平成 14 年度　一橋大学　2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　平成 14 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4 5

1 k，x，y は正の整数とする．三角形の 3 辺の長さが $\dfrac{k}{x}$, $\dfrac{k}{y}$, $\dfrac{1}{xy}$ で，周の長さが $\dfrac{25}{16}$ である．k, x, y を求めよ．

2 $r > 0$ とし，$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく．任意の角 θ に対し，複素数平面上で点 $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ と実軸との距離は 2 以下である．r のとりうる範囲を求めよ．

3 a, b, c は 0 以上の実数とする．3 点 A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$，C$(1,\ c)$ は，$\angle\mathrm{ABC} = 30^\circ$，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ をみたす．

(1) c を求めよ．

(2) AB の長さの最大値と最小値を求めよ．

4 頂点が z 軸上にあり，底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円すいがある．この円すいの側面が，原点を中心とする半径 1 の球に接している．

(1) 円すいの表面積の最小値を求めよ．

(2) 円すいの体積の最小値を求めよ．

5 最初の試行で 3 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く．次の試行で残った硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く．以下この試行をすべての硬貨が取り除かれるまで繰り返す．

(1) 試行が 1 回めで終了する確率 p_1，および 2 回めで終了する確率 p_2 を求めよ．

(2) 試行が n 回以上行われる確率 q_n を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\dfrac{k}{x},\ \dfrac{k}{y},\ \dfrac{1}{xy}$ が三角形の 3 辺の長さであるから，三角形の成立条件から

$$\left|\frac{k}{x}-\frac{k}{y}\right| < \frac{1}{xy} < \frac{k}{x}+\frac{k}{y} \quad \text{ゆえに} \quad |k(y-x)| < 1$$

$k,\ x,\ y$ は正の整数であるから　$y-x=0$　ゆえに　$y=x$

したがって，3 辺の長さ $\dfrac{k}{x},\ \dfrac{k}{x},\ \dfrac{1}{x^2}$ の三角形の周の長さが $\dfrac{25}{16}$ であるから

$$\frac{k}{x}+\frac{k}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{25}{16} \quad \text{ゆえに} \quad 16(2kx+1)=25x^2$$

$2kx+1$ は奇数であるから，上の第 2 式から，$x=4\ell$ とおくと (ℓ は整数)

$$8k\ell+1=25\ell^2 \quad \text{ゆえに} \quad 1=\ell(25\ell-8k)$$

これから，$\ell=1$ であるから

$$1=25-8k \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=3} \quad \text{また} \quad x=y=4\ell=\mathbf{4}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ より $(r>0)$

$$\begin{aligned}\alpha+\frac{1}{\alpha}&=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\\&=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\end{aligned}$$

点 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ の実軸からの距離は　$\left|r-\dfrac{1}{r}\right||\sin\theta|$

任意の角 θ について，その距離が 2 以下であるから

$$\left|r-\frac{1}{r}\right| \leqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad \left(r-\frac{1}{r}\right)^2 \leqq 4$$

したがって　$(r^2-1)^2-4r^2 \leqq 0$

$$(r^2+2r-1)(r^2-2r-1)<0 \qquad (*)$$

$(r^2+2r-1)(r^2-2r-1)=0$ を解くと

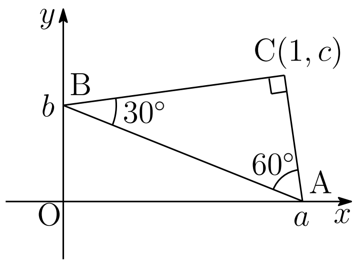
$$r=\pm1\pm\sqrt{2} \quad (\text{複号任意})$$

よって，$r>0$ に注意して，$(*)$ を解くと

$$\boldsymbol{-1+\sqrt{2} \leqq r \leqq 1+\sqrt{2}}$$

■

3 (1) A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$，C$(1,\ c)$ より



$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2$$
$$\mathrm{BC}^2 = 1 + (b-c)^2$$
$$\mathrm{CA}^2 = (a-1)^2 + c^2$$

条件より，$\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 = \mathrm{AB}^2$ であるから

$$1 + (b-c)^2 + (a-1)^2 + c^2 = a^2 + b^2$$

整理すると　$a - 1 = c(c-b)$　$\cdots$①

条件より，$3\mathrm{CA}^2 = \mathrm{BC}^2$ であるから

$$3\{(a-1)^2 + c^2\} = 1 + (b-c)^2$$

① を代入すると　$3\{c^2(c-b)^2 + c^2\} = 1 + (b-c)^2$

$$(3c^2 - 1)\{(b-c)^2 + 1\} = 0$$

$(b-c)^2 + 1 \neq 0$ であるから　$c > 0$ により　$\boldsymbol{c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (a-1, -c) \perp \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (-1,\ b-c)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$ より

$$-(a-1) - c(b-c) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a - 1 = c(c-b)$$

(2) $c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を ① に代入して整理すると　$b = \dfrac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}a$

$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ であるから　$0 \leqq a \leqq \dfrac{4}{3}$

$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}a\right)^2$$
$$= 4a^2 - 8a + \frac{16}{3} = 4(a-1)^2 + \frac{4}{3}$$

よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{\sqrt{3}}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{2}}}$

補足 $\mathrm{CA}^2 = (a-1)^2 + c^2 = (a-1)^2 + \dfrac{1}{3}$ より　$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq \mathrm{CA} \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\mathrm{AB} = 2\mathrm{CA}$ より　$\dfrac{2}{\sqrt{3}} \leqq \mathrm{AB} \leqq \dfrac{4}{\sqrt{3}}$　よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{\sqrt{3}}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{2}}}$

4 (1) 円 $x^2+z^2=1$ 上の第 1 象限の点 $(a,\ b)$ における接線は　$ax+bz=1$

この接線の x 軸，z 軸との交点は，それぞれ $\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$, $\left(0,\ \dfrac{1}{b}\right)$

円錐の母線の長さは　$\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}}=\dfrac{1}{ab}$

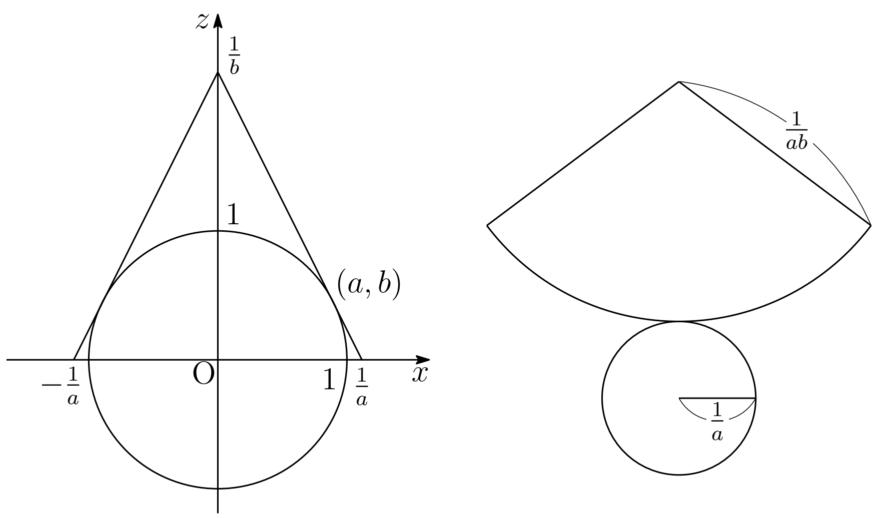
円錐の表面積を S とすると

$$S=\pi\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{1}{ab}=\frac{\pi(b+1)}{a^2b}=\frac{\pi(b+1)}{(1-b^2)b}=\frac{\pi}{b(1-b)}$$

このとき　$b(1-b)=-\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ $(0<b<1)$ より　$S\geqq 4\pi$

よって，求める最小値は　$\boldsymbol{4\pi}$

補足 $b+(1-b)\geqq 2\sqrt{b(1-b)}$ より　$b(1-b)\leqq\dfrac{1}{4}$



(2) 円錐の体積を V とすると　$V=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{1}{a}\right)^2\dfrac{1}{b}=\dfrac{\pi}{3a^2b}=\dfrac{\pi}{3(1-b^2)b}$

$f(b)=3(1-b^2)b=3(b-b^3)$ とおくと $(0<b<1)$　$f'(b)=3(1-3b^2)$

b	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	

したがって　$V\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$　よって　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi}$

補足 $1=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}+b^2\geqq 3\sqrt[3]{\left(\dfrac{a^2}{2}\right)^2b^2}=3\left(\dfrac{a^2b}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$　ゆえに　$\dfrac{1}{3a^2b}\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) j 枚の硬貨を同時に投げて k 枚残る確率を (j, k) とすると $(0 \leqq k \leqq j)$

$$(j, k) = \frac{{}_j\mathrm{C}_k}{2^j}$$

求める確率は

$$\begin{aligned} p_1 &= (3, 0) = \frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} = \mathbf{\frac{1}{8}} \\ p_2 &= (3, 3)(3, 0) + (3, 2)(2, 0) + (3, 1)(1, 0) \\ &= \frac{{}_3\mathrm{C}_3}{2^3} \cdot \frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} + \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3} \cdot \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} + \frac{{}_3\mathrm{C}_1}{2^3} \cdot \frac{{}_1\mathrm{C}_0}{2} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{19}{64}} \end{aligned}$$

(2) 特定の硬貨が n 回投げられる確率は $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

これから，この硬貨の n 回目の試行が起きない確率は

$$1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

硬貨 3 枚すべてが n 回目の試行が起きない確率 $1 - q_n$ は

$$1 - q_n = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^3$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} q_n &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2^{n-1}} - \frac{3}{4^{n-1}} + \frac{1}{8^{n-1}}} \end{aligned}$$

補足 n 回目の試行で残った硬貨の枚数が3枚，2枚，1枚である確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$a_1 = (3,3),\quad b_1 = (3,2),\quad c_1 = (3,1)$$
$$a_{n+1} = a_n(3,3) \tag{A}$$
$$b_{n+1} = a_n(3,2) + b_n(2,2) \tag{B}$$
$$c_{n+1} = a_n(3,1) + b_n(2,1) + c_n(1,1) \tag{C}$$

(A) より　$a_1 = \dfrac{1}{8},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{8}a_n$　ゆえに　$a_n = \dfrac{1}{8^n}$
これを (B) に代入すると

$$b_{n+1} = \frac{3}{8^{n+1}} + \frac{1}{4}b_n \quad \text{ゆえに} \quad 4^{n+1}b_{n+1} - 4^n b_n = \frac{3}{2^{n+1}}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(4^{k+1}b_{k+1} - 4^k b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{3}{2^{k+1}}$$
$$4^n b_n - 4b_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2^n} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = 3\left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{8^n}\right) \tag{$*$}$$

$(*)$ は，$n=1$ のときも成立する．
以上の結果を (C) に代入すると

$$c_{n+1} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8^n} + \frac{1}{2}\cdot 3\left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{8^n}\right) + \frac{1}{2}c_n$$

整理すると　$2^{n+1}c_{n+1} - 2^n c_n = -\dfrac{9}{4^{n+1}} + \dfrac{3}{2^n}$
$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1}c_{k+1} - 2^k c_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{9}{4^{k+1}} + \frac{3}{2^k}\right)$$
$$2^n c_n - 2c_1 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4^n} + 3 - \frac{3}{2^{n-1}}$$
$$c_n = 3\left(\frac{1}{2^n} - \frac{2}{4^n} + \frac{1}{8^n}\right) \tag{$**$}$$

$(**)$ は $n=1$ のときも成立する．求める確率 q_n は

$$q_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{3}{4^{n-1}} + \frac{1}{8^{n-1}}$$

■