# 平成17年度　一橋大学　2次試験前期日程(数学問題)120分
# 商・経済・法・社会学部　数I・II・A・B　平成17年2月25日

問題 1 2 3 4 5

**1** $k$ は整数であり，3次方程式

$$x^3 - 13x + k = 0$$

は3つの異なる整数解をもつ．$k$ とこれらの整数解をすべて求めよ．

**2** 原点を中心とする半径1の円を $C$ とし，$0 < a < 1$, $b > 0$ とする．$\mathrm{A}(a,\ 0)$ と $\mathrm{N}(0,\ 1)$ を通る直線が $C$ と交わる点のうち N と異なるものを P とおく．また，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ と N を通る直線が $C$ と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく．

(1) P の座標を $a$ で表せ．

(2) $\mathrm{AQ}/\!/\mathrm{PB}$ のとき，$\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN} = 2$ となることを示せ．

(3) $\mathrm{AQ}/\!/\mathrm{PB}$, $\angle\mathrm{ANB} = 45^\circ$ のとき，$a$ の値を求めよ．

**3** $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ をみたす $\theta$ と正の整数 $m$ に対して，$f_m(\theta)$ を次のように定める．

$$f_m(\theta) = \sum_{k=0}^{m} \sin(\theta + 60^\circ \times k)$$

(1) $f_5(\theta)$ を求めよ．

(2) $\theta$ が $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲を動くとき，$f_4(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3) $m$ がすべての正の整数を動き，$\theta$ が $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲を動くとき，$f_m(\theta)$ の最大値を求めよ．

**4** $a$ を定数とし，$x$ の2次関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = x^2 - 3$$
$$g(x) = -2(x-a)^2 + \frac{a^2}{3}$$

(1) 2つの放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が2つの共有点をもつような $a$ の範囲を求めよ．

(2) (1) で求めた範囲に属する $a$ に対して，2つの放物線によって囲まれる図形を $C_a$ とする．$C_a$ の面積を $a$ で表せ．

(3) $a$ が (1) で求めた範囲を動くとき，少なくとも1つの $C_a$ に属する点全体からなる図形の面積を求めよ．

**5** A と B の 2 人があるゲームを繰り返し行う．1 回ごとのゲームで A が B に勝つ確率は $p$，B が A に勝つ確率は $1-p$ であるとする．$n$ 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上になる確率を $x_n$ とする．

(1) $x_n$ を $p$ と $n$ で表せ．

(2) $p=\dfrac{1}{2}$ のとき，$x_n$ を最大にする $n$ を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ 3次方程式 $x^3-13x+k=0$ の3つの整数解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると $(\alpha \leqq \beta \leqq \gamma)$，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-13,\quad \alpha\beta\gamma=-k \tag{$*$}$$

上の第1式と第2式から

$$\gamma=-(\alpha+\beta),\quad \alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)+13=0$$

上の2式から $\gamma$ を消去すると

$$\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2+13=0 \quad \text{ゆえに} \quad (2\alpha+\beta)^2=52-3\beta^2 \tag{$**$}$$

上の第2式の左辺は平方数であるから　$\beta^2=1,\ 9,\ 16$

(i) $\beta^2=1$ のとき，$(**)$ より　$|2\alpha+\beta|=7$
　$\alpha \leqq \beta$ に注意して解くと　$(\alpha,\ \beta)=(-4,\ 1),\ (-3,-1)$

(ii) $\beta^2=9$ のとき，$(**)$ より　$|2\alpha+\beta|=5$
　$\alpha \leqq \beta$ に注意して解くと　$(\alpha,\ \beta)=(-4,\ 3)$

(iii) $\beta^2=16$ のとき，$(**)$ より　$|2\alpha+\beta|=2$
　$\alpha \leqq \beta$ に注意して解くと　$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 4)$

(i)〜(iii) を $\gamma=-(\alpha+\beta)$ に代入したもので，$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ を満たすものは

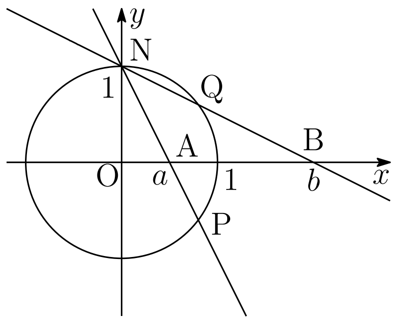
$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(-4,\ 1,\ 3),\ (-3,-1,\ 4)$$

これと $(*)$ の第3式から

**$k=12$ のとき　解は $-4,\ 1,\ 3$**
**$k=-12$ のとき　解は $-3,-1,\ 4$**

■

$\boxed{2}$ (1) $C : x^2 + y^2 = 1$，直線 AN : $\dfrac{x}{a} + y = 1$




上の 2 式から，P の $x$ 座標は

$$x^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 = 1$$

ゆえに　$x\{(a^2+1)x - 2a\} = 0$

$x \neq 0$ であるから　$x = \dfrac{2a}{a^2+1}$

これを直線 AN の方程式に代入して　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\boldsymbol{2a}}{\boldsymbol{a^2+1}},\ \dfrac{\boldsymbol{a^2-1}}{\boldsymbol{a^2+1}}\right)$

(2) (1) の結果を利用して　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{2b}{b^2+1},\ \dfrac{b^2-1}{b^2+1}\right)$

AQ//PB より　NA : NP = NQ : NB

したがって A，Q，P，B の $x$ 座標から

$$a : \frac{2a}{a^2+1} = \frac{2b}{b^2+1} : b \quad \text{ゆえに} \quad (a^2+1)(b^2+1) = 4 \qquad (*)$$

また　$\mathrm{AN} = \sqrt{a^2+1}$，$\mathrm{BN} = \sqrt{b^2+1}$

よって　$\mathrm{AN}{\cdot}\mathrm{BN} = \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} = 2$

(3) $\alpha = \angle\mathrm{ONA}$，$\beta = \angle\mathrm{ONB}$ とおくと　$\tan\alpha = a$，$\tan\beta = b$

$\angle\mathrm{ANB} = \beta - \alpha = 45^\circ$ であるから

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{b-a}{1+ba} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{1+a}{1-a}$$

これを $(*)$ に代入すると　$(a^2+1)\left\{\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)^2 + 1\right\} = 4$

ゆえに　$(a^2+1){\cdot}\dfrac{2(a^2+1)}{(1-a)^2} = 4$　$0 < a < 1$ より　$\dfrac{a^2+1}{1-a} = \sqrt{2}$

したがって　$a^2 + \sqrt{2}a + 1 - \sqrt{2} = 0$

$0 < a < 1$ に注意して解くと　$\boldsymbol{a = \dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\alpha = 30^\circ$, $\theta_k = \theta + 2k\alpha$ とおくと $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

$$\begin{aligned} f_m(\theta) &= \sum_{k=0}^{m} \sin\theta_k = \sum_{k=0}^{m} 2\sin\theta_k \sin\alpha \\ &= \sum_{k=0}^{m} \{\cos(\theta_k - \alpha) - \cos(\theta_k + \alpha)\} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \{\cos(\theta_k - \alpha) - \cos(\theta_{k+1} - \alpha)\} \\ &= \cos(\theta_0 - \alpha) - \cos(\theta_{m+1} - \alpha)\} \\ &= 2\sin\frac{\theta_{m+1} + \theta_0 - 2\alpha}{2} \sin\frac{\theta_{m+1} - \theta_0}{2} \\ &= 2\sin(\theta + m\alpha)\sin(m+1)\alpha \qquad (*) \end{aligned}$$

$m = 5$ のとき，$\sin(m+1)\alpha = 0$ であるから，$(*)$ より　$\boldsymbol{f_5(\theta) = 0}$

別解　$g(k) = \sin(\theta + 60^\circ \times k)$ とおくと

$$g(3) = -g(0), \quad g(4) = -g(1), \quad g(5) = -g(2)$$

よって　$f_5(\theta) = \sum_{k=0}^{5} g(k) = \mathbf{0}$

(2) $(*)$ に $m = 4$ を代入すると

$$\begin{aligned} f_4(\theta) &= 2\sin(\theta + 4\alpha)\sin 5\alpha \\ &= 2\sin(\theta + 120^\circ)\sin 150^\circ \\ &= \sin(\theta - 240^\circ) \end{aligned}$$

$\theta - 240^\circ = 90^\circ$，すなわち，$\theta = 330^\circ$ のとき，最大値 **1** をとる．

(3) $(*)$ より，$(m+1)\alpha = 3\alpha + 12n\alpha$ ($n$ は 0 以上の整数)，
すなわち，$m = 2 + 12n$ のとき

$$f_m(\theta) = 2\sin\{\theta + (2+12n)\alpha\} = 2\sin(\theta + 60^\circ)$$

であるから，$\theta = 30^\circ$ のとき，最大値 **2** をとる．■

**4** (1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ から $y$ を消去すると

$$x^2-3=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3} \quad \text{整理すると} \quad 3x^2-4ax+\frac{5}{3}a^2-3=0 \quad (*)$$

このとき，方程式 $(*)$ は異なる2つの実数解をもつから，その係数について

$$D/4=(-2a)^2-3\left(\frac{5}{3}a^2-3\right)=9-a^2>0$$

したがって　$(a+3)(a-3)<0$　よって　$\boldsymbol{-3<a<3}$

(2) $-3<a<3$ のとき，2次方程式 $(*)$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha=\frac{2a-\sqrt{9-a^2}}{3},\quad \beta=\frac{2a+\sqrt{9-a^2}}{3} \qquad (**)$$

$g(x)-f(x)=-3(x-\alpha)(x-\beta)$ であるから，$C_a$ の面積を $S_a$ とすると

$$\begin{aligned}S_a&=\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}\,dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-a^2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{4}{27}(9-a^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(3) $-3<a<3$ より

$$a=3\sin\theta,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

とし，$\tan\varphi=\frac{1}{2}\ \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}\alpha&=2\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta-\varphi)\geqq-\sqrt{5}\\ \beta&=2\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)\leqq\sqrt{5}\end{aligned}$$

$y=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$ の $x$ を固定し，$a$ の関数と考えると

$$y=-\frac{5}{3}a^2+4ax-2x^2=-\frac{5}{3}\left(a-\frac{6}{5}x\right)^2+\frac{2}{5}x^2 \quad (-3<a<3)$$

$-\sqrt{5}\leqq x\leqq\sqrt{5}$ であるから　$-3<-\frac{6}{\sqrt{5}}\leqq\frac{6}{5}x\leqq\frac{6}{\sqrt{5}}<3$

固定された $x$ について，$a=\frac{6}{5}x$ のとき，$y$ は最大，すなわち，$y\leqq\frac{2}{5}x^2$

よって，$y \geqq x^2-3$，$y \leqq \dfrac{2}{5}x^2$ を同時に満たす領域の面積を求めればよい．
2 つの放物線 $y=x^2-3$ と $y=\dfrac{2}{5}x^2$ の共有点の $x$ 座標は

$$x^2-3=\frac{2}{5}x^2 \quad \text{これを解いて} \quad x=\pm\sqrt{5}$$

したがって，求める面積を $S$ とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left\{\frac{2}{5}x^2-\left(x^2-3\right)\right\}dx \\ &= \frac{3}{5}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)dx=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}(2\sqrt{5})^3=\mathbf{4\sqrt{5}} \end{aligned}$$

■

**5** (1) $n \leqq 7$ のとき，A と B の双方は 4 勝以上しないから　$\boldsymbol{x_n=0}$
$n$ 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上するのは，次の 2 つの場合である $(n \geqq 8)$．

［1］$n-1$ 回目終了時点で A が 3 勝，B が $n-4$ 勝し，$n$ 回目に A が勝つ．
［2］$n-1$ 回目終了時点で A が $n-4$ 勝，B が 3 勝し，$n$ 回目に B が勝つ．

よって，求める確率 $x_n$ は

$$\begin{aligned} x_n &= {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^3(1-p)^{n-4}\times p+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-4}p^{n-4}(1-p)^3\times(1-p) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)p^4(1-p)^4\{(1-p)^{n-8}+p^{n-8}\}} \end{aligned}$$

(2) $p=\dfrac{1}{2}$ を (1) の結果に代入すると

$$x_n=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2^n} \qquad (n \geqq 8)$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n}-1 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{3\cdot 2^n}{(n-1)(n-2)(n-3)}-1 \\ &= \frac{n}{2(n-3)}-1=\frac{6-n}{2(n-3)}<0 \end{aligned}$$

$x_n > x_{n+1}$ $(n \geqq 8)$ であるから，$x_n$ を最大にする $n$ は　$\boldsymbol{n=8}$　■