令和６年度　山口大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医 (医)・農・教育・経済・国際総合科・共同獣医
令和６年２月25日

- 理 (理数科以外)・工・教育理系　1　2　3　4　数 I・II・III・A・B (120 分)
- 理 (理数科)・医 (医) 学部　3　5　6　7　数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文系　2　8　9　10　数 I・II・II・A・B (120 分)

1 $a,\ k$ を $a \neq 0,\ k \neq 1$ を満たす定数とし，座標平面上の曲線 $y = x^2$ を C とする．直線 l は点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ において曲線 C と接し，直線 m は点 $\mathrm{B}(ka,\ k^2a^2)$ において曲線 C と接するものとする．また２直線 l と m の交点を D とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) 点 D の座標を $a,\ b$ を用いて表しなさい．

(2) $\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ であるための必要十分条件を $a,\ k$ を用いて表しなさい．

(3) 直線 AB と直線 l が垂直であるための必要十分条件を $a,\ k$ を用いて表しなさい．

(4) $\triangle\mathrm{ABD}$ が $\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ の直角二等辺三角形であるとき，$\triangle\mathrm{ABD}$ の面積を求めなさい．

2 点 $\mathrm{P}(u,\ v)$ が連立不等式 $u \geqq 1$，$v \geqq 1$，$uv \leqq 10^5$，$u^2v^3 \leqq 10^{12}$ の表す領域 D 内を動くとき，次の問いに答えなさい．ただし，(1) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい．

(1) $a = \log_{10} 3$，$b = \log_{10} 2$ とする．$u = 3$，$v = 2$ のとき $\log_{10}(u^5v^6)$ を a，b を用いて表しなさい．

(2) $x = \log_{10} u$，$y = \log_{10} v$ とおく．点 $\mathrm{P}(u,\ v)$ が領域 D 内を動くとき，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が動く領域を座標平面内に図示しなさい．

(3) u^5v^6 の最大値を求めなさい．

3 α を定数とする．実数全体を定義域とする関数 $f(x)$，$g(x)$ に対し

$$C = \int_0^1 f(x)g(a-x)\,dx$$

と定めたとき，次の $f(x)$，$g(x)$ について C をそれぞれ a を用いて表しなさい．

(1) $f(x) = x$，$g(x) = x^2$

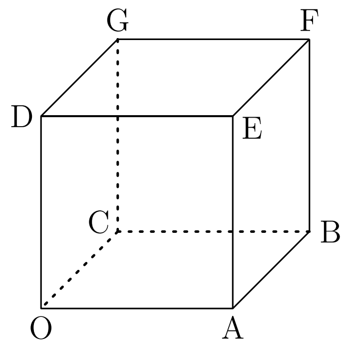
(2) $f(x) = \sin \pi x$，$g(x) = x$

(3) $f(x) = x$，$g(x) = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

4 動点 R と S が立方体 OABC-DEFG の辺上を独立に動く．時刻 $t=0$ のとき R，S はともに点 O にある．その後，各動点は時刻が 1 進むごとに，x の確率で元の頂点にあるか，もしくは隣にある 3 つの頂点のいずれかにそれぞれ $\frac{1}{3}(1-x)$ の確率で移動している．ただし，ある頂点の隣にある頂点とは，辺の両端の頂点のうち他方の頂点のことである．また，$0 \leqq x \leqq 1$ とする．

例えば，時刻 t のとき動点 R が点 E にある場合，時刻 $t+1$ において R は x の確率で点 E にあるか，もしくはそれぞれ $\frac{1}{3}(1-x)$ の確率で点 A，D，F のいずれかにある．動点 S についても同様である．

次の問いに答えなさい．(1) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい．



(1) $x=\frac{1}{2}$ とする．

(i) 時刻 $t=2$ のとき，R が点 O にある確率を求めなさい．

(ii) 時刻 $t=3$ のとき，R が点 A にある確率を求めなさい．

(iii) 時刻 $t=3$ において R が点 A にあるとき，時刻 $t=2$ のときに R が点 O にあった条件付き確率を求めなさい．

(2) 時刻 $t=3$ のとき，3 点 O，R，S が正三角形をなす確率を $p(x)$ とする．

(i) 時刻 $t=3$ のとき，R が点 B にある確率を x を用いて表しなさい．

(ii) $p(x)$ を求めなさい．

(iii) $p(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めなさい．

5 m を 0 以上の整数とし，k，r を自然数とする．k の正の約数の個数を $D(k)$ とおく．また，$\dfrac{k}{r^m}$ が整数となるような整数 m のうち最大のものを $M_r(k)$ とする．例えば，$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ なので $M_2(60) = 2$，$M_3(60) = 1$ である．このとき，次の問いに答えなさい．ただし，(1)，(2) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい．

(1) $M_2(8!)$ および $D(8!)$ の値を求めなさい．

(2) $M_2(30!)$，$M_3(30!)$ および $M_{12}(30!)$ の値を求めなさい．

(3) $d = D(30!)$ とおく．(2) で求めた $M_{12}(30!)$ の値を n とするとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} D\left(\frac{30!}{12^i}\right)$ を d を用いて表しなさい．

6 動点 R が正四面体 OABC の辺上を動く．動点 R は時刻 $t = 0$ のとき点 O にあり，時刻が 1 進むごとに，他の 3 つの頂点のいずれかにそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で移動しているか，$\dfrac{1}{2}$ の確率で元の頂点にある．このとき，次の問いに答えなさい．ただし，(1) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい．

(1) (i) 時刻 $t = 2$ のとき，R が点 O にある確率を求めなさい．

(ii) 時刻 $t = 2$ のとき，R が点 A にある確率を求めなさい．

(iii) 時刻 $t = 3$ のとき，R が点 A にある確率を求めなさい．

(iv) 時刻 $t = 3$ において R が A にあるとき，時刻 $t = 2$ のときに R が点 O にあった条件付き確率を求めなさい．

(2) n を自然数とする．時刻 $t = n$ のとき動点 R が O，A，B，C の各頂点にある確率をそれぞれ z_n，a_n，b_n，c_n とする．

(i) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明しなさい．

$$a_n = b_n = c_n$$

(ii) z_n を n の式で表しなさい．

(iii) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n$ を求めなさい．

7 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=(x-[x])^2-(x-[x])+\frac{1}{6}\quad(x\geqq 0)$$

と定める．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．さらに，n を自然数とし，

$$S(x)=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}+x\right)\quad(x\geqq 0)$$

とする．次の問いに答えなさい．

(1) 次の等式が成り立つことを示しなさい．

$$f(x+1)=f(x)$$

(2) 次の等式が成り立つことを示しなさい．

$$S\left(x+\frac{1}{n}\right)=S(x)$$

(3) $0\leqq x<\dfrac{1}{n}$ のとき，方程式 $S(x)=0$ を解きなさい．

(4) $x\geqq 0$ のとき，方程式 $S(x)=0$ を解きなさい．

8 次の問いに答えなさい．ただし，(1)，(2) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい．

(1) $8!$ の正の約数の個数を求めなさい．

(2) 17 で割ると 2 余り，22 で割ると 4 余る自然数のうち，4 桁で最小のものを求めなさい．

(3) a を定数とし，x の 2 次不等式

$$2x^2-(2a-3)x-3a<0\quad\cdots①$$

を考える．次の問いに答えなさい．

(i) 2 次不等式 ① の解を求めなさい．

(ii) 2 次不等式 ① を満たす整数 x が 4 個だけ存在するとき，a の値の範囲を求めなさい．

9 a を正の実数とする．O を原点とする座標平面において，四角形 OACB を考える．3 点 A，B，C は曲線 $y = x^2 - 6x + 6$ 上にあり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を満たすとする．点 A の x 座標を a とするとき，次の問いに答えなさい．ただし，(1) の解答は答のみを解答用紙記入しなさい．

(1) 点 B の x 座標を a を用いて表しなさい．

(2) $a = 1$ とする．

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を求めなさい．

(ii) 四角形 OACB の面積を求めなさい．

(iii) △ABC の外接円の方程式を求めなさい．

10 次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x + 5$ の増減を調べ，極値を求めなさい．また，そのグラフの概形をかきなさい．

(2) $a \geqq 0$ とし，関数 $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x + 5$ $(0 \leqq x \leqq a)$ の最大値を $g(a)$，最小値を $h(a)$ とする．

(i) $g(a)$ を求めなさい．

(ii) $h(a)$ を求めなさい．

(iii) 関数 $y = g(x)$ のグラフと関数 $y = h(x)$ のグラフおよび直線 $x = 4$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $b=ka$ とおく $(a \neq b)$．$y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

$C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad l: y=2ax-a^2$$

同様に，C 上の点 $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における接線 m の方程式は

$$m: y=2bx-b^2$$

l と m の方程式を連立して解くと

$$ax-a^2=bx-b^2 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{a+b}{2},\ y=ab$$

$b=ka$ より，点 D の座標は　$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\frac{(1+k)a}{2},\ ka^2}\right)$

(2) $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{D}\left(\frac{a+b}{2},\ ab\right)$ とすると

$$\mathrm{AB}^2=(b-a)^2+(b^2-a^2)=(b-a)^2\{1+(a+b)^2\} \qquad (*)$$
$$\mathrm{AD}^2=\frac{1}{4}(b-a)^2+a^2(b-a)^2=(b-a)^2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)$$

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AD}^2$，$b-a\neq 0$ であるから

$$1+(a+b)^2=\frac{1}{4}+a^2 \quad \text{ゆえに} \quad b(2a+b)+\frac{3}{4}=0$$

$b=ka$ を上の第 2 式に代入して　　$\boldsymbol{k(k+2)a^2+\frac{3}{4}=0}$

(3) 直線 AB の傾きは　$\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=a+b=a+ka=(1+k)a$

接線 l の傾きは $2a$ であるから，$\mathrm{AB}\perp l$ であるための必要十分条件は

$$(1+k)a\cdot 2a=-1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{2(1+k)a^2+1=0}$$

(4) $(*)$ に $b = ka$ を代入すると

$$\mathrm{AB}^2 = (k-1)^2 a^2 \left\{1 + (1+k)^2 a^2\right\} \qquad (**)$$

(2)，(3) の結果の 2 式から定数項を消去して整理すると

$$\frac{4}{3}k(k+2)a^2 = 2(1+k)a^2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2(k-1)(2k+3) = 0$$

$a \neq 0,\ k \neq 1$ であるから　$k = -\dfrac{3}{2}$　(3) の結論から　$a^2 = 1$

これらを $(**)$ に代入すると

$$\mathrm{AB}^2 = \left(-\frac{3}{2} - 1\right)^2 \left\{1 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2\right\} = \frac{125}{16}$$

よって，$\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ の直角二等辺三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{125}{16} = \boldsymbol{\frac{125}{32}}$$

■

2 (1) $u=3,\ v=2,\ a=\log_{10}3,\ b=\log_{10}2$ より

$$\begin{aligned}\log_{10}(u^5v^6) &= 5\log_{10}u+6\log_{10}v\\ &= 5\log_{10}3+6\log_{10}2=\boldsymbol{5a+6b}\end{aligned}$$

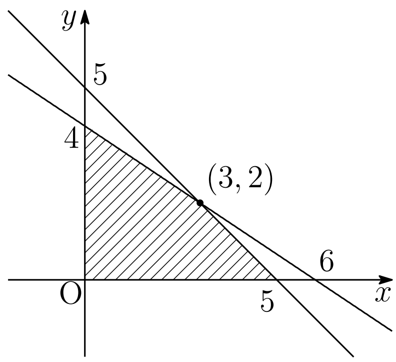
(2) $uv \leqq 10^5,\ u^2v^3 \leqq 10^{12}$ より　$\log_{10}uv \leqq 5,\quad \log_{10}u^2v^3 \leqq 12$

$$\log_{10}u+\log_{10}v \leqq 5,\quad 2\log_{10}u+3\log_{10}v \leqq 12$$

$x=\log_{10}u,\quad y=\log_{10}y$ より $(u \geqq 1,\ v \geqq 1)$

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad x+y \leqq 5,\quad 2x+3y \leqq 12$$

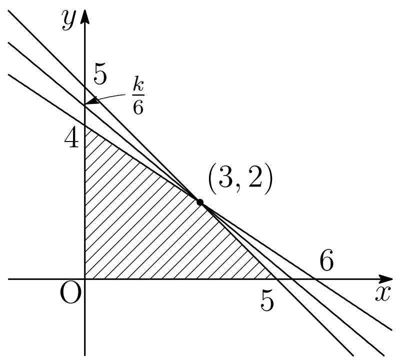
よって，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



(3) $k=\log_{10}u^5v^6=5\log_{10}u+6\log_{10}v=5x+6y$ とおくと

$$y=-\frac{5}{6}x+\frac{k}{6}$$

下の図から，$x=3,\ y=2$ のとき，k は最大値 27 をとる．
よって　$u=10^3,\ v=10^2$ のとき，最大値 $\mathbf{10^{27}}$ をとる．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=x,\ g(x)=x^2$ より

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x)\,dx = \int_0^1 x(a-x)^2\,dx \\ &= \int_0^1 (a^2x-2ax^2+x^3)\,dx \\ &= \left[\ \frac{a^2}{2}x^2-\frac{2a}{3}x^3+\frac{x^4}{4}\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{a^2}{2}-\frac{2a}{3}+\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

(2) $f(x)=\sin\pi x,\ g(x)=x$ より

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x)\,dx = \int_0^1 (a-x)\sin\pi x\,dx \\ &= \int_0^1 (x-a)\left(\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)'\,dx \\ &= \left[\ (x-a)\left(\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)-\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2a-1}{\pi}} \end{aligned}$$

(3) $f(x)=x$, $g(a-x)=\begin{cases} a-x & (a-x\geqq 0) \\ 0 & (a-x<0) \end{cases}$ より

$$f(x)g(a-x)=\begin{cases} x(a-x) & (x\leqq a) \\ 0 & (a<x) \end{cases}$$

(i) $1\leqq a$ のとき

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x)\,dx = \int_0^1 x(a-x)\,dx \\ &= \int_0^1 (ax-x^2)\,dx = \left[\ \frac{a}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{a}{2}-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(ii) $0\leqq a<1$ のとき

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x)\,dx \\ &= \int_0^a f(x)g(a-x)\,dx+\int_a^1 f(x)g(a-x)\,dx \\ &= \int_0^a x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{6}a^3} \end{aligned}$$

(iii) $a\leqq 0$ のとき　　$\boldsymbol{C=0}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{3}(1-x) = \dfrac{1}{6}$ とおく．

(i) $t=1$ のとき，R が点 O，A，C，D にある確率は，それぞれ

$$x, \ y, \ y, \ y$$

したがって，$t=2$ のとき，R が点 O にある確率は

$$xx + (y+y+y)y = x^2 + 3y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

(ii) $t=2$ のとき，R が点 A，O，B，E にある確率は，それぞれ

$$2xy, \ x^2+3y^2, \ 2y^2, \ 2y^2$$

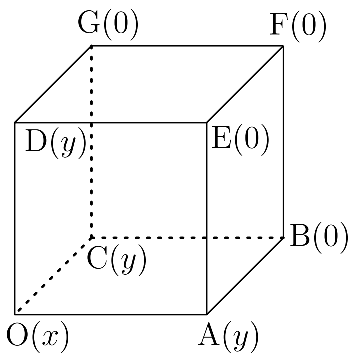
したがって，$t=3$ のとき，R が点 A にある確率は

$$\begin{aligned} & 2xy{\cdot}x + \{(x^2+3y^2) + 2y^2 + 2y^2\}y \\ =& (3x^2+7y^2)y = \left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{6} = \mathbf{\frac{17}{108}} \end{aligned}$$

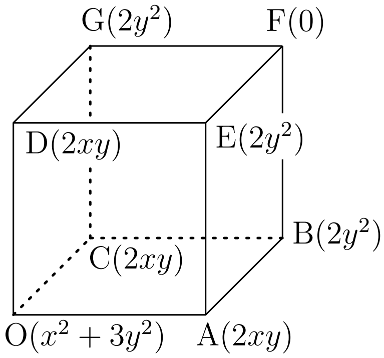
(iii) (i)，(ii) の結果から，求める条件付き確率は

$$\frac{(x^2+3y^2){\cdot}y}{(3x^2+7y^2)y} = \frac{x^2+3y^2}{3x^2+7y^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2}{3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \mathbf{\frac{6}{17}}$$

$\left(x = \frac{1}{2}, \ y = \frac{1}{6}\right)$



[1 秒後]



[2 秒後]

(2) $y=\dfrac{1}{3}(1-x)$ とする．

(i) $t=2$ のとき，R が点 B，A，C，F にある確率は，それぞれ

$$2y^2,\ 2xy,\ 2xy,\ 0$$

したがって，$t=3$ のとき，R が点 B にある確率は

$$\begin{aligned}2y^2\cdot x+(2xy+2xy+0)y=6xy^2&=6x\left\{\frac{1}{3}(1-x)\right\}^2\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}x(1-x)^2}\end{aligned}$$

(ii) 対称性から，3 秒後に R が 3 点 B，E，G にある確率は等しい．
3 点 O，R，S が正三角形をなすのは，△OBE，△OBG，△OEG である．このとき，R，S は 3 点 B，E，G のいずれかにあるから，(i) の結果を利用して

$$p(x)={}_3\mathrm{P}_2\left\{\frac{2}{3}x(1-x)^2\right\}^2=\boldsymbol{\frac{8}{3}x^2(1-x)^4}$$

(iii) 3 正数 $2x,\ 1-x,\ 1-x$ の相加平均・相乗平均の大小関係から

$$2x+(1-x)+(1-x)\geqq 3\sqrt[3]{2x\cdot(1-x)\cdot(1-x)}$$

整理すると　$2\geqq 3\sqrt[3]{2x(1-x)^2}$　ゆえに　$x(1-x)^2\leqq\dfrac{4}{27}$

等号が成立するとき　$2x=1-x$　すなわち　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{3}}$

このとき，最大値 $\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{4}{27}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{128}{2187}}$ ■

$\boxed{5}$ (1) $8! = 2^7{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}7$ より $\quad M_2(8!) = \mathbf{7}$

$$D(8!) = (7+1)(2+1)(1+1)(1+1) = \mathbf{96}$$

(2) 1 から 30 までの自然数で $2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4$ で割り切れる個数に注目すると

$$M_2(30!) = 15+7+3+1 = \mathbf{26}$$

1 から 30 までの自然数で $3,\ 3^2,\ 3^3$ で割り切れる個数に注目すると

$$M_3(30!) = 10+3+1 = \mathbf{14}$$

したがって，$30! = 2^{26}{\cdot}3^{14}A$ とおくと (A は 2, 3 と互いに素)

$$30! = 3(2^2{\cdot}3)^{13}A = 3{\cdot}12^{13}A \quad \text{よって} \quad M_{12}(30!) = \mathbf{13}$$

(3)
$$\begin{aligned} d &= D(30!) = D(2^{26}{\cdot}3^{14}A) = D(2^{26})D(3^{14})D(A) \\ &= (26+1)(14+1)D(A) = 27{\cdot}15D(A) \end{aligned}$$

(2) の結果から $\quad n = M_{12}(30!) = 13$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{30!}{12^i}\right) &= \sum_{i=1}^{13} D\left(\frac{2^{26}{\cdot}3^{14}A}{2^{2i}3^i}\right) \\ &= D(A)\sum_{i=1}^{13} D(2^{26-2i})D(3^{14-i}) \\ &= D(A)\sum_{i=1}^{13}(27-2i)(15-i) \\ &= D(A)\sum_{i=1}^{13}\{2(14-i)-1\}\{(14-i)+1\} \\ &= D(A)\sum_{i=1}^{13}(2i-1)(i+1) = D(A)\sum_{i=1}^{13}(2i^2+i-1) \\ &= D(A)\left(2{\cdot}\frac{1}{6}{\cdot}13{\cdot}14{\cdot}27 + \frac{1}{2}{\cdot}13{\cdot}14 - 13\right) \\ &= 13{\cdot}132D(A) \\ &= 13{\cdot}132{\cdot}\frac{d}{27{\cdot}15} = \frac{13{\cdot}44}{9{\cdot}15}d = \frac{\mathbf{572}}{\mathbf{135}}\boldsymbol{d} \end{aligned}$$

■

$\boxed{6}$ (2) で設定された数列 z_n，a_n，b_n，c_n について，次の確率漸化式が成立する．

$$\left.\begin{array}{l} z_0 = 1,\ a_0 = b_0 = c_0 = 0 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}z_n + \dfrac{1}{6}(a_n + b_n + c_n) \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{6}(z_n + b_n + c_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{6}(a_n + z_n + c_n) \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2}c_n + \dfrac{1}{6}(a_n + b_n + z_n) \end{array}\right. \qquad (*)$$

$z_n + a_n + b_n + c_n = 1$ であるから，$\{z_n\}$，$\{a_n\}$ について

$$z_0 = 1,\ z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{6}(1 - z_n) = \frac{1}{3}z_n + \frac{1}{6}$$
$$a_0 = 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}(1 - a_n) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6}$$

これから　$z_{n+1} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3}\left(z_n - \dfrac{1}{4}\right)$，　$a_{n+1} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3}\left(a_n - \dfrac{1}{4}\right)$

したがって　$z_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，　$a_n = \dfrac{1}{4}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$　$(**)$

(1) (i)　$z_2 = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$　(ii)　$a_2 = \mathbf{\dfrac{2}{9}}$　(iii)　$a_3 = \mathbf{\dfrac{13}{54}}$　(iv)　$\dfrac{z_2 \cdot \frac{1}{6}}{a_3} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}\Big/\dfrac{13}{54} = \mathbf{\dfrac{3}{13}}$

(2)　(i) (P) $a_n = b_n = c_n$ とすると，$(*)$ より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - b_n),\quad b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - c_n),\quad c_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(c_n - b_n)$$

$a_0 = b_0 = c_0$ より，$n = 0$ のとき，(P) は成立する．
$n = k$ のとき，(P) が成立すると仮定すると，上の漸化式から

$$a_{k+1} - b_{k+1} = 0,\quad b_{k+1} - c_{k+1} = 0,\quad c_{k+1} - a_{k+1} = 0$$

よって，$n = k + 1$ のときも，(P) が成立する．
したがって，すべての自然数 n について，(P) は成立する．

(ii) $(**)$ より　$\boldsymbol{z_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

(iii) (ii) の結果から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = \mathbf{\frac{1}{4}}$　■

$\boxed{7}$ (1) $[x+1]=[x]+1$ であるから，$f(x)=(x-[x])^2-(x-[x])+\dfrac{1}{6}$ について

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1-[x+1])^2-(x+1-[x+1])+\frac{1}{6} \\ &= (x-[x])^2-(x-[x])+\frac{1}{6} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用する．

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}+x\right) && \text{(A)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}+x\right)+f(1+x) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}+x\right)+f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}+x\right) && \text{(B)} \end{aligned}$$

(B) の x を $x+\dfrac{1}{n}$ に置き換えると

$$\begin{aligned} S\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}+x+\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}+x\right)=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}+x\right)=S(x) \end{aligned}$$

(3) (B) を利用すると，$0 \leqq x < \dfrac{1}{n}$ のとき，

$$0 \leqq \frac{k}{n}+x<1 \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

このとき

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}+x\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left(\frac{k}{n}+x\right)^2-\left(\frac{k}{n}+x\right)+\frac{1}{6}\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{2x-1}{n}k+x^2-x+\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{2x-1}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+n\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right) \\ &= nx^2-x+\frac{1}{6n} \end{aligned}$$

$S(0) = S\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{6n} > 0$，$S\left(\dfrac{1}{2n}\right) = -\dfrac{1}{12n} < 0$ に注意して，$S(x) = 0$ を解くと

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot n \cdot \frac{1}{6n}}}{2n} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}}{2n} = \boldsymbol{\frac{3 \pm \sqrt{3}}{6n}}$$

(4) (2)，(3) の結論から，$S(x) = 0$ の解は $(x \geqq 0)$

$$\boldsymbol{x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6n} + \frac{j}{n} \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)}$$

■

$\boxed{8}$ (1) $8! = 2^7{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}7$ より，$8!$ の約数の個数は

$$(7+1)(2+1)(1+1)(1+1) = \mathbf{96}$$

(2) $17x+2 = 22y+4$ とし ($x,\ y$ は整数)，法 17 に関する合同式を考えると

$$\begin{aligned} 2 \equiv 5y+4 \quad &\Longleftrightarrow \quad 5y \equiv -2 \quad \Longleftrightarrow \quad 15y \equiv -6 \\ &\Longleftrightarrow \quad -2y \equiv -6 \quad \Longleftrightarrow \quad y \equiv 3 \pmod{17} \end{aligned}$$

$y = 17k+3$ とおくと (k は整数)

$$22y+4 = 22(17k+3)+4 = 374k+70$$

求める 4 桁の最小の整数は，$k=3$ のとき　$374\times 3+70 = \mathbf{1192}$

(3) 2 次不等式 $2x^2-(2a-3)x-3a<0 \quad \cdots$①

(i) ① より　$(2x+3)(x-a)<0$

よって　$\boldsymbol{a > -\frac{3}{2}}$ **のとき**　$\boldsymbol{-\frac{3}{2} < x < a}$**，**

$\boldsymbol{a = -\frac{3}{2}}$ **のとき　解なし，**

$\boldsymbol{a < -\frac{3}{2}}$ **のとき**　$\boldsymbol{a < x < -\frac{3}{2}}$

(ii) (i) の結果から

$a > -\dfrac{3}{2}$ のとき，① を満たす整数 4 個は $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ であるから

$$2 < a \leqq 3$$

$a < -\dfrac{3}{2}$ のとき，① を満たす整数 4 個は $-5, -4, -3, -2$ であるから

$$-6 \leqq a < -5$$

よって　　$\boldsymbol{2 < a \leqq 3,\ -6 \leqq a < -5}$ ■

9 (1) 2 点 B，C の x 座標をそれぞれ b，c とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a,\ a^2-6a+6),\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (c-b,\ (c-b)(c+b-6))$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より

$$a = c-b \cdots ①,\quad a^2-6a+6 = (c-b)(c+b-6) = a(c+b-6)$$

上の第 2 式の両辺を a で割ると

$$a-6+\frac{6}{a} = c+b-6 \quad ゆえに \quad c+b = a+\frac{6}{a} \cdots ②$$

①，② から $\quad b = \dfrac{3}{a},\ c = a+\dfrac{3}{a} \quad \cdots (*)$

よって，点 B の x 座標は $\boldsymbol{\dfrac{3}{a}}$

(2) (i) $(*)$ より，$a=1$ のとき，$b=3,\ c=4$ であるから

$$\mathrm{A}(1,\ 1),\quad \mathrm{B}(3, -3),\quad \mathrm{C}(4, -2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (3, -3)$ より $\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

(ii) 四角形 OACB は平行四辺形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$|1\cdot(-3) - 1\cdot 3| = \boldsymbol{6}$$

(iii) (i) の結果から，△ABC の外接円は，AB を直径とする円である．
円周上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$ であるから

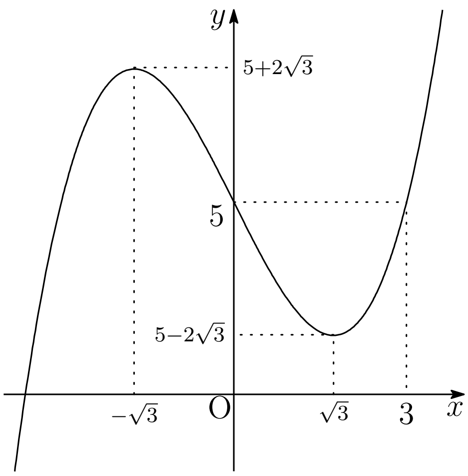
$$(x-1)(x-3)+(y-1)(y+3) = 0$$

が成立する (P が A，B と一致するときも上式は成立する)．
よって，求める方程式は $\quad \boldsymbol{(x-2)^2+(y+1)^2 = 5}$ ■

10 (1) $y=\dfrac{1}{3}x^3-3x+5$ を微分すると　$y'=x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

$x=-\sqrt{3}$ のとき極大値 $\boldsymbol{5+2\sqrt{3}}$，$x=\sqrt{3}$ のとき極小値 $\boldsymbol{5-2\sqrt{3}}$



(2) (i) (1) で示したグラフから

$\boldsymbol{0 \leqq a < 3}$ **のとき** $\boldsymbol{g(a)=5}$**,**

$\boldsymbol{a \geqq 3}$ **のとき** $\boldsymbol{g(a)=\dfrac{1}{3}a^3-3a+5}$

(ii) (1) で示したグラフから

$\boldsymbol{0 \leqq a < \sqrt{3}}$**のとき** $\boldsymbol{h(a)=\dfrac{1}{3}a^3-3a+5}$**,**

$\boldsymbol{a \geqq \sqrt{3}}$**のとき** $\boldsymbol{h(a)=5-2\sqrt{3}}$

(iii) (ii) の結果から

$$g(x)-h(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3+3x & (0 \leqq x < \sqrt{3}) \\ 2\sqrt{3} & (\sqrt{3} \leqq x < 3) \\ \dfrac{1}{3}x^3-3x+2\sqrt{3} & (3 \leqq x) \end{cases}$$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \{g(x)-h(x)\}\,dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}x^3+3x\right) dx + \int_{\sqrt{3}}^3 2\sqrt{3}\,dx \\ &\qquad + \int_3^4 \left(\frac{1}{3}x^3-3x+2\sqrt{3}\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\Big[\ x\ \Big]_{\sqrt{3}}^3 \\ &\qquad + \left[\ \frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2+2\sqrt{3}x\ \right]_3^4 \\ &= \boldsymbol{\frac{11}{6}+8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

■