

平成 15 年度 一橋大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
 商・経済・法・社会学部 数 I・II・A・B 平成 15 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4 5

- 1 (1) 正の整数 n で $n^3 + 1$ が 3 で割り切れるものをすべて求めよ.
 (2) 正の整数 n で $n^n + 1$ が 3 で割り切れるものをすべて求めよ.
- 2 複素数 α, β は $|\alpha - 1| = 1, |\beta - i| = 1$ をみたす.
 (1) $\alpha + \beta$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ.
 (2) $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ.
- 3 a, c を実数とする. 空間内の 4 点 $O(0, 0, 0), A(2, 0, a), B(2, 1, 5), C(0, 1, c)$ は同一平面上にある.
 (1) c を a で表せ.
 (2) 四角形 $OABC$ の面積の最小値を求めよ.
- 4 $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1, g(x) = x^2 - x - 1$ とする.
 (1) 方程式 $f(x) = 0$ はただひとつの実数解 α をもつことを示せ. また, $1 < \alpha < 2$ であることを示せ.
 (2) 方程式 $g(x) = 0$ の正の解を β とする. α と β の大小を比較せよ.
 (3) α^2 と β^3 の大小を比較せよ.
- 5 1 が書かれたカードが 2 枚, 2 が書かれたカードが 2 枚, $\dots$, n が書かれたカードが 2 枚の合計 $2n$ 枚のカードがある. カードをよく混ぜ合わせた後, 1 枚ずつ左から順に並べる. このとき, カードに書かれている数の列を

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n}$$

とする. $a_k \geq a_{k+1}$ ($1 \leq k < 2n$) となる最小の k を X とする.

- (1) $X = 1$ となる確率を求めよ.
 (2) $X = n$ となる確率を求めよ.
 (3) m は $1 \leq m < n$ をみたす整数とする. $X \geq m$ となる確率を求めよ.

解答例

1 (1) 法 3 について

$$\begin{aligned} n \equiv 0 \quad \text{のとき} \quad n^3 + 1 &\equiv 1 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \quad \text{のとき} \quad n^3 + 1 &\equiv -1 \pmod{3} \\ n \equiv -1 \quad \text{のとき} \quad n^3 + 1 &\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

n は正の整数であるから $n = 3k - 1$ (k は自然数)

(2) 法 3 について

$$\begin{aligned} n \equiv 0 \quad \text{のとき} \quad n^n + 1 &\equiv 1 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \quad \text{のとき} \quad n^n + 1 &\equiv -1 \pmod{3} \\ n \equiv -1 \quad \text{のとき} \quad n^n + 1 &\equiv (-1)^n + 1 \pmod{3} \end{aligned}$$

したがって, $n \equiv -1 \pmod{3}$, n は奇数

これから, $n = 3l - 1$ とすると, $n \equiv 1 \pmod{2}$ であるから

$$n = 3l - 1 \equiv l - 1 \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad l \equiv 0 \pmod{2}$$

$l = 2m$ とおくと (m は整数), n は正の整数であるから

$$n = 3 \cdot 2m - 1 = 6m - 1 \quad (m \text{ は自然数})$$



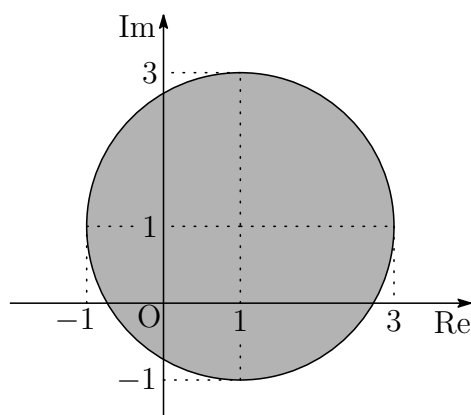
- 2** (1) $|\alpha - 1| = 1$, $|\beta - i| = 1$ より, $z = \alpha - 1$, $w = \beta - i$ とおくと

$$\alpha + \beta = z + 1 + w + i = 1 + i + z + w$$

$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$ に $|z| = |w| = 1$ を適用すると

$$0 \leq |z + w| \leq 2$$

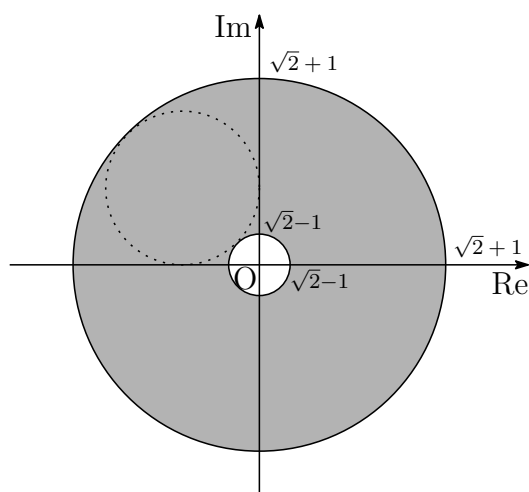
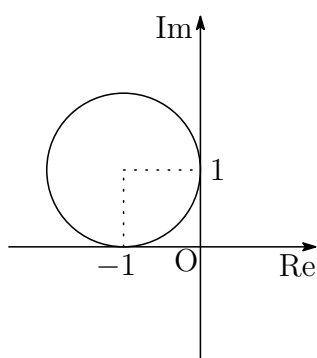
よって, $\alpha + \beta$ は, 中心 $1 + i$, 半径 2 の円の内部で境界を含む.



- (2) $\alpha - 1 = z$, $\beta - 1 = -1 + i + w$ であるから

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = z(-1 + i + w)$$

左下の図のように $-1 + i + w$ は中心 $-1 + i$, 半径 1 の円周上の点で, これを z により原点 O を中心に $\arg z$ だけ回転させたものである. よって, 原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2} + 1$ の内部と半径 $\sqrt{2} - 1$ の外部であり, その範囲は右下の図のようになる (境界を含む).



- 3** (1) 4点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, a)$, $B(2, 1, 5)$, $C(0, 1, c)$ は同一平面上にあるから、次式を満たす実数 s, t が存在する.

$$(*) \quad \overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad \text{ゆえに} \quad (0, 1, c) = (2s + 2, t, sa + 5t)$$

成分を比較して

$$0 = 2s + 2, \quad 1 = t, \quad c = sa + 5t$$

$$s = -1, t = 1 \text{ を第3式に代入して } c = -a + 5$$

- (2) $s = -1, t = 1$ を $(*)$ に代入して

$$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \quad (**)$$

$(**)$ より、四角形 $OABC$ は平行四辺形であるから、その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \sqrt{(4 + a^2) \cdot 30 - (4 + 5a)^2} \\ &= \sqrt{5a^2 - 40a + 104} \\ &= \sqrt{5(a - 4)^2 + 24} \end{aligned}$$

よって、 S は、 $a = 4$ のとき、最小値 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

補足 平行四辺形 $OABC$ の面積 S は、次式で求めることもできる.

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC})^2} \\ &= \sqrt{(4 + a^2)(1 + c^2) - (ac)^2} \\ &= \sqrt{4 + a^2 + 4c^2} = \sqrt{4 + a^2 + 4(-a + 5)^2} \\ &= \sqrt{5a^2 - 40a + 104} = \sqrt{5(a - 4)^2 + 24} \end{aligned}$$



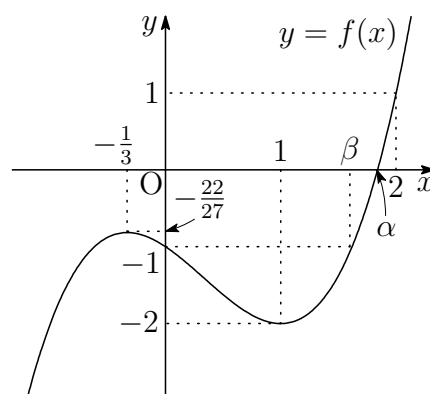
- 4 (1) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$$

x	...	$-\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

増減表から, $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになり, 方程式 $f(x) = 0$ はただひとつの実数解 α をもつ.

また, $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 1 > 0$ より $1 < \alpha < 2$



- (2) β は, 方程式 $g(x) = 0$ の解であるから $\beta^2 - \beta - 1 = 0$

$$\text{これから } f(\beta) = \beta^3 - \beta^2 - \beta - 1 = \beta(\beta^2 - \beta - 1) - 1 = -1 < 0$$

グラフから $x < \alpha \iff f(x) < 0$ ゆえに $f(\beta) < 0$ より $\beta < \alpha$

- (3) 方程式 $g(x) = 0$ の正の解 β は $\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$$\beta^2 = \beta + 1 \text{ より } \beta^3 = \beta(\beta + 1) = \beta^2 + \beta = (\beta + 1) + \beta$$

$$= 2\beta + 1 = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = 2 + \sqrt{5} > 4$$

(1) の結果から $1 < \alpha^2 < 4$ ゆえに $\alpha^2 < 4 < \beta^3$ よって $\alpha^2 < \beta^3$



5 (1) $a_1 = j$ とすると ($j = 1, 2, \dots, n$), $a_2 \leq j$ である.

$a_1 = j$ となる確率が $\frac{2}{2n}$ で, $a_2 \leq j$ となる確率が $\frac{2j-1}{2n-1}$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{2}{2n} \cdot \frac{2j-1}{2n-1} &= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{j=1}^n (2j-1) \\ &= \frac{1}{n(2n-1)} \{n(n+1) - n\} = \frac{n}{2n-1} \end{aligned}$$

別解 (i) $a_1 = a_2$ となるのは, a_1 の選び方 $2n$ 通りに対して, a_2 は 1 通りであるから, その確率は

$$\frac{2n \cdot 1}{2n P_2} = \frac{2n}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

(ii) $a_1 > a_2$ となるのは, 1 から n の番号から異なる 2 つを選び, 大きい方を a_1 , 小さい方を a_2 とする ${}_n C_2$ 通りある. またそれぞれの番号は 2 通りずつあるから, その確率は

$$\frac{{}_n C_2 \cdot 2^2}{2n P_2} = \frac{2n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}$$

(i) と (ii) は互いに排反であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{2n-1} + \frac{n-1}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$$

(2) $X = n$ となるのは, 次の場合で, このとき, $a_n \geq a_{n+1}$ となる.

$$a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n$$

$a_j = j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) となるのは, それぞれの j について番号は 2 通りずつあるから, その確率は

$$\frac{2^n}{2n P_n} = \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!}$$

(3) $X \geq m$ となるのは ($1 \leq m < n$), 次の場合である.

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m$$

$a_1, a_2, \dots, a_m$ の選び方は, 1 から n の整数から異なる m 個を選び, 小さい順に $a_1, a_2, \dots, a_m$ に対応させる. それぞれの番号は 2 通りずつあるから, その確率は

$$\frac{{}_n C_m \cdot 2^m}{2n P_m} = \frac{n!(2n-m)! \cdot 2^m}{(2n)! m! (n-m)!}$$

■