平成13年度　一橋大学　２次試験前期日程(数学問題)120分
商・経済・法・社会学部　数I・II・A・B　平成13年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 a, b を整数とする．3次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は3実数解 α, β, γ を持ち，$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，α, β, γ のうちどれかは整数である．a, b を求めよ．

2 放物線 $y=x^2$ 上に，直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる2点P，Qが存在するような a の範囲を求めよ．

3 四面体OAPQにおいて，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$\angle\mathrm{PAQ}=30^\circ$ である．

(1) $\triangle$APQの面積 S を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ のとりうる範囲を求めよ．

(3) 四面体OAPQの体積 V の最大値を求めよ．

4 複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ は，条件

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\leqq r\leqq\frac{\sqrt{5}}{2},\quad 0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$$

をみたす．

(1) $f(z)=|z+z^2|$ の最大値と最小値，およびそれらを与える複素数 z を求めよ．

(2) $g(z)=|2z+z^3|$ の最大値と最小値，およびそれらを与える複素数 z を求めよ．

5 1から n までの数字を1つずつ書いた n 枚のカードがある．ただし，$n\geqq 2$ とする．

(1) この n 枚のカードから一度に2枚選び，大きい方の数字を X とする．X の期待値 E_1 を求めよ．

(2) この n 枚のカードから1枚選び，その数字を X_1 とする．そのカードをもとに戻し，改めて1枚選び，その数字を X_2 とする．X_1 と X_2 の小さくない方の数字を Y とする．Y の期待値 E_2 を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 3次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ の整数解を n とすると $(0<n<3)$

$$n^3+an^2+bn-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad n(n^2+an+b)=1$$

上の第2式から，$n=1$．これを上式に代入して

$$1+a+b=1 \quad \text{ゆえに} \quad b=-a$$

したがって，3次方程式 $x^3+ax^2-ax-1=0$ は

$$(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}=0$$

$f(x)=x^2+(a+1)x+1$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフの軸の方程式は

$$x=-\frac{a+1}{2}$$

$y=f(x)$ のグラフは，x 軸と $0<x<3$ $(x\neq 1)$ の区間において異なる2点で交わるから，$f(0)=1>0$ に注意して，次を満たせばよい．

$$0<-\frac{a+1}{2}<3, \quad D=(a+1)^2-4>0, \quad f(1)\neq 0, \quad f(3)>0$$

したがって，第1式から　$-7<a<-1$

第2式から　$(a+3)(a-1)>0$　ゆえに　$a<-3,\ 1<a$

第3式から　$a+3\neq 0$　ゆえに　$a\neq -3$

第4式から　$3a+13>0$　ゆえに　$a>-\dfrac{13}{3}$

これらを同時に満たす整数 a は　$\boldsymbol{a=-4}$　また　$b=-a=\mathbf{4}$　■

2 P，Q は放物線 $y=x^2$ 上の点であるから，$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ とおくと，2 点 P，Q の中点 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ は，直線 $y=ax+1$ にあり，直線 PQ はこの直線と垂直であるから

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{a(\alpha+\beta)}{2}+1,\quad \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}a=-1$$

上の第 2 式から　$(\alpha+\beta)a=-1$　$\cdots$ ①　これを第 1 式に代入すると

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{-1}{2}+1 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2+\beta^2=1 \quad \cdots ②$$

① から　$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{a}$　これと ② から

$$2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)=\left(-\frac{1}{a}\right)^2-1 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)$$

したがって，α と β を解とする 2 次方程式は

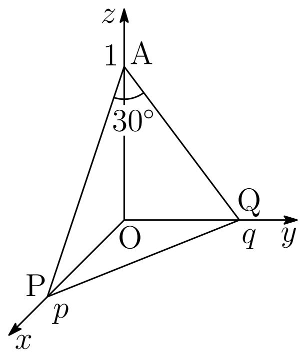
$$(*) \quad x^2+\frac{1}{a}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)=0$$

求める条件は，2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解をもつことであるから

$$D=\left(\frac{1}{a}\right)^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)>0 \quad \text{ゆえに} \quad 2a^2-1>0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}<a}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $p > 0,\ q > 0$ とし，A$(0,\ 0,\ 1)$，P$(p,\ 0,\ 0)$，Q$(0,\ 0,\ q)$ とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (p,\ 0, -1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (0,\ q, -1)$$

$\angle\mathrm{PAQ} = 30^\circ$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\cos 30^\circ$$

$$1 = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$　$\cdots$①

よって　$S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$

(2) ① より　$(p^2+1)(q^2+1) = \dfrac{4}{3}$

ゆえに　$q^2 = \dfrac{4}{3(p^2+1)} - 1 = \dfrac{1-3p^2}{3(p^2+1)}$　$\cdots$②

したがって　$1-3p^2 > 0$　$p > 0$ に注意して解くと　$0 < p < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　$\mathbf{0 < |\overrightarrow{OP}| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(3) ② より　$p^2q^2 = \dfrac{4p^2}{3(p^2+1)} - p^2 = \dfrac{7}{3} - \left\{p^2+1+\dfrac{4}{3(p^2+1)}\right\}$　$\cdots(*)$

$p^2+1 = \dfrac{4}{3(p^2+1)}$　すなわち　$p^2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}(2-\sqrt{3}) < \dfrac{1}{3}$

この p の値は，(2) の結果を満たすから，$(*)$ より

$$p^2q^2 \leqq \frac{7}{3} - 2\sqrt{(p^2+1)\cdot\frac{4}{3(p^2+1)}} = \frac{7-4\sqrt{3}}{3}$$

したがって　$pq \leqq \dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$

体積 V は　$V = \dfrac{1}{6}pq \leqq \dfrac{2\sqrt{3}-3}{18}$　よって　V の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{18}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$\dfrac{\sqrt{2}}{4} \leqq r \leqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より

$$\begin{aligned} f(z) &= |z+z^2| = |z||1+z| = r|(1+r\cos\theta)+ir\sin\theta| \\ &= r\sqrt{(1+r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} \\ &= r\sqrt{1+2r\cos\theta+r^2} \end{aligned}$$

したがって，r を固定すると，$f(z)$ は，

$\theta = 0^\circ$ のとき　最大値 $r(1+r)$
$\theta = 90^\circ$ のとき　最小値 $r\sqrt{1+r^2}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{4} \leqq r \leqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ であるから

$z = \dfrac{\sqrt{5}}{2}(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{5}{4}}$

$z = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}i}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

(2) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$\dfrac{\sqrt{2}}{4} \leqq r \leqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より

$$\begin{aligned} g(z) &= |2z+z^3| = |z||2+z^2| = r|(2+r^2\cos 2\theta)+ir^2\sin 2\theta)| \\ &= r\sqrt{(2+r^2\cos 2\theta)^2 + r^4\sin^2 2\theta} \\ &= r\sqrt{4+4r^2\cos 2\theta + r^4} \end{aligned}$$

したがって，r を固定すると，$g(z)$ は，

$\theta = 0^\circ$ のとき　最大値 $r(2+r^2)$
$\theta = 90^\circ$ のとき　最小値 $r(2-r^2)$

$r(2+r^2)$ は，単調増加関数であるから

$r = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\theta = 0^\circ$　すなわち　$\boldsymbol{z = \dfrac{\sqrt{5}}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{13\sqrt{5}}{8}}$

$h(r) = r(2-r^2)$ とおくと　$h'(r) = 2 - 3r^2$

r	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
$h'(r)$		$+$	0	$-$	
$h(r)$	$\frac{15\sqrt{2}}{32}$	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{5}}{8}$

$r = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\theta = 90^\circ$　すなわち　$\boldsymbol{z = \dfrac{\sqrt{2}}{4}i}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{15\sqrt{2}}{32}}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) n 枚のカードから一度に 2 枚取り出す場合の数は ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り．

$X = k\ (k = 2, 3, \cdots, n)$ となるのは，1 枚が k で，他の 1 枚が $k-1$ 以下となる確率

$$P(X = k) = \frac{1 \cdot (k-1)}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \quad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

したがって，求める期待値 E_1 は

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{k=2}^{n} kP(X = k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \\ &= \frac{2}{3n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\{(k+1) - (k-2)\} \\ &= \frac{2}{3n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} \{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k\} \\ &= \frac{2(n-1)n(n+1)}{3n(n-1)} = \boldsymbol{\frac{2(n+1)}{3}} \end{aligned}$$

(2) $Y = k\ (k = 2, 3, \cdots, n)$ となるのは，次の［1］～［3］の場合である．

［1］$X_1 = k$，$X_2 \leqq k-1$ となる確率 $\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{k-1}{n} = \dfrac{k-1}{n^2}$

［2］$X_1 \leqq k-1$，$X_2 = k$ となる確率 $\dfrac{k-1}{n} \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{k-1}{n^2}$

［3］$X_1 = X_2 = k$ となる確率 $\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^2}$

［1］～［3］より

$$P(Y = k) = \frac{k-1}{n^2} + \frac{k-1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$$

上式は，$k = 1$ のときも成立するから，求める期待値 E_2 は

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y = k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - k) \\ &= \frac{1}{n^2} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6n}(n+1)(4n-1)} \end{aligned}$$

補足 2 枚とも k 以下，$k-1$ 以下であるのは，それぞれ k^2 通り，$(k-1)^2$ 通りであるから $(k = 2, 3, \cdots, n)$

$$P(Y = k) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$$

上式は，$k = 1$ のときも成立する． ■