a-bi)+c&=-p\\(a+bi)(a-bi)+(a+bi)c+(a-bi)c&=q\\(a+bi)(a-bi)c&=-r\end{aligned}$$

したがって　$(*)\begin{cases}p=-2a-c\\q=a^2+b^2+2ca\\r=-(a^2+b^2)c\end{cases}$

$f(x)=x^3-(2a+c)x^2+(a^2+b^2+2ca)x-(a^2+b^2)c$ より

$$f'(x)=3x^2-2(2a+c)x+a^2+b^2+2ca$$

ゆえに　$f'(a)=b^2$，$f'(c)=c^2-2ca+a^2+b^2=(c-a)^2+b^2$

$a\neq c$ であるから　$f'(a)<f'(c)$　よって　$\boldsymbol{s(a)<s(c)}$

別解 $f(x)$ は，実数を係数とする 3 次多項式で，$a+bi$，c が方程式 $f(x)=0$ の解であるから，$a-bi$ も $f(x)=0$ の解であることと x^3 の係数に注意して

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a-bi)(x-a+bi)(x-c)\\&=\{(x-a)^2+b^2\}(x-c)\\f'(x)&=2(x-a)(x-c)+(x-a)^2+b^2\end{aligned}$$

ゆえに　$f'(a)=b^2$，$f'(c)=(c-a)^2+b^2$　$a\neq c$ であるから　$s(a)<s(c)$

(2) (i) $(*)$ より，明らか．

(ii) p は 2 の倍数であるから，$(*)$ の第 1 式より，c は 2 の倍数である．さらに，$2ca$ と q が 4 の倍数であるから，$(*)$ の第 2 式より

$$a^2+b^2 \text{ は 4 の倍数である} \quad \cdots(**)$$

これから，a，b の偶奇は一致する．

$a=2m+1,\ b=2n+1$ とすると ($m,\ n$ は整数)

$$a^2+b^2=4(m^2+m+n^2+n)+2$$

これは，$(**)$ に反する．したがって，$a=2m,\ b=2n$ とすると

$$a^2+b^2=4(m^2+n^2)$$

このとき，$(**)$ を満たす．よって，a，b，c はすべて 2 の倍数である． ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = x^3 - 3ax^2$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 - 6ax$

2 点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とすると，これらは 2 次方程式

$$3x^2 - 6ax = m \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 - 6ax - m = 0$$

の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = -\frac{m}{3}$$

2 点 A，B の中点 C の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = a$

このとき　$f(a) = a^3 - 3a{\cdot}a^2 = -2a^3$

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= (\alpha^3 - 3a\alpha^2) + (\beta^3 - 3a\beta^2) \\ &= \alpha^3 + \beta^3 - 3a(\alpha^2 + \beta^2) \\ &= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) - 3a\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\} \\ &= (2a)^3 - 3{\cdot}\left(-\frac{m}{3}\right){\cdot}2a - 3a\left\{(2a)^2 - 2\left(-\frac{m}{3}\right)\right\} \\ &= -4a^3 \end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} = -2a^3 = f(a)$

よって，$\mathrm{C}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)$ は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$.

(2) 直線 AB の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} &= \frac{(\beta^3 - 3a\beta^2) - (\alpha^3 - 3a\alpha^2)}{\beta - \alpha} \\ &= (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - 3a(\alpha+\beta) \\ &= (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta - 3a(\alpha+\beta) \\ &= (2a)^2 - \left(-\frac{m}{3}\right) - 3a{\cdot}2a = \frac{m}{3} - 2a^2 \end{aligned}$$

これが -1 であるから　$\dfrac{m}{3} - 2a^2 = -1 \quad \cdots ①$

$\mathrm{C}(a, -2a^3)$ は直線 $y = -x - 1$ 上にあるから

$$-2a^3 = -a - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a-1)(2a^2 + 2a + 1) = 0$$

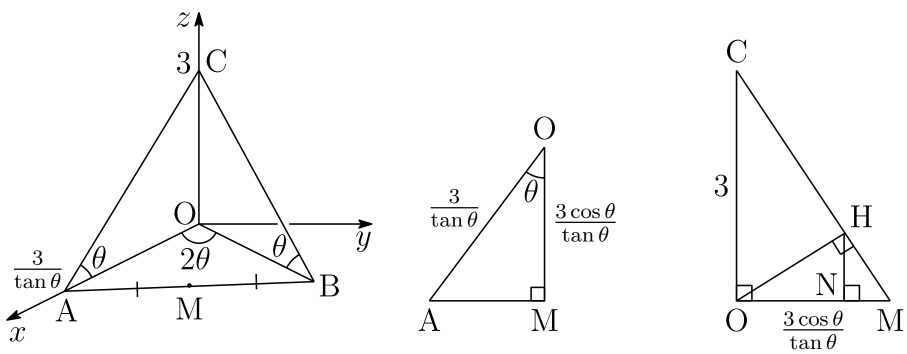
ここで，$2a^2 + 2a + 1 = 2\left(a + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} > 0$ であるから　$\boldsymbol{a = 1}$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{m = 3}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{OA}\tan\theta = 3$ であるから　$\mathrm{OA} = \dfrac{3}{\tan\theta}$

$\triangle\mathrm{CAO} \equiv \triangle\mathrm{CBO}$ であるから，辺 AB の中点を M とすると，中線 OM は $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線であるから

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OA}\cos\theta = \frac{3\cos\theta}{\tan\theta} = \frac{3}{\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{3}{t\sqrt{1+t^2}}$$



直角三角形 CMO に三平方の定理を適用すると

$$\mathrm{CM}^2 = \mathrm{CO}^2 + \mathrm{OM}^2 = 9 + \frac{9}{t^2(1+t^2)} = \frac{9(1+t^2+t^4)}{t^2(1+t^2)}$$

ゆえに　$\mathrm{CM} = \dfrac{3\sqrt{1+t^2+t^4}}{t\sqrt{1+t^2}}$

したがって　$\mathrm{CM} : \mathrm{MO} = \dfrac{3\sqrt{1+t^2+t^4}}{t\sqrt{1+t^2}} : \dfrac{3}{t\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2+t^4} : 1$

$\triangle\mathrm{CMO} \backsim \triangle\mathrm{COH}$ より，$\mathrm{CM} : \mathrm{MO} = \mathrm{CO} : \mathrm{OH}$ であるから

$$\sqrt{1+t^2+t^4} : 1 = 3 : \mathrm{OH}$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{OH} = \dfrac{3}{\sqrt{1+t^2+t^4}}}$

(2) H から OM に垂線 HN を引く．

$\triangle\mathrm{CMO} \backsim \triangle\mathrm{OHN}$ より，$\mathrm{CM} : \mathrm{MO} = \mathrm{OH} : \mathrm{HN}$ であるから

$$\sqrt{1+t^2+t^4} : 1 = \frac{3}{\sqrt{1+t^2+t^4}} : \mathrm{HN}$$

求める点 H の z 座標は，HN であるから　$\boldsymbol{\dfrac{3}{1+t^2+t^4}}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ より

$$a_{n+2} \equiv a_{n+1} \pmod 2$$

すなわち，$n \geqq 2$ のとき，a_n は偶数である．

また　$a_{n+2} \equiv a_{n+1} + a_n \pmod 5$
したがって，a_n を 5 で割った余りは

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2

n	14	15	16	17	18	19	20	21	22
a_n	0	2	2	4	1	0	1	1	2

$a_1 \equiv a_{21}$，$a_2 \equiv a_{22} \pmod 5$ であるから，a_n を 5 で割った余りには周期性がある (周期 20)．したがって

$$a_{2010} \equiv a_{10} \equiv 4 \pmod 5$$

上式から a_{2010} を 10 で割った余りは 4 または 9 であるが，a_{2010} が偶数であるから，a_{2010} を 10 で割った余りは　**4**

(2) $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$a_2 = 3a_1$ より

n	1	2	3	4	5	6
a_n	a_1	$3a_1$	$9a_1$	$27a_1$	$81a_1$	$243a_1$

$a_5 - a_1 = 80a_1$，$a_6 - a_2 = 240a_1$ より，$n = 1,\ 2$ のとき

$$a_{n+4} - a_n$$

は 10 の倍数である．与えられた漸化式から

$$a_{n+6} = a_{n+5} + 6a_{n+4}$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$a_{n+6} - a_{n+2} = (a_{n+5} - a_{n+1}) + 6(a_{n+4} - a_n)$$

$a_5 - a_1$ および $a_6 - a_2$ は 10 の倍数であるから，上の漸化式より，すべての自然数 n について，$a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数である．■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) A_2, A_3, $\cdots$, A_n のうちどれも起きない確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \quad \cdots ①$$

p_n は，この余事象の確率であるから

$$p_n = \mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right)^{\boldsymbol{n-1}}$$

(2) A_2, A_3, $\cdots$, A_n のうち 1 つだけ起きる確率は

$$_{n-1}\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \frac{n-1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \quad \cdots ②$$

q_n は ①，② の余事象の確率であるから

$$q_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{n-1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{n+4}}{\mathbf{6}}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right)^{\boldsymbol{n-2}}$$

■