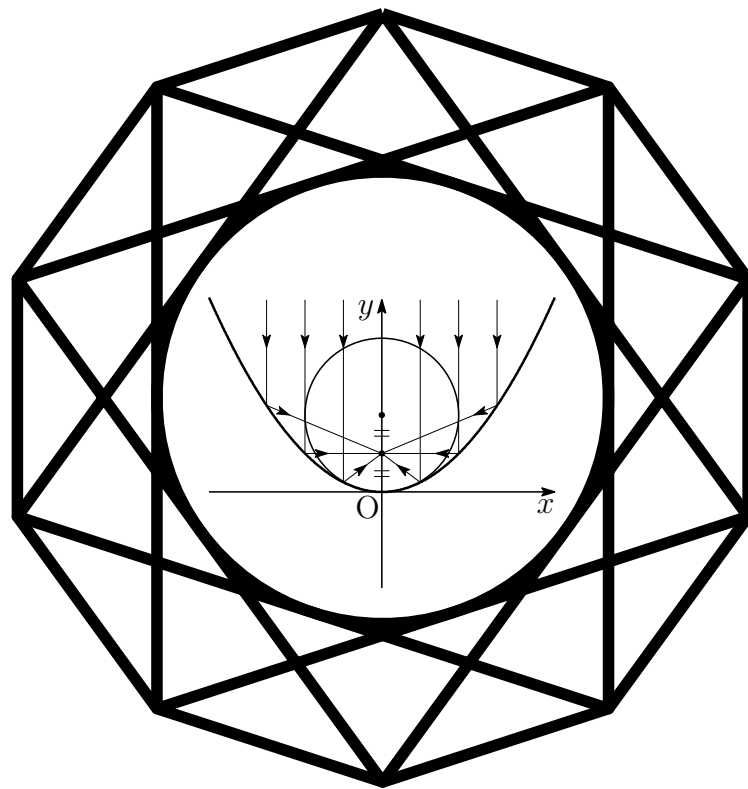


入試の軌跡

大学入試 問題集

2024 年 国立大学

理系数学



2025 年 2 月 14 日

Typed by L^AT_EX 2_ε

序

本書 [PDF] は，受験指導＋ICT 教材をコンセプトとした入試問題集です．本書の構成は，次のとおりです．

[Pick Up](#) [類比問題](#) [頻出問題](#) [応用問題](#) [発展問題](#) [索引](#)

令和 6 年 (2024 年) 度に次の大学で実施された一般前期試験 (理系問題) をすべて掲載しました．なお，一橋大学は理系レベルのため掲載しました．

北海道大学	東北大学	筑波大学	千葉大学	東京大学
東京工業大学	一橋大学	名古屋大学	京都大学	大阪大学
神戸大学	広島大学	山口大学	九州大学	九州工業大学
福岡教育大学	佐賀大学	長崎大学	熊本大学	大分大学
宮崎大学	鹿児島大学	琉球大学		

パソコン・スマートフォン・電子黒板での使用を想定して作成しています．

1. 電子黒板を利用される場合は，電子黒板の PDF ブラウザをご使用ください．ファイルサイズに優れ，ハイパーリンク・拡大・スワイプ・書き込みもスムーズに機能します．
2. スマートフォンでの使用も想定し，問題と解答に相互リンクを施しています．

令和 7 年 1 月 西村 信一

目次

序	1
1 Pick Up	4
1.1 北海道大学	4
1.2 東北大学	4
1.3 筑波大学	5
1.4 千葉大学	5
1.5 東京大学	6
1.6 東京工業大学	6
1.7 一橋大学	7
1.8 名古屋大学	7
1.9 京都大学	7
1.10 大阪大学	8
1.11 神戸大学	8
1.12 広島大学	9
1.13 山口大学	10
1.14 九州大学	10
1.15 九州工業大学	11
1.16 福岡教育大学	12
1.17 佐賀大学	12
1.18 長崎大学	13
1.19 熊本大学	14
1.20 大分大学	14
1.21 宮崎大学	15
1.22 鹿児島大学	17
1.23 琉球大学	17
2 類比問題	18
2.1 基本	18
2.2 積分法の応用 (数学 III)	20
2.3 場合の数と確率	23
2.4 数列 (数学 B)	23
2.5 空間のベクトル (数学 B)	24
2.6 確率分布と統計 (数学 B)	25

3	頻出問題	28
3.1	複素数と方程式	28
3.2	図形と方程式	28
3.3	三角関数	29
3.4	指数関数と対数関数	29
3.5	微分法と積分法 (数学 II)	30
3.6	複素数平面 (数学 III)	32
3.7	関数	36
3.8	極限 (数学 III)	36
3.9	微分法とその応用 (数学 III)	39
3.10	積分法 (数学 III)	39
3.11	積分法の応用 (数学 III)	40
3.12	場合の数と確率 (数学 A)	42
3.13	整数の性質 (数学 A)	47
3.14	平面のベクトル (数学 B)	48
3.15	空間のベクトル (数学 B)	48
3.16	数列 (数学 B)	50
4	応用問題	53
4.1	指数関数と対数関数	53
4.2	複素数平面 (数学 III)	53
4.3	関数	54
4.4	極限 (数学 III)	54
4.5	微分法とその応用 (数学 III)	57
4.6	積分法 (数学 III)	58
4.7	積分法の応用 (数学 III)	59
4.8	場合の数と確率 (数学 A)	63
4.9	整数の性質 (数学 A)	63
4.10	空間のベクトル (数学 B)	64
4.11	数列 (数学 B)	65
5	発展問題	66
5.1	式と曲線	66
5.2	積分法の応用 (数学 III)	66
5.3	斜軸回転	67
	解答例	70
6	索引	253

1 Pick Up

1.1 北海道大学

□□ 1.1 [北大理系 2024] [1]

t を実数とし, xy 平面上の点 $P(\cos 2t, \cos t)$ および $Q(\sin t, \sin 2t)$ を考える.

- (1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ.
- (2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき, 点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ. ただし, x 軸, y 軸との共有点がある場合は, それらの座標を求め, 図中に記せ.

□□ 1.2 [北大理系 2024] [4]

三角形 OAB が, $|\vec{OA}| = 3$, $|\vec{AB}| = 5$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 10$ をみたしているとする. 三角形 OAB の内接円の中心を I とし, この内接円と辺 OA の接点を H とする.

- (1) 辺 OB の長さを求めよ.
- (2) $\vec{OI}$ を $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ を用いて表せ.
- (3) $\vec{HI}$ を $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ を用いて表せ.

1.2 東北大学

□□ 1.3 [東北大理系 2024] [3]

n を 2 以上の整数とする. それぞれ A, A, B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し, カードをもとに戻す試行を考える. この試行を n 回繰り返して, 抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ, n 文字の文字列を作る. 作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする. また, 作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする. これらの場合以外は可とする. たとえば $n = 6$ のとき, 文字列 $AAAABA$ や $ABBBAA$ や $ABBABB$ や $BBBAAA$ などは不可で, 文字列 $BABAAB$ や $BABABA$ などは可である. 作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n , 作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n , 作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく.

- (1) p_2, q_2, r_2 をそれぞれ求めよ. また, $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ を p_n, q_n, r_n を用いてそれぞれ表せ.
- (2) $p_n + 2q_n + 2r_n$ を n を用いて表せ.
- (3) $p_n + iq_n - (1+i)r_n$ を n を用いて表せ. ただし, i は虚数単位である.
- (4) $p_n = r_n$ を満たすための, n の必要十分条件を求めよ.

1.3 筑波大学

□□ 1.4 [筑波大 2024] ①

△OAB において、 $OA = OB = 4$ 、 $AB = 2$ とする． $\angle OAB$ の二等分線と線分 OB の交点を C とし、点 O から直線 AC に垂線 OD を引く． $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく．以下の問いに答えよ．

- (1) $\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．
- (2) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．
- (3) △BCD の面積を求めよ．

□□ 1.5 [筑波大 2024] ⑤

a と b は実数の定数とする．関数

$$f(x) = (1 - 2x^2) \cos 2x + 2x \sin 2x + a \cos^2 x + b \int_0^x t \sin 2t \, dt$$

について、以下の問いに答えよ．

- (1) $a = 8\pi^2$ 、 $b = -4\pi$ のとき、 $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ において $f(x)$ が極値をとる x の値をすべて求めよ．
- (2) 次の条件 (B) を満たす a 、 b を求めよ．
(B) $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ において、 $f(x)$ は極値をとらない．

1.4 千葉大学

□□ 1.6 [千葉大 2024] ①

以下の問いに答えよ．

- (1) 3 辺の長さが 2, 5, a である三角形が存在するような、 a の値の範囲を求めよ．
- (2) 3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$ 、 $\log_{10}(x+10)$ 、 $\log_{10} 3$ である三角形が存在するような、 x の値の範囲を求めよ．
- (3) ある二等辺三角形の 3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$ 、 $\log_{10}(x+10)$ 、 $\log_{10} 3$ であるとき、 x の値を求めよ．

□□ 1.7 [千葉大 2024] [2]

白球が3個，黒球が5個，赤球が2個入った袋がある．以下のゲームを n 回続けて行う．

袋から球を1個取り出す．白球だった場合は1点を獲得する．黒球だった場合はさいころを投げて，出た目が3の倍数だった場合には1点，そうでない場合には0点を獲得する．赤球だった場合はコインを投げて，表が出た場合は2点，裏が出た場合は0点を獲得する．取り出した球は袋に戻さない．

- (1) $n = 2$ のとき，総得点がちょうど3点となる確率を求めよ．
- (2) $n = 3$ のとき，総得点がちょうど5点となる確率を求めよ．
- (3) $n = 3$ のとき，総得点が4点以上となる確率を求めよ．

1.5 東京大学

□□ 1.8 [東大理系 2024] [1]

座標空間内の点 $A(0, -1, 1)$ をとる． xy 平面上の点 P が次の条件 (i)，(ii)，(iii) をすべて満たすとする．

- (i) P は原点 O と異なる．
- (ii) $\angle AOP \geq \frac{2}{3}\pi$
- (iii) $\angle OAP \leq \frac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ．

1.6 東京工業大学

□□ 1.9 [東工大 2024] [5]

整数の組 (a, b) に対して2次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える．方程式 $f(x) = 0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n = 1$ となる正の整数 n が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ．

1.7 一橋大学

□□ 1.10 [一橋大 2024] ①

$\sum_{k=1}^m k(n-2k) = 2024$ を満たす正の整数の組 (m, n) を求めよ.

1.8 名古屋大学

□□ 1.11 [名大理系 2024] ③

座標空間の 3 点 $A(3, 1, 3)$, $B(4, 2, 2)$, $C(4, 0, 1)$ の定める平面を H とする.
また,

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad (s, t \text{ は非負の実数})$$

を満たすすべての点 P からなる領域を K とする.

- (1) 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を求めよ.
- (2) 原点 $O(0, 0, 0)$ から平面 H に下した垂線の足を Q とする. $\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表せ.
- (3) 領域 K 上の点 P に対して, 線分 QP 上の点で $\overrightarrow{AR} = r\overrightarrow{AC}$ (r は非負の実数) を満たす点 R が存在することを示せ.
- (4) 領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標を求めよ.

1.9 京都大学

□□ 1.12 [京大理系 2024] ①

n 個の異なる色を用意する. 立方体の各面にいずれかの色を塗る. 各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする. 辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする. 次の問いに答えよ.

- (1) p_4 を求めよ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ.

1.10 大阪大学

□□ 1.13 [阪大理系 2024] [4]

$a > 1$ とする. xy 平面において, 点 $(a, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする.

- (1) 円 C の $x \geq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y = 1$, $y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ.
- (2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする. (1) における V_1 について, $V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ.

1.11 神戸大学

□□ 1.14 [神戸大理系 2024] [1]

c を正の実数とする. 各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める. a_1 は関数

$$y = x + \sqrt{c - x^2} \quad (0 \leq x \leq \sqrt{c})$$

が最大値をとるときの x の値とする. a_{n+1} は関数

$$y = x + \sqrt{a_n - x^2} \quad (0 \leq x \leq \sqrt{a_n})$$

が最大値をとるときの x の値とする. 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_2 a_n$ で定める. 以下の問に答えよ.

- (1) a_1 を c を用いて表せ.
- (2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ.
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を n と c を用いて表せ.

1.12 広島大学

□□ 1.15 [広大理系 2024] ①

A, B, C, D, E の5人が, それぞれゲーム α とゲーム β の2種類のゲームを行った. ゲーム α の得点を x , ゲーム β の得点を y で表す. 下の表はそれぞれのゲームにおける得点である. ただし, a, b は整数である. なお, 得点が負になることもあり得る.

	A	B	C	D	E
得点 x	7	6	8	a	4
得点 y	0	-4	-1	2	b

ゲーム α の得点 x の平均値は7であるとし, ゲーム β の得点 y の平均値を m とする. 次の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) p, q は実数で, $p \neq 0$ とする. ゲーム β の得点 y を $z = py + q$ により変換し, 新たな変数 z を作成する. z の分散を s_z^2 , 二つの変数 x, z の共分散を s_{xz} とする. このとき, s_z^2 と s_{xz} を p, q, m のうちの必要なものを用いて表せ. ただし, 変数 x と z の共分散は x の偏差と z の偏差の積の平均値である.
- (3) 変数 x と (2) で作った変数 z の相関係数が $\frac{3}{4}$ であるとき, m と b の値を求めよ. また, p が正であるか負であるかを答えよ.

1.13 山口大学

□□ 1.16 [山口大 2024] [1]

a, k を $a \neq 0, k \neq 1$ を満たす定数とし、座標平面上の曲線 $y = x^2$ を C とする。直線 l は点 $A(a, a^2)$ において曲線 C と接し、直線 m は点 $B(ka, k^2a^2)$ において曲線 C と接するものとする。また 2 直線 l と m の交点を D とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 点 D の座標を a, b を用いて表しなさい。
- (2) $AB = AD$ であるための必要十分条件を a, k を用いて表しなさい。
- (3) 直線 AB と直線 l が垂直であるための必要十分条件を a, k を用いて表しなさい。
- (4) $\triangle ABD$ が $AB = AD$ の直角二等辺三角形であるとき、 $\triangle ABD$ の面積を求めなさい。

□□ 1.17 [山口大 2024] [3]

α を定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x), g(x)$ に対し

$$C = \int_0^1 f(x)g(a-x) dx$$

と定めたとき、次の $f(x), g(x)$ について C をそれぞれ a を用いて表しなさい。

- (1) $f(x) = x, g(x) = x^2$
- (2) $f(x) = \sin \pi x, g(x) = x$
- (3) $f(x) = x, g(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

1.14 九州大学

□□ 1.18 [九大理系 2024] [4]

n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち、 x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $L(3)$ を求めよ。
- (2) $L(4)$ を求めよ。
- (3) $L(5)$ を求めよ。

1.15 九州工業大学

□□ 1.19 [九工大 2024] [4]

n は自然数とする．A と B の 2 種類の文字のみを用いて，B が連続しないように n 個並べた文字列全体の集合を X_n とする． X_n の 2 つの部分集合

$$S_n = \{x \mid x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が A}\},$$
$$T_n = \{x \mid x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が B}\}$$

の要素の個数をそれぞれ a_n , b_n とおく．例えば， $n = 1$ のとき， $X_1 = \{A, B\}$ ， $S_1 = \{A\}$ ， $T_1 = \{B\}$ より， $a_1 = 1$ ， $b_1 = 1$ である．また， $n = 2$ のとき， $X_2 = \{AA, AB, BA\}$ ， $S_2 = \{AA, BA\}$ ， $T_2 = \{AB\}$ より， $a_2 = 2$ ， $b_2 = 1$ である．次に答えよ．

- (1) a_3 , b_3 , a_4 , b_4 を求めよ．
- (2) a_{n+1} , b_{n+1} をそれぞれ a_n と b_n を用いて表せ．
- (3) $a_n \geq 100$ と $b_n \geq 100$ をともにみたす最小の n を求めよ．
- (4) 自然数 a , b と $c = a + b$ に対して，

$$L = \{d \mid d \text{ は } a, b \text{ の公約数}\}, \quad R = \{d \mid d \text{ は } a, c \text{ の公約数}\}$$

とする． $L \subset R$ と $L \supset R$ がともに成り立つこと (つまり $L = R$) を示せ．また，すべての自然数 m に対して， a_m と b_m は互いに素であることを数学的帰納法により示せ．

- (5) $r_n = \frac{a_n}{a_n + b_n}$ とする．ある関数 $f(x)$ により等式 $r_{m+1} = f(r_m)$ がすべての自然数 m について成立する． $f(x)$ をひとつ求めよ．また，極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m$ を求めよ．

1.16 福岡教育大学

□□ 1.20 [福教大 2024] [3]

点 O を原点とする座標空間内に 3 点 $A(2, 0, 0)$, $B(-2, 0, 0)$, $C(1, 2, 3)$ をとる. O , A , B と異なる点 $P(x, y, z)$ が $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ となるように動くとき, 次の問いに答えよ.

- (1) x, y, z の満たす条件を求めよ.
- (2) 直線 AP と yz 平面との交点を $Q(0, \beta, \gamma)$ とする. 次の (ア), (イ), (ウ) に答えよ.
 - (ア) β, γ をそれぞれ x, y, z を用いて表せ.
 - (イ) x, y, z をそれぞれ β, γ を用いて表せ.
 - (ウ) 点 P がさらに $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OC}$ となるように動くとき, Q は yz 平面上でどのような図形を描くか. Q の描く図形を求めよ.

1.17 佐賀大学

□□ 1.21 [佐賀大 2024] [1]

平面上に $OA = 4$, $OB = \sqrt{2}$ を満たす $\triangle OAB$ がある. 頂点 B から直線 OA に下ろした垂線を BC とする. また, 頂点 O から直線 AB に下ろした垂線を OD とする. このとき, 点 C は辺 OA を $1:3$ に内分しているとする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくと, 次の問いに答えよ.

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.
- (2) 実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OD} = s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表すとき, s と t の値を求めよ. さらに, $|\overrightarrow{OD}|$ の値を求めよ.
- (3) 直線 BC と直線 OD の交点を P とするとき, $|\overrightarrow{OP}|$ の値を求めよ.

1.18 長崎大学

□□ 1.22 [長崎大 2024] 5

以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

- (1) p, q を実数とし，互いに異なるベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を，

$$\vec{a} = (1, p), \quad \vec{b} = (q, -1), \quad \vec{c} = (-1, 1)$$

とする． $\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{c}$ は垂直であり， $\vec{b} - \vec{c}$ と $\vec{a}$ は平行であるとき， p, q の値をそれぞれ求めよ．

- (2) 微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x, y に対して

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

を満たしている．このとき， $f(0)$ の値を求めよ．また， $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2$ のとき， $f'(x)$ および $f(x)$ をそれぞれ求めよ．

- (3) $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x} dx$ が成り立つことを示し，

定積分 $\int_{-1}^1 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx$ を求めよ．

- (4) n を整数とするととき， n^2 を 3 で割った余りは 2 にならないことを， $n = 3k$ ， $n = 3k + 1$ ， $n = 3k + 2$ (k は整数) のそれぞれの場合について示せ．

また， l, m, n を整数とするととき， $l^2 + m^2 = n^2$ ならば， l または m は 3 の倍数となることを，背理法を用いて証明せよ．

1.19 熊本大学

□□ 1.23 [熊大理系 2024] [2]

平面上に点 O を中心とする半径 2 の円 D がある。円 D の周上に異なる 3 点 A, B, C をとる。ただし、直線 AB, BC, CA は点 O を通らないとする。2 点 A, B における円 D のそれぞれの接線の交点を P とする。同様に、2 点 B, C における円 D のそれぞれの接線の交点を Q 、2 点 C, A における円 D のそれぞれの接線の交点を R とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP} = \frac{4}{4 + \vec{a} \cdot \vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$ が成り立つことを示せ。
- (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\sqrt{3}$ のとき、線分 OP の長さを求めよ。
- (3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = -2\sqrt{3}$ かつ $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$ のとき、 $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

□□ 1.24 [熊大医 2024] [2]

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ とする。 $AB = 1$, $\angle BAC = 3\theta$ である $\triangle ABC$ について、辺 BC の中点を D としたとき、 $\angle BAD = 2\theta$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

- (1) $AC = 2 \cos \theta$ であることを示せ。
- (2) BC を $\cos \theta$ を用いて表せ。
- (3) BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

1.20 大分大学

□□ 1.25 [大分大 2024] [1]

数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = 2$, $a_{n+1} - 2a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たし、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする。

- (1) 一般項 a_n を n を用いて表しなさい。
- (2) $S_n^2 + 4S_n + 4 = 2^{10}$ を満たす n の値を求めなさい。
- (3) $\sum_{k=1}^n S_k = 2S_n - 10$ を満たす n の値を求めなさい。

1.21 宮崎大学

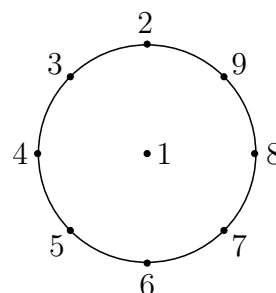
□□ 1.26 [宮崎大 2024] ①

次の空欄 あ ～ お を適切な数または数式で埋めよ．ただし， $\log x$ は x の自然対数を表す．

- (1) 関数 $f(x) = x \sin(1 - x)$ の導関数は， $f'(x) =$ あ である．
- (2) 関数 $f(x) = e^{\frac{x}{1+x}}$ の導関数は， $f'(x) =$ い である．
- (3) 関数 $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ の不定積分は， $\int f(x) dx =$ う $+ C$ である．
ただし， C は積分定数とする．
- (4) 関数 $f(x) = x^2 \log x$ の不定積分は， $\int f(x) dx =$ え $+ C$ である．
ただし， C は積分定数とする．
- (5) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \frac{x}{4} dx$ の値は， お である．

□□ 1.27 [宮崎大 2024] [9]

平面上に固定された円があり，円周上に点
が8つ，円周を8等分するようにとられてい
る．さらに，右図のように，番号1は円の中心
を表し，番号2～9はそれぞれ，円周上の
点を表すとする．1から9までの番号が1つ
ずつ書かれた9枚のカードがあり，A，B，C
の3人が，司会者のもとで次のゲームを行う．



司会者は，9枚のカードから無作為に3枚をとってAに渡し，続いて，残り
6枚のカードから無作為に3枚をとってBに渡し，続いて，残った3枚のカード
をCに渡す．Aは，受け取ったカードに書かれた番号が表す3点のうちのど
の2点も線分で結ぶ．BもCも，Aと同じことを行う．このようにして，3人
それぞれが図形を作る．

このとき，次の各問に答えよ．

- (1) Aの作る図形が三角形でない確率を求めよ．
- (2) 3人の作る図形がいずれも三角形である確率を求めよ．
- (3) このゲームを4回行ったとき，次の6つの条件①～⑥がすべて満たされ
るとする．ただし， $\boxed{1} \sim \boxed{9}$ はそれぞれ，1～9の番号が書かれたカード
を表す．
 - ① ある回で誰かに線分で結ばれたことのある2点は，他のどの回におい
ても誰にも結ばれない
 - ② Aの作る図形は4回とも三角形ではない
 - ③ 1回目に，Bは $\boxed{3}$ を受け取る
 - ④ 2回目に，Bは $\boxed{2}$ と $\boxed{4}$ を，Cは $\boxed{5}$ と $\boxed{6}$ を受け取る
 - ⑤ 3回目に，Bは $\boxed{2}$ と $\boxed{3}$ を，Cは $\boxed{6}$ と $\boxed{7}$ を受け取る
 - ⑥ 4回目に，Cは $\boxed{2}$ と $\boxed{8}$ を受け取る

このとき，A，B，Cのそれぞれが各回でどの番号のカードを受け取ったかを答
えよ．ただし，例えば，ある回でAが $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ，Bが $\boxed{4}$ ， $\boxed{5}$ ， $\boxed{6}$ ，Cが
 $\boxed{7}$ ， $\boxed{8}$ ， $\boxed{9}$ を受け取ったときは，

A			B			C		
$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$

のように解答欄に記すとし，解答欄において番号の書かれていない部分のみを
埋めよ．なお，受け取ったカードの組み合わせが正しければ，その番号の並び
順は問わない．

1.22 鹿児島大学

□□ 1.28 [鹿児島大 2024] [7]

n を自然数とし、次の整式を考える.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{6n} + x^{3n} - 2, \\ g(x) &= x^2 + x + 1, \quad h(x) = x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

- (1) 方程式 $g(x) = 0$ の解は $x^3 - 1 = 0$ を満たし、方程式 $h(x) = 0$ の解は $x^3 + 1 = 0$ を満たすことを示せ.

ここで、 $f(x)$ を 2 次式で割ると、商が $(6n - 2)$ 次式、余りが 1 次以下の整式になることに注意すると

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)q(x) + r(x), \quad q(x) \text{ は } (6n - 2) \text{ 次式,} \\ r(x) &\text{ は 1 次以下の整式} \end{aligned}$$

と書ける.

- (2) $r(x) = 0$ 、つまり $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ.
(3) $f(x)$ が $h(x)$ で割り切れるならば、 n は偶数であることを示せ.
(4) $n = 1$ のとき、方程式 $f(x) = 0$ のすべての虚数解を極形式で答えよ.

1.23 琉球大学

□□ 1.29 [琉球大 2024] [4]

白玉 1 個が入った袋 A と、白玉 2 個と赤玉 2 個が入った袋 B がある. 袋 B から無作為に玉を 1 個取り出し、袋 A に入っている玉と交換する. この試行を繰り返す. n 回試行を繰り返したあとに、袋 A に入っている玉が白である確率を p_n とする. このとき、次の問いに答えよ.

- (1) p_1 を求めよ.
(2) p_{n+1} を p_n の式で表せ.
(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ.

2 類比問題

2.1 基本

□□ 2.1 【山口大 2024】 8

次の問いに答えなさい。ただし、(1), (2) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。

- (1) $8!$ の正の約数の個数を求めなさい。
- (2) 17 で割ると 2 余り, 22 で割ると 4 余る自然数のうち, 4 桁で最小のものを求めなさい。
- (3) a を定数とし, x の 2 次不等式

$$2x^2 - (2a - 3)x - 3a < 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を考える。次の問いに答えなさい。

- (i) 2 次不等式 $\textcircled{1}$ の解を求めなさい。
- (ii) 2 次不等式 $\textcircled{1}$ を満たす整数 x が 4 個だけ存在するとき, a の値の範囲を求めなさい。

□□ 2.2 【福教大 2024】 1

次の問いに答えよ。

- (1) 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ に内接する長方形で, 各辺が座標軸に平行な長方形の面積の最大値を求めよ。
- (2) 次の連立方程式を満たす整数 x, y, z の組をすべて求めよ。

$$\begin{cases} 4^x 2^y 2^z = 128^3 \\ 2^z = (8^x)^y \end{cases}$$

- (3) z を複素数とし, $w = i \frac{z+2}{z-1}$ とする。複素数平面において点 z が原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき, 点 w が描く図形を求めよ。ただし, i は虚数単位とする。

□□ 2.3 [長崎大 2024] 3

以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

- (1) p, q を実数とし，互いに異なるベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を，

$$\vec{a} = (1, p), \quad \vec{b} = (q, -1), \quad \vec{c} = (-1, 1)$$

とする． $\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{c}$ は垂直であり， $\vec{b} - \vec{c}$ と $\vec{a}$ は平行であるとき， p, q の値をそれぞれ求めよ．

- (2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．数列 $\{a_n\}$ の初項は $\frac{1}{3}$ で，すべての自然数 n に対して $a_{n+1} = r(1 - S_n)$ が成り立つ．ただし， r は $0 < r < 1$ を満たす定数である． a_2, a_3 を r を用いてそれぞれ表せ．また， $n \geq 2$ のとき， a_{n+1} を r, a_n を用いて表し，数列 $\{a_n\}$ が等比数列になるように r の値を定めよ．

- (3) n を整数とするとき， n^2 を 3 で割った余りは 2 にならないことを， $n = 3k, n = 3k + 1, n = 3k + 2$ (k は整数) のそれぞれの場合について示せ．

また， l, m, n を整数とするとき， $l^2 + m^2 = n^2$ ならば， l または m は 3 の倍数となることを，背理法を用いて証明せよ．

□□ 2.4 [長崎大 2024] 4

以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

- (1) $t = \cos x$ とおくとき， $\cos 2x$ および $\cos 3x$ を t の式でそれぞれ表せ．また， $0 \leq x \leq \pi$ のとき， $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$ となるような x の値の範囲を求めよ．

- (2) 微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x, y に対して

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

を満たしている．このとき， $f(0)$ の値を求めよ．また， $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2$ のとき， $f'(x)$ および $f(x)$ をそれぞれ求めよ．

- (3) $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x} dx$ が成り立つことを示し，定積分 $\int_{-1}^1 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx$ を求めよ．

□□ 2.5 [鹿児島大 2024] [1]

次の各問いに答えよ.

- (1) 4個のさいころを同時に投げるとき, ちょうど3個のさいころの出る目が同じになる確率を求めよ.
- (2) 次の不等式を解け.

$$|x^2 + 6x - 1| \leq 7 - x$$

- (3) 次の数の大小関係を調べ, 小さい順に並べよ. ただし, $3.1 < \pi < 3.2$ を用いてよい.

$$\frac{1}{2}, \quad \log_{11} \pi, \quad \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$$

2.2 積分法の応用 (数学 III)

□□ 2.6 [北大理系 2024] [5]

関数

$$f(x) = x \log(x+2) + 1 \quad (x > -2)$$

を考える. $y = f(x)$ で表される曲線を C とする. C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを ℓ とする. ただし, $\log t$ は t の自然対数である.

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ.
- (2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ.
- (3) C と ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

□□ 2.7 [東北大理系 2024] [1]

a を正の実数とし, $f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする. O を原点とする xy 平面上の放物線 $C: y = f(x)$ の頂点を A とする. 直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $P(p, f(p))$ とし, O から C へ引いた接線の接点を $Q(q, f(q))$ とする. ただし, $q > 0$ とする.

- (1) p, q の値を a を用いて表せ. また, $p > q$ であることを示せ.
- (2) 放物線 C の $q \leq x \leq p$ の部分, 線分 OP , および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく. S を a を用いて表せ.
- (3) (2) の S に対し, $S = \frac{2}{3}$ となるとき a の値を求めよ.

□□ 2.8 [筑波大 2024] [2]

以下の問いに答えよ.

- (1) $x > 1$, $y > 1$ のとき, 不等式

$$\log_x y + \log_y x \geq 2$$

が成り立つことを示せ.

- (2) 座標平面において, 連立不等式

$$x > 1, \quad y > x, \quad \log_x y + \log_y x < \frac{5}{2}$$

の表す領域を図示せよ.

- (3) (2) の領域の中で $x^2 + y^2 < 12$ を満たす部分に境界線を含めた図形を D とする. D の面積を求めよ.

□□ 2.9 [筑波大 2024] [4]

座標平面において, 媒介変数表示

$$x = -t \left(t - \frac{3}{2} \right), \quad y = \sin \pi t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

で表される曲線を C とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 定積分 $\int_0^1 t \sin \pi t \, dt$ を求めよ.
- (2) 実数 a に対し, 曲線 C と直線 $x = a$ の共有点の個数を求めよ.
- (3) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

□□ 2.10 [九工大 2024] [2]

$a > 0, b > 0, 0 < t < 1$ とする. 曲線

$$C: \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は 3 直線

$$l_1: y = x, \quad l_2: y = -x + 2, \quad l_3: y = -t$$

に接しているとし, C と l_1 の接点を P とする. 次に答えよ.

- (1) a, b を t を用いて表せ.
- (2) 点 P の座標を t を用いて表せ.
- (3) l_2 と l_3 の交点を Q とする. 直線 PQ が点 $(1, 0)$ を通るとき, t の値を求めよ.
- (4) 曲線 C の媒介変数表示を $x = 1 + a \cos \theta, y = b \sin \theta$ とし, 点 P の座標を $(1 + a \cos \beta, b \sin \beta)$ と表す. t が (3) で求めた値のとき, β ($0 \leq \beta < 2\pi$) を求めよ.
- (5) t は (3) で求めた値とし, 曲線 C の $y \geq 0$ の部分を C_1 とする. 2 直線 l_1, l_2 と曲線 C_1 で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

□□ 2.11 [琉球大 2024] [1]

a を正の実数とする. 曲線 $y = \log x$ の点 $(a, \log a)$ における接線を l_1 , 点 $(2a, \log 2a)$ における接線を l_2 とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 接線 l_1 の方程式を求めよ.
- (2) l_1 と l_2 の交点の座標を求めよ.
- (3) 曲線 $y = \log x$ と直線 l_1, l_2 で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする. $\frac{S(a)}{a}$ を求めよ.

2.3 場合の数と確率

□□ 2.12 [一橋大 2024] [5]

n を 3 以上の奇数とする．円に内接する正 n 角形の頂点から無作為に相異なる 3 点を選んだとき，その 3 点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 p_n を求めよ．

2.4 数列 (数学 B)

□□ 2.13 [京大理系 2024] [4]

与えられた自然数 a_0 に対して，自然数からなる数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を次のように定める．

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{3a_n + 1}{2} & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ．

- (1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．
- (2) $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

□□ 2.14 [熊大理系 2024] [4]

実数からなる数列 $\{a_n\}$ は $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3^{n-1} & (a_n < 1 \text{ のとき}) \\ \log_3 a_n & (a_n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たすとする．以下の問いに答えよ．

- (1) 2 以上の自然数 n に対して $a_n \geq 0$ であることを示せ．
- (2) $a_4 + a_5 = 1$ のとき， a_3, a_4, a_5 を求めよ．
- (3) $a_4 + a_5 = 1$ のとき， a_1 のとりうる値の範囲の最大値と最小値をそれぞれ M_1, m_1 とし， a_2 のとりうる値の範囲の最大値と最小値をそれぞれ M_2, m_2 とする．このとき， $m_1 + m_2 + \log_3 M_1 M_2$ の値を求めよ．

2.5 空間のベクトル (数学 B)

□□ 2.15 [京大理系 2024] [3]

座標空間の4点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 線分 OA の中点を P , 線分 AB の中点を Q とする. 実数 x, y に対して, 直線 OC 上の点 X と, 直線 BC 上の点 Y を次のように定める.

$$\overrightarrow{OX} = x\overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{BY} = y\overrightarrow{BC}$$

このとき, 直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x, y に関する必要十分条件を求めよ.

□□ 2.16 [阪大理系 2024] [3]

空間内の2直線 ℓ, m はねじれの位置にあるとする. ℓ と m の両方に直交する直線がただ1つ存在することを示せ.

2.6 確率分布と統計 (数学 B)

□□ 2.17 [長崎大 2024] 10

ある町の中学校 1 年生の 50 メートル走における所要時間 (単位は秒) は、母平均 m 、母分散 1 の正規分布に従うものとする。

高校生の花子さんと太郎さんは、この母集団から無作為に何人かを抽出して、母集団の調査をそれぞれ行った。

表 1 は、花子さんが 10 人の生徒 (A,B,C, ..., J) を無作為に抽出したときの各自の所要時間 (測定値) を示している。以下の問いに答えよ。必要に応じて、次のページの正規分布表を用いてもよい。

表 1

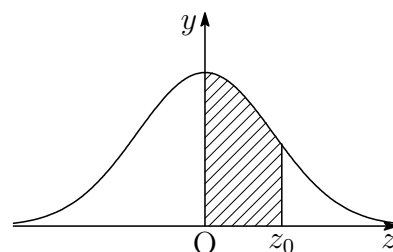
生徒	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
測定値 (秒)	9.0	9.0	8.0	8.0	9.0	9.0	10.0	9.0	10.0	x

(x は正の実数)

- (1) 花子さんが選んだ 10 人の生徒のうち、J を除いた 9 人の標本の平均 m_1 と分散 S_1^2 を、それぞれ求めよ。
- (2) 花子さんが選んだ (1) の 9 人の測定値の標本を用いて、母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を、小数第 3 位を四捨五入して求めよ。
- (3) 花子さんが選んだ 10 人の標本の平均 m_2 と分散 S_2^2 を、 x を用いてそれぞれ表せ。また、 $8 \leq x \leq 10$ のとき、平均 m_2 と分散 S_2^2 の取り得る値の範囲を、それぞれ求めよ。
- (4) 太郎さんは、花子さんとは別に 4 人の生徒を無作為に抽出して調べることとした。母平均 $m = 8$ のとき、4 人の標本の平均が 9 秒以上となる確率を、小数第 3 位を四捨五入して求めよ。

正 規 分 布 表

次の表は、標準正規分布の分布曲線における右図の斜線部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

□□ 2.18 [鹿児島大 2024] 5

袋の中に $-1, 0, 1$ が書かれたカードがそれぞれ 1 枚, 1 枚, m 枚ずつ入っている. ただし, m は自然数である. この袋の中から無作為に 2 枚同時に取り出す. 取り出されたカードに書かれた数字をそれぞれ X, Y とする. ただし, $X \leq Y$ とする.

- (1) $m = 2$ のとき, 確率 $P(X \geq 0)$ を求めよ.
- (2) $m = 9$ のとき, 確率 $P(Y = 1)$ を求めよ.
- (3) XY の期待値 $E(XY)$ が正となるような m のうち, 最小のものを求めよ.

3 頻出問題

3.1 複素数と方程式

□□ 3.1 [一橋大 2024] [3]

$f(x)$ は x に関する 4 次多項式で 4 次の係数は 1 である. $f(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると 1 余り, $(x-1)^2$ で割ると 2 余る. $f(x)$ を求めよ.

3.2 図形と方程式

□□ 3.2 [神戸大理系 2024] [2]

a, b, c は実数で, $a \neq 0$ とする. 放物線 C と直線 ℓ_1, ℓ_2 をそれぞれ

$$C: y = ax^2 + bx + c$$

$$\ell_1: y = -3x + 3$$

$$\ell_2: y = x + 3$$

で定める. ℓ_1, ℓ_2 がともに C に接するとき, 以下の問に答えよ.

- (1) b を求めよ. また c を a を用いて表せ.
- (2) C が x 軸と異なる 2 点で交わる時, $\frac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) C と ℓ_1 の接点を P , C と ℓ_2 の接点を Q , 放物線 C の頂点を R とする. a が (2) の条件を満たしながら動くとき, $\triangle PQR$ の重心 G の軌跡を求めよ.

□□ 3.3 [宮崎大 2024] [4]

座標平面上に 2 点 $A(4, 1)$, $B(8, 4)$ と, 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動く点 P がある. $\triangle ABP$ の重心を G とするとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 点 G の軌跡を求めよ.
- (2) $\triangle ABG$ の面積の最小値を求めよ.

3.3 三角関数

□□ 3.4 [佐賀大 2024] [6]

$f(x) = 4x^3 - 3x$ について、次の問に答えよ.

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べ、方程式 $f(x) = a$ が異なる実数解を 3 個もつための、定数 a についての条件を求めよ.
- (2) $\cos 3\theta = f(\cos \theta)$ を示せ.
- (3) 方程式 $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ の実数解をすべて求めよ.

□□ 3.5 [熊大理系 2024] [3]

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ とする. $AB = 1$, $\angle BAC = 3\theta$ である $\triangle ABC$ について、辺 BC の中点を D としたとき、 $\angle BAD = 2\theta$ が成り立つとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $AC = 2 \cos \theta$ であることを示せ.
- (2) BC を $\cos \theta$ を用いて表せ.
- (3) BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ.

□□ 3.6 [宮崎大 2024] [7]

$0 \leq \theta < \pi$ とする. $t = \cos \theta$ とするとき、次の各問に答えよ.

- (1) $\cos 4\theta$ を t の式で表せ.
- (2) $\cos 4\theta = \cos \theta$ を満たすような t の値をすべて求めよ.
- (3) $\sin^2 \frac{2}{5}\pi + \sin^2 \frac{4}{5}\pi$ の値を求めよ.

3.4 指数関数と対数関数

□□ 3.7 [山口大 2024] [2]

点 $P(u, v)$ が連立不等式 $u \geq 1$, $v \geq 1$, $uv \leq 10^5$, $u^2v^3 \leq 10^{12}$ の表す領域 D 内を動くとき、次の問いに答えなさい. ただし、(1) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい.

- (1) $a = \log_{10} 3$, $b = \log_{10} 2$ とする. $u = 3$, $v = 2$ のとき $\log_{10}(u^5v^6)$ を a , b を用いて表しなさい.
- (2) $x = \log_{10} u$, $y = \log_{10} v$ とおく. 点 $P(u, v)$ が領域 D 内を動くとき、点 $Q(x, y)$ が動く領域を座標平面内に図示しなさい.
- (3) u^5v^6 の最大値を求めなさい.

3.5 微分法と積分法 (数学 II)

□□ 3.8 [筑波大 2024] [3]

$f(x) = x(x+1)(x-1)$ とする. 座標平面において, 曲線 $y = f(x)$ を C とし, 曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線を L とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 直線 L の方程式を t を用いて表せ.
- (2) $t \neq 0$ のとき, 直線 L と曲線 C の共有点で, 点 $(t, f(t))$ とは異なるものを $(a, f(a))$ とする. a を t を用いて表せ. また, t が 0 を除いた実数を動くとき, $f'(t)f'(a)$ の最小値を求めよ.
- (3) 次の条件 (A) を満たすような実数 t の範囲を求めよ.
(A) 曲線 C 上の点 $(s, f(s))$ における接線が直線 L と直交するような実数 s が存在する.

□□ 3.9 [千葉大 2024] [3]

a を実数とする. $f(x) = x^2 - ax + a^2 - 2$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $y = f(x)$ のグラフと x 軸が $x > 0$ の範囲に共有点を 2 個もつような, a の値の範囲を求めよ.
- (2) k を正の実数とし, $g(x) = kx$ とする. a が (1) の範囲あるとき, $y = |f(x)|$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個となるような k を求めよ.

□□ 3.10 [一橋大 2024] [2]

a, b を実数とする. 曲線 $C: y = x^2$ と曲線 $C': y = -x^2 + ax + b$ はある点を共有しており, その点におけるそれぞれの接線は直交している. C と C' で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ.

□□ 3.11 [山口大 2024] 10

次の問いに答えなさい.

- (1) 関数 $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 5$ の増減を調べ, 極値を求めなさい. また, そのグラフの概形をかきなさい.
- (2) $a \geq 0$ とし, 関数 $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 5$ ($0 \leq x \leq a$) の最大値を $g(a)$, 最小値を $h(a)$ とする.
 - (i) $g(a)$ を求めなさい.
 - (ii) $h(a)$ を求めなさい.
 - (iii) 関数 $y = g(x)$ のグラフと関数 $y = h(x)$ のグラフおよび直線 $x = 4$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

□□ 3.12 [佐賀大 2024] 5

t は $0 < t < 1$ を満たすとする.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2tx + 1, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - (t-2)x - 2t + 1$$

とおく. 次の問に答えよ.

- (1) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標をすべて求めよ.
- (2) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ および直線 $x = 2t$ で囲まれた2つの図形のうち, 左側の図形の面積 $S(t)$ を求めよ.
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき, (2) の $S(t)$ の増減を調べ, 極値を求めよ.

□□ 3.13 [大分大 2024] 2

n を2以上の自然数とする. 2つの曲線

$$C_1 : y = (x-1)^2, \quad C_2 : y = \frac{1}{n}x^2$$

について, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_n とする.

- (1) 実数 α, β について, $A = \beta - \alpha$ とおく. 次の定積分を A を用いて表しなさい.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx$$

- (2) S_n を n を用いて表しなさい.
- (3) 不等式 $\left| n\sqrt{n} S_n - \frac{4}{3} \right| < \frac{1}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めなさい.

□□ 3.14 [鹿児島大 2024] [2]

次の関数を考える.

$$y = 4 \sin^3 \theta - 4 \cos^3 \theta + 3\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

また, $x = \sin \theta - \cos \theta$ とする.

- (1) x のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) y を x の関数で表せ.
- (3) y の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの θ の値を求めよ.

3.6 複素数平面 (数学 III)

□□ 3.15 [筑波大 2024] [6]

定数 α は実数でない複素数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\frac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ は純虚数であることを示せ.
- (2) 純虚数 β で, $\frac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるものがただ一つ存在することを示せ.
- (3) 複素数 z を $\frac{z - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるように動かすとき, $|z|$ が最小となる z を α を用いて表せ.

□□ 3.16 [京大理系 2024] [2]

$|x| \leq 2$ を満たす複素数 x と, $|y - (8 + 6i)| = 3$ を満たす複素数 y に対して,
 $z = \frac{x + y}{2}$ とする. このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し, その面積を求めよ.

□□ 3.17 [阪大理系 2024] [2]

α, β を複素数とし、複素数 z に対して

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta$$

とおく. α, β は

$$|f(1) - 3| \leq 1 \quad \text{かつ} \quad |f(i) - 1| \leq 3$$

を満たしながら動く. ただし, i は虚数単位である.

- (1) $f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ.
- (2) $f(1+i) = 0$ であるとき, α, β の値を求めよ.

□□ 3.18 [広大理系 2024] [4]

複素数平面において, 点 1 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を C とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 点 α が円 C と虚軸との交点であるとき, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ を求めよ.
- (2) 円 C 上の点 z に対し, 点 $-\frac{1}{z}$ も円 C 上にあることを示せ.
- (3) 円 C の点 z に対し, $w = z + \frac{1}{z}$ とする. 複素数 w, z は

$$|w - 2| = \frac{2}{|z|}$$

を満たすことを示せ.

- (4) 円 C 上の点 z に対し, (3) で定めた複素数 w は

$$|w - 2||w + 2| = 4$$

を満たすことを示せ.

□□ 3.19 [九大理系 2024] [2]

整式

$$f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1$$

について、以下の問いに答えよ.

- (1) $f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して、 $|z| = 1$ が成り立つことを示せ.
- (2) 次の条件をみたす複素数 w をすべて求めよ.

条件： $f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して
 $f(wz) = 0$ が成り立つ.

□□ 3.20 [九工大 2024] [3]

次に答えよ.

- (1) $z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ とする. z^9 と $z^3 + \bar{z}^3$ を求めよ. ただし、 i は虚数単位を表し、 $\bar{z}$ は z と共役な複素数を表す.
- (2) $k = 1, 2, 3, 4$ に対して、 $8 \cos^3 \frac{2k\pi}{9} - 6 \cos \frac{2k\pi}{9} + 1$ を求めよ.
- (3) $\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9}$ と $\cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{8\pi}{9}$ を求めよ.
- (4) $k = 1, 2, 4$ に対して、 $\cos \frac{2k\pi}{9}$ は無理数であることを示せ.
- (5) $\cos \frac{2\pi}{9}$ は 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c は有理数, $a \neq 0$) の解とはならないことを示せ.

□□ 3.21 [佐賀大 2024] 4

複素数平面上に $|\alpha| = 2$ を満たす点 $A(\alpha)$ がある. 方程式

$$|z - 1| = \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|z - \alpha| = \sqrt{5} \quad \cdots \textcircled{2}$$

について, 次の問に答えよ.

- (1) 複素数平面上で方程式 ① を満たす点 z の全体が表す図形を描け. また, 方程式 ① および ② を満たす複素数 z の個数が 2 個であることを示せ.
- (2) 方程式 ① および ② を満たす複素数 z について

$$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) = 0$$

が成り立つことを示せ.

- (3) 方程式 ① および ② を満たす異なる 2 つの複素数を β, γ とする. 2 点 $B(\beta), C(\gamma)$ と原点 O が一直線上にあることを示せ. また, $|\beta| = b$ とおくとき, $|\gamma|$ を b を用いて表せ.

□□ 3.22 [長崎大 2024] 9

z に関する 4 次方程式 $z^4 + pz^2 + qz + 27 = 0$ (p, q は実数) がある. 複素数 α と α^2 はこの 4 次方程式の解であり, α の実部と虚部はともに正とする. 以下の問いに答えよ. ただし, $\bar{z}$ は複素数 z の共役複素数を表すものとする.

- (1) z_1, z_2 が複素数のとき, $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$, および $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$ が成り立つことを示せ.
- (2) $\bar{\alpha}$ はこの 4 次方程式の解であることを示せ.
- (3) $\alpha + \alpha^2$ は純虚数であることを示せ.
- (4) $|\alpha|$ および α の値をそれぞれ求めよ.
- (5) この 4 次方程式のすべての解を求めよ. また, p, q の値をそれぞれ求めよ.

□□ 3.23 [琉球大 2024] 3

z を複素数で $|z - 1| = \sqrt{2}$ を満たすものとし, $w = z + \frac{1}{z}$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\left| \frac{1}{z} + 1 \right|^2 = 2$ であることを示せ.
- (2) $|w - 2||w + 2| = 4$ であることを示せ.

3.7 関数

□□ 3.24 [北大理系 2024] [3]

次の問いに答えよ.

- (1) α を実数とする. 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$\alpha_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (2) 関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\dots$ を次の関係式で定める.

$$f_1(x) = 3x$$
$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) x$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ.

3.8 極限 (数学 III)

□□ 3.25 [千葉大 2024] [7]

n を正の整数とする. x の関数

$$f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n-3)x + 1$$

について以下の問いに答えよ.

- (1) α を $f(x) = 0$ の 1 つの解とする. $f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ の値を求めよ.
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつことを示せ.
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ の解で 2 番目に大きいものを β_n とする. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ.

□□ 3.26 [阪大理系 2024] [1]

自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3} \quad (x \geq 0)$$

で定める．ただし、 e は自然対数の底である．

- (1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は、ただ 1 つの実数解をもつことを示せ．
- (2) (1) における実数解を a_n とおくと、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ．
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ．

□□ 3.27 [山口大 2024] [6]

動点 R が正四面体 $OABC$ の辺上を動く．動点 R は時刻 $t = 0$ のとき点 O にあり、時刻が 1 進むごとに、他の 3 つの頂点のいずれかにそれぞれ $\frac{1}{6}$ の確率で移動しているか、 $\frac{1}{2}$ の確率で元の頂点にある．このとき、次の問いに答えなさい．ただし、(1) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい．

- (1) (i) 時刻 $t = 2$ のとき、 R が点 O にある確率を求めなさい．
 (ii) 時刻 $t = 2$ のとき、 R が点 A にある確率を求めなさい．
 (iii) 時刻 $t = 3$ のとき、 R が点 A にある確率を求めなさい．
 (iv) 時刻 $t = 3$ において R が A にあるとき、時刻 $t = 2$ のときに R が点 O にあった条件付き確率を求めなさい．
- (2) n を自然数とする．時刻 $t = n$ のとき動点 R が O 、 A 、 B 、 C の各頂点にある確率をそれぞれ z_n 、 a_n 、 b_n 、 c_n とする．
 (i) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明しなさい．

$$a_n = b_n = c_n$$

- (ii) z_n を n の式で表しなさい．
- (iii) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ を求めなさい．

□□ 3.28 [長崎大 2024] [8]

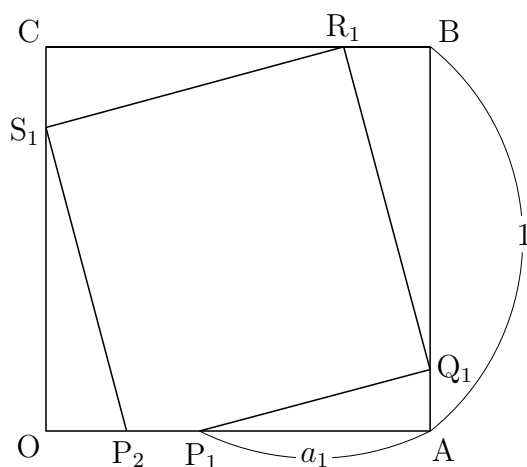
下図のように、一辺の長さが1の正方形OABCがある．辺OA上に点 P_1 をとり、 $AP_1 = a_1$ とする．ただし、 $0 < a_1 < 1$ とする．

$\angle AP_1Q_1 = \angle BQ_1R_1 = \angle CR_1S_1 = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) となるように点 Q_1, R_1, S_1 を、それぞれ辺AB, BC, CO上にとる．

さらに、 $\angle OS_1P_2 = \angle AP_2Q_2 = \angle BQ_2R_2 = \angle CR_2S_2 = \theta$ となるように点 P_2, Q_2, R_2, S_2 を、それぞれ辺OA, AB, BC, CO上にとる．

このような操作を繰り返し、点 P_n, Q_n, R_n, S_n を、それぞれ辺OA, AB, BC, CO上にとる． $AP_n = a_n$ とするとき、以下の問いに答えよ．

- (1) 線分 AQ_n, BR_n, CS_n の長さを、 a_n, θ を用いてそれぞれ表せ．
- (2) a_{n+1} を a_n, θ を用いて表せ．
- (3) a_n を a_1, n, θ を用いて表せ．
- (4) P_1 と P_2 が同じ点のとき、 a_1 を θ を用いて表せ．また、 P_1 と P_2 が異なる点のとき、この操作を繰り返すと、 P_n は線分OAをどのような比に内分する点に限りなく近づくか説明せよ．



図

3.9 微分法とその応用 (数学 III)

□□ 3.29 [名大理系 2024] [1]

関数 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) に対して, $y = f(x)$ のグラフを C とする.

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ.
- (2) x 軸上の点 $P(t, 0)$ から C にちょうど 2 本の接線を引くことができるとする. そのような実数 t の値の範囲を求めよ.
- (3) (2) において, C の 2 つの接点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする. α, β がともに整数であるような組 (α, β) をすべて求めよ.

□□ 3.30 [琉球大 2024] [2]

a を実数とし, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + a$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 曲線 $y = f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式を求めよ.
- (2) 原点 O から曲線 $y = f(x)$ にちょうど 2 本の接線が引けるような a の値を求めよ.

3.10 積分法 (数学 III)

□□ 3.31 [千葉大 2024] [4]

以下の問いに答えよ.

- (1) 定積分 $\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^2 \sin x \, dx$ を求めよ.
- (2) 複素数平面上の 3 点 $P(z)$, $Q(-1)$, $R(\sqrt{3} - 1 - i)$ が正三角形をなすとき, 複素数 z を求めよ. ただし, i は虚数単位である.
- (3) 正の整数 n, p, q が, $p > q$ かつ ${}_pC_2 + {}_qC_1 = n$ を満たすとする. ${}_mC_2 \leq n$ となる最大の整数 m を求めよ.

□□ 3.32 [東大理系 2024] [2]

次の関数 $f(x)$ を考える.

$$f(x) = \int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2} dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

- (1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ をみたす実数 α で, $f'(\tan \alpha) = 0$ となるものを求めよ.
- (2) (1) で求めた α に対し, $\tan \alpha$ の値を求めよ.
- (3) 関数 $f(x)$ の区間 $0 \leq x \leq 1$ における最大値と最小値を求めよ. 必要ならば, $0.69 < \log 2 < 0.7$ であることを用いてよい.

3.11 積分法の応用 (数学 III)

□□ 3.33 [千葉大 2024] [6]

関数 $f(x) = e^x + e^{-2x}$ について以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ.
- (2) $f(x) = 2$ となる x の値をすべて求めよ.
- (3) (2) で求めた値のうち最小のものを a_1 , 最大値のものを a_2 とする. $y = f(x)$ のグラフ, x 軸, 直線 $x = a_1$, 直線 $x = a_2$ で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

□□ 3.34 [神戸大理系 2024] [4]

1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形 ABCD を底面にもち, 高さが 1 である直方体 ABCD-EFGH を, 頂点の座標がそれぞれ

$$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(-1, 0, 0), D(0, -1, 0)$$

$$E(1, 0, 1), F(0, 1, 1), G(-1, 0, 1), H(0, -1, 1)$$

になるように xyz 空間内におく. 以下の問いに答えよ.

- (1) 直方体 ABCD-EFGH を直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体を X_1 とし, また直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体を X_2 とする. X_1 の体積 V_1 と X_2 の体積 V_2 を求めよ.
- (2) $0 \leq t \leq 1$ とする. 平面 $x = t$ と線分 EF の共有点の座標を求めよ.
- (3) 直方体 ABCD-EFGH を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を X_3 とする. X_3 の体積 V_3 を求めよ.

□□ 3.35 [福教大 2024] [4]

区間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において, 2 つの曲線 $y = \sin x$, $y = \cos 2x$ と 2 つの直線 $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ とで囲まれた部分を D とする. 次の問いに答えよ.

- (1) D の面積を求めよ.
- (2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $|\sin x| \geq |\cos 2x|$ を解け.
- (3) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

□□ 3.36 [佐賀大 2024] [3]

k を定数とする．曲線 $y = e^{\sqrt{x}}$ と直線 $y = kx$ が 1 点 P で接しているとき，次の間に答えよ．

- (1) 曲線 $y = e^{\sqrt{x}}$ の凹凸，変曲点を調べ，その概形をかけ．
- (2) 定数 k の値と点 P の座標を求めよ．
- (3) 曲線 $y = e^{\sqrt{x}}$ と直線 $y = kx$ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

□□ 3.37 [熊大理系 2024] [1]

e を自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

- (1) 曲線 $y = e^x$ 上の点 (a, e^a) における接線の方程式を求めよ．
- (2) (1) で求めた接線の傾きを p ， y 切片を q とする。 q を p の式で表せ．
- (3) (2) で求めた p の式を $f(p)$ とする．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における接線 ℓ_1 および点 $(e, f(e))$ における接線 ℓ_2 の方程式を求めよ．
- (4) (3) で求めた 2 本の接線 ℓ_1, ℓ_2 および曲線 $y = f(x)$ によって囲まれた部分の面積を求めよ．

□□ 3.38 [大分大 2024] [4]

xy 平面の曲線

$$C : x = 3 \cos^3 \theta, \quad y = 3 \sin^3 \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

上の点 P における接線と， x 軸， y 軸との交点をそれぞれ Q, R とする．

- (1) 点 P の座標を $(3 \cos^3 \theta, 3 \sin^3 \theta)$ とするとき，2 点 Q, R の座標を θ を用いてそれぞれ表しなさい．
- (2) 点 P が C 上を動くとき，線分 QR を $1 : 2$ に内分する点 S の軌跡を求め，図示しなさい．
- (3) (2) で得られた軌跡と x 軸， y 軸で囲まれた図形を， y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めなさい．
- (4) 曲線 C の $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ に対応する部分の長さを求めなさい．

□□ 3.39 [宮崎大 2024] [5]

関数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ および座標平面上の曲線 $C: y = f(x)$ について、次の各問に答えよ.

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を求めよ.
- (3) $f(x) \leq 0$ となる x の値の範囲を $a \leq x \leq b$ とするとき, a と b の値を求めよ. さらに, 定積分 $I = \int_a^b \frac{1}{x^2 + 1} dx$ の値を, $x = \tan \theta$ とおくことにより求めよ.
- (4) 関数 $f(x)$ の増減, 極値, 曲線 C の凹凸, 変曲点および漸近線を調べて, 曲線 C の概形をかけ.
- (5) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

3.12 場合の数と確率 (数学 A)

□□ 3.40 [北大理系 2024] [2]

各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある. 「1」, 「2」, 「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり, 残りの 5 つの面には「0」が書かれている. このさいころを水平な床面に投げて, 出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える. 最初の持ち点は 0 点とし, この試行を繰り返す. 例えば, 3 回の試行を行ったとき, 出た面に書かれた数が「0」, 「2」, 「3」であれば, 持ち点は 5 となる. なお, さいころが水平な床面にあるとき, さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ. また, さいころを投げるとき, 各面が出ることは同様に確からしいとする.

- (1) この試行を n 回行ったとき, 持ち点が 2 以下である確率を求めよ. ただし, n は 2 以上の自然数とする.
- (2) この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上であったときに, さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 点以上である条件付き確率を求めよ.

□□ 3.41 [神戸大理系 2024] 3

n を自然数とする．以下の問に答えよ．

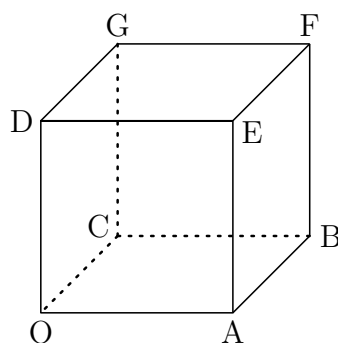
- (1) 1個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n を小さい順に 3 つ求めよ．
- (2) 1個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\frac{5}{6}$ であるような n を小さい順に 3 つ求めよ．
- (3) 1個のサイコロを 3 回投げて出た目の積が 160 の約数となる確率を求めよ．

□□ 3.42 [山口大 2024] 4

動点 R と S が立方体 OABC-DEFG の辺上を独立に動く．時刻 $t = 0$ のとき R, S はともに点 O にある．その後，各動点は時刻が 1 進むごとに， x の確率で元の頂点にあるか，もしくは隣にある 3 つの頂点のいずれかにそれぞれ $\frac{1}{3}(1-x)$ の確率で移動している．ただし，ある頂点の隣にある頂点とは，辺の両端の頂点のうち他方の頂点のことである．また， $0 \leq x \leq 1$ とする．

例えば，時刻 t のとき動点 R が点 E にある場合，時刻 $t + 1$ において R は x の確率で点 E にあるか，もしくはそれぞれ $\frac{1}{3}(1-x)$ の確率で点 A, D, F のいずれかにある．動点 S についても同様である．

次の問いに答えなさい．(1) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい．



- (1) $x = \frac{1}{2}$ とする．
 - (i) 時刻 $t = 2$ のとき，R が点 O にある確率を求めなさい．
 - (ii) 時刻 $t = 3$ のとき，R が点 A にある確率を求めなさい．
 - (iii) 時刻 $t = 3$ において R が点 A にあるとき，時刻 $t = 2$ のときに R が点 O にあった条件付き確率を求めなさい．
- (2) 時刻 $t = 3$ のとき，3 点 O, R, S が正三角形をなす確率を $p(x)$ とする．
 - (i) 時刻 $t = 3$ のとき，R が点 B にある確率を x を用いて表しなさい．
 - (ii) $p(x)$ を求めなさい．
 - (iii) $p(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めなさい．

□□ 3.43 [山口大 2024] [5]

m を 0 以上の整数とし, k, r を自然数とする. k の正の約数の個数を $D(k)$ とおく. また, $\frac{k}{r^m}$ が整数となるような整数 m のうち最大のものを $M_r(k)$ とする. 例えば, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ なので $M_2(60) = 2$, $M_3(60) = 1$ である. このとき, 次の問いに答えなさい. ただし, (1), (2) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい.

(1) $M_2(8!)$ および $D(8!)$ の値を求めなさい.

(2) $M_2(30!)$, $M_3(30!)$ および $M_{12}(30!)$ の値を求めなさい.

(3) $d = D(30!)$ とおく. (2) で求めた $M_{12}(30!)$ の値を n とするとき, $\sum_{i=1}^n D\left(\frac{30!}{12^i}\right)$ を d を用いて表しなさい.

□□ 3.44 [福教大 2024] [2]

1 個のさいころを繰り返し投げけるゲームを行う. 1 の目が k 回出た時点でゲームは終わる. このとき, ゲームが終わった時点でさいころを投げた回数が n である確率を p_n とする. ただし, k は 2 以上の整数で, n は k 以上の整数とする.

(1) p_k, p_{k+1} を求めよ.

(2) p_n を求めよ.

(3) $p_n < p_{n+1}$ を満たす n の範囲を求め, さらに p_n が最大となる n をすべて求めよ.

□□ 3.45 [佐賀大 2024] [2]

座標平面上で、点 P は原点 $(0, 0)$ を出発点とし、1 個のさいころを投げて出た目によって次の通りに動くものとする。

出た目が奇数のとき、 x 軸の正の向きに 1 だけ動く

出た目が 2 または 4 のとき、 x 軸の負の向きに 1 だけ動く

出た目が 6 のとき、 y 軸の正の向きに 1 だけ動く

n を 2 以上の自然数とするとき、次の問に答えよ。

- (1) さいころを n 回投げるとき、点 P の座標が $(1, n-1)$ となる場合は何通りあるか。
- (2) さいころを n 回投げるとき、点 P の座標が $(0, n-2)$ となる場合は何通りあるか。
- (3) さいころを n 回投げるとき、点 P の x 座標が 0 以上、かつ y 座標が $n-2$ 以上となる場合は何通りあるか。

□□ 3.46 [大分大 2024] [3]

サイコロが 2 個あり、ひとつは 3 面が赤く、3 面が黒く塗られており、もうひとつは 2 面が赤く、4 面が黒く塗られている。これら 2 個のサイコロを使って次のゲームを行う。なお、2 個のサイコロを同時に 1 回投げることが「試行」と呼ぶことにする。

- 試行を最大 3 回繰り返す。ただし、1 回目または 2 回目の試行で 2 個とも赤い面が出れば、以降の試行は行わずゲームを終了する。
- 各試行で出た赤い面の個数の合計をゲームの得点とする。

- (1) 1 回の試行で赤い面がちょうど 1 個出る確率を求めなさい。
- (2) 2 回以下の試行でゲームが終了する確率を求めなさい。
- (3) 起こり得るゲームの得点とその確率をすべて求めなさい。

□□ 3.47 [宮崎大 2024] [3]

A と B の 2 人が、赤玉 3 個、白玉 9 個の合計 12 個の玉が入った袋から、次のようにして、最大 6 回玉を取り出すゲームを行う。

- 1 回目は A が 1 個、2 回目は B が 1 個、3 回目は A が 2 個、4 回目は B が 2 個、5 回目は A が 3 個、6 回目は B が 3 個、袋から玉を取り出す。ただし、複数個の玉を取り出すときは、同時に取り出すとする。
- A と B のどちらかが赤玉を取り出したならば、その時点でゲームを終了する。

このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 毎回、取り出した玉を戻すとする。このとき、3 回目で A が赤玉を取り出してゲームが終了する確率を求めよ。
- (2) 毎回、取り出した玉を袋に戻さないとする。このとき、A が赤玉を取り出してゲームが終了する確率を求めよ。

3.13 整数の性質 (数学 A)

□□ 3.48 [九大理系 2024] [3]

以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 a, b が $a < b$ をみたすとき、 $\frac{b!}{a!} \geq b$ が成り立つことを示せ。
- (2) $2 \cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (3) $a! + b! = 2 \cdot c!$ をみたす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

□□ 3.49 [宮崎大 2024] [6]

a, b, c を整数とし、

$$P = a + b + c$$

$$Q = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$R = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

とおく。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) P が 3 の倍数ならば、 Q は 3 の倍数となることを示せ。
- (2) Q が 3 の倍数ならば、 P は 3 の倍数となることを示せ。
- (3) R が 3 の倍数ならば、 R は 9 の倍数でもあることを示せ。

3.14 平面のベクトル (数学B)

□□ 3.50 [山口大 2024] [9]

a を正の実数とする. O を原点とする座標平面において, 四角形 $OACB$ を考える. 3 点 A, B, C は曲線 $y = x^2 - 6x + 6$ 上にあり, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ を満たすとする. 点 A の x 座標を a とするとき, 次の問いに答えなさい. ただし, (1) の解答は答のみを解答用紙記入しなさい.

- (1) 点 B の x 座標を a を用いて表しなさい.
- (2) $a = 1$ とする.
 - (i) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を求めなさい.
 - (ii) 四角形 $OACB$ の面積を求めなさい.
 - (iii) $\triangle ABC$ の外接円の方程式を求めなさい.

3.15 空間のベクトル (数学B)

□□ 3.51 [東北大理系 2024] [4]

xyz 空間において, 点 $P_1(3, -1, 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と, 点 $P_2(5, 0, -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える.

- (1) 線分 P_1P_2 の長さを求めよ.
- (2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ. この交わりは円となる. この円を C とし, その中心を P_3 とする. C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ.
- (3) (2) の円 C に対し, C を含む平面を H とする. xy 平面と H の両方に平行で, 大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ.
- (4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき, Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ. また, d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ.

□□ 3.52 [一橋大 2024] [4]

実数 a, b は $-1 < a < 1, -1 < b < 1$ を満たす. 座標空間内に 4 点 $A(a, -1, -1), B(-1, b, -1), C(-a, 1, 1), D(1, -b, 1)$ をとる.

- (1) A, B, C, D がひし形の頂点となるとき, a と b の関係を表す式を求めよ.
- (2) a, b が (1) の等式を満たすとき, A, B, C, D を頂点とする四角形の面積の最小値を求めよ.

□□ 3.53 [広大理系 2024] [2]

座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(1, 2, -1)$ に対し,
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ.
- (2) 点 O , A , B を通る平面を α とする. 点 C から平面 α に下した垂線と平面 α の交点を M とする. 点 M の座標を求めよ.
- (3) 点 M を (2) で定めた点とする. 点 D を直線 CM 上の点であって

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$$

となるものとする. ただし, 点 D は点 C とは異なる点である. このとき,
 点 D の座標を求めよ.

- (4) 点 D を (3) で定めた点とする. 三角形 CAD の面積 S を求めよ.

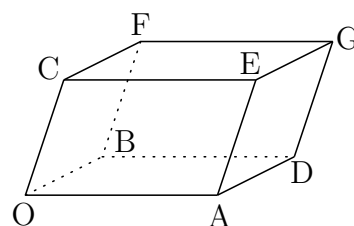
□□ 3.54 [九大理系 2024] [1]

a を実数とし, 座標空間内の 3 点 $P(-1, 1, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(a, a^2, a^3)$ を
 考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) $a \neq -1$, $a \neq 1$ のとき, 3 点 P , Q , R は一直線上にないことを示せ.
- (2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき, 三角形 PQR の面積の最大値を求めよ.

□□ 3.55 [宮崎大 2024] [2]

右図のように, 3 組の向かい合った面がそれぞれ平行である六面体を平行六面体という.
 座標空間の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(4, -2, 6)$, $B(2, -6, 4)$, $C(7, -1, -5)$ に対して, 四角形
 $OADB$, $OAEC$, $OBFC$, $CEGF$ がすべて平行四辺形となるように, 4 点 D , E , F , G を
 とる. 立体 $OADB-CEGF$ は平行六面体となる. このとき, 次の各問に答えよ.



- (1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ の値をそれぞれ求めよ.
- (2) $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OG}$ をそれぞれ成分表示せよ.
- (3) 平行六面体 $OADB-CEGF$ の体積を求めよ.

□□ 3.56 [鹿児島大 2024] [4]

座標空間において、点 $A(2, 0, 4)$ 、点 $B(3, -2, 5)$ を通る直線を l 、点 $C(3, 2, 2)$ 、点 $D(4, 3, 0)$ を通る直線を m とする。

- (1) 2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ のなす角を、 0° と 180° の間の範囲で答えよ。
- (2) 直線 l 、 m が交わるか交わらないか調べよ。
- (3) 直線 l 、 m の両方と交わり、両方と直交する直線を n とする。 n と l の交点、および n と m の交点を求めよ。

3.16 数列 (数学 B)

□□ 3.57 [広大理系 2024] [3]

x 座標、 y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点と呼ぶことにする。座標平面上の3点を頂点にもつ三角形上の格子点とは、頂点、辺または内部に含まれている格子点のことをいう。四角形に対しても同様に四角形上の格子点を定めるものとする。

$O(0, 0)$ を座標平面の頂点とする。 a と b を互いに素な自然数、 n を自然数として、座標平面上の点 $P_n(an, 0)$ 、 $Q_n(0, bn)$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 P_nQ_n 上の格子点 (x, y) で $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ を満たすものは

$$(ak, b(n-k)) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

のみであることを示せ。

- (2) P_1 と Q_1 をそれぞれ P 、 Q と表す。点 $R(a, b)$ に対し、長方形 $OPRQ$ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ。また、三角形 OPQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ。
- (3) 三角形 OP_nQ_n 上の格子点の個数を a 、 b 、 n を用いて表せ。
- (4) 座標空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ と3点 $X(an, 0, 0)$ 、 $Y(0, bn, 0)$ 、 $Z(0, 0, n)$ をとる。点 O 、 X 、 Y 、 Z を4頂点とする四面体 $OXYZ$ 上の格子点の個数を a 、 b 、 n を用いて表せ。ただし、 x 座標、 y 座標、 z 座標のすべてが整数である座標空間内の点を格子点と呼ぶことにする。また、四面体上の格子点とは、頂点、辺、面または内部に含まれている格子点のことをいう。

□□ 3.58 [長崎大 2024] [6]

xy 座標平面上において、 x 軸上に点 $P_1(a_1, 0)$ (ただし、 $a_1 > 2$) がある。関数 $f(x)$ を $f(x) = x^3 - 8$ とするとき、 $x = a_1$ における曲線 $C: y = f(x)$ 上の点を $Q_1(a_1, f(a_1))$ とする。また、 Q_1 における C の接線 l_1 が x 軸と交わる点を $P_2(a_2, 0)$ とする。さらに、 $x = a_2$ における C 上の点を $Q_2(a_2, f(a_2))$ とし、 Q_2 における C の接線 l_2 が x 軸と交わる点を $P_3(a_3, 0)$ とする。このような操作を繰り返して得られる数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 $Q_n(a_n, f(a_n))$ における曲線 C の接線 l_n の方程式を a_n を用いて表せ。
- (2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (3) すべての自然数 n に対して、 $a_n > 2$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。
- (4) すべての自然数 n に対して、 $a_n > a_{n+1}$ を示せ。
- (5) すべての自然数 n に対して、 $a_{n+1} - 2 < \frac{2}{3}(a_n - 2)$ を示し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

□□ 3.59 [宮崎大 2024] [11]

$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす自然数の数列とする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $(2 - \sqrt{3})^n = a_n - \sqrt{3}b_n$ が成り立つことを示せ。
- (2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = \frac{a_n}{b_n} - \sqrt{3}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定める。このとき、すべての自然数 n に対して、 $c_n > c_{n+1}$ が成り立つことを示せ。

□□ 3.60 [鹿児島大 2024] ③

$c \geq 3$ である実数 c に対して、 x の 2 次方程式

$$x^2 - 2(c+1)x + c^2 - 2c + 9 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を考える.

- (1) 2 次方程式 ① は、 c より大きい実数解と c より小さい実数解をもつことを示せ.

(1) の結果を用いて、次のように数列 $\{a_n\}$ を定める. $a_1 = 3$ とする. $c = a_1$ のときの方程式 ① の実数解のうち、 a_1 より大きい方を a_2 とおく. 次に $a_2 > 3$ が成り立つことに注意して、 $c = a_2$ のときの方程式 ① の実数解のうち、 a_2 より大きい方を a_3 とおく. これを繰り返す. すなわち、 $3 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$ が成り立ち、2 次方程式

$$x^2 - 2(a_n+1)x + a_n^2 - 2a_n + 9 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

の実数解のうち、大きい方が a_{n+1} である.

- (2) $n \geq 2$ とする. 2 次方程式 ② の実数解のうち、小さい方は a_{n-1} であることを示せ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式を満たすことを示せ.

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2 \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

- (4) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定めるとき、数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

4 応用問題

4.1 指数関数と対数関数

□□ 4.1 [東北大理系 2024] [2]

以下の問いに答えよ.

- (1) t を $t > 1$ を満たす実数とする. 正の実数 x が 2 つの条件

(a) $x > \frac{1}{\sqrt{t} - 1}$

(b) $x \geq 2 \log_t x$

をともに満たすとする. このとき, 不等式

$$x + 1 > 2 \log_t (x + 1)$$

を示せ.

- (2) $n \leq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ.

4.2 複素数平面 (数学 III)

□□ 4.2 [名大理系 2024] [2]

c を 1 より大きい実数とする. また, i を虚数単位として, $\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく. 複素数 z に対して,

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c, \quad Q(z) = -\alpha^7 z^3 + 3\alpha^6 z^2 + (c+2)\alpha z - c$$

と定める.

- (1) 方程式 $P(z) = 0$ を満たす複素数 z をすべて求め, それらを複素数平面上に図示せよ.
- (2) 方程式 $Q(z) = 0$ を満たす複素数 z のうち実部が最大のものを求めよ.
- (3) 複素数 z についての 2 つの方程式 $P(z) = 0$, $Q(z) = 0$ が共通解 β を持つとする. そのときの c の値と β を求めよ.

4.3 関数

□□ 4.3 [山口大 2024] [7]

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = (x - [x])^2 - (x - [x]) + \frac{1}{6} \quad (x \geq 0)$$

と定める. ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す. さらに, n を自然数とし,

$$S(x) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} + x\right) \quad (x \geq 0)$$

とする. 次の問いに答えなさい.

- (1) 次の等式が成り立つことを示しなさい.

$$f(x+1) = f(x)$$

- (2) 次の等式が成り立つことを示しなさい.

$$S\left(x + \frac{1}{n}\right) = S(x)$$

- (3) $0 \leq x < \frac{1}{n}$ のとき, 方程式 $S(x) = 0$ を解きなさい.

- (4) $x \geq 0$ のとき, 方程式 $S(x) = 0$ を解きなさい.

4.4 極限 (数学 III)

□□ 4.4 [千葉大 2024] [5]

n を 3 以上の整数とする. 座標平面上の $2n$ 個の点からなる集合

$$\{(x, y) \mid x = 1, 2, 3, \dots, n, y = 1, 2\}$$

を考える. この集合から異なる 3 点を選ばず, その 3 点を線分で結んで得られる図形の面積を X とする. ただし, 3 点が同一直線上にあるときは $X = 0$ とする.

- (1) k が 0 以上の整数のとき, X が $\frac{k}{2}$ となる確率 p_k を n と k の式で表せ.

- (2) X が $\frac{n}{4}$ 以下のとなる確率を q_n とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ.

□□ 4.5 [千葉大 2024] [8]

半径 1, 中心 O の円 C がある. 2 つの円 C_1 と C_2 が次の 2 つの条件を満たすとする.

- C_1 と C_2 はどちらも C に内接する.
- C_1 と C_2 は互いに C に外接する.

円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ D, E とし, 半径をそれぞれ p, q とする. $\theta = \angle DOE$ とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) q を p と θ を用いて表せ.
- (2) p を固定する. θ が 0 に近づくとき, $\frac{q}{\theta^2}$ の極限値を求めよ.

さらに, 円 C_3 が次の 2 つの条件を満たすとする.

- C_3 と C_1 は半径が等しい.
- C_3 は C に内接し, C_1, C_2 のどちらとも外接する.

このとき以下の問いに答えよ.

- (3) $p = \sqrt{2} - 1$ のとき, q の値を求めよ.
- (4) θ が 0 に近づくとき, $\frac{q}{p}$ の極限値を求めよ.

□□ 4.6 [千葉大 2024] [9]

m を 0 以上の整数, n を 1 以上の整数, t を $0 < t < 1$ を満たす実数とし, $F(m, n)$ を

$$F(m, n) = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_k C_m t^k$$

で定める.

- (1) p を整数とする.

$$A = \frac{(t-1)F(m+1, n) + tF(m, n)}{t^p}$$

が t によらない値となるような p と, そのときの A を求めよ.

- (2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} F(m, n)$ が収束することを示し, その極限値を求めよ. ただし, $0 < s < 1$ のとき $\lim_{k \rightarrow \infty} k^m s^k = 0$ であることは用いてよい.

□□ 4.7 [東工大 2024] [3]

xy 平面上に、点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(-a, 0)$ (ただし $0 < a < b$) をとる. 点 A, B を通る直線を ℓ とし, 点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする. さらに, 点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし, 点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする. 以下, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, 点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1} , 点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする.

- (1) 点 A_n, C_n の座標を求めよ.
- (2) $\triangle CBA_n$ の面積 S_n を求めよ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BA_n}{BC}$ を求めよ.

□□ 4.8 [東工大 2024] [4]

n を正の整数とし, $C_1, \dots, C_n$ を n 枚の硬貨とする. 各 $k = 1, \dots, n$ に対し, 硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k , 裏が出る確率を $1 - p_k$ とする. この n 枚の硬貨を同時に投げ, 表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功, というゲームを考える.

- (1) $p_k = \frac{1}{3}$ ($k = 1, \dots, n$) のとき, このゲームで成功する確率 X_n を求めよ.
- (2) $p_k = \frac{1}{2(k+1)}$ ($k = 1, \dots, n$) のとき, このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ.
- (3) $n = 3m$ (m は正の整数) で, $k = 1, \dots, 3m$ に対して

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{3m} & (k = 1, \dots, m) \\ \frac{2}{3m} & (k = m+1, \dots, 2m) \\ \frac{1}{m} & (k = 2m+1, \dots, 3m) \end{cases}$$

とする. このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき, $\lim_{m \rightarrow \infty} Z_{3m}$ を求めよ.

□□ 4.9 [京大理系 2024] [6]

自然数 k に対して, $a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする. n を自然数とし, a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする. また, a_k の整数部分が n 桁であり, その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする. 次を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{N_n}$$

ただし, 例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で, 最高位の数字は 2 である.

4.5 微分法とその応用 (数学 III)

□□ 4.10 [東北大理系 2024] [5]

$x \geq 2$ を満たす実数 x に対し,

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$$

とおく. 必要ならば, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であることと, および, 自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい.

- (1) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき, 関数 $g(x)$ ($x \geq 2$) を求めよ.
- (2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し, $g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ.
- (3) 関数 $f(x)$ ($x \geq 2$) の増減と極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を調べ, $y = f(x)$ ($x \geq 2$) のグラフの概形を xy 平面上に描け. ただし, (2) の α を用いてよい. グラフの凹凸は調べなくてよい.
- (4) $2 \leq m < n$ を満たす整数 m, n の組 (m, n) に対して, 等式

$$(*) \quad (2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする. このような組 (m, n) をすべて求めよ.

□□ 4.11 [東大理系 2024] [4]

$f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + 4\sqrt{2}$ とおく. $0 < t < 4$ を満たす実数 t に対し, 座標平面上の点 $(t, f(t))$ を通り, この点において放物線 $y = f(x)$ と共通の接線を持ち, x 軸上に中心をもつ円を C_t とする.

- (1) 円 C_t の中心の座標を $(c(t), 0)$, 半径を $r(t)$ とおく. $c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ.
- (2) 実数 a は $0 < a < f(3)$ を満たすとする. 円 C_t が点 $(3, a)$ を通るような実数 t は $0 < t < 4$ の範囲にいくつあるか.

□□ 4.12 [東工大 2024] [1]

xy 平面上の曲線 $y = \frac{1}{2}x^2$ に、点 $\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$ ($a > 0$) で接する円のうち、 y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく． a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C 、とくに S_1 の中心を P とする．

- (1) 点 P の座標を求めよ．
- (2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

□□ 4.13 [九工大 2024] [1]

自然数 n は定数とする．関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^n},$$

$$g(x) = \frac{5}{12}x^4 + \left(\frac{1}{3}e^3 - 2\right)x - \log x + \int_e^x (f(t) + xt^2) dt$$

について、次に答えよ．ただし、対数は自然対数を表し、 e は自然対数の底とする．

- (1) 関数 $h(x) = 3x^3 - 2 - \frac{1}{x}$ は $x > 0$ で増加することを示せ．また、 $x > 0$ の範囲で方程式 $h(x) = 0$ を解け．
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．ただし、曲線の凹凸は調べなくてよい．
- (3) $e^{(\pi^n)}$ と $\pi^{(e^n)}$ の大小関係を調べよ．必要であれば、 $e < \pi$ を用いてよい．
- (4) $g(x)$ が最小になるときの x の値を求めよ．
- (5) $g(x)$ の最小値を求めよ．

4.6 積分法 (数学 III)

□□ 4.14 [九大理系 2024] [5]

自然数 m, n に対して

$$I(m, n) = \int_1^e x^m e^x (\log x)^n dx$$

とする．以下の問いに答えよ．

- (1) $I(m+1, n+1)$ を $I(m, n+1)$, $I(m, n)$, m , n を用いて表せ．
- (2) すべての自然数 m に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I(m, n) = 0$ が成り立つことを示せ．

□□ 4.15 [熊大医 2024] [3]

k を実数とし, $f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1 + k$ とおく. 曲線 $y = f(x) \left(0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \right)$ を C とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 曲線 C と x 軸の共有点の個数が k の値によってどのように変わるか調べよ.
- (2) 曲線 C と x 軸の共有点が 2 個以上あるような k に対し, $g(k)$ を

$$g(k) = \int_{p_1}^{p_2} f(x) \sin x \, dx$$

と定める. ただし, p_1, p_2 はそれぞれ, 曲線 C と x 軸の共有点の x 座標のうち 1 番小さいもの, 2 番目に小さいものとする. $g(k)$ の最大値と最小値を求めよ.

4.7 積分法の応用 (数学 III)

□□ 4.16 [東北大理系 2024] [6]

xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C: x^2 + y^2 = 1$ および円板 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ を考える. D を底面とし点 $P(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を K とする. $A(0, -1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ とする. xyz 空間内の平面 $H: z = x$ を考える. すなわち, H は zx 平面上の直線 $z = x$ と線分 AB をともに含む平面である. K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする. $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し, 円 C 上の点 $Q(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ をとり, 線分 PQ と E の共有点を R とする.

- (1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく. $r(\theta)$ を θ を用いて表せ.
- (2) 円錐 K の側面のうち, 曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分, 線分 PA , および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく. θ と実数 h が条件 $0 \leq \theta < \theta + h \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leq S(\theta + h) - S(\theta) \leq \frac{h\{r(\theta + h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

- (3) 円錐 K の側面のうち, 円 C の $x \geq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく. T を求めよ. 必要であれば $\tan \frac{\theta}{2} = u$ とおく置換積分を用いてもよい.

□□ 4.17 [東大理系 2024] [5]

座標空間内に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ をとり, D を線分 AC の中点とする. 三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ.

□□ 4.18 [東工大 2024] [2]

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$, $g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -f(t)g(t), & g'(t) &= \{f(t)\}^2, \\ f(t) &> 0, & |g(t)| &< 1, & f(0) &= 1, & g(0) &= 0. \end{aligned}$$

このとき,

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2, \quad q(t) = \log \frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

とおく.

- (1) $p'(t)$ を求めよ.
- (2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ.
- (3) $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ を求めよ.
- (4) $f(T) = g(T)$ となる正の実数 T に対して, 媒介変数表示された平面曲線 $(x, y) = (f(t), g(t))$ ($0 \leq t \leq T$) の長さを求めよ.

□□ 4.19 [名大理系 2024] [4]

袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている. すべての玉に対する赤玉の割合を p ($0 \leq p \leq 1$) とする. 袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す操作を行う. 試行を n 回行うとき, 赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく.

- (1) $n \geq 2$ に対して, $f(1)$ と $f(2)$ を求めよ.
- (2) $k = 1, 2, \dots, n$ に対して, 等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx$$

を示せ.

- (3) 自然数 k に対して, 定積分

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k (1-x)^k dx$$

を求めよ.

□□ 4.20 [京大理系 2024] [5]

a は $a \geq 1$ を満たす定数とする．座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする．

$$x \geq 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leq y, \quad y \leq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \leq a$$

次の問いに答えよ．

- (1) D_a の面積 S_a を求めよ．
- (2) $\lim_{a \rightarrow \infty} S_a$ を求めよ．

□□ 4.21 [神戸大理系 2024] [5]

0 以上の実数 x に対して，

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-x}^x \frac{1}{1+u^2} du$$

と定める．以下の問いに答えよ．

- (1) $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 α に対して， $f(\tan \alpha)$ を求めよ．
- (2) xy 平面上で，次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad f(x) + f(y) \leq f(1)$$

またその領域の面積を求めよ．

□□ 4.22 [広大理系 2024] [5]

関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ に対し、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ は $x > 0$ で上に凸であることを示せ。
- (2) すべての $x \geq 0$ に対し、不等式 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq f(x) \leq x$ が成り立つことを示せ。
- (3) 定積分 $\int_0^{\frac{3}{4}} f(x) dx$ の値 S を求めよ。
- (4) 曲線 $y = f(x)$ 上の点で、 x 座標が $\frac{3}{4}$ であるものを A とする。また、点 A における曲線 $y = f(x)$ の接線を ℓ とする。 ℓ と直線 $y = x$ の交点を B とする。点 $O(0, 0)$, A , B と点 $C\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ を頂点にもつ四角形 $ABOC$ の面積 T を求めよ。
- (5) (1)~(4) を利用して、 $\log 2$ の小数第 1 位の数字を求めよ。

□□ 4.23 [宮崎大 2024] [10]

関数 $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ ($-1 < x < 1$) および座標平面上の曲線 $C: y = f(x)$ について、次の各問に答えよ。ただし、 $\log x$ は x の自然対数を表す。

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ の増減、極値、曲線 C の凹凸、変曲点および漸近線を調べて、曲線 C の概形をかけ。
- (4) 関係式 $y = f(x)$ について、 x を y の式で表せ。また、 $\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{e^y + e^{-y}} \right)$ を求めよ。
- (5) 曲線 C と x 軸、直線 $x = 1$ および直線 $y = \alpha$ ($\alpha > 0$) で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V(\alpha)$ とする。このとき、 $V(\alpha)$ および $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} V(\alpha)$ を求めよ。

4.8 場合の数と確率 (数学 A)

□□ 4.24 [熊大医 2024] [1]

n 個の袋 $A_1, A_2, \dots, A_n$ がある。 $A_k (1 \leq k \leq n)$ の中には白玉が k 個, 黒玉が $n - k$ 個入っている。次の (操作) を考える。

(操作)

(操作 1) n 個の袋から無作為に 1 つの袋を選び, それを A とおく。

(操作 2) 次の試行を s 回繰り返す。袋 A から無作為に玉を 1 個取り出し, 玉の色を調べてから取り出した玉を袋 A に戻す。

以下の問いに答えよ。

- (1) $s = 2$ とする。(操作) を行うとき, 白玉がちょうど 1 回取り出される確率を n を用いて表せ。
- (2) $s = 100$ とする。(操作 1) を行った結果, $A = A_k$ であった。このとき, (操作 2) で白玉がちょうど t 回取り出される条件付き確率を $p(t)$ とする。 $n = 3k$ が成り立つとき, $p(t)$ を最大にする t の値を求めよ。
- (3) $s = 10$ とする。(操作) を行うとき, 白玉がちょうど 3 回取り出される確率を q_n とする。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ。

4.9 整数の性質 (数学 A)

□□ 4.25 [東大理系 2024] [6]

2 以上の整数で, 1 とそれ自身以外に正の約数をもたない数を素数という。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 20x$ とする。 $f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。
- (2) a, b を整数の定数とし, $g(x) = x^3 + ax^2 + bx$ とする。 $g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ。

□□ 4.26 [阪大理系 2024] [5]

自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ のうち, n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ とする.

- (1) 自然数 a, b, c および相異なる素数 p, q, r に対して, 等式

$$f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ.

- (2) $f(n)$ が n の約数となる 5 以上 100 以下の自然数 n をすべて求めよ.

□□ 4.27 [熊大医 2024] [4]

m を自然数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $k^2 - \ell^2 = 3^m$ を満たす自然数の組 (k, ℓ) の個数を m を用いて表せ.
 (2) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x で 3 の倍数でないものを m を用いて表せ.
 (3) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x の個数を m を用いて表せ.

4.10 空間のベクトル (数学 B)

□□ 4.28 [宮崎大 2024] [8]

1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において, $\triangle ABC$ の重心を G , 線分 BC を $1:3$ に内分する点を D とする. また, 直線 AB 上にあり, $\overrightarrow{GD} \perp \overrightarrow{GE}$ を満たす点を E とする. このとき, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ として, 次の各問に答えよ.

- (1) $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ.
 (2) $\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GE}$ のそれぞれを, $\vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ. また, $|\overrightarrow{GD}|, |\overrightarrow{GE}|$ の値をそれぞれ求めよ.
 (3) $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{b}$ と $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{c}$ の値をそれぞれ求めよ.
 (4) P を平面 ABC 上の点とする. また, 点 P は, 直線 GD で平面 ABC を 2 つに分けたときに, 点 E と同じ側にあるとする. $\triangle DGP$ の面積が 1 のとき, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{GE}$ の値を求めよ.

4.11 数列 (数学 B)

□□ 4.29 [東大理系 2024] 3

座標平面上を次の規則 (i), (ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える.

(i) 最初に, P は点 $(2, 1)$ にいる.

(ii) ある時点で P が点 (a, b) にいるとき, その 1 秒後には P は

- 確率 $\frac{1}{3}$ で x 軸に関して (a, b) と対称な点
 - 確率 $\frac{1}{3}$ で y 軸に関して (a, b) と対称な点
 - 確率 $\frac{1}{6}$ で直線 $y = x$ に関して (a, b) と対称な点
 - 確率 $\frac{1}{6}$ で直線 $y = -x$ に関して (a, b) と対称な点
- にいる.

以下の問いに答えよ. ただし, (1) については, 結論のみを書けばよい.

- (1) P がとりうる点の座標をすべて求めよ.
- (2) n を正の整数とする. 最初から n 秒後に P が点 $(2, 1)$ にいる確率と, 最初から n 秒後に P が点 $(-2, -1)$ にいる確率は等しいことを示せ.
- (3) n を正の整数とする. 最初から n 秒後に P が点 $(2, 1)$ にいる確率を求めよ.

5 発展問題

5.1 式と曲線

□□ 5.1 [鹿児島大 2024] [6]

座標平面上で、放物線 C が次の方程式で与えられている。

$$C : 4x - 4y^2 - 3 = 0$$

原点 O から放物線 C に引いた接線で、傾きが正のものを l とする。また、直線 l と放物線 C との共有点を A とする。

- (1) 直線 l の方程式、および A の座標を求めよ。
- (2) 直線 l と点 A で接する円で、放物線 C との共有点が 2 個であるものを求めよ。
- (3) 放物線 C 、直線 l および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

5.2 積分法の応用 (数学 III)

□□ 5.2 [長崎大 2024] [7]

原点を O とする xy 座標平面上において、放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = x$ があり、 C と l で囲まれた領域の周および内部を図形 F とする。

また、 C 上の点 $P(t, t^2)$ ($0 \leq t \leq 1$) を通り、 l に垂直な直線を m とし、 m と l の交点を Q とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 図形 F を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ。
- (2) 直線 m の方程式および点 Q の座標を、 t を用いてそれぞれ表せ。
- (3) 線分 PQ の長さの平方 (PQ^2) を t を用いて表せ。
- (4) 線分 OQ の長さを s とするとき、 s および $\frac{ds}{dt}$ を、 t を用いてそれぞれ表せ。
- (5) 図形 F を直線 l の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ。また、(1) で求めた V_1 との比 $\frac{V_2}{V_1}$ を求めよ。

5.3 斜軸回転

九工大 2022 年後期

原点を O とする座標平面上の曲線 $y = x^3$ ($x \geq 0$) を C とし, 直線 $y = ax$ ($a > 0$) を l とする.

- (4) 直線 l と曲線 C で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ.

解答 C 上に点 $P(t, t^3)$, l 上に点 $Q(t, at)$ をとる ($0 \leq t \leq \sqrt{a}$).

線分 PQ の中点を M とすると $M\left(t, \frac{t^3 + at}{2}\right)$

M から直線 $l: ax - y = 0$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|at - \frac{t^3 + at}{2}|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{at - t^3}{2\sqrt{a^2 + 1}}$$

$\Delta S = PQ\Delta t = (at - t^3)\Delta t$ を l の周りに 1 回転させた体積 ΔV は

$$\Delta V = 2\pi d \Delta S = 2\pi \cdot \frac{at - t^3}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot (at - t^3)\Delta t = \frac{\pi(at - t^3)^2}{\sqrt{a^2 + 1}} \Delta t$$

$$\begin{aligned} \text{よって } V &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + 1}} \int_0^{\sqrt{a}} (at - t^3)^2 dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + 1}} \int_0^{\sqrt{a}} (t^6 - 2at^4 + a^2t^2) dt \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + 1}} \left[\frac{t^7}{7} - \frac{2a}{5}t^5 + \frac{a^2}{3}t^3 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned}$$

xy 平面内の図形

$$S: \begin{cases} x + y^2 \leq 2 \\ x + y \geq 0 \\ x - y \leq 2 \end{cases}$$

を考える. 図形 S を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする.

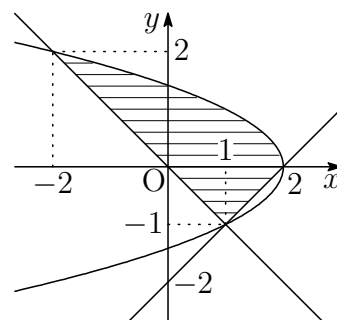
(1) S を xy 平面に図示せよ.

(2) V を求めよ.

解答 (1) xy 平面内の図形

$$S: \begin{cases} x + y^2 \leq 2 \\ x + y \geq 0 \\ x - y \leq 2 \end{cases}$$

の表す領域は, 右の図の斜線部分で境界線を含む.



(2) x 軸の下側の領域 D_1 の面積を S_1 とし, D_1 の重心 $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$ と直線 $x + y = 0$ との距離を d_1 とすると

$$S_1 = 1, \quad d_1 = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

D_1 を直線 $x + y = 0$ のまわりに 1 回転した回転体を体積を V_1 とすると, (半径 $\sqrt{2}$, 高さ $\sqrt{2}$ の円錐の体積)

$$V_1 = 2\pi d_1 S_1 = 2\pi \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

放物線 $x = -y^2 + 2$ 上に点 $P(-t^2 + 2, t)$, 直線 $x + y = 0$ 上に点 $Q(-t, t)$ をとり ($0 \leq t \leq 2$), 線分 PQ の中点を M とすると

$$M\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + 1, t\right)$$

M と直線 $x + y = 0$ の距離を d とすると

$$d = \frac{\left| -\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{-t^2 + t + 2}{2\sqrt{2}}$$

$\Delta S = PQ\Delta t = (-t^2 + t + 2)\Delta t$ を l のまわりに 1 回転させた体積 ΔV_2 は

$$\begin{aligned}\Delta V_2 &= 2\pi d \Delta S = 2\pi \cdot \frac{-t^2 + t + 2}{2\sqrt{2}} \cdot (-t^2 + t + 2)\Delta t \\ &= \frac{\pi(-t^2 + t + 2)^2}{\sqrt{2}} \Delta t = \frac{\pi(2-t)^2(t+1)^2}{\sqrt{2}} \Delta t\end{aligned}$$

x 軸の上側の部分を直線 $x + y = 0$ のまわりに 1 回転させた体積 V_2 は

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}V_2}{\pi} &= \int_0^2 (2-t)^2(t+1)^2 dt = \int_0^2 (2-t)^2(t^2 + 2t + 1) dt \\ &= \int_0^2 t^2(2-t)^2 dt + 2 \int_0^2 t(2-t)^2 dt + \int_0^2 (t-2)^2 dt \\ &= \frac{2!2!}{5!}(2-0)^5 + 2 \cdot \frac{1!2!}{4!}(2-0)^4 + \left[\frac{(t-2)^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{2^5}{30} + \frac{2^4}{6} + \frac{2^3}{3} = 2^3 \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{32}{5}\end{aligned}$$

したがって $V_2 = \frac{16\sqrt{2}}{5}\pi$

よって、求める回転体の体積は

$$V_1 + V_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{16\sqrt{2}}{5}\pi = \frac{58\sqrt{2}}{15}\pi$$

東工大 2020 年

n を正の奇数とする．曲線 $y = \sin x$ ($(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$) と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x + y = 0$ を ℓ とおき， ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする．

(2) 回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

解答 $y = \sin x$ の微小区間 $[t, t + \Delta t]$ の面積 ΔS とその重心 G は

$$\Delta S = (\sin t)\Delta t, \quad G \left(t, \frac{1}{2} \sin t \right)$$

G と直線 $x + y = 0$ の距離 d は $d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t + \frac{1}{2} \sin t \right)$

$$\begin{aligned}V_n \text{ の体積} &= 2\pi \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t + \frac{1}{2} \sin t \right) \sin t dt \\ &= \sqrt{2}\pi \left[-t \cos t + \sin t + \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \sqrt{2}\pi^2 \left(2n - \frac{3}{4} \right)\end{aligned}$$

解答例

1.1 (1) 点 $P(\cos 2t, \cos t)$ と点 $Q(\sin t, \sin 2t)$ が一致するとき

$$\begin{cases} \cos 2t = \sin t \\ \cos t = \sin 2t \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} (\sin t + 1)(2 \sin t - 1) = 0 \\ \cos t(2 \sin t - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\sin t + 1 = 0 \implies \cos t = 0 \text{ に注意して } \sin t = \frac{1}{2}, -1$$

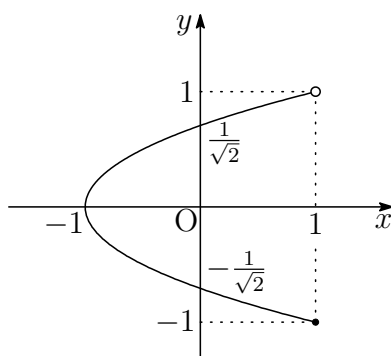
$$\text{よって} \quad t = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5}{6}\pi + 2n\pi, \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$$

(2) $P(\cos 2t, \cos t)$ について, $0 < t < 2\pi$ のとき

$$-1 \leq \cos t < 1, \quad \cos 2t = 2\cos^2 t - 1$$

よって, 求める軌跡の方程式は $x = 2y^2 - 1$ ($-1 \leq y < 1$)

したがって, 点 P の描く軌跡は, 下の図の実線部分で $\circ$ は含まない.



1.2 (1) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ より $|\vec{AB}|^2 = |\vec{OB}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OA}|^2$
 $|\vec{OA}| = 3, |\vec{AB}| = 5, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 10$ を上式に代入すると

$$5^2 = |\vec{OB}|^2 - 2 \cdot 10 + 3^2 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{OB}|^2 = 36$$

$$|\vec{OB}| > 0 \text{ であるから} \quad |\vec{OB}| = 6$$

(2) $\angle O$ の二等分線 OI と AB の交点を C とすると

$$AC : CB = OA : OB = 3 : 6 = 1 : 2$$

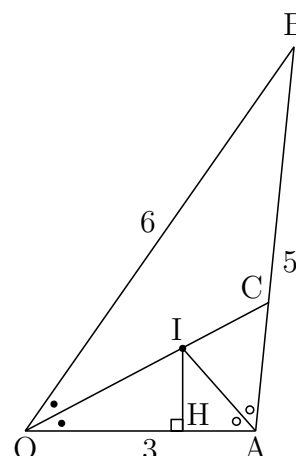
$$\text{ゆえに } AC = AB \times \frac{1}{1+2} = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

AI は $\angle A$ の二等分線であるから

$$OI : IC = OA : AC = 3 : \frac{5}{3} = 9 : 5$$

したがって

$$\begin{aligned}\vec{OI} &= \frac{9}{9+5} \vec{OC} = \frac{9}{14} \cdot \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{1+2} \\ &= \frac{6\vec{OA} + 3\vec{OB}}{14}\end{aligned}$$



(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\vec{OI} \cdot \vec{OA} &= \frac{6|\vec{OA}|^2 + 3\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{14} = \frac{6 \cdot 3^2 + 3 \cdot 10}{14} = 6 \\ \vec{OH} &= \frac{(\vec{OI} \cdot \vec{OA})}{|\vec{OA}|^2} \vec{OA} = \frac{6}{3^2} \vec{OA} = \frac{2}{3} \vec{OA}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\vec{HI} &= \vec{OI} - \vec{OH} = \frac{6\vec{OA} + 3\vec{OB}}{14} - \frac{2}{3} \vec{OA} \\ &= \frac{-10\vec{OA} + 9\vec{OB}}{42}\end{aligned}$$

補足 $\triangle OAB$ の内接円の辺 AB との接点を J とし, $x = OH$ とすると

$$HA = AJ = 3 - x, \quad JB = 5 - (3 - x) = x + 2$$

$$\text{したがって } OB = x + (x + 2) = 2x + 2$$

$$OB = 6 \text{ より } 2x + 2 = 6 \quad \text{ゆえに } OH = 2$$



1.3 (1) $p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \quad q_2 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \quad r_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

求める漸化式は，次のようになる．

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{3}q_n \\ q_{n+1} &= \frac{2}{3}r_n \\ r_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$p_{n+1} + 2q_{n+1} + 2r_{n+1} = \frac{2}{3}(p_n + 2q_n + 2r_n)$$

数列 $\{p_n + 2q_n + 2r_n\}$ は $p_2 + 2q_2 + 2r_2 = \frac{4}{3}$ ，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n + 2q_n + 2r_n = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

(3) (1) の結果から

$$p_{n+1} + iq_{n+1} - (1+i)r_{n+1} = -\frac{1}{3}(1+i)\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\}$$

数列 $\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\}$ は $p_2 + iq_2 - (1+i)r_2 = \frac{2}{9}$ ，公比 $-\frac{1+i}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n + iq_n - (1+i)r_n = \frac{2}{9} \left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$$

(4) (3) の結果についてその共役複素数を考えると

$$p_n - iq_n - (1-i)r_n = \frac{2}{9} \left(-\frac{1-i}{3}\right)^{n-2}$$

上式と (3) の結果の辺々を加えると

$$\begin{aligned} 2(p_n - r_n) &= \frac{2}{9} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2} \left\{ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} \right\} \\ &= \frac{4}{9} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2} \cos \frac{n-2}{4} \pi \end{aligned}$$

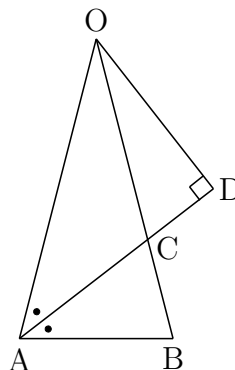
$p_n = q_n$ のとき，整数 k を用いて $\frac{n-2}{4} \pi = \frac{2k-1}{2} \pi$ ゆえに $n = 4k$
よって，求める必要十分条件は **n は 4 の倍数** ■

1.4 (1) AC は $\angle OAB$ の二等分線であるから

$$OC : CB = OA : AB = 2 : 1$$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}$$



$$(2) \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \quad |\overrightarrow{AB}| = 2, \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 4 \text{ より} \quad |\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2$$

$$2^2 = 4^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4^2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 14$$

$$\overrightarrow{AC} \text{ に平行なベクトルを } \vec{v} = 2\vec{b} - 3\vec{a} \text{ とすると} \quad \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \vec{v} = -\vec{a} \cdot (2\vec{b} - 3\vec{a}) = -2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{a}|^2 = -2 \cdot 14 + 3 \cdot 4^2 = 20$$

$$|\vec{v}|^2 = 4|\vec{b}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{a}|^2 = 4 \cdot 4^2 - 12 \cdot 14 + 9 \cdot 4^2 = 40$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{20}{40}(2\vec{b} - 3\vec{a}) = \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{a}) \text{ より}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(2\vec{b} - 3\vec{a}), \quad \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{a}) \text{ より}$$

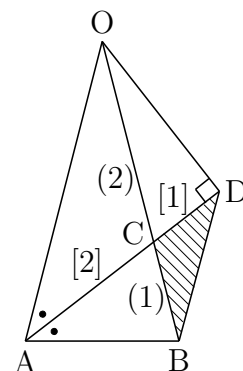
$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

AC : CD = 2 : 1, OC : CB = 2 : 1 であるから

$$\begin{aligned} \triangle BCD &= \frac{1}{2}\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\triangle OAB \\ &= \frac{1}{6}\triangle OAB \end{aligned}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 \cdot 4^2 - 14^2} = \sqrt{15}$$

$$\text{よって} \quad \triangle BCD = \frac{1}{6}\sqrt{15}$$



■

1.5 (1) 関数

$$f(x) = (1 - 2x^2) \cos 2x + 2x \sin 2x + a \cos^2 x + b \int_0^x t \sin 2t \, dt$$

を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x \cos 2x - 2(1 - 2x^2) \sin 2x + 2 \sin 2x + 4x \cos 2x \\ &\quad - 2a \cos x \sin x + bx \sin 2x \\ &= (4x^2 + bx - a) \sin 2x \end{aligned} \quad (*)$$

$a = 8\pi^2$, $b = -4\pi$ を (*) に代入すると

$$f'(x) = (4x^2 - 4\pi x - 8\pi^2) \sin 2x = 4(x + \pi)(x - 2\pi) \sin 2x$$

したがって, $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ における $f(x)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$(\frac{3}{2}\pi)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって, 極値をとる x の値は $x = \frac{\pi}{2}, \pi$

(2) $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ において, (*) の $f'(x)$ の符号は, 常に $f'(x) \leq 0$ または $f'(x) \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} 4x^2 + bx - a &= 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi) \\ &= 4x^2 - 6\pi x + 2\pi^2 \end{aligned}$$

よって, 上式の係数を比較して $a = -2\pi^2$, $b = -6\pi$ ■

1.6 (1) 3 辺の長さが 2, 5, a である三角形が存在するための条件は

$$|2 - 5| < a < 2 + 5 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{3 < a < 7}$$

(2) $\log_{10}(5x)$, $\log_{10}(x + 10)$ は辺の長さであるから

$$5x > 1, \quad x + 10 > 1 \quad \text{ゆえに} \quad x > \frac{1}{5}$$

このとき, $\log_{10}(x + 10) > \log_{10} 3$ に注意すると, 3 辺の長さが

$$\log_{10}(5x), \log_{10}(x + 10), \log_{10} 3$$

の三角形が存在するための条件は

$$\log_{10}(x + 10) - \log_{10} 3 < \log_{10}(5x) < \log_{10}(x + 10) + \log_{10} 3$$

$$\text{したがって} \quad \frac{x + 10}{3} < 5x < 3(x + 10) \quad \text{よって} \quad \mathbf{\frac{5}{7} < x < 15}$$

(3) (2) で求めた x の範囲から, $5x > 3$, $x + 10 > 3$ であるから, 二等辺三角形であるとき

$$5x = x + 10 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{x = \frac{5}{2}}$$



1.7 (1) このとき, 赤球は丁度 1 回取り出される.

(i) 白球 (1 点), 赤球 (2 点) をそれぞれ 1 回ずつ取り出す確率は

$$\frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 9} \cdot \frac{2!}{1!1!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15}$$

(ii) 黒球 (1 点), 赤球 (2 点) をそれぞれ 1 回ずつ取り出す確率は

$$\frac{5 \cdot 2}{10 \cdot 9} \cdot \frac{2!}{1!1!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{27}$$

(i), (ii) より, 求める確率は

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{27} = \mathbf{\frac{14}{135}}$$

(2) $n = 3$ で総得点が5点のとき、赤球(2点)は丁度2回取り出される.

(i) 白球(1点)を1回、赤球(2点)を2回取り出す確率は

$$\frac{3 \times 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} \cdot \frac{3!}{1!2!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{160}$$

(ii) 黒球(1点)を1回、赤球(2点)を2回取り出す確率は

$$\frac{5 \times 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} \cdot \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{288}$$

(i), (ii) より, 求める確率は

$$\frac{1}{160} + \frac{1}{288} = \frac{7}{720}$$

(3) $n = 3$ で総得点が4点となるのは, (i)~(iv) の場合である.

(i) 黒球(0点)を1回、赤球(2点)を2回取り出す確率は

$$\frac{5 \times 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} \cdot \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{144}$$

(ii) 白球(1点)を2回、赤球(2点)を1回取り出す確率は

$$\frac{3 \cdot 2 \times 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{40}$$

(iii) 黒球(1点)を2回、赤球(2点)を1回取り出す確率は

$$\frac{5 \cdot 4 \times 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{108}$$

(iv) 白球(1点)を1回、黒球(1点)を1回、赤球(2点)を1回取り出す確率は

$$\frac{3 \times 5 \times 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} \cdot \frac{3!}{1!1!1!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

赤玉は2個であるから, $n = 3$ のとき総得点が6点以上になることはない.
したがって, 求める確率は, (2) および (i)~(iv) の結果から, 求める確率は

$$\frac{7}{720} + \frac{1}{144} + \frac{1}{40} + \frac{1}{108} + \frac{1}{24} = \frac{5}{54}$$



1.8 P($x, y, 0$) とおく．条件 (i) より $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

条件 (ii) から

$$\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}|} = \cos \angle AOP \leq \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AP}|} = \cos \angle OAP \geq \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって

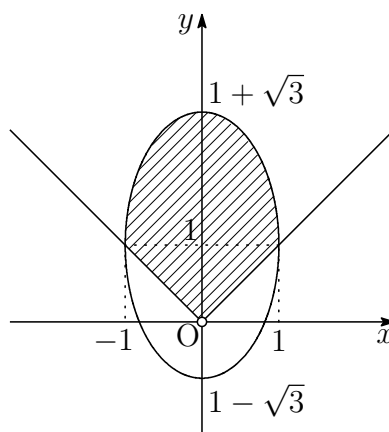
$$\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \leq -\frac{1}{2}, \quad \frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

上式から， $y \geq 0$ に注意して，整理すると

$$y \geq |x|, \quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{3} \leq 1$$

条件 (i) より $(x, y) \neq (0, 0)$

P の取り得る範囲は，下の図の斜線部分で境界線を含む．ただし，O は除く．



別解 P(x, y, z) とおく．直交変換

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{Y}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{Z}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を行うと

$$x = X, \quad y = \frac{Y - Z}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{Y + Z}{\sqrt{2}}$$

これから

$$X = x, \quad Y = \frac{y + z}{\sqrt{2}}, \quad Z = \frac{-y + z}{\sqrt{2}} \quad (*)$$

A の XYZ-系における点を A' とすると A'(0, 0, $\sqrt{2}$)

P'(X, Y, Z) とすると, 条件 (ii) より

$$\frac{\overrightarrow{\text{OA}'} \cdot \overrightarrow{\text{OP}'}}{|\overrightarrow{\text{OA}'}| |\overrightarrow{\text{OP}'}|} = \cos \angle \text{A}'\text{OP}' \leq \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\overrightarrow{\text{A}'\text{O}} \cdot \overrightarrow{\text{A}'\text{P}'}}{|\overrightarrow{\text{A}'\text{O}}| |\overrightarrow{\text{A}'\text{P}'}|} = \cos \angle \text{OA}'\text{P}' \geq \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{\text{OA}'} = (0, 0, \sqrt{2}), \quad \overrightarrow{\text{OP}'} = (X, Y, Z), \quad \overrightarrow{\text{A}'\text{O}} = (0, 0, -\sqrt{2}),$$

$$\overrightarrow{\text{A}'\text{P}'} = (X, Y, Z - \sqrt{2}) \text{ であるから}$$

$$\frac{\sqrt{2}Z}{\sqrt{2}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \leq -\frac{1}{2}, \quad \frac{-\sqrt{2}(Z - \sqrt{2})}{\sqrt{2}\sqrt{X^2 + Y^2 + (Z - \sqrt{2})^2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$Z \leq 0$ に注意して

$$\frac{Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \geq \frac{1}{4}, \quad \frac{(Z - \sqrt{2})^2}{X^2 + Y^2 + (Z - \sqrt{2})^2} \geq \frac{3}{4}$$

整理すると

$$X^2 + Y^2 - 3Z^2 \leq 0, \quad 3X^2 + 3Y^2 - (Z - \sqrt{2})^2 \leq 0 \quad (**)$$

(*) に $z = 0$ を代入すると $X = x, Y = \frac{y}{\sqrt{2}}, Z = -\frac{y}{\sqrt{2}}$

これらを (**) に代入すると

$$x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq 0, \quad 3x^2 + 3\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(-\frac{y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2 \leq 0$$

整理すると

$$x^2 - y^2 \leq 0, \quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{3} \leq 1$$

$Z \leq 0$ より, $y \geq 0$ であるから, 上の第1式は

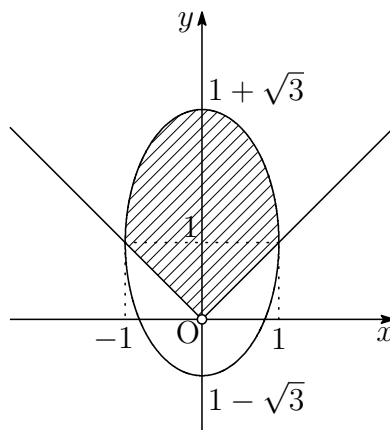
$$|x|^2 \leq |y|^2 \quad \text{ゆえに} \quad y \geq |x|$$

したがって, 点 $P(x, y)$ の満たす不等式は

$$(x, y) \neq (0, 0), \quad y \geq |x|, \quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{3} \leq 1$$

条件 (i) より $(x, y) \neq (0, 0)$

P の取り得る範囲は, 下の図の斜線部分で境界線を含む. ただし, O は除く.



1.9 $f(x) = x^2 + ax + b$

$f(x) = 0$ のすべて解 α について, $\alpha^n = 1$ より (n は整数)

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n = 1 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha| = 1$$

(i) $f(x) = 0$ が実数解をもつとき, $f(x) = 0$ の解 α, β は

$$\alpha = \pm 1, \beta = \pm 1 \quad (\text{複号任意})$$

解と係数の関係により $\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b$

したがって $(a, b) = (2, 1), (-2, 1), (0, -1)$

(ii) $f(x) = 0$ が虚数解 $\alpha, \bar{\alpha}$ をもつとき、解と係数の関係により

$$\alpha + \bar{\alpha} = -a, \quad \alpha\bar{\alpha} = b \quad \text{ゆえに} \quad \operatorname{Re}(\alpha) = -\frac{a}{2}, \quad |\alpha|^2 = b$$

$|\alpha| = 1, \quad -1 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ であるから

$$b = 1, \quad -1 < -\frac{a}{2} < 1$$

a は整数であるから $a = -1, 0, 1$

- $(a, b) = (-1, 1)$ のとき, $x^2 - x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}$$

- $(a, b) = (0, 1)$ のとき, $x^2 + 1 = 0$ を解いて

$$x = \pm i = \cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2}$$

- $(a, b) = (1, 1)$ のとき, $x^2 + x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2}{3}\pi \pm i \sin \frac{2}{3}\pi$$

(i), (ii) より $(a, b) = (\pm 2, 1), (\pm 1, 1), (0, \pm 1)$ ■

1.10

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k(n-2k) &= n \sum_{k=1}^m k - 2 \sum_{k=1}^m k^2 \\ &= n \cdot \frac{1}{2}m(m+1) - 2 \cdot \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2) = 2024 \end{aligned}$$

$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ であるから

$$m(m+1)(3n-4m-2) = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$$

連続する2数 $m, m+1$ の一方は奇数1, 3, 11, 23であることに注意すると、次の①～⑥の場合が考えられる。

	m	$m+1$	$3n-4m-2$
①	1	2	$2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
②	2	3	$2^3 \cdot 11 \cdot 23$
③	3	2^2	$2^2 \cdot 11 \cdot 23$
④	11	$2^2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 23$
⑤	$2 \cdot 11$	23	$2^3 \cdot 3$
⑥	23	$2^3 \cdot 3$	$2 \cdot 11$

①～⑥をそれぞれ解くと

$$(m, n) = (1, 2026), (2, 678), (3, 342), (11, 46), (22, 38), \left(23, \frac{116}{3}\right)$$

n は自然数であるから, ⑥は不適.

よって, 求める (m, n) の組は, 次の5つである.

$$(m, n) = (1, 2026), (2, 678), (3, 342), (11, 46), (22, 38)$$



1.11 (1) $A(3, 1, 3)$, $B(4, 2, 2)$, $C(4, 0, 1)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1), \quad \overrightarrow{AC} = (1, -1, -2)$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 3, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}, \quad \overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OQ}, \quad \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{OQ} \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}) = 0$$

$$(1) \text{ の結果および } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = 1, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OA} = -4 \text{ より}$$

$$1 + 3s + 2t = 0, \quad -4 + 2s + 6t = 0$$

$$\text{これを解いて } s = -1, t = 1 \text{ よって } \overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

(3) $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ および (2) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = (s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}) - (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= (s+1)\overrightarrow{AB} + (t-1)\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

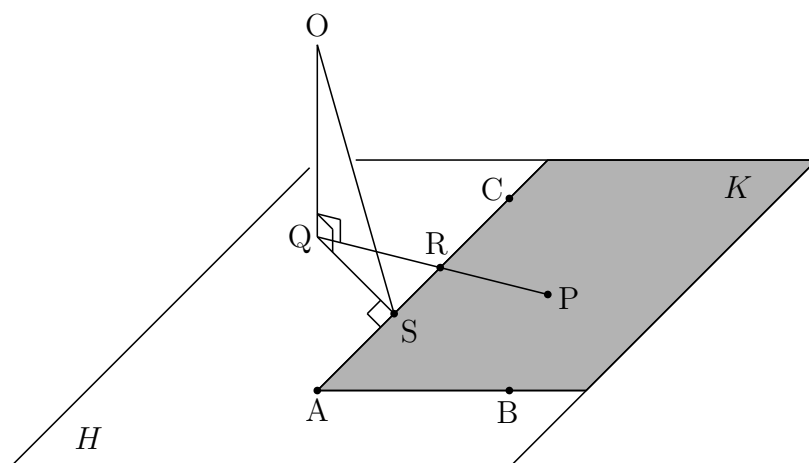
線分 QP 上の点を R とすると, $\overrightarrow{QR} = k\overrightarrow{QP}$ であるから ($0 \leq k \leq 1$)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AQ} + k\overrightarrow{QP} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + k\{(s+1)\overrightarrow{AB} + (t-1)\overrightarrow{AC}\} \\ &= \{k(s+1) - 1\}\overrightarrow{AB} + \{k(t-1) + 1\}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

R が直線 AC 上にあるとき, $k = \frac{1}{s+1}$ に注意して ($0 \leq k \leq 1$)

$$\overrightarrow{AR} = \frac{s+t}{s+1}\overrightarrow{AC}$$

$r = \frac{s+t}{s+1}$ であるから (s, t は非負の実数), r は非負の実数である.



(4) (2) の結果を利用すると

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 = -2 + 6 = 4,$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2} \overrightarrow{AC} = \frac{4}{6} \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$$

$$= (3, 1, 3) + \frac{2}{3}(1, -1, -2) = \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

よって $S\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

別解 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ より ($s \geq 0, t \geq 0$)

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

したがって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= |\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OA}|^2 + s^2|\overrightarrow{AB}|^2 + t^2|\overrightarrow{AC}|^2 \\ &\quad + 2s\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + 2t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} + 2st\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 19 + 3s^2 + 6t^2 + 2s - 8t + 4st \\ &= 6t^2 + 4(s-2)t + 3s^2 + 2s + 19 \\ &= 6 \left\{ t + \frac{1}{3}(s-2) \right\}^2 + \frac{7}{3}(s+1)^2 + 14 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるとき

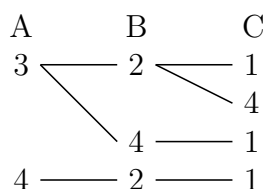
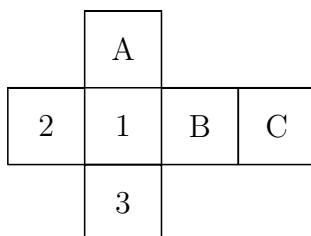
$$t + \frac{1}{3}(s-2) = 0, \quad s = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2}{3}$$

このとき $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$

よって $S\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$ ■

1.12 (1) 次の立方体の展開図において, 1, 2, 3 の面を異なる色で塗り, 残りの A, B, C の面を順番に塗るとき, 次の規則に従う.

- A は 1, 2 以外の色で塗る.
- B は 1, 3, A 以外の色で塗る.
- C は 2, 3, A, B 以外の色で塗る.



1~4 の色で展開図の面を塗る方法は上の樹形図で示した 4 通あり, 4 色を 1~4 に対応させる方法が 4! 通りあるから, 求める確率は

$$\frac{4 \cdot 4!}{4^6} = \frac{3}{128}$$

(2) n 個の色で 6 面をすべて異なる色で塗る確率は

$$\frac{{}_nP_6}{n^6} = \prod_{k=1}^5 \left(1 - \frac{k}{n}\right) \quad (\text{A})$$

この確率と p_n の大小関係について

$$\frac{{}_nP_6}{n^6} \leq p_n \leq 1 \quad (\text{B})$$

(A) から

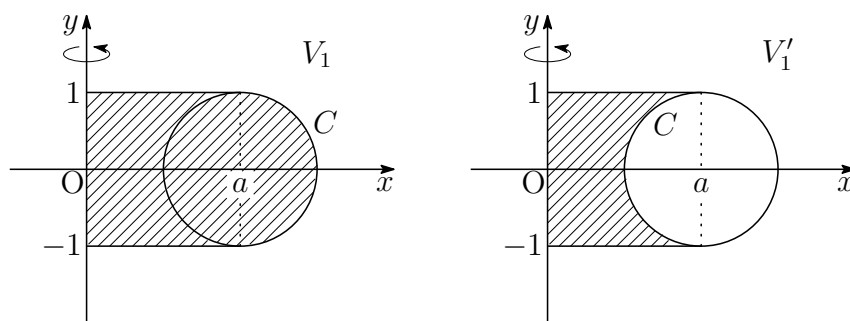
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{{}_nP_6}{n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^5 \left(1 - \frac{k}{n}\right) = 1 \quad (\text{C})$$

(B), (C) からはさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$ ■

1.13 (1) 円 $C: (x-a)^2 + y^2 = 1$ より $x^2 = -(y+1)(y-1) - a^2 + 2ax$

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= - \int_{-1}^1 (y+1)(y-1) dy - a^2 \int_{-1}^1 dy + 2a \int_{-1}^1 x dy \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2a^2 + 2a \left(2a + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a \end{aligned} \quad (*)$$

よって $V_1 = \pi \left(\frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a \right)$



(2) 右上の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V'_1 とすると, (*) に注意して

$$\begin{aligned} \frac{V'_1}{\pi} &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2a^2 + 2a \left(2a - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4}{3} + 2a^2 - \pi a \end{aligned}$$

$V_2 = V_1 - V'_1$ であるから $V_2 = 2\pi^2 a$

上式および (1) の結果を $V_1 = 2V_2$ に代入すると

$$\pi \left(\frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a \right) = 2 \times 2\pi^2 a$$

整理すると $2a^2 - 3\pi a + \frac{4}{3} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$f(a) = 2a^2 - 3\pi a + \frac{4}{3}$ とすると $f(1) = \frac{10}{3} - 3\pi < 0$

2 次方程式 $f(a) = 0$ は 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつことに注意して、 $\textcircled{1}$ を解くと

$$a = \frac{9\pi + \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}$$

■

1.14 (1) $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (x, \sqrt{c-x^2})$ とすると, $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ であるから

$$x + \sqrt{c-x^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{c}$$

上式において, 等号が成立するのは $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ向きのときであるから

$$x = \sqrt{c-x^2} \quad \text{これを解いて} \quad a_1 = x = \sqrt{\frac{c}{2}}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n}{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \log a_{n+1} = \frac{1}{2} \log a_n - \frac{1}{2}$$

$$b_n = \log a_n \quad \text{より} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n - \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 \sqrt{\frac{c}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 c - \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ の結果から} \quad b_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(b_n + 1)$$

$\{b_n + 1\}$ は初項 $\frac{1}{2}(\log_2 c + 1)$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n + 1 = \frac{1}{2}(\log_2 c + 1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{よって} \quad b_n = (\log_2 c + 1) \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1$$

■

1.15 (1) 得点 x の平均が 7 であるから

$$\frac{7+6+8+a+4}{5}=7 \quad \text{これを解いて} \quad a=10$$

(2) 得点 y の平均値が m であるから

$$\frac{0+(-4)+(-1)+2+b}{5}=m \quad \text{ゆえに} \quad b=5m+3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

したがって、得点 y の分散 s_y^2 は

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{0^2+(-4)^2+(-1)^2+2^2+(5m+3)^2}{5} - m^2 \\ &= 4m^2+6m+6 \end{aligned}$$

$$z = py + q \text{ より } s_z^2 = p^2 s_y^2 = p^2(4m^2+6m+6)$$

x と y の共分散 s_{xy} は

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{7 \cdot 0 + 6 \cdot (-4) + 8 \cdot (-1) + 10 \cdot 2 + 4 \cdot (5m+3)}{5} - 7 \cdot m \\ &= -3m \end{aligned}$$

$$z = py + q \text{ より } s_{xz} = p s_{xy} = p \cdot (-3m) = -3pm$$

(3) 得点 x の分散 s_x^2 は

$$s_x^2 = \frac{(7-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2+(4-7)^2}{5} = 4$$

$$s_x = 2, \quad s_z = |p|\sqrt{4m^2+6m+6}, \quad \frac{s_{xz}}{s_x s_z} = \frac{3}{4} \text{ より}$$

$$\frac{-3pm}{2 \cdot |p|\sqrt{4m^2+6m+6}} = \frac{3}{4} \quad (*)$$

上式の辺々を平方することにより

$$\frac{9m^2}{4(4m^2+6m+6)} = \frac{9}{16} \quad \text{これを解いて} \quad m = -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{これを } (*) \text{ に代入して整理すると } \frac{p}{|p|} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p > 0$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると } b = 5 \cdot (-1) + 3 = -2 \quad \blacksquare$$

1.16 (1) $b = ka$ とおく ($a \neq b$). $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$

$C : y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad l : y = 2ax - a^2$$

同様に, C 上の点 $B(b, b^2)$ における接線 m の方程式は

$$m : y = 2bx - b^2$$

l と m の方程式を連立して解くと

$$ax - a^2 = bx - b^2 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a+b}{2}, \quad y = ab$$

$$b = ka \text{ より, 点 } D \text{ の座標は } D\left(\frac{(1+k)a}{2}, ka^2\right)$$

(2) $A(a, a^2), B(b, b^2), D\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$ とすると

$$AB^2 = (b-a)^2 + (b^2-a^2) = (b-a)^2\{1 + (a+b)^2\} \quad (*)$$

$$AD^2 = \frac{1}{4}(b-a)^2 + a^2(b-a)^2 = (b-a)^2\left(\frac{1}{4} + a^2\right)$$

$AB^2 = AD^2, b-a \neq 0$ であるから

$$1 + (a+b)^2 = \frac{1}{4} + a^2 \quad \text{ゆえに} \quad b(2a+b) + \frac{3}{4} = 0$$

$$b = ka \text{ を上の第2式に代入して} \quad k(k+2)a^2 + \frac{3}{4} = 0$$

(3) 直線 AB の傾きは $\frac{b^2-a^2}{b-a} = a+b = a+ka = (1+k)a$

接線 l の傾きは $2a$ であるから, $AB \perp l$ であるための必要十分条件は

$$(1+k)a \cdot 2a = -1 \quad \text{ゆえに} \quad 2(1+k)a^2 + 1 = 0$$

(4) (*) に $b = ka$ を代入すると

$$AB^2 = (k-1)^2 a^2 \{1 + (1+k)^2 a^2\} \quad (**)$$

(2), (3) の結果の 2 式から定数項を消去して整理すると

$$\frac{4}{3}k(k+2)a^2 = 2(1+k)a^2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2(k-1)(2k+3) = 0$$

$a \neq 0, k \neq 1$ であるから $k = -\frac{3}{2}$ (3) の結論から $a^2 = 1$

これらを (**) に代入すると

$$AB^2 = \left(-\frac{3}{2} - 1\right)^2 \left\{1 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2\right\} = \frac{125}{16}$$

よって, $AB = AD$ の直角二等辺三角形の面積は

$$\frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{16} = \frac{125}{32}$$



1.17 (1) $f(x) = x, g(x) = x^2$ より

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x) dx = \int_0^1 x(a-x)^2 dx \\ &= \int_0^1 (a^2x - 2ax^2 + x^3) dx \\ &= \left[\frac{a^2}{2}x^2 - \frac{2a}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{a^2}{2} - \frac{2a}{3} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \sin \pi x, g(x) = x$ より

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x) dx = \int_0^1 (a-x) \sin \pi x dx \\ &= \int_0^1 (x-a) \left(\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right)' dx \\ &= \left[(x-a) \left(\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right) - \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x \right]_0^1 = \frac{2a-1}{\pi} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = x, g(a-x) = \begin{cases} a-x & (a-x \geq 0) \\ 0 & (a-x < 0) \end{cases}$ より

$$f(x)g(a-x) = \begin{cases} x(a-x) & (x \leq a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$$

(i) $1 \leq a$ のとき

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x) dx = \int_0^1 x(a-x) dx \\ &= \int_0^1 (ax - x^2) dx = \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x) dx \\ &= \int_0^a f(x)g(a-x) dx + \int_a^1 f(x)g(a-x) dx \\ &= \int_0^a x(a-x) dx = \frac{1}{6}a^3 \end{aligned}$$

(iii) $a \leq 0$ のとき $C = 0$ ■

1.18 (1) 条件を満たす直線は、次の 8 本より $L(3) = 8$

$$y = x, \quad y = -x + 4, \quad x = k, \quad y = k \quad (k = 1, 2, 3)$$

(2) 条件を満たす直線は、次の 14 本より $L(4) = 14$

$$\begin{aligned} y &= x - 1, \quad y = x, \quad y = x + 1, \\ y &= -x + 4, \quad y = -x + 5, \quad y = -x + 6, \\ x &= k, \quad y = k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

(3) 条件を満たす直線で傾きが 0 以上の直線は、(i)~(iv) の 16 本ある。

(i) 条件を満たす x 軸に平行な直線は $y = k$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$)

(ii) 条件を満たす傾き $\frac{1}{2}$ の直線は $y - k = \frac{x-1}{2}$ ($k = 1, 2, 3$)

(iii) 条件を満たす傾き 1 の直線は $y = x + k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2$)

(iv) 条件を満たす傾き 2 の直線は $y - 1 = 2(x - k)$ ($k = 1, 2, 3$)

(i)~(iv) の直線を点 (3, 3) を中心に 90° 回転させた直線も条件を満たす。

よって $L(5) = 16 \times 2 = 32$ ■

1.19 (1) $\{a_n\}, \{b_n\}$ について、次の漸化式が成立する.

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (*)$$

$a_2 = 2, b_2 = 1$ であるから、順次、 $n = 2, 3$ を代入すると

$$a_3 = 3, \quad b_3 = 2, \quad a_4 = 5, \quad b_4 = 3$$

$$(2) (**) \text{ より } \quad a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n$$

(3) (**) より、 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は自然数の数列で

$$a_{n+1} - a_n = b_n > 0, \quad b_{n+1} = a_n$$

であるから、これらは単増加列である.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
b_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

よって、条件をともにみたす最小の n は $n = 12$

(4) n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m | n$ と表記する.

(A) $d \in L$ について、 $d | a, d | b$ であるから

$$a = pd, \quad b = qd$$

となる整数 p, q が存在するから

$$c = a + b = pd + qd = (p + q)d \quad \text{ゆえに} \quad d | c$$

$$d | a, d | c \text{ であるから, } d \in R \quad \text{したがって} \quad L \subset R$$

(B) $d \in R$ について、 $d | a, d | c$ であるから

$$a = rd, \quad c = sd$$

となる整数 r, s が存在するから

$$b = c - a = sd - rd = (s - r)d \quad \text{ゆえに} \quad d | b$$

$$d | a, d | b \text{ であるから, } d \in L \quad \text{したがって} \quad R \subset L$$

(A), (B) から $L = R$

$L_n = \{d \mid d \text{ は } a_n, b_n \text{ の公約数} \}$ とすると、前の結論により

$$\begin{aligned} L_n &= \{d \mid d \text{ は } a_n, a_n + b_n \text{ の公約数} \} \\ &= \{d \mid d \text{ は } b_{n+1}, a_{n+1} \text{ の公約数} \} = L_{n+1} \end{aligned}$$

$L_1 = \{1\}$ であるから、すべての自然数 n について $L_n = \{1\}$ によって、すべての自然数 m に対して、 a_m と b_m は互いに素である。

$$(5) \quad r_n = \frac{a_n}{a_n + b_n} \text{ より } \frac{1}{r_n} = 1 + \frac{b_n}{a_n}$$

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{(a_n + b_n) + a_n} \\ &= \frac{1 + \frac{b_n}{a_n}}{1 + \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)} = \frac{\frac{1}{r_n}}{1 + \frac{1}{r_n}} = \frac{1}{r_n + 1} \end{aligned}$$

したがって $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$$f(x) = x \text{ とすると } \frac{1}{x+1} = x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x(x+1) = 1 \quad \text{整理すると} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

この2次方程式の解を

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

とおくと、 $\textcircled{1}$ に注意して

$$r_{n+1} - \alpha = \frac{1}{r_n + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} = -\frac{r_n - \alpha}{(\alpha + 1)(r_n + 1)} = -\frac{\alpha(r_n - \alpha)}{r_n + 1}$$

同様に $r_{n+1} - \beta = -\frac{\beta(r_n - \beta)}{r_n + 1}$

$\{r_n\}$ について、明らかに $r_n > 0$ であるから、 $r_n - \beta \neq 0$ より

$$\frac{r_{n+1} - \alpha}{r_{n+1} - \beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} \cdot \frac{r_1 - \alpha}{r_1 - \beta}$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \blacksquare$$

1.20 (1) A(2, 0, 0), B(-2, 0, 0), P(x, y, z) から

$$\overrightarrow{AP} = (x-2, y, z), \quad \overrightarrow{BP} = (x+2, y, z)$$

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ より, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ であるから

$$(x-2)(x+2) + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

P ≠ A, P ≠ B に注意して $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \neq \pm 2$

(2)

(ア) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AP}$ とすると (t は媒介変数)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= (2, 0, 0) + t(x-2, y, z) \\ &= (2+t(x-2), ty, tz) \end{aligned}$$

Q は yz 平面上の点であるから $2+t(x-2) = 0$

このとき, $x-2 \neq 0$ であるから $t = \frac{2}{2-x}$

$$\overrightarrow{OQ} = \left(0, \frac{2y}{2-x}, \frac{2z}{2-x}\right) \quad \text{よって} \quad \beta = \frac{2y}{2-x}, \gamma = \frac{2z}{2-x}$$

(イ) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AQ}$ とすると (s は媒介変数), P ≠ A より, $s \neq 0$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (2, 0, 0) + s(-2, \beta, \gamma) \\ &= (2-2s, \beta s, \gamma s) \end{aligned} \tag{*}$$

$|\overrightarrow{OP}|^2 = 4$ であるから

$$(2-2s)^2 + (\beta s)^2 + (\gamma s)^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad s\{(\beta^2 + \gamma^2 + 4)s - 8\} = 0$$

$s \neq 0$ より, $s = \frac{8}{\beta^2 + \gamma^2 + 4}$ を (*) に代入すると

$$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 8}{\beta^2 + \gamma^2 + 4}, \frac{8\beta}{\beta^2 + \gamma^2 + 4}, \frac{8\gamma}{\beta^2 + \gamma^2 + 4}\right)$$

$$\text{よって} \quad x = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 8}{\beta^2 + \gamma^2 + 4}, \quad y = \frac{8\beta}{\beta^2 + \gamma^2 + 4}, \quad z = \frac{8\gamma}{\beta^2 + \gamma^2 + 4}$$

(ウ) $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OC}$ より, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ であるから

$$x + 2y + 3z = 0$$

(1) で求めた球面および上の平面の共通部分であるから, これに (イ) の結果を代入すると

$$\frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 8}{\beta^2 + \gamma^2 + 4} + \frac{16\beta}{\beta^2 + \gamma^2 + 4} + \frac{24\gamma}{\beta^2 + \gamma^2 + 4} = 0$$

これを整理すると $\beta^2 + \gamma^2 + 8\beta + 12\gamma - 4 = 0$

したがって $(\beta + 4)^2 + (\gamma + 6)^2 = 56$

よって yz 平面上の $(-4, -6)$ を中心とする半径 $2\sqrt{14}$ の円



- 1.21** (1) $OA = 4$, $OC = 1$, $OB = \sqrt{2}$, $\angle OCB = 90^\circ$ であるから $BC = 1$
 O を座標平面上の原点とし, $A(4, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, 0)$ とすると

$$\vec{a} = (4, 0), \vec{b} = (1, 1) \quad \text{よって} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 4$$

(2) 直線 AB の方程式は

$$y = \frac{0-1}{4-1}(x-4) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

直線 AB に垂直な直線 OD の方程式は $y = 3x$

2 直線 AB , OD の交点 D の座標は $\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$

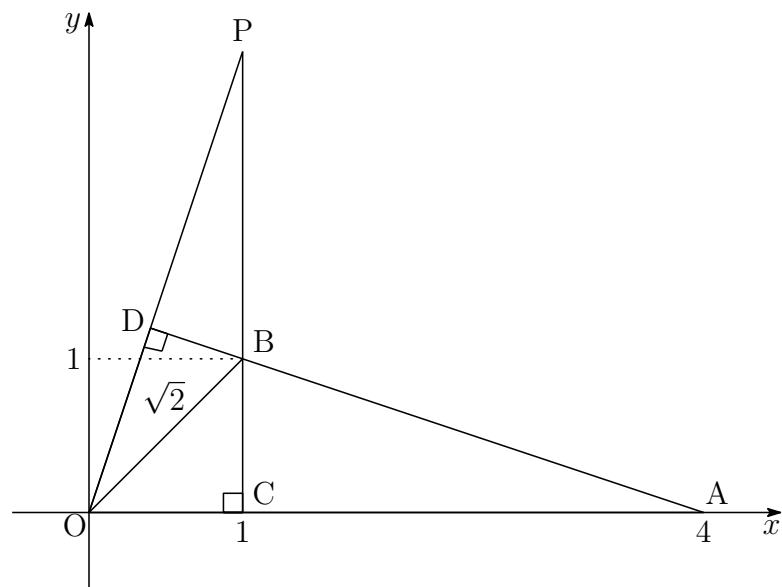
$(1, 0) = \frac{1}{4}\vec{a}$, $(0, 1) = -\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{6}{5} \left(-\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b} \right) = -\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}$$

よって $s = -\frac{1}{5}$, $t = \frac{6}{5}$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{5}(1, 3) \quad \text{より} \quad |\overrightarrow{OD}| = \frac{2}{5}\sqrt{1^2 + 3^2} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

- (3) 点 P の x 座標が 1 であり, P は直線 $y = 3x$ 上の点であるから $P(1, 3)$
 よって $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$



- 1.22 (1) [3](#) (1) を参照.
- (2) [4](#) (2) を参照.
- (3) [4](#) (3) を参照.
- (4) [3](#) (3) を参照.

1.23 (1) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $0 < \angle AOB < \pi$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle AOB$ より

$$-4 < \vec{a} \cdot \vec{b} < 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ とおくと, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ であるから

$$\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{p} = 4, \quad \vec{b} \cdot \vec{p} = 4$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は, 1次独立であるから, $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とすると (x, y は実数)

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b}) = 4 \\ \vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b}) = 4 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} 4x + (\vec{a} \cdot \vec{b})y = 4 \\ (\vec{a} \cdot \vec{b})x + 4y = 4 \end{cases}$$

① に注意してこれを解くと $x = y = \frac{4}{4 + \vec{a} \cdot \vec{b}}$

よって, $\overrightarrow{OP} = \frac{4}{4 + \vec{a} \cdot \vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$ が成立する.

(2) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2(4 + \vec{a} \cdot \vec{b})$ であるから, (1) の結果から

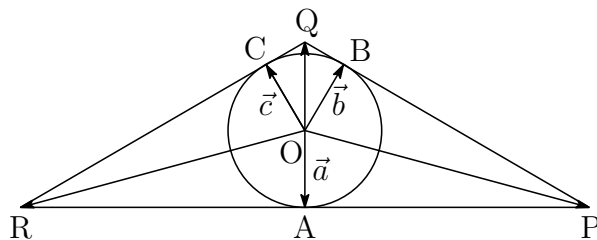
$$\overrightarrow{OP} = \frac{8}{|\vec{a} + \vec{b}|} \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad OP &= \frac{8}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{8}{\sqrt{8 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}} = \frac{8}{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\text{別解} \quad \cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \angle AOB = 150^\circ$$

$\angle AOP = 75^\circ$ であるから

$$OP = \frac{OA}{\cos 75^\circ} = 2 \times \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$



(3) 与えられた条件より, $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\angle AOB = \angle AOC = 150^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \angle QPR = \angle QRP = 30^\circ$$

(2) と同様に $OQ = \frac{8}{\sqrt{8+2\vec{b} \cdot \vec{c}}} = \frac{8}{\sqrt{8+2 \cdot 2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

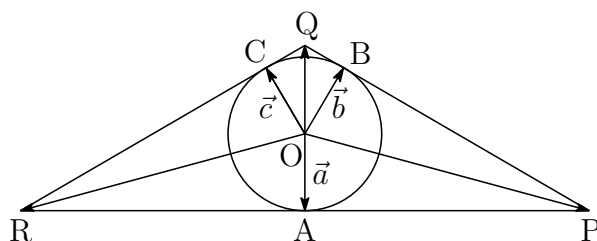
$\triangle QRP$ は, $PQ = RQ$ の二等辺三角形であるから

$$AQ = OA + OQ = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$PR = 2AP = 2\sqrt{3}AQ$$

よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}PR \cdot AQ &= \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot 2\sqrt{3}AQ = \sqrt{3}AQ^2 \\ &= \sqrt{3} \left(2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2 = 16 + \frac{28}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$



補足 $\cos \angle BOC = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ より, $\angle BOC = 60^\circ$

$\angle BOQ = 30^\circ$ であるから

$$OQ = \frac{OB}{\cos 30^\circ} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

■

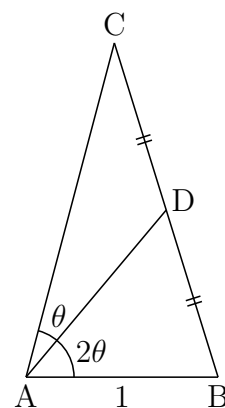
1.24 (1) $BD = CD$ より, $\triangle ABD = \triangle ACD$ であるから

$$\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin 2\theta = \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin \theta$$

したがって $AB \sin 2\theta = AC \sin \theta$

$AB = 1$ より

$$AC = \frac{AB \sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta$$



(2) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 3\theta \\ &= 1^2 + (2 \cos \theta)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos \theta \cdot (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ &= -16 \cos^4 \theta + 16 \cos^2 \theta + 1 \end{aligned}$$

よって $BC = \sqrt{-16 \cos^4 \theta + 16 \cos^2 \theta + 1}$

(3) (2) の結果から

$$BC^2 = -16 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)^2 + 5$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ に注意して

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, 最大値 } \sqrt{5}$$

■

1.25 (1) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n$ より $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

(2) (1) の結果から

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2 \quad (*)$$

$$S_n^2 + 4S_n + 4 = 2^{10} \text{ より } (S_n + 2)^2 = 2^{10}$$

$$S_n + 2 = 2^{n+1} > 0 \text{ に注意して } 2^{n+1} = 2^5 \text{ よって } n = 4$$

(3) (*) を $\sum_{k=1}^n S_k = 2S_n - 10$ に代入すると

$$\sum_{k=1}^n (2^{k+1} - 2) = 2(2^{n+1} - 2) - 10$$

$$\text{したがって} \quad \frac{2^2(2^n - 1)}{2 - 1} - 2n = 2^2(2^n - 1) - 10$$

$$\text{整理すると} \quad -2n = -10 \quad \text{よって} \quad n = 5$$

■

1.26 (1) $f(x) = x \sin(1 - x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \sin(1 - x) + x \{\sin(1 - x)\}' \\ &= \sin(1 - x) - x \cos(1 - x) \end{aligned}$$

(あ) $\sin(1 - x) - x \cos(1 - x)$

(2) $f(x) = e^{\frac{x}{1+x}}$ を微分すると

$$f'(x) = e^{\frac{x}{1+x}} \left(\frac{x}{1+x} \right)' = e^{\frac{x}{1+x}} \cdot \frac{(x)'(1+x) - x(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{e^{\frac{x}{1+x}}}{(1+x)^2}$$

(い) $\frac{e^{\frac{x}{1+x}}}{(1+x)^2}$

(3) $\{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\}' = \frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(1+x^2)' = 3x\sqrt{1+x^2} = 3f(x)$ より

$$\int f(x) dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(う) $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$

(4) $(x^3 \log x)' = 3x^2 \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \log x + x^2$ より

$$3f(x) = 3x^2 \log x = (x^3 \log x)' - x^2 = \left(x^3 \log x - \frac{x^3}{3} \right)'$$

よって $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C$

(え) $\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9}$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right) dx$

$$= \frac{1}{2} \left[x + 2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$$

(お) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$

■

1.27 (1) A の作る図形が三角形でないのは $\boxed{1}$ を含む 3 点が一直線上にある

$$\boxed{1 \mid 2 \mid 6} \quad \boxed{1 \mid 3 \mid 7} \quad \boxed{1 \mid 4 \mid 8} \quad \boxed{1 \mid 5 \mid 9} \quad (*)$$

の 4 通りである。よって、求める確率は

$$\frac{4}{{}_9C_3} = \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{21}$$

(2) $\boxed{1}$ を含まない図形は三角形である。したがって、 $\boxed{1}$ を含む人の図形が三角形であればよい。 $\boxed{1}$ を含む A, B, C それぞれ場合において、(1) で求めた三角形でない確率が等しいことに注意して

$$1 - \frac{1}{21} \times 3 = \frac{6}{7}$$

- (3) 条件②から，Aの作る4回の図形は，(*)で示した4つの場合が1回ずつ起こる．(*)を順に

$$\alpha \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \beta \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \gamma \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} \quad \delta \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 9 \\ \hline \end{array}$$

とすると，B，Cの条件により，Aについて

	B	C	A						
1 回目	<table><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>	3			<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>				β 以外
3									
2 回目	<table><tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr></table>	2	4		<table><tr><td>5</td><td>6</td><td></td></tr></table>	5	6		α, γ, δ 以外
2	4								
5	6								
3 回目	<table><tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr></table>	2	3		<table><tr><td>6</td><td>7</td><td></td></tr></table>	6	7		α, β 以外
2	3								
6	7								
4 回目	<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>				<table><tr><td>2</td><td>8</td><td></td></tr></table>	2	8		α, γ 以外
2	8								

Aは2回目に β ，1回目に α ，3回目に γ ，4回目に δ の順に決定する．

	A	B	C	残り									
1 回目	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr></table>	1	2	6	<table><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>	3			<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>				(4, 5, 7, 8, 9)
1	2	6											
3													
2 回目	<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>7</td></tr></table>	1	3	7	<table><tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr></table>	2	4		<table><tr><td>5</td><td>6</td><td></td></tr></table>	5	6		(8, 9)
1	3	7											
2	4												
5	6												
3 回目	<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>8</td></tr></table>	1	4	8	<table><tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr></table>	2	3		<table><tr><td>6</td><td>7</td><td></td></tr></table>	6	7		(5, 9)
1	4	8											
2	3												
6	7												
4 回目	<table><tr><td>1</td><td>5</td><td>9</td></tr></table>	1	5	9	<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>				<table><tr><td>2</td><td>8</td><td></td></tr></table>	2	8		(3, 4, 6, 7)
1	5	9											
2	8												

- 2回目のBは9より，2回目のCは8
- 3回目のBは5より，3回目のCは9
- 4回目のCは7より，4回目のBは3, 4, 6
- 1回目のBは8, 9より，1回目のCは4, 5, 7

よって

	A			B			C		
1回目	1	2	6	3	8	9	4	5	7
2回目	1	3	7	2	4	9	5	6	8
3回目	1	4	8	2	3	5	6	7	9
4回目	1	5	9	3	4	6	2	7	8



- 1.28 (1) $g(x) = 0$, $h(x) = 0$ の解をそれぞれ α , β とすると

$$g(\alpha) = 0, \quad h(\beta) = 0$$

$x^3 - 1 = (x - 1)g(x)$, $x^3 + 1 = (x + 1)h(x)$ であるから

$$\alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)g(\alpha) = 0, \quad \beta^3 + 1 = (\beta + 1)h(\beta) = 0$$

よって、方程式 $g(x) = 0$ の解は $x^3 - 1 = 0$ を満たし、方程式 $h(x) = 0$ の解は $x^3 + 1 = 0$ を満たす.

(2) (1) の結論から、 $\alpha^3 = 1$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^{6n} + \alpha^{3n} - 2 \\ &= (\alpha^3)^{2n} + (\alpha^3)^n - 2 = 1^{2n} + 1^n - 2 = 0 \end{aligned}$$

因数定理により、 $f(x)$ は $g(x)$ を因数にもつ、すなわち、 $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる.

別解 $f(x)$ が $x^2 + x + 1$ を因数にもつことを示す.

$$\begin{aligned} x^{6n} + x^{3n} - 2 &= (x^{3n} + 2)(x^{3n} - 1) \\ &= (x^{3n} + 2)(x^3 - 1) \sum_{k=1}^n x^{3(k-1)} \\ &= (x^{3n} + 2)(x - 1)(x^2 + x + 1) \sum_{k=1}^n x^{3(k-1)} \end{aligned}$$

(3) (1) の結論より、 $\beta^3 = -1$ であるから

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \beta^{6n} + \beta^{3n} - 2 = (\beta^3)^{2n} + (\beta^3)^n - 2 \\ &= (-1)^{2n} + (-1)^n - 2 = (-1)^n - 1 \end{aligned}$$

上式より、 $f(\beta) = 0$ となるのは、 n が偶数のときであり、このとき、 $f(x)$ は $h(x)$ を因数にもつ.

(4) $n = 1$ のとき $f(x) = x^6 + x^3 - 2 = (x^3 + 2)(x^3 - 1)$

$f(x) = 0$ のとき $x^3 = -2$ または $x^3 = 1$

$f(x) = 0$ の解を次式で表す.

$$x = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

(i) $x^3 = -2$ のとき, 方程式は

$$r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3 = 2, \quad 3\theta = \pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

したがって $r = \sqrt[3]{2}, \quad \theta = \frac{2k+1}{3}\pi \quad (k = 0, 1, 2)$

(ii) $x^3 = 1$ のとき, 方程式は

$$r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3 = 1, \quad 3\theta = 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

したがって $r = 1, \quad \theta = \frac{2k}{3}\pi \quad (k = 0, 1, 2)$

(i), (ii) から, $f(x) = 0$ のすべての虚数解を表記すると

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2k+1}{3}\pi + i \sin \frac{2k+1}{3}\pi \right) \quad (k = 0, 2), \\ & \cos \frac{2k}{3}\pi + i \sin \frac{2k}{3}\pi \quad (k = 1, 2) \end{aligned}$$

■

1.29 (1) 袋 B にある白玉 2 個, 赤玉 2 個から白玉 1 個を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(2) 袋 A に白玉が入っているとき, 袋 B(白玉 2 個, 赤玉 2 個) から白玉 1 個を取り出す確率が $\frac{1}{2}$ であり, 袋 A に赤玉が入っているとき, 袋 B(白玉 3 個, 赤玉 1 個) から白玉 1 個を取り出す確率が $\frac{3}{4}$ であるから, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{3}{4}(1 - p_n) \quad \text{すなわち} \quad p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}$$

(3) (2) 結果から

$$p_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4} \left(p_n - \frac{3}{5} \right)$$

$\left\{ p_n - \frac{3}{5} \right\}$ は, 初項 $p_1 - \frac{3}{5} = -\frac{1}{10}$, 公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{3}{5} = -\frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{3}{5}$$



2.1 (1) $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ より, $8!$ の約数の個数は

$$(7+1)(2+1)(1+1)(1+1) = \mathbf{96}$$

(2) $17x + 2 = 22y + 4$ とし (x, y は整数), 法 17 に関する合同式を考えると

$$\begin{aligned} 2 \equiv 5y + 4 &\iff 5y \equiv -2 &\iff 15y \equiv -6 \\ &\iff -2y \equiv -6 &\iff y \equiv 3 \pmod{17} \end{aligned}$$

$y = 17k + 3$ とおくと (k は整数)

$$22y + 4 = 22(17k + 3) + 4 = 374k + 70$$

求める 4 桁の最小の整数は, $k = 3$ のとき $374 \times 3 + 70 = \mathbf{1192}$

(3) 2 次不等式 $2x^2 - (2a - 3)x - 3a < 0 \quad \dots \textcircled{1}$

(i) ① より $(2x + 3)(x - a) < 0$

$$\text{よって} \quad a > -\frac{3}{2} \text{ のとき} \quad -\frac{3}{2} < x < a,$$

$$a = -\frac{3}{2} \text{ のとき} \quad \text{解なし,}$$

$$a < -\frac{3}{2} \text{ のとき} \quad a < x < -\frac{3}{2}$$

(ii) (i) の結果から

$a > -\frac{3}{2}$ のとき, ① を満たす整数 4 個は $-1, 0, 1, 2$ であるから

$$2 < a \leq 3$$

$a < -\frac{3}{2}$ のとき, ① を満たす整数 4 個は $-5, -4, -3, -2$ であるから

$$-6 \leq a < -5$$

よって $2 < a \leq 3, -6 \leq a < -5$ ■

- 2.2** (1) 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上の 4 点 $(\pm a, \pm b)$ (複号任意) を頂点とする四角形の面積を S とすると ($a > 0, b > 0$)

$$S = 4ab$$

2 つの正の数 $\frac{a^2}{4}, \frac{b^2}{9}$ の相加平均・相乗平均の大小関係から

$$1 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot \frac{b^2}{9}} = \frac{ab}{3} = \frac{S}{12} \quad \text{ゆえに} \quad S \leq 12$$

よって、求める面積の最大値は **12**

別解 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上の 4 点 $(\pm 2 \cos \theta, \pm 3 \sin \theta)$ (複号任意) を頂点とする四角形の面積を S とすると ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

$$S = 4 \cos \theta \cdot 6 \sin \theta = 12 \sin 2\theta \leq 12$$

よって、求める面積の最大値は **12**

- (2) 与えられた不等式から

$$\begin{cases} 2^{2x+y+z} = 2^{21} \\ 2^z = 2^{3xy} \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} 2x + y + z = 21 \\ z = 3xy \end{cases}$$

(*) から z を消去すると

$$2x + y + 3xy = 21 \quad \text{ゆえに} \quad (3x+1)(3y+2) = 65$$

$3x+1$ が 65 の約数となるとき

$$3x+1 = -65, -5, 1, 13$$

それぞれの場合について

$$3y+2 = -1, -13, 65, 5$$

したがって、整数 (x, y) の組は

$$(x, y) = (-22, -1), (-2, -5), (0, 21), (4, 1)$$

$z = 3xy$ より、求める (x, y, z) の組は

$$(x, y, z) = (-22, -1, 66), (-2, -5, 30), \\ (0, 21, 0), (4, 1, 12)$$

$$(3) \quad w = i \frac{z+2}{z-1} \text{ より } (w-i)z = w+2i$$

$$\text{上式において } w \neq i \text{ であるから } z = \frac{w+2i}{w-i}$$

$$|z| = 2 \text{ であるから}$$

$$\left| \frac{w+2i}{w-i} \right| = 2 \quad \text{ゆえに} \quad |w+2i| = 2|w-i| \quad (*)$$

$$\text{したがって} \quad |w+2i|^2 = 4|w-i|^2$$

$$(w+2i)(\bar{w}-2i) = 4(w-i)(\bar{w}+i)$$

$$\text{整理すると} \quad w\bar{w} + 2iw - 2i\bar{w} = 0$$

$$(w-2i)(\bar{w}+2i) = 4 \quad \text{ゆえに} \quad |w-2i| = 2$$

よって、点 w は中心 $2i$ 、半径 2 の円を描く。 ■

$$\mathbf{2.3} \quad (1) \quad \vec{a} = (1, p), \quad \vec{b} = (q, -1), \quad \vec{c} = (-1, 1)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1-q, 1+p) \perp \vec{c} = (-1, 1) \text{ より}$$

$$-(1-q) + (1+p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad q = -p \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} - \vec{c} = (q+1, -2) // \vec{a} = (1, p) \text{ より}$$

$$p(q+1) - (-2) \cdot 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p(q+1) + 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

① を ② に代入すると

$$p(-p+1) + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p-2)(p+1) = 0$$

$$p = 2 \text{ のとき, } q = -2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} = (1, 2), \quad \vec{b} = (-2, -1)$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はそれぞれ異なるので適する。

$$p = -1 \text{ のとき, } q = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} = \vec{b} = (1, -1) \text{ となり不適.}$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{p = 2, q = -2}$$

補足 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ について

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0, \quad \vec{a} // \vec{b} \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

$$(2) \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = r(1 - S_n) \quad \cdots (*)$$

$S_1 = a_1 = \frac{1}{3}$ であるから, $n = 1$ を $(*)$ に代入すると

$$a_2 = r \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}r$$

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r$ であるから, $n = 2$ を $(*)$ に代入すると

$$a_3 = r \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}r \right) \right\} = \frac{2}{3}r(1 - r)$$

$n \geq 2$ のとき, $a_{n+1} = r(1 - S_n)$, $a_n = r(1 - S_{n-1})$ の 2 式の差をとると

$$a_{n+1} - a_n = -r(S_n - S_{n-1}) = -ra_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = (1 - r)a_n$$

上の第 2 式が $n = 1$ のときも成立するとき $\frac{2}{3}r = (1 - r) \cdot \frac{1}{3}$

$0 < r < 1$ に注意してこれを解くと $r = \frac{1}{3}$

補足 $a_{n+1} = (1 - r)a_n$ より, 公比は $1 - r = \frac{2}{3}$

$$a_2^2 = a_1 a_3 \text{ を利用すると } \left(\frac{2}{3}r \right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}r(1 - r)$$

$0 < r < 1$ に注意してこれを解くと $r = \frac{1}{3}$

(3) k は整数

$n = 3k$, すなわち, $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき $n^2 \equiv 0 \pmod{3}$

$n = 3k + 1$, すなわち, $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$

$n = 3k + 2$, すなわち, $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$

したがって, n^2 を 3 で割った余りは 2 にならない.

l および m が 3 の倍数でないと仮定すると, $l^2 \equiv m^2 \equiv 1 \pmod{3}$ より

$$l^2 + m^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2, \quad n^2 \not\equiv 2 \pmod{3}$$

したがって $l^2 + m^2 \neq n^2$

よって, l または m は 3 の倍数である. ■

2.4 (1) $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$, $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, $t = \cos x$ より

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 2t^2 - 1, \\ \cos 3x &= 2 \cos 2x \cos x - \cos x \\ &= 2(2t^2 - 1)t - t = 4t^3 - 3t\end{aligned}$$

上の2式を利用すると

$$\begin{aligned}\cos x + \cos 2x + \cos 3x &= t + (2t^2 - 1) + (4t^3 - 3t) \\ &= 4t^3 + 2t^2 - 2t - 1 \\ &= (2t + 1)(2t^2 - 1) \\ &= (2t + 1)(\sqrt{2}t + 1)(\sqrt{2}t - 1)\end{aligned}$$

これから, 不等式 $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$ は

$$(2t + 1)(\sqrt{2}t + 1)(\sqrt{2}t - 1) > 0, \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$$\text{したがって} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < t < -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < t \leq 1$$

$$\text{よって} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{2}{3}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$$

(2) $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \cdots (*)$

(*) に $x = y = 0$ を代入すると

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 0$$

(*) より, $f(x + h) = f(x) + f(h)$ であるから

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2$$

これを積分すると $f(x) = 2x + C$ (C は積分定数)

$f(0) = 0$ であるから $C = 0$ よって $f(x) = 2x$

(3) $\int_{-1}^1 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx$ において, $x = -t$ とすると $\frac{dx}{dt} = -1$

x	$-1 \rightarrow 0$
t	$1 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx &= \int_1^0 \frac{t^2 - t^4}{1 + e^{-t}} (-1) dt = \int_0^1 \frac{e^t(t^2 - t^4)}{e^t + 1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x} dx\end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \int_{-1}^0 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x} dx$$

上の等式を利用すると

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx &= \int_{-1}^0 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx + \int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x} dx + \int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

■

- 2.5 (1) 4個のさいころのうち、3個の同じ目を A 、残りの1個の目を B とする ($A \neq B$). A , B の選び方が ${}_6P_2$ 通りあるから、求める確率は

$${}_6P_2 \times \frac{4!}{3!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = 6 \cdot 5 \times 4 \times \frac{1}{6^4} = \frac{5}{54}$$

- (2) $|x^2 + 6x - 1| \leq 7 - x$ より

$$-(7 - x) \leq x^2 + 6x - 1 \leq 7 - x$$

したがって

$$\begin{cases} x^2 + 7x - 8 \leq 0 \\ x^2 + 5x + 6 \geq 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -8 \leq x \leq 1 \\ x \leq -3, -2 \leq x \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad -8 \leq x \leq -3, -2 \leq x \leq 1$$

補足 $|X| = \max(X, -X)$ であるから、不等式 $|X| \leq Y$ について

$$X \leq Y \quad \text{かつ} \quad -X \leq Y \quad \text{すなわち} \quad -Y \leq X \leq Y$$

- (3) $3.1 < \pi < 3.2$ より $9.61 < \pi^2 < 10.24 < 11$

$$\pi < \sqrt{11} \text{ であるから } \log_{11} \pi < \log_{11} \sqrt{11} = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また } \sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} > \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \log_{11} \pi < \frac{1}{2} < \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$$

■

- 2.6 (1) $f(x) = x \log(x+2) + 1$ を微分すると $f'(x) = \log(x+2) + \frac{x}{x+2}$
 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = f'(t)x + f(t) - tf'(t)$$

この直線が原点を通るとき, $f(t) - tf'(t) = 0$ より

$$t \log(t+2) + 1 - t \left\{ \log(t+2) + \frac{t}{t+2} \right\} = 0$$

整理すると $t^2 - t - 2 = 0$ ゆえに $(t+1)(t-2) = 0$

これを解いて $t = -1, 2$

このとき $f'(-1) = -1 < 0$, $f'(2) = 2 \log 2 + \frac{1}{2} > 0$

よって, 求める接線の方程式は $y = \left(2 \log 2 + \frac{1}{2} \right) x$

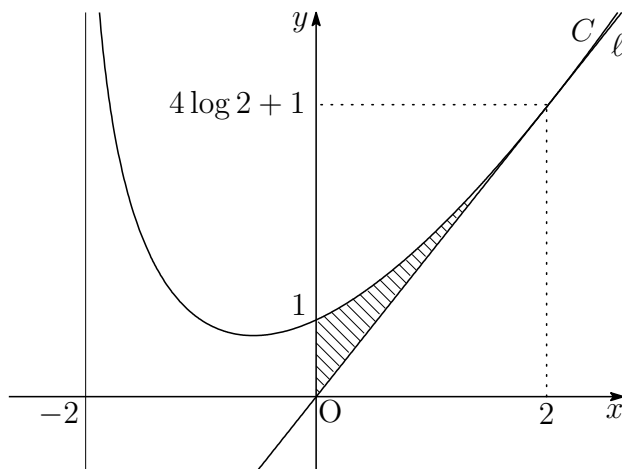
- (2) $f'(x) = \log(x+2) + 1 - \frac{2}{x+2}$ を微分すると ($x > -2$)

$$f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} > 0$$

したがって, C は下に凸である.

- (3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{x \log(x+2) + 1\} dx - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (4 \log 2 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2 - 4)' \log(x+2) dx + \left[x \right]_0^2 - (4 \log 2 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \left[(x^2 - 4) \log(x+2) \right]_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 (x-2) dx + 1 - 4 \log 2 \\ &= 2 \log 2 - \frac{1}{4} \left[(x-2)^2 \right]_0^2 + 1 - 4 \log 2 = 2 - 2 \log 2 \end{aligned}$$



別解 (ガウス・グリーンの定理の系)

$$\begin{aligned}xf'(x) - f(x) &= x \left\{ \log(x+2) + \frac{x}{x+2} \right\} - \{x \log(x+2) + 1\} \\&= \frac{x^2}{x+2} - 1 = x - 3 + \frac{4}{x+2}\end{aligned}$$

求める面積 S は (積分区間は動径の偏角が正の向きになるようにとる)

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \int_2^0 (xy' - y) dx \\&= \frac{1}{2} \int_2^0 \left(x - 3 + \frac{4}{x+2} \right) dx \\&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \log(x+2) \right]_2^0 \\&= 2 - 2 \log 2\end{aligned}$$

補足 別解の公式は、ガウス・グリーンの定理

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt$$

の変数 t を x に変更したものである。 ■

- 2.7** (1) $C: y = (x-a)^2 + 3a^2$ について、 $f(x) = (x-a)^2 + 3a^2$ より、頂点 A は $(a, 3a^2)$
直線 OA の傾きは $3a$ であるから、その方程式は $y = 3ax$
これと $C: y = x^2 - 2ax + 4a^2$ から y を消去すると

$$x^2 - 2ax + 4a^2 = 3ax \quad \text{ゆえに} \quad (x-a)(x-4a) = 0$$

点 P は点 A と異なるから、点 P の x 座標 p は $p = 4a$

$f'(x) = 2x - 2a$ より C 上の点 $Q(q, f(q))$ における接線は

$$y = (2q - 2a)(x - q) + q^2 - 2aq + 4a^2$$

すなわち $y = 2(q - a)x - q^2 + 4a^2$

これが原点を通るから ($q > 0, a > 0$)

$$-q^2 + 4a^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad q = 2a$$

$p = 4a, q = 2a$ であるから ($a > 0$) $p > q$

- (2) 曲線 $C: y = f(x)$ と $Q(q, f(q))$ における接線 $y = 2ax$ および直線 $x = p$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする. このとき¹

$$f(x) = f(q) + f'(q)(x - q) + (x - q)^2$$

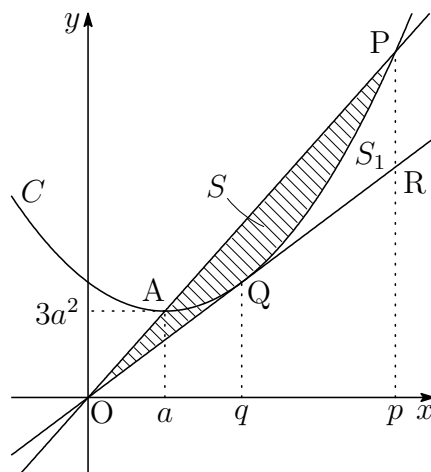
であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_q^p \{f(x) - f(q) - f'(q)(x - q)\} dx \\ &= \int_q^p (x - q)^2 dx = \frac{1}{3}(p - q)^3 \\ &= \frac{1}{3}(4a - 2a)^3 = \frac{8}{3}a^3 \end{aligned}$$

接線 OQ と直線 $x = p$ の交点を R とすると
 $P(4a, 12a^2)$, $R(4a, 8a^2)$ より

$$\begin{aligned} S &= \triangle OPR - S_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4a(12a^2 - 8a^2) - \frac{8}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3 \end{aligned}$$

(3) $S = \frac{2}{3}$ を (2) の結果に代入すると $\frac{16}{3}a^3 = \frac{2}{3}$ これを解いて $a = \frac{1}{2}$



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

別解 直線 $x = 2a$ と直線 OP の交点を Q' とすると $Q(2a, 4a^2)$, $Q'(2a, 6a^2)$

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} p \cdot QQ' = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 2a^2 = 4a^3$$

C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は, 1/6 公式により

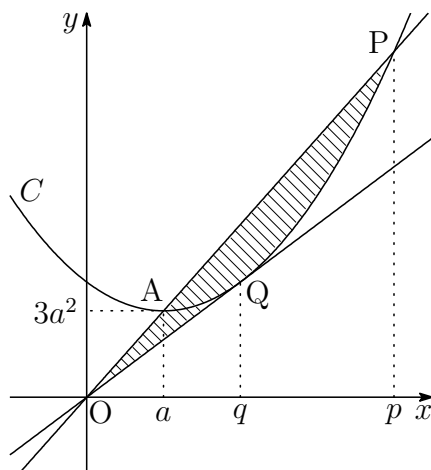
$$\frac{1}{6}(p-q)^3 = \frac{1}{6}(4a-2a)^3 = \frac{4}{3}a^3$$

$$\text{よって, 求める面積は } S = 4a^3 + \frac{4}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3$$

解説 $xy' - y = x(2x - 2a) - (x^2 - 2ax + 4a^2)$
 $= (x - 2a)^2 + 4a(x - 2a)$

求める面積 S は (ガウス・グリーンの定理の系)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{2a}^{4a} (xy' - y) dx = \frac{1}{2} \int_{2a}^{4a} \{(x - 2a)^2 + 4a(x - 2a)\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x - 2a)^3 + 2a(x - 2a)^2 \right]_{2a}^{4a} = \frac{16}{3}a^3 \end{aligned}$$



補足 解説の公式は, ガウス・グリーンの定理

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt$$

の変数 t を x に変更したものである. このとき, 積分区間は動径の偏角が正の向きになるようにとる. 例えば, C と線分 OQ, OA で囲まれた部分の面積 S' を求める場合は次のようになる.

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} \int_{2a}^a (xy' - y) dx = \frac{1}{2} \int_{2a}^a \{(x - 2a)^2 + 4a(x - 2a)\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x - 2a)^3 + 2a(x - 2a)^2 \right]_{2a}^a = \frac{5}{6}a^3 \end{aligned}$$



2.8 (1) $x > 1, y > 1$ のとき $\log_x y > 0$

相加平均・相乗平均の大小関係から

$$\begin{aligned}\log_x y + \log_y x &= \log_x y + \frac{1}{\log_x y} \\ &\geq 2\sqrt{\log_x y \cdot \frac{1}{\log_x y}} = 2\end{aligned}$$

(2) 連立不等式

$$x > 1, \quad y > x, \quad \log_x y + \log_y x < \frac{5}{2} \quad (*)$$

の第3式について $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} < \frac{5}{2}$

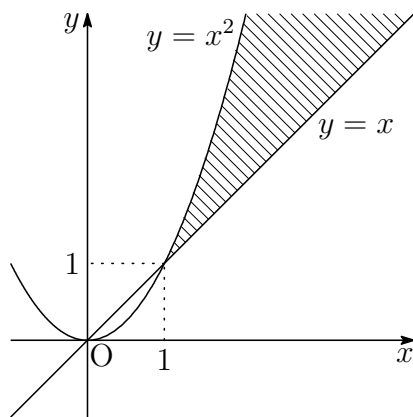
$$2(\log_x y)^2 - 5\log_x y + 2 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\log_x y - 2)(2\log_x y - 1) < 0$$

$y > x > 1$ であるから, $\log_x y > 1$ より $1 < \log_x y < 2$

$$\log_x x < \log_x y < \log_x x^2 \quad \text{ゆえに} \quad x < y < x^2$$

(*) の連立不等式は $1 < x < y < x^2$

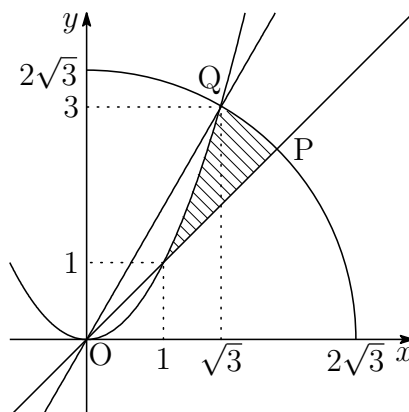
よって, 求める領域は, 下の図の斜線部分で境界線は含まない.



- (3) 第1象限において, $y = x$, $y = x^2$ と円 $x^2 + y^2$ との交点をそれぞれ P, Q とすると $Q(\sqrt{3}, 3)$

領域 D は下の図の斜線部分 (境界線を含む) で, その面積を S とすると, $\angle POQ = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\pi}{12} + \int_0^1 (x - x^2) dx - \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}x - x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{\pi}{12} + \int_0^1 x(1 - x) dx - \int_0^{\sqrt{3}} x(\sqrt{3} - x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6}(1 - 0)^3 - \frac{1}{6}(\sqrt{3} - 0)^3 \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



別解 $y = x^2$ にガウス・グリーンの定理の系を適用する.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} (xy' - y) dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} x^2 dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

補足 別解の公式は, ガウス・グリーンの定理

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt$$

の変数 t を x に変更したものである.

■

2.9 (1)

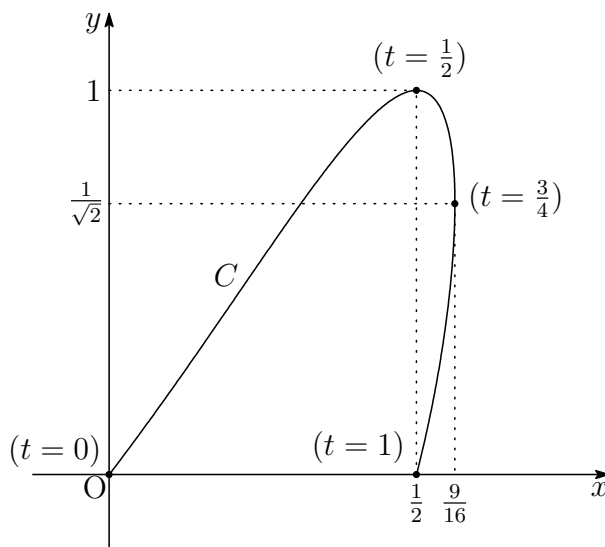
$$\begin{aligned}\int_0^1 t \sin \pi t \, dt &= \int_0^1 t \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right)' dt \\ &= \left[t \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right) - \left(-\frac{1}{\pi^2} \sin \pi t \right) \right]_0^1 = \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

(2) $x = -t \left(t - \frac{3}{2} \right), y = \sin \pi t$ より $(0 \leq t \leq 1)$

$$\frac{dx}{dt} = -2t + \frac{3}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = \pi \cos \pi t$$

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{3}{4}$	...	1
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	0	-	
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	-	-	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	(0, 0)		$(\frac{1}{2}, 1)$		$(\frac{9}{16}, \frac{1}{\sqrt{2}})$		$(\frac{1}{2}, 0)$

したがって、 C のグラフの概形は次のようになる。



よって、曲線 C と直線 $x = a$ の共有点の個数は

$$\begin{cases} a < 0, \frac{9}{16} < a & \text{のとき} & 0 \text{ 個} \\ 0 \leq a < \frac{1}{2}, a = \frac{9}{16} & \text{のとき} & 1 \text{ 個} \\ \frac{1}{2} \leq a < \frac{9}{16} & \text{のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$$

(3) $x = f(t) = -t \left(t - \frac{3}{2} \right)$, $y = g(t) = \sin \pi t$ とし ($0 \leq t \leq 1$), 求める面積を S とすると, (1) の結果に注意して

$$\begin{aligned} S &= \int_{f(0)}^{f(\frac{3}{4})} y \, dx - \int_{f(1)}^{f(\frac{3}{4})} y \, dx = \int_{f(0)}^{f(1)} y \, dx = \int_0^1 y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sin \pi t \cdot \left(-2t + \frac{3}{2} \right) dt \\ &= -2 \int_0^1 t \sin \pi t \, dt + \frac{3}{2} \int_0^1 \sin \pi t \, dt \\ &= -2 \cdot \frac{1}{\pi} + \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

補足 (ガウス・グリーンの定理²) $x = f(t) = -t \left(t - \frac{3}{2} \right)$, $y = g(t) = \sin \pi t$ とし ($0 \leq t \leq 1$), 求める面積を S とすると (偏角の向きが正となるように積分区間をとる)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_1^0 \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} \, dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^0 \{f(t)g(t)\}' \, dt + \int_1^0 f(t)g'(t) \, dt \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_1^0 \{f(t)g(t)\}' \, dt &= \left[f(t)g(t) \right]_1^0 = 0, \\ \int_1^0 f(t)g'(t) \, dt &= \int_1^0 \left(-t^2 + \frac{3}{2}t \right) (\sin \pi t)' \, dt \\ &= \left[\left(-t^2 + \frac{3}{2}t \right) \sin \pi t - \left(-2t + \frac{3}{2} \right) \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right) \right. \\ &\quad \left. + (-2) \left(-\frac{1}{\pi^2} \sin \pi t \right) \right]_1^0 = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

よって $S = \frac{1}{\pi}$



²<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2022.pdf> [5]

2.10 (1) C と l_1 から y を消去すると $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2b^2x + b^2(1 - a^2) = 0 \quad (*)$$

上式は、係数について $(-b^2)^2 - (a^2 + b^2) \cdot b^2(1 - a^2) = 0$

$a > 0, b > 0$ に注意して整理すると $a^2 + b^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$

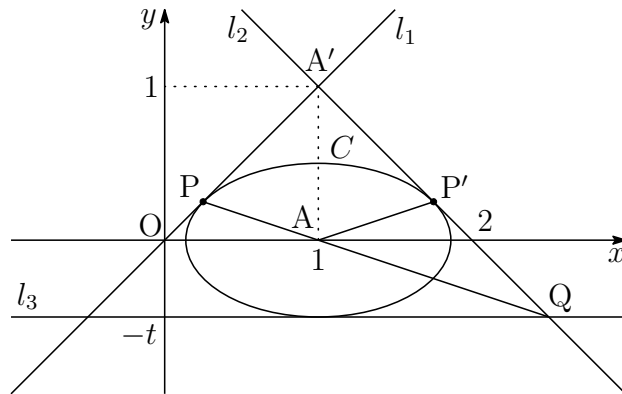
C と l_3 が接するから $-b = -t \quad \dots \textcircled{2}$

$a > 0, b > 0$ であるから、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より $a = \sqrt{1 - t^2}, b = t$

(2) (1) の結果を $(*)$ に代入すると $x^2 - 2t^2x + t^4 = 0$

$$(x - t^2)^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = t^2$$

P は l_1 上の点であるから $P(t^2, t^2)$



(3) $l_2: y = -x + 2$ 上の点 Q の y 座標が $-t$ であるから

$$-t = -x + 2 \quad \text{ゆえに} \quad x = t + 2$$

$P(t^2, t^2), Q(t+2, -t)$ より、直線 PQ の傾きは $(0 < t < 1)$

$$\frac{-t - t^2}{(t+2) - t^2} = \frac{t(t+1)}{(t+1)(t-2)} = \frac{t}{t-2}$$

点 $Q(t+2, -t)$ を通り、傾き $\frac{t}{t-2}$ の直線は

$$y + t = \frac{t}{t-2}(x - t - 2)$$

点 $(1, 0)$ はこの直線上の点であるから

$$t = \frac{t}{t-2}(-t-1) \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{1}{2}$$

(4) (3) の結果を (1) の結果に代入すると $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$

$$\text{したがって} \quad x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, \quad y = \frac{1}{2} \sin \theta \quad (**)$$

(3) の結果を (2) の結果に代入すると $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$$\text{条件から} \quad 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} \sin \beta = \frac{1}{4}$$

$$\text{すなわち} \quad \cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \beta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \beta < 2\pi \text{ より } \beta = \frac{5}{6}\pi$$

(5) C , l_1 , l_2 が直線 $x = 1$ に関して対称であるから, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ すると,

$$C \text{ と } l_2 \text{ の接点を } P' \text{ とすると } P' \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha, \frac{1}{2} \sin \alpha \right)$$

4 点 $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $A(1, 0)$, $P'\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $A'(1, 1)$ を頂点とする四角形の面積を S_1 とすると (A' は l_1 , l_2 の交点)

$$S_1 = \frac{1}{2} AA' \cdot PP' = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

(**) より (ガウス・グリーン定理³⁾)

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta} y &= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) \cdot \frac{1}{2} \cos \theta - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \cdot \frac{1}{2} \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

AP' , AP , C_1 で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(x \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta} y \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} = \frac{\sqrt{3}}{12} \pi \end{aligned}$$

よって, 求める面積は $S_1 - S_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} \pi$ ■

³<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2022.pdf> [5]

2.11 (1) $y = \log x$ を微分すると $y' = \frac{1}{x}$

曲線 $y = \log x$ 上の点 $(a, \log a)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y = \frac{1}{a}(x - a) + \log a \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{x}{a} - 1 + \log a$$

(2) (1) の結果から, $y = \log x$ 上の点 $(2a, \log 2a)$ における接線 l_2 の方程式は

$$y = \frac{x}{2a} - 1 + \log 2a$$

l_1 と l_2 の 2 式から y を消去すると

$$\frac{x}{a} - 1 + \log a = \frac{x}{2a} - 1 + \log 2a \quad \text{ゆえに} \quad x = 2a \log 2$$

これを l_2 の方程式に代入すると $y = 2 \log 2 + \log a - 1$

よって, 交点の座標は $(2a \log 2, 2 \log 2 + \log a - 1)$

(3) $x_0 = 2a \log 2$, $y_0 = 2 \log 2 + \log a - 1$ とおき, l_1 と l_2 の交点を $P(x_0, y_0)$, 曲線 $y = \log x$ 上の点を $Q(t, \log t)$ とおく ($a \leq t \leq 2a$). さらに

$$\overrightarrow{PQ} = (f(t), g(t))$$

とすると $f(t) = t - x_0$, $g(t) = \log t - y_0$

$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (t - x_0)\frac{1}{t} - (\log t - y_0) \\ &= 1 + y_0 - \frac{x_0}{t} - \log t \end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理により ⁴

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} \int_a^{2a} \left(1 + y_0 - \frac{x_0}{t} - \log t \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[(1 + y_0)t - x_0 \log t - t(\log t - 1) \right]_a^{2a} \\ &= \frac{1}{2} \{ (1 + y_0)a - x_0 \log 2 + a(1 - 2 \log 2 - \log a) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (2 \log 2 + \log a)a - 2a(\log 2)^2 + a(1 - 2 \log 2 - \log a) \} \\ &= a \left\{ \frac{1}{2} - (\log 2)^2 \right\} \end{aligned}$$

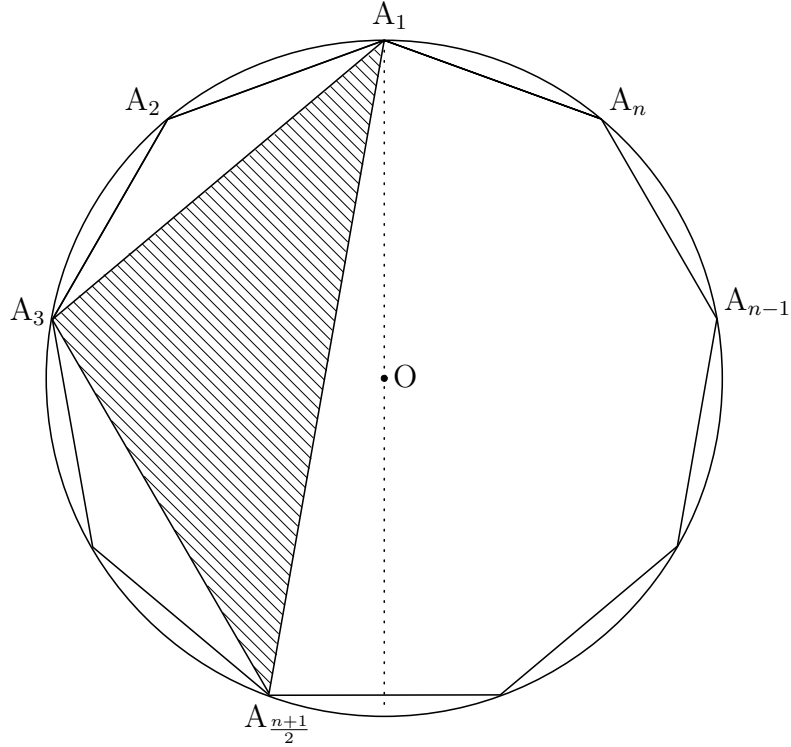
$$\text{よって} \quad \frac{S(a)}{a} = \frac{1}{2} - (\log 2)^2$$

■

⁴<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2022.pdf> [5]

2.12 n 個の頂点を反時計回りに $A_1, A_2, \dots, A_n$ をとる (n は 3 以上の奇数).

2 点 A_ℓ, A_m について, $\ell \equiv m \pmod{n}$ のとき, これらの 2 点は同一の点する.



$i < j < k \leq i + \frac{n-1}{2}$ とし, 点 A_i に対して 2 点 A_j, A_k をとると, 三角形 $A_i A_j A_k$ は ($n \geq 5$), その内部に O を含まない. i の選び方 n 通りに対して, 2 点 A_j, A_k の選び方が $\frac{n-1}{2} C_2$ 通りあるから

$$1 - p_n = n \times \frac{n-1}{2} C_2 / {}_n C_3$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - n \times \frac{n-1}{2} C_2 / {}_n C_3 \\ &= 1 - n \times \frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right)}{2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{n+1}{4(n-2)} \end{aligned}$$

$p_3 = 1$ であるから, 上式は $n = 3$ のときも成立する.

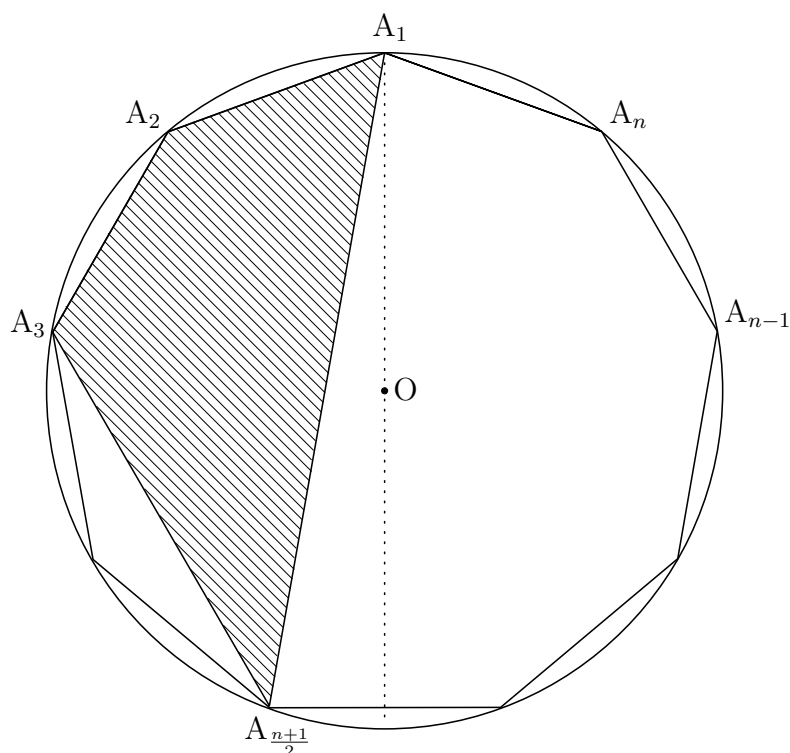
よって
$$p_n = \frac{n+1}{4(n-2)}$$

補足 例えば, 上の図で A_1 を除く点線の左右には $\frac{n-1}{2}$ 個ずつ頂点が存在する. ■

東大文系 2024 年 4

n を 5 以上の奇数とする．平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える． n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ．ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする．選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ．

解答 n 個の頂点を反時計回りに $A_1, A_2, \dots, A_n$ をとる (n は 5 以上の奇数)．
2 点 A_ℓ, A_m について， $\ell \equiv m \pmod{n}$ のとき，これらの 2 点は同一の点する．



$i < j < k < l \leq i + \frac{n-1}{2}$ とし，点 A_i に対して 3 点 A_j, A_k, A_l をとると，四角形 $A_i A_j A_k A_l$ は ($n \geq 7$)，その内部に O を含まない． i の選び方 n 通りに対して，3 点 A_j, A_k, A_l の選び方が $\frac{n-1}{2} C_3$ 通りあるから

$$1 - p_n = n \times \frac{n-1}{2} C_3 / {}_n C_4$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - n \times \frac{n-1}{2} C_3 / {}_n C_4 \\ &= 1 - n \times \frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right) \left(\frac{n-1}{2} - 2 \right)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\ &= \frac{n+1}{2(n-2)} \end{aligned}$$

$p_5 = 1$ であるから, 上式は $n = 5$ のときも成立する.

$$\text{よって} \quad p_n = \frac{n+1}{2(n-2)}$$

補足 例えば, 上の図で A_1 を除く点線の左右には $\frac{n-1}{2}$ 個ずつ頂点が存在する.

2.13 (1) 条件を満たすとき, $n = 0, 1, 2$ について

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{2}$$

$$\text{が成立するから} \quad a_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(a_n + 1)$$

$$a_n = (a_0 + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \quad (n = 0, 1, 2, 3) \quad (*)$$

$(a_0 + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^3$ が偶数となる最小の自然数 a_0 を求めるとよいから

$$a_0 + 1 = 2^4 \quad \text{よって} \quad a_0 = 15$$

(2) (*) と同様に, 条件を満たすとき

$$a_n = (a_0 + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \quad (n = 0, 1, \dots, 10)$$

$(a_0 + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ が偶数となる最小の自然数 a_0 を求めるとよいから

$$a_0 + 1 = 2^{11} \quad \text{よって} \quad a_0 = 2047$$

■

2.14 (1) $a_m < 0$ となる $m \geq 2$ が存在すると仮定すると

$$a_m = \log_3 a_{m-1} < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{m-1} < 1$$

したがって, $a_m = 3^{m-2} > 0$ となり, 矛盾を生じる.

よって, 2 以上の自然数 n に対して $a_n \geq 0$ である.

(2) (1) の結論から $a_4 \geq 0, a_5 \geq 0$

$a_4 + a_5 = 1$ であるから

$$a_4 = 1 - a_5 \geq 0, \quad a_5 = 1 - a_4 \geq 0$$

したがって $0 \leq a_4 \leq 1, 0 \leq a_5 \leq 1 \cdots (*)$

$a_4 < 1$ とすると, $a_5 = 3^3$ となり, $(*)$ に反する.

したがって $a_4 = 1, a_5 = \log a_4 = 0$

$a_3 < 1$ とすると, $a_4 = 3^2 = 9$ となり, 不適.

$a_3 \geq 1$ であるから $a_4 = \log_3 a_3 = 1$ ゆえに $a_3 = 3$

よって $\mathbf{a_3 = 3, a_4 = 1, a_5 = 0}$

(3) $0 \leq a_2 < 1$ のとき, $a_3 = 3^1 = 3$ となり, (2) の結果を満たす.

$a_2 \geq 1$ のとき, $a_3 = \log_3 a_2 = 3$ ゆえに $a_2 = 27$

したがって, a_2 の取り得る値の範囲は

$$0 \leq a_2 < 1, a_2 = 27 \quad (\text{A})$$

$a_1 < 1$ とすると, $a_2 = 3^0 = 1$ となり, (A) に反するので, 不適.

$a_1 \geq 1$ とすると, $a_2 = \log_3 a_1$ より

$$0 \leq \log_3 a_1 < 1, \log_3 a_1 = 27$$

したがって, a_1 の取り得る値の範囲は

$$1 \leq a_1 < 3, a_1 = 3^{27} \quad (\text{B})$$

(A), (B) より $m_1 = 1, M_1 = 3^{27}, m_2 = 0, M_2 = 27$

よって $m_1 + m_2 + \log_3 M_1 M_2 = 1 + 0 + \log_3 3^{27} \cdot 27 = \mathbf{31}$ ■

2.15 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OX} = x\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BY} = y\overrightarrow{BC} \text{ より } \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OB} = y(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OY} = (1 - y)\vec{b} + y\vec{c}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QY} &= \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OQ} = (1-y)\vec{b} + y\vec{c} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - y\right)\vec{b} + y\vec{c}, \\
\overrightarrow{PX} &= \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = x\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}, \\
\overrightarrow{QY} \times \overrightarrow{PX} &= \left\{-\frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - y\right)\vec{b} + y\vec{c}\right\} \times \left(x\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}y\right)\vec{a} \times \vec{b} + x\left(\frac{1}{2} - y\right)\vec{b} \times \vec{c} + \frac{1}{2}(x-y)\vec{c} \times \vec{a}, \\
\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}
\end{aligned}$$

直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x, y に関する必要十分条件は

$$(\overrightarrow{QY} \times \overrightarrow{PX}) \cdot \overrightarrow{PQ} \neq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2}(x-y)(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \neq 0$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立であるから, $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \neq 0$ に注意して

$$\frac{1}{2}(x-y) \neq 0 \quad \text{よって} \quad x \neq y$$

■

2.16 2 直線 ℓ, m の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}$ とする. ℓ と m は平行ではないから, $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直なベクトルを $\vec{n}$ とし, 2 直線 ℓ, m 上の定点をそれぞれ $A(\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{n}), B(\beta_1\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \beta_3\vec{n})$ とする.

ℓ を含み, $\vec{n}$ に平行な平面 S のベクトル方程式は, 媒介変数 s_1, s_2 を用いて

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} + s_1\vec{a} + s_2\vec{n} &= \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{n} + s_1\vec{a} + s_2\vec{n} \\
&= (s_1 + \alpha_1)\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + (s_2 + \alpha_3)\vec{n}
\end{aligned}$$

m を含み, $\vec{n}$ に平行な平面 T のベクトル方程式は, 媒介変数 t_1, t_2 を用いて

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OB} + t_1\vec{b} + t_2\vec{n} &= \beta_1\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \beta_3\vec{n} + t_1\vec{b} + t_2\vec{n} \\
&= \beta_1\vec{a} + (t_1 + \beta_2)\vec{b} + (t_2 + \beta_3)\vec{n}
\end{aligned}$$

S と T の共通部分は

$$(s_1 + \alpha_1)\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + (s_2 + \alpha_3)\vec{n} = \beta_1\vec{a} + (t_1 + \beta_2)\vec{b} + (t_2 + \beta_3)\vec{n} \quad (*)$$

これを整理すると

$$(s_1 + \alpha_1 - \beta_1)\vec{a} + (-t_1 + \alpha_2 - \beta_2)\vec{b} + (s_2 - t_2 + \alpha_3 - \beta_3)\vec{n} = \vec{0}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ は, 1 次独立であるから

$$s_1 + \alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad -t_1 + \alpha_2 - \beta_2 = 0, \quad s_2 - t_2 + \alpha_3 - \beta_3 = 0$$

上の 3 式から

$$s_1 = \beta_1 - \alpha_1, \quad t_1 = \alpha_2 - \beta_2, \quad s_2 - t_2 = \beta_3 - \alpha_3 \quad (**)$$

このとき, 2 直線 ℓ, m 上の 2 定点 P, Q をそれぞれ

$$\vec{OP} = \vec{OA} + s_1\vec{a}, \quad \vec{OQ} = \vec{OB} + t_1\vec{b}$$

とおくと, 2 平面 S, T の共通部分は, (*), (**) より

$$\vec{OP} + s_2\vec{n} = \vec{OQ} + t_2\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{PQ} = (s_2 - t_2)\vec{n} = (\beta_3 - \alpha_3)\vec{n}$$

よって, ℓ と m の両方に直交する直線 PQ がただ 1 つ存在する. ■

2.17 (1) 標本平均 m_1 は

$$m_1 = \frac{1}{9}(9.0 + 9.0 + 8.0 + 8.0 + 9.0 + 9.0 + 10.0 + 9.0 + 10.0) = \mathbf{9.0}$$

分散 S_1^2 は

$$S_1^2 = \frac{1}{9}\{0^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2\} = \frac{4}{9}$$

別解 $m_1 = 9.0 + \frac{1}{9}\{0 + 0 + (-1.0) + (-1.0) + 0 + 0 + 1.0 + 0 + 1.0\} = \mathbf{9.0}$

(2) 母分散 $\sigma^2 = 1$, 標本の大きさ 9, 標本平均 9 より, 母平均 m に対する 95% の信頼区間は,

$$9.0 - 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} \leq m \leq 9.0 + 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}$$

$$8.346 \leq m \leq 9.653 \quad \text{より} \quad \mathbf{8.35 \leq m \leq 9.65}$$

$$(3) m_2 = \frac{9.0 + 9.0 + 8.0 + 8.0 + 9.0 + 9.0 + 10.0 + 9.0 + 10.0 + x}{10} = \frac{x + 81}{10}$$

分散 S_2^2 は

$$S_2^2 = \frac{9.0^2 + 9.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2 + 9.0^2 + 9.0^2 + 10.0^2 + 9.0^2 + 10.0^2 + x^2}{10}$$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{x + 81}{10} \right)^2 \\ & = \frac{9x^2 - 162x + 769}{100} = \frac{9(x - 9)^2 + 40}{100} \end{aligned}$$

$$8 \leq x \leq 10 \quad \text{より}$$

$$8.9 \leq m_2 \leq 9.1, \quad \frac{2}{5} \leq S_2^2 \leq \frac{49}{100} \quad (0.4 \leq S_2^2 \leq 0.49 \text{ も可})$$

(4) 母集団は 母平均 $m = 8$, 母分散 $\sigma^2 = 1$

大きさ 4 の標本平均 $\bar{X}$ は, 正規分布 $N\left(8, \frac{1^2}{4}\right)$ に従う.

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 9) &= P\left(\frac{\bar{X} - 8}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \geq \frac{9 - 8}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) = P(Z \geq 2) \\ &= 0.5 - u(2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \end{aligned}$$

よって, 求める確率は **0.02** ■

2.18 (1) $m = 2$ より, $-1, 0, 1, 1$ の 4 枚のカードから 2 枚取り出すとき, $X \geq 0$ となるのは, $0, 1, 1$ の 3 枚のうち 2 枚を取り出す確率であるから

$$P(X \geq 0) = \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(2) $m = 9$ より, $-1, 0, \overbrace{1, \dots, 1}^{9 \text{ 枚}}$ の 11 枚のカードから 2 枚取り出すとき, $Y = 0$ となるのは, $-1, 0$ の 2 枚のうち 2 枚を取り出す確率で

$$P(Y = 0) = \frac{{}_2C_2}{{}_{11}C_2} = \frac{1}{55}$$

求める確率は, この余事象の確率であるから

$$P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{1}{55} = \frac{54}{55}$$

(3) $-1, 0, \overbrace{1, \dots, 1}^{m \text{ 枚}}$ の $m + 2$ 枚のカードから 2 枚取り出すとき, XY が正となるのは, $m \geq 2$ であることが必要であるから

$$\begin{aligned} P(X = Y = 1) &= \frac{{}_mC_2}{{}_{m+2}C_2} = \frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)} \\ P(X = 0, Y = 1) &= \frac{1 \cdot {}_mC_1}{{}_{m+2}C_2} = \frac{2m}{(m+2)(m+1)} \\ P(X = -1, Y = 1) &= \frac{1 \cdot {}_mC_1}{{}_{m+2}C_2} = \frac{2m}{(m+2)(m+1)} \\ P(X = -1, Y = 0) &= \frac{1 \cdot 1}{{}_{m+2}C_2} = \frac{2}{(m+2)(m+1)} \end{aligned}$$

上の結果から, XY の確率分布表は次のようになる.

XY	-1	0	1	計
確率	$\frac{2m}{(m+2)(m+1)}$	$\frac{2m+2}{(m+2)(m+1)}$	$\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}$	1

したがって

$$\begin{aligned} E(XY) &= -1 \cdot \frac{2m}{(m+2)(m+1)} + 1 \cdot \frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)} \\ &= \frac{m(m-3)}{(m+2)(m+1)} \end{aligned}$$

よって、 $E(XY) > 0$ となる最小の整数 m は $\mathbf{m = 4}$ ■

3.1 $f(x)$ の x^4 の係数が 1 であることと $f(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが 1 であるから、 $f(x)$ を次のようにおける (p, q は定数).

$$f(x) = (x+1)^2 \{ (x-1)^2 + p(x-1) + q \} + 1 \quad (*)$$

上式を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \{ (x-1)^2 + 4(x-1) + 4 \} \{ (x-1)^2 + p(x-1) + q \} + 1 \\ &= (x-1)^4 + (p+4)(x-1)^3 + (4p+q+4)(x-1)^2 \\ &\quad + 4(p+q)(x-1) + 4q + 1 \\ &= (x-1)^2 \{ (x-1)^2 + (p+4)(x-1) + (4p+q+4) \} \\ &\quad + 4(p+q)x - 4p + 1 \end{aligned}$$

また、 $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが 2 であるから

$$4(p+q) = 0, \quad -4p + 1 = 2 \quad \text{これを解いて} \quad p = -\frac{1}{4}, \quad q = \frac{1}{4}$$

これらを (*) に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2 \left\{ (x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4} \right\} + 1 \\ &= (x^2 + 2x + 1) \left(x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{2} \right) + 1 \\ &= x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

別解 $f'(x)$ は $x+1, x-1$ を因数にもつ 3 次式で、最高次の係数が 4 であるから

$$f'(x) = (x+1)(x-1)(4x+3A) = 4x^3 + 3Ax^2 - 4x - 3A$$

とおき、これを積分すると (A, B は定数)

$$f(x) = x^4 + Ax^3 - 2x^2 - 3Ax + B$$

$f(-1) = 1, f(1) = 2$ であるから

$$2A + B - 1 = 1, \quad -2A + B - 1 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{5}{2}$$

$$\text{よって} \quad f(x) = x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$



3.2 (1) ℓ_1, ℓ_2 がともに C に接するとき

$$C' : y = ax^2 + (b+1)x + c$$

$$\ell'_1 : y = -2x + 3$$

$$\ell'_2 : y = 2x + 3$$

とすると, ℓ'_1, ℓ'_2 はともに C' に接する. ℓ'_1, ℓ'_2 は y 軸対称より, C' も y 軸対称であるから

$$b+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad b = -1$$

C' と ℓ'_1 から y を消去して, 整理すると

$$ax^2 + 2x + c - 3 = 0 \tag{*}$$

上の 2 次方程式は重解をもつから, 係数について

$$D/4 = 1^2 - a(c-3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{1}{a} + 3$$

(2) (1) の結果から C の方程式は $y = ax^2 - x + \frac{1}{a} + 3$

C は x 軸と 2 点で交わるから, 係数について

$$D = (-1)^2 - 4a\left(\frac{1}{a} + 3\right) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 + 4a < 0$$

上の第 2 式の両辺に $\frac{1}{a^2}$ を掛けると

$$\frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} + 4 \right) < 0 \quad \text{よって} \quad -4 < \frac{1}{a} < 0$$

(3) C' と ℓ'_1 の接点を P' , C' と ℓ'_2 の接点を Q' とする.

$$P' \text{ の } x \text{ 座標は, } (*) \text{ から } x = -\frac{2}{2a} = -\frac{1}{a}$$

$$Q' \text{ は } P' \text{ と } y \text{ 軸対称であるから, その } x \text{ 座標は } x = \frac{1}{a}$$

P と P' , Q と Q' の x 座標は一致するから

$$C : y = ax^2 - x + \frac{1}{a} + 3 = a \left(x - \frac{1}{2a} \right)^2 + \frac{3}{4a} + 3$$

これより, 3 点 P , Q , R の座標を得る.

$$P \left(-\frac{1}{a}, \frac{3}{a} + 3 \right), \quad Q \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a} + 3 \right), \quad R \left(\frac{1}{2a}, \frac{3}{4a} + 3 \right)$$

$$\text{したがって, } \triangle PQR \text{ の重心 } G \text{ の座標は } \left(\frac{1}{6a}, \frac{19}{12a} + 3 \right)$$

$$(2) \text{ の結果から } -\frac{2}{3} < \frac{1}{6a} < 0$$

$$\frac{19}{12a} + 3 = \frac{19}{2} \cdot \frac{1}{6a} + 3$$

$$\text{よって, 点 } G \text{ の軌跡は 直線 } y = \frac{19}{2}x + 3 \left(-\frac{2}{3} < x < 0 \right) \quad \blacksquare$$

3.3 (1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P の座標を $(\cos \theta, \sin \theta)$ とする.

$A(4, 1)$, $B(8, 4)$ より, $\triangle ABP$ の重心 $G(x, y)$ は

$$x = \frac{4 + 8 + \cos \theta}{3}, \quad y = \frac{1 + 4 + \sin \theta}{3}$$

$$x - 4 = \frac{\cos \theta}{3}, \quad y - \frac{5}{3} = \frac{\sin \theta}{3} \text{ より, 点 } G \text{ の軌跡の方程式は}$$

$$(x - 4)^2 + \left(y - \frac{5}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

よって G の軌跡は中心 $\left(4, \frac{5}{3} \right)$, 半径 $\frac{1}{3}$ の円

(2) 2 点 $A(4, 1)$, $B(8, 4)$ を通る直線の方程式は

$$y - 1 = \frac{4 - 1}{8 - 4}(x - 4) \quad \text{すなわち} \quad 3x - 4y - 8 = 0$$

点 $\left(4, \frac{5}{3}\right)$ から直線 AB までの距離を d とすると

$$d = \frac{\left|3 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{5}{3} - 8\right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{8}{15}$$

$AB = \sqrt{(8-4)^2 + (4-1)^2} = 5$ より, $\triangle ABG$ の面積の最小値は

$$\frac{1}{2}AB \left(d - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot 5 \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$$

■

3.4 (1) $f(x) = 4x^3 - 3x$ より $f'(x) = 12x^2 - 3 = 12\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$f(x)$ の増減は, 次のようになる.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって 極大値 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, 極小値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

$f(x) = a$ の解は, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ の共有点の x 座標であるから, 上の増減表から, $f(x) = a$ が異なる 3 つの実数解をもつための条件は

$$-1 < a < 1$$

(2) 加法定理により

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$$

$$\cos \theta = \cos(2\theta - \theta) = \cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta$$

上の 2 式の辺々を加えると, $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ より

$$\cos 3\theta + \cos \theta = 2 \cos 2\theta \cos \theta = 2(2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta$$

$\cos 3\theta$ について解くと

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad \text{よって} \quad \cos 3\theta = f(\cos \theta)$$

(3) $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ から, (1) の増減表より, $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ の解は, $-1 < x < 1$ に存在する. $x = \cos \theta$ とおくと ($0 < \theta < \pi$), (2) の結果から

$$\cos 3\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 < 3\theta < 3\pi$ であるから

$$3\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

求める解は $x = \cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{5}{12}\pi, \cos \frac{11}{12}\pi$

よって $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

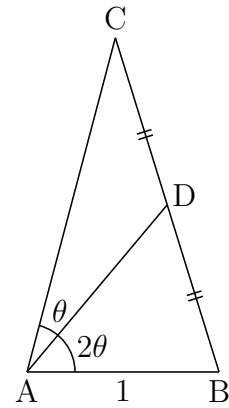
3.5 (1) $BD = CD$ より, $\triangle ABD = \triangle ACD$ であるから

$$\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin 2\theta = \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin \theta$$

したがって $AB \sin 2\theta = AC \sin \theta$

$AB = 1$ より

$$AC = \frac{AB \sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta$$



(2) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 3\theta \\ &= 1^2 + (2 \cos \theta)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos \theta \cdot (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ &= -16 \cos^4 \theta + 16 \cos^2 \theta + 1 \end{aligned}$$

よって $BC = \sqrt{-16 \cos^4 \theta + 16 \cos^2 \theta + 1}$

(3) (2) の結果から

$$BC^2 = -16 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)^2 + 5$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ に注意して

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{のとき, 最大値 } \sqrt{5}$$

3.6 (1) $t = \cos \theta$ より

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= 2 \cos^2 2\theta - 1 = 2(2 \cos^2 \theta - 1)^2 - 1 \\ &= 2(4 \cos^4 \theta - 4 \cos^2 \theta + 1) - 1 \\ &= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1 = 8t^4 - 8t^2 + 1 \end{aligned}$$

(2) $\cos 4\theta = \cos \theta$ に (1) の結果を代入すると

$$8t^4 - 8t^2 + 1 = t \quad \text{ゆえに} \quad (t-1)(2t+1)(4t^2+2t-1) = 0 \quad (*)$$

$$\text{よって} \quad t = 1, -\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

(3) $\frac{2}{5}\pi = \theta$ とおくと, $5\theta = 2\pi$ より, $\cos 4\theta = \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$

$0 < \cos \theta < 1$ より, (2) の結果から, $\cos \theta = t$ とおくと

$$t = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad 4t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta &= \sin^2 \theta (1 + 4 \cos^2 \theta) = (1-t^2)(1+4t^2) \\ &= \left(1 - \frac{1-2t}{4}\right)(2-2t) \\ &= \frac{1}{2}(3+2t)(1-t) = \frac{1}{2}(3-t-2t^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(3-t - \frac{1-2t}{2}\right) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

■

3.7 (1) $u = 3, v = 2, a = \log_{10} 3, b = \log_{10} 2$ より

$$\begin{aligned} \log_{10}(u^5 v^6) &= 5 \log_{10} u + 6 \log_{10} v \\ &= 5 \log_{10} 3 + 6 \log_{10} 2 = \mathbf{5a + 6b} \end{aligned}$$

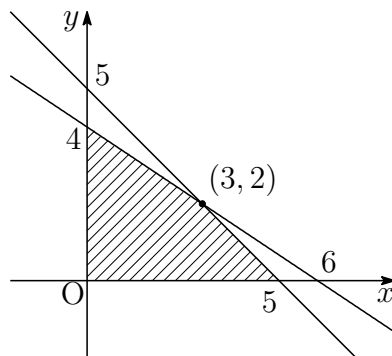
(2) $uv \leq 10^5, u^2 v^3 \leq 10^{12}$ より $\log_{10} uv \leq 5, \log_{10} u^2 v^3 \leq 12$

$$\log_{10} u + \log_{10} v \leq 5, \quad 2 \log_{10} u + 3 \log_{10} v \leq 12$$

$$x = \log_{10} u, \quad y = \log_{10} v \text{ より } (u \geq 1, v \geq 1)$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 5, \quad 2x + 3y \leq 12$$

よって, 点 $Q(x, y)$ の表す領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.

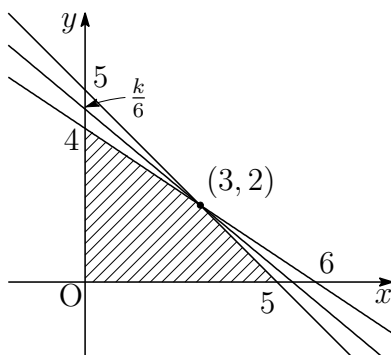


(3) $k = \log_{10} u^5 v^6 = 5 \log_{10} u + 6 \log_{10} v = 5x + 6y$ とおくと

$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{k}{6}$$

下の図から, $x = 3, y = 2$ のとき, k は最大値 27 をとる.

よって $u = 10^3, v = 10^2$ のとき, 最大値 10^{27} をとる.



■

3.8 (1) $f(x) = x(x+1)(x-1) = x^3 - x$ より $f'(x) = 3x^2 - 1$

曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線 L の方程式は

$$y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t \quad \text{すなわち} \quad y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

(2) C と L の方程式から, y を消去すると

$$x^3 - x = (3t^2 - 1)x - 2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad (x - t)^2(x + 2t) = 0$$

L と C の共有点で $(t, f(t))$ と異なる点の x 座標 a は $(t \neq 0) \quad a = -2t$

$$\begin{aligned} f'(t)f'(a) &= f'(t)f'(-2t) = (3t^2 - 1)(12t^2 - 1) \\ &= 36t^4 - 15t^2 + 1 = 36 \left(t^2 - \frac{5}{24} \right)^2 - \frac{9}{16} \end{aligned}$$

よって, $f'(t)f'(a)$ は $t^2 = \frac{5}{24}$ のとき, 最小値 $-\frac{9}{16}$ をとる.

(3) C 上の 2 点 $(s, f(s)), (t, f(t))$ におけるそれぞれの接線が直交するとき, $f'(s)f'(t) = -1$ より

$$(3s^2 - 1)(3t^2 - 1) = -1$$

$$\text{したがって} \quad 3s^2 = \frac{3t^2 - 2}{3t^2 - 1} = \frac{(3t^2 - 2)(3t^2 - 1)}{(3t^2 - 1)^2} \geq 0$$

$3t^2 - 1 \neq 0$, $3t^2 - 2 < 3t^2 - 1$ に注意して

$$3t^2 - 1 < 0 \quad \text{または} \quad 3t^2 - 2 \geq 0$$

よって $t \leq -\frac{\sqrt{6}}{3}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{\sqrt{6}}{3} \leq t$

補足 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ について, $C: y = f(x)$ の変曲点の x 座標を p とすると, $f''(p) = 0$ より, $b = -3ap$

$$f''(t) = 6at + 2b = 6a(t - p)$$

$f(x)$ を $x = t$ を極として展開すると ⁵

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x - t) + \frac{1}{2}f''(t)(x - t)^2 + a(x - t)^3$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) - \{f(t) + f'(t)(x - t)\} &= 3a(t - p)(x - t)^2 + a(x - t)^2 \\ &= a(x - t)^2(x - 3p + 2t) \end{aligned}$$

よって, C 上の点 $(t, f(t))$ における接線と C の共有点の x 座標は

$$x = t, \quad 3p - 2t$$



3.9 (1) $f(x) = x^2 - ax + a^2 - 2$ より $f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2$

$y = f(x)$ のグラフと x 軸が $x > 0$ の範囲に共有点を 2 個もつとき

$$\frac{a}{2} > 0, \quad \frac{3}{4}a^2 - 2 < 0, \quad f(0) = a^2 - 2 > 0$$

よって, 求める a の値の範囲は $\sqrt{2} < a < \frac{2\sqrt{6}}{3}$

(2) $-f(x) = kx$, すなわち, $f(x) + kx = 0$ が重解をもつ k の値を求めればよい.

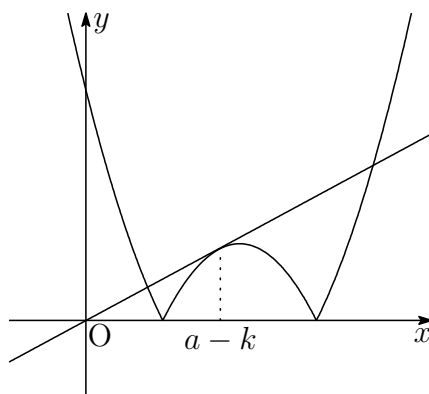
$$x^2 + (k - a)x + a^2 - 2 = 0 \quad \text{これから, 重解は } a - k$$

$y = |f(x)|$ と直線 $y = kx$ の接点の x 座標について $a - k > 0$ に注意すると, 上の方程式の係数について

$$(k - a)^2 - 4 \cdot 1(a^2 - 2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a - k = 2\sqrt{a^2 - 2}$$

よって $k = a - 2\sqrt{a^2 - 2}$

⁵<http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai-2020.pdf> (p.15 を参照)



■

3.10 $C: y = x^2$ と $C': y = -x^2 + ax + b$ の共有点の x 座標を α, β とすると ($\alpha < \beta$).

$$x^2 = -x^2 + ax + b \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - ax - b = 0 \quad (*)$$

解と係数の関係から、上の第2式より

$$\alpha + \beta = \frac{a}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{b}{2}$$

C, C' の方程式をそれぞれ微分すると $y' = 2x, \quad y' = -2x + a$

それぞれの交点における接線が直交しているから、 α, β は2次方程式

$$2x(-2x + a) = -1 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - ax - \frac{1}{2} = 0 \quad (**)$$

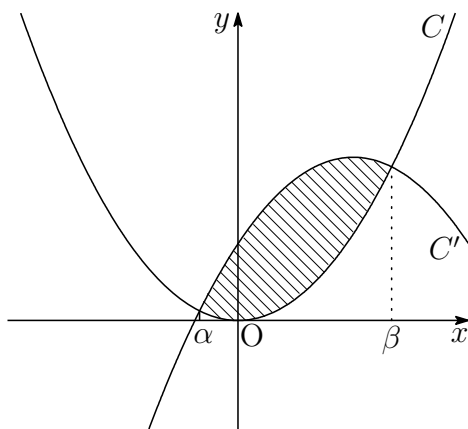
の解であり、(*) と (**) は一致するから、定数項を比較して $b = \frac{1}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{4}$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{a^2}{4} + 1$$

C と C' で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + ax + b) - x^2\} dx = -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -2 \left(-\frac{1}{6}\right) (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)^{\frac{3}{2}} \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

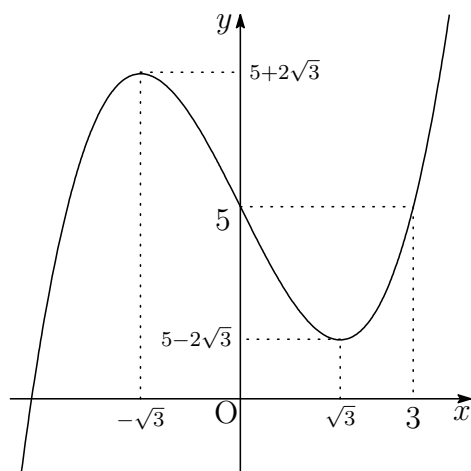
よって、求める面積の最小値は $\frac{1}{3}$



3.11 (1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 5$ を微分すると $y' = x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x = -\sqrt{3}$ のとき極大値 $5 + 2\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ のとき極小値 $5 - 2\sqrt{3}$



(2) (i) (1) で示したグラフから

$$0 \leq a < 3 \text{ のとき } g(a) = 5,$$

$$a \geq 3 \text{ のとき } g(a) = \frac{1}{3}a^3 - 3a + 5$$

(ii) (1) で示したグラフから

$$0 \leq a < \sqrt{3} \text{ のとき } h(a) = \frac{1}{3}a^3 - 3a + 5,$$

$$a \geq \sqrt{3} \text{ のとき } h(a) = 5 - 2\sqrt{3}$$

(iii) (ii) の結果から

$$g(x) - h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + 3x & (0 \leq x < \sqrt{3}) \\ 2\sqrt{3} & (\sqrt{3} \leq x < 3) \\ \frac{1}{3}x^3 - 3x + 2\sqrt{3} & (3 \leq x) \end{cases}$$

よって、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \{g(x) - h(x)\} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x\right) dx + \int_{\sqrt{3}}^3 2\sqrt{3} dx \\ &\quad + \int_3^4 \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x + 2\sqrt{3}\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\left[x\right]_{\sqrt{3}}^3 \\ &\quad + \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x\right]_3^4 \\ &= \frac{11}{6} + 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

■

3.12 (1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2tx + 1$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - (t-2)x - 2t + 1$
 $f(x) - g(x) = 0$ とし、整理すると

$$x^2 - (t+2)x + 2t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-t)(x-2) = 0$$

これを解いて $x = t, 2$

(2) (1) の計算より、 $g(x) - f(x) = -(x-t)(x-2)$ であるから

$$\begin{aligned} S(t) &= -\int_t^{2t} (x-t)(x-2) dx \\ &= -\int_t^{2t} (x-t)\{(x-2t) + 2(t-1)\} dx \\ &= -\int_t^{2t} (x-t)(x-2t) dt - (t-1)\left[(x-t)^2\right]_t^{2t} \\ &= \frac{1}{6}t^3 - (t-1) \cdot t^2 = -\frac{5}{6}t^3 + t^2 \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $S'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 2t = -\frac{5}{2}t \left(t - \frac{4}{5} \right)$

$0 < t < 1$ における $S(t)$ の増減は

t	(0)	$\dots$	$\frac{4}{5}$	$\dots$	(1)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{16}{75}$	$\searrow$	

したがって 極大値 $S\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{75}$



3.13 (1) $A = \beta - \alpha$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)\{(x - \alpha) - (\beta - \alpha)\} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(x - \alpha)\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(x - \alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \\
 &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = -\frac{1}{6}A^3
 \end{aligned}$$

(2) C_1, C_2 の方程式から

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n}x^2 - (x - 1)^2 &= -\frac{1}{n}\{n(x - 1)^2 - x^2\} \\
 &= -\frac{1}{n}\{(n - 1)x^2 - 2nx + n\}
 \end{aligned}$$

2 次方程式 $(n - 1)x^2 - 2nx + n = 0$ の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\alpha = \frac{n - \sqrt{n}}{n - 1}, \quad \beta = \frac{n + \sqrt{n}}{n - 1} \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = \frac{2\sqrt{n}}{n - 1}$$

$(n - 1)x^2 - 2nx + n = (n - 1)(x - \alpha)(x - \beta)$ であるから

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n}x^2 - (x - 1)^2 &= -\frac{1}{n}\{n(x - 1)^2 - x^2\} \\
 &= -\frac{n - 1}{n}(x - \alpha)(x - \beta)
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 S_n &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{1}{n} x^2 - (x-1)^2 \right\} dx \\
 &= -\frac{n-1}{n} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\
 &= \frac{n-1}{6n} (\beta-\alpha)^3 = \frac{n-1}{6n} \left(\frac{2\sqrt{n}}{n-1} \right)^3 = \frac{4\sqrt{n}}{3(n-1)^2}
 \end{aligned}$$

(3) (2) の結果を $\left| n\sqrt{n} S_n - \frac{4}{3} \right| < \frac{1}{3}$ に代入すると

$$\left| \frac{4n^2}{3(n-1)^2} - \frac{4}{3} \right| < \frac{1}{3}$$

$$\frac{n}{n-1} > 1 \text{ であるから } \frac{4n^2}{3(n-1)^2} - \frac{4}{3} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{n^2}{(n-1)^2} < \frac{5}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{n-1} < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$n \geq 2 \text{ であるから } 2n < \sqrt{5}(n-1)$$

$$(\sqrt{5}-2)n > \sqrt{5} \quad \text{ゆえに} \quad n > 5 + 2\sqrt{5} = 5 + \sqrt{20}$$

上式を満たす最小の自然数 n は $n = 5 + 5 = 10$ ■

3.14 (1) $x = \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi \text{ であるから } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

(2) $x^2 = (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$ より $\sin \theta \cos \theta = \frac{1-x^2}{2}$

$$\begin{aligned}
 y &= 4 \sin^3 \theta - 4 \cos^3 \theta + 3\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta \\
 &= 4(\sin \theta - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cos \theta) + 3\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta \\
 &= 4x \left(1 + \frac{1-x^2}{2} \right) + 3\sqrt{2} \cdot \frac{1-x^2}{2} \\
 &= -2x^3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} x^2 + 6x + \frac{3\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$y' = -6x^2 - 3\sqrt{2}x + 6 = -3(x + \sqrt{2})(2x - \sqrt{2})$$

したがって, y の増減表は次のようになる.

x	$-\sqrt{2}$	$\dots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\dots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{7\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{13\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき } \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ すなわち } \theta = \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ のとき } \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \text{ すなわち } \theta = \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{よって } \theta = \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi \text{ のとき, 最大値 } \frac{13}{4}\sqrt{2}$$

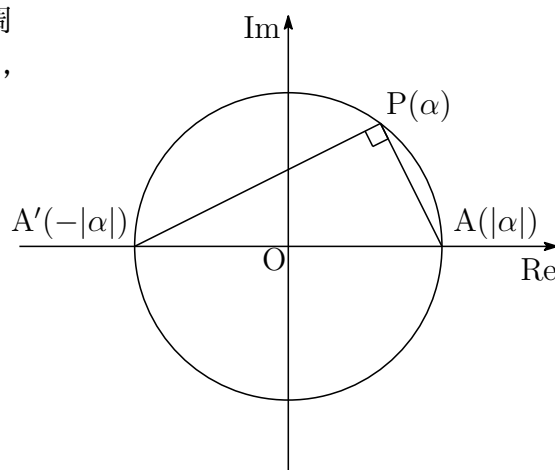
$$\theta = \frac{7}{4}\pi \text{ のとき, 最小値 } -\frac{7}{2}\sqrt{2}$$

■

- 3.15** (1) O を中心とする点 $P(\alpha)$ を通る円周上に 2 点 $A(|\alpha|)$, $A'(-|\alpha|)$ をとると, $\angle APA' = \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\arg \frac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|} = \pm \frac{\pi}{2}$$

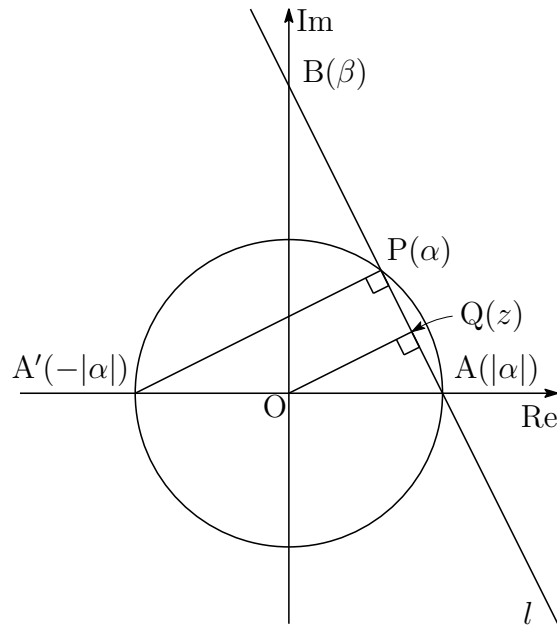
よって, $\frac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ は純虚数である.



- (2) 点 $A(|\alpha|)$ を通り, 直線 $A'P$ に垂直な直線 l と虚軸との交点 $B(\beta)$ とすると, $A'P \perp AB$ より,

$$\frac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|} = \pm \frac{\pi}{2}$$

よって, $\frac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となる純虚数 β がただ一つ存在する.



- (3) $\frac{z - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるとき, z は l 上の点で, $|z|$ が最小となるのは, $A(|\alpha|)$, $P(\alpha)$ の中点であるから

$$z = \frac{|\alpha| + \alpha}{2}$$

■

3.16 $|w| = 1$ とすると, $|y - (8 + 6i)| = 3$ より $y = 8 + 6i + 3w$

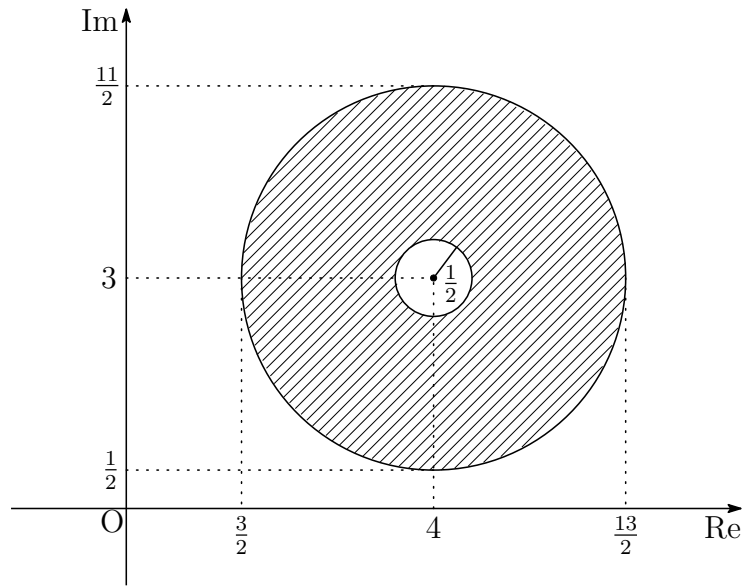
上式を $z = \frac{x + y}{2}$ に代入すると $z = 4 + 3i + \frac{3}{2}w + \frac{x}{2}$

$|x| \leq 2$ より, $\left|\frac{x}{2}\right| \leq 1$ であるから

$$\frac{1}{2} \leq \left|\frac{3}{2}w\right| - \left|\frac{x}{2}\right| \leq \left|\frac{3}{2}w + \frac{x}{2}\right| \leq \left|\frac{3}{2}w\right| + \left|\frac{x}{2}\right| \leq \frac{5}{2}$$

したがって, z の方程式および表す領域は, 図の斜線部分で境界を含む.

$$z = 4 + 3i + rw \quad \left(\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{2}\right)$$



また，領域の表す面積は

$$\pi \left\{ \left(\frac{5}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} = 6\pi$$

■

3.17 (1) $|f(1) - 3| \leq 1$ かつ $|f(i) - 1| \leq 3$

上の2式に $f(z) = z^2 + \alpha z + \beta$ をそれぞれ代入して整理すると

$$|\alpha + \beta - 2| \leq 1 \quad \text{かつ} \quad |\alpha i + \beta - 2| \leq 3$$

$$w_1 = \alpha + \beta - 2, \quad w_2 = \alpha i + \beta - 2 \quad \text{とおくと} \quad |w_1| \leq 1, \quad |w_2| \leq 3$$

α, β を w_1, w_2 で表すと

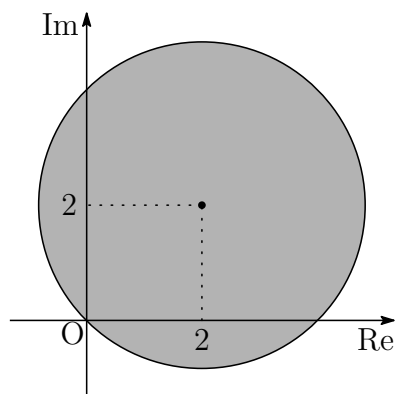
$$\alpha = \frac{1}{2}(1+i)(w_1 - w_2), \quad \beta = \frac{1}{2}(1-i)w_1 + \frac{1}{2}(1+i)w_2 + 2 \quad (*)$$

$f(1+i) = (1+i)^2 + \alpha(1+i) + \beta = (1+i)\alpha + \beta + 2i$ に (*) を代入すると

$$\begin{aligned} f(1+i) &= \frac{1}{2}(1+i)^2(w_1 - w_2) + \frac{1}{2}(1-i)w_1 + \frac{1}{2}(1+i)w_2 + 2 + 2i \\ &= \frac{1}{2}(1+i)w_1 + \frac{1}{2}(1-i)w_2 + 2 + 2i \end{aligned} \quad (**)$$

$$\left| \frac{1}{2}(1+i)w_1 \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|w_1| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \left| \frac{1}{2}(1-i)w_2 \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|w_2| \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

したがって， $f(1+i)$ は中心 $2+2i$ ，半径 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ の円の内部で境界線を含む．



(2) (**) より

$$\frac{1}{2}(1+i)w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right), \quad \frac{1}{2}(1-i)w_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

ゆえに $w_1 = -1, w_2 = -3i$

これを (*) に代入して $\alpha = -2 + i, \beta = 3 - i$ ■

3.18 (1) 点 α は円 $C: |z - 1| = \sqrt{2}$ の点であるから

$$|\alpha - 1|^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha}) = 1$$

このとき, α は虚軸上の点であるから, $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ より

$$\alpha\bar{\alpha} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$$

$$\text{したがって} \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \bar{\alpha} = 0$$

別解 円 $(x-1)^2 + y^2 = 2$ と y 軸との交点は $(0, \pm 1)$ であるから, $\alpha = \pm i$ より

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 0$$

(2) $\mu = -\frac{1}{z}$ とおくと, $\mu z = -1$ であるから, $|z - 1| = \sqrt{2}$ より

$$|\mu||z - 1| = \sqrt{2}|\mu| \quad \text{ゆえに} \quad |\mu z - \mu| = \sqrt{2}|\mu|$$

$$\text{したがって} \quad |-1 - \mu| = \sqrt{2}|\mu| \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{2}|\mu| = |\mu + 1|$$

$$2\mu\bar{\mu} = \mu\bar{\mu} + \mu + \bar{\mu} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad \mu\bar{\mu} - \mu - \bar{\mu} + 1 = 2$$

すなわち $|\mu - 1| = \sqrt{2}$ よって 点 $-\frac{1}{z}$ は C 上の点である.

$$(3) \quad w = z + \frac{1}{z} \text{ より } w - 2 = \frac{(z-1)^2}{z}$$

$$z \text{ は } C \text{ 上の点であるから } |w-2| = \frac{|z-1|^2}{|z|} = \frac{2}{|z|}$$

$$(4) \quad C \text{ 上の点 } z \text{ に対し, } |z-1|^2 = 2 \text{ より } |z|^2 = z + \bar{z} + 1 \quad \cdots (*)$$

$$w = z + \frac{1}{z} \text{ より } w + 2 = \frac{(z+1)^2}{z}$$

$$(*) \text{ より } |w+2| = \frac{|z+1|^2}{|z|} = \frac{|z|^2 + z + \bar{z} + 1}{|z|} = \frac{2|z|^2}{|z|} = 2|z|$$

上式および (3) の結果から

$$|w-2||w+2| = \frac{2}{|z|} \cdot 2|z| = 4$$

■

$$3.19 \quad (1) \quad f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1 = (z^2 + 1)(z^4 + 1)$$

$$f(z) = 0 \text{ をみたすとき } z^2 = -1, z^4 = -1 \quad \cdots (*)$$

$$|z^2| = |z|^2 = 1, |z^4| = |z|^4 = 1 \quad \text{よって } |z| = 1$$

補足 $z^8 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)(z^4 + 1)$, $f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1 = (z^2 + 1)(z^4 + 1)$
より, $z^8 - 1 = (z^2 - 1)f(z)$ であるから, z は実数以外の 1 の 8 乗根である.

$$(2) \quad (*) \text{ より } z^2 = -1, \pm i$$

$$f(z) = (z^2 + 1)(z^2 + i)(z^2 - i) \text{ より}$$

$$f(wz) = (w^2 z^2 + 1)(w^2 z^2 + i)(w^2 z^2 - i)$$

$$(i) \quad z^2 = -1 \text{ のとき}$$

$$f(wz) = (-w^2 + 1)(-w^2 + i)(-w^2 - i) = 0$$

$$\text{したがって } w^2 = 1, \pm i \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(ii) \quad z^2 = i \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f(wz) &= (iw^2 + 1)(iw^2 + i)(iw^2 - i) \\ &= -i(w^2 - i)(w^2 + 1)(w^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } w^2 = \pm 1, i \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$(iii) \quad z^2 = -i \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f(wz) &= (-iw^2 + 1)(-iw^2 + i)(-iw^2 - i) \\ &= i(w^2 + i)(w^2 - 1)(w^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } w^2 = \pm 1, -i \quad \cdots \textcircled{3}$$

①～③を同時にみたすとき $w^2 = 1$ よって $w = \pm 1$ ■

3.20 (1) $z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ より $z^9 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

$$z^3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad \bar{z}^3 = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$$

よって $z^3 + \bar{z}^3 = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

(2) $z^3 = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}, \quad \bar{z}^3 = \cos \frac{2k\pi}{3} - i \sin \frac{2k\pi}{3}$ より

$$z^3 + \bar{z}^3 = 2 \cos \frac{2k\pi}{3} = \begin{cases} -1 & (k=1, 2, 4) \\ 2 & (k=3) \end{cases}$$

$$z^3 + \bar{z}^3 = (z + \bar{z})^3 - 3z\bar{z}(z + \bar{z}), \quad z + \bar{z} = 2 \cos \frac{2k\pi}{9} \text{ より}$$

$$\left(2 \cos \frac{2k\pi}{9}\right)^3 - 3 \left(2 \cos \frac{2k\pi}{9}\right) = 2 \cos \frac{2k\pi}{3}$$

よって

$$8 \cos^3 \frac{2k\pi}{9} - 6 \cos \frac{2k\pi}{9} + 1 = 1 + 2 \cos \frac{2k\pi}{3} = \begin{cases} 0 & (k=1, 2, 4) \\ 3 & (k=3) \end{cases}$$

(3) (2)の結果から, $\cos \frac{2\pi}{9}, \cos \frac{4\pi}{9}, \cos \frac{8\pi}{9}$ は, 3次方程式

$$8x^3 - 6x + 1 = 0 \tag{*}$$

の解であるから, 解と係数の関係により

$$\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = 0, \quad \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{8}$$

(4) $\cos \frac{2k\pi}{9}$ が有理数であると仮定し ($k=1, 2, 4$),

$$\cos \frac{2k\pi}{9} = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素である整数, } q > 0)$$

とおくと, これが方程式(*)の解であるから

$$8 \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6 \left(\frac{p}{q}\right) + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{8p^3}{q^2} = 6p - q$$

上の第2式の右辺は整数であるから, q^2 は8の約数, すなわち, $q = 1, 2$

(i) $q = 1$ のとき $8p^3 = 6p - 1$ ゆえに $2p(4p^2 - 3) = -1$
これを満たす整数 p は存在しない.

(ii) $q = 2$ のとき $2p^3 = 6p - 2$ ゆえに $p(p^2 - 3) = -1$
 $p = \pm 1$ となるが, ともにこれを満たさない.

よって, $k = 1, 2, 4$ のとき, $\cos \frac{2k\pi}{9}$ は無理数である.

(5) $8x^3 - 6x + 1$ を $ax^2 + bx + c$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $rx + s$ とすると, a, b, c が有理数であるとき, $Q(x)$ は有理数を係数とする 1 次式, r, s は有理数である.

$$8x^3 - 6x + 1 = (ax^2 + bx + c)Q(x) + rx + s \quad (**)$$

(4) の結論から, $8x^3 - 6x + 1 = 0$ の解を α とする (α は無理数).
 α が $ax^2 + bx + c = 0$ の解であると仮定すると, (**) より

$$8\alpha^3 - 6\alpha + 1 = (a\alpha^2 + b\alpha + c)Q(\alpha) + r\alpha + s$$

このとき

$$r\alpha + s = 0 \quad (A)$$

を得る.

(i) $r \neq 0$ のとき

$$\alpha = -\frac{s}{r}$$

このとき, α が無理数であることに矛盾する.

(ii) $r = 0$ のとき, (A) より, $s = 0$ となる. このとき, (**) より

$$8x^3 - 6x + 1 = (ax^2 + bx + c)Q(x)$$

となる. $Q(x) = lx + m$ とおくと (l, m は有理数), 3 次方程式

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

が有理数の解 $-\frac{m}{l}$ をもち, 矛盾.

よって, $\cos \frac{2\pi}{9}$ は, 有理数を係数とする 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解とはならない. ■

3.21 (1) $|\alpha| = 2$, $|z - 1| = \sqrt{2} \cdots \textcircled{1}$, $|z - \alpha| = \sqrt{5} \cdots \textcircled{2}$

2円 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の中心間の距離 $|\alpha - 1|$ は

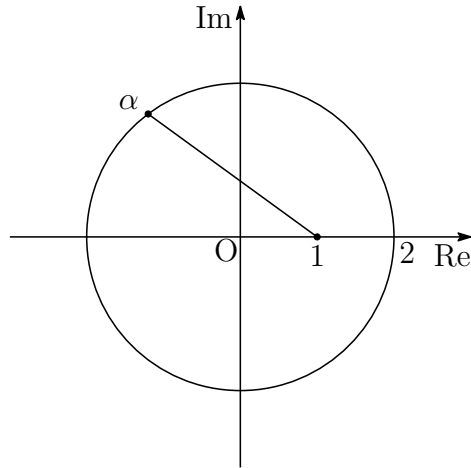
$$|\alpha| - 1 \leq |\alpha - 1| \leq |\alpha| + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leq |\alpha - 1| \leq 3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$|z - \alpha| - |z - 1| < |\alpha - 1| < |z - \alpha| + |z - 1|$, すなわち, 次式を示せばよい.

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} < |\alpha - 1| < \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$\sqrt{5} - \sqrt{2} < 1$, $3 < \sqrt{5} + \sqrt{2}$ であるから, $\textcircled{3}$ より上式が成立する. 2円 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の共有点の個数は2個であるから, $\textcircled{1}$ および $\textcircled{2}$ を満たす点 z の個数は2個である.

補足 $1 \leq |\alpha - 1| \leq 3$ は下の図からも分かる.



(2) $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より ($|\alpha| = 2$) $|z - 1|^2 = 2$, $|z - \alpha|^2 = 5$

$$z\bar{z} - \bar{z} - z + 1 = 0, \quad z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + 1 = 0$$

上の第1式から第2式の辺々の差をとると

$$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) = 0$$

- (3) ①, ② および $|\alpha| = 2$ から, $z \neq 0$, $\bar{\alpha} - 1 \neq 0$ に注意すると, (2) の結果から, $z(\bar{\alpha} - 1)$ は純虚数であるから, 実数 s, t を用いて ($s \neq 0, t \neq 0$)

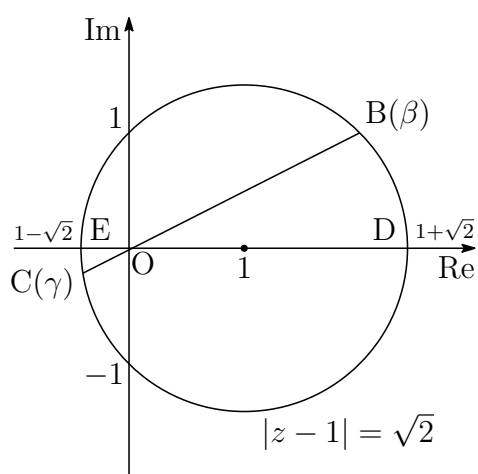
$$\beta(\bar{\alpha} - 1) = si, \quad \gamma(\bar{\alpha} - 1) = ti \quad \text{ゆえに} \quad \gamma = \frac{t}{s}\beta$$

よって, 2 点 $B(\beta)$, $C(\gamma)$ と原点 O は一直線上にある.

円 ① 上の 2 点を $D(1 + \sqrt{2})$, $E(1 - \sqrt{2})$ とすると, 方べきの定理により

$$OB \cdot OC = OD \cdot OE \quad \text{ゆえに} \quad |\beta||\gamma| = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$$

$$|\beta| = b \text{ より } b|\gamma| = 1 \quad \text{よって} \quad |\gamma| = \frac{1}{b}$$



3.22 (1) (*) $z^4 + pz^2 + qz + 27 = 0$

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ とする (a, b, c, d は実数).

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 + \bar{z}_2 &= (a - bi) + (c - di) \\ &= (a + c) - (b + d)i, \\ \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + b) + (c + d)i} \\ &= (a + b) - (c + d)i \end{aligned}$$

よって $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 \bar{z}_2 &= (a - bi)(c - di) \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i, \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \end{aligned}$$

よって $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$

(2) $z = \alpha$ は方程式 (*) の解であるから

$$\alpha^4 + p\alpha^2 + q\alpha + 27 = 0$$

両辺の共役複素数をとると $\overline{\alpha^4 + p\alpha^2 + q\alpha + 27} = 0$

$$\overline{\alpha^4} + p\overline{\alpha^2} + q\overline{\alpha} + \overline{27} = \overline{0} \quad \text{ゆえに} \quad (\overline{\alpha})^4 + p(\overline{\alpha})^2 + q\overline{\alpha} + 27 = 0$$

よって, $z = \overline{\alpha}$ は方程式 (*) の解である.

(3) $\alpha + \alpha^2 = 0$ とすると $\alpha(1 + \alpha) = 0$ ゆえに $\alpha = 0, -1$

これは, α が $\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Im}(\alpha) > 0$ であることに反するから

$$\alpha + \alpha^2 \neq 0 \quad (\text{A})$$

α, α^2 が実係数の方程式 (*) の解であるから, $\overline{\alpha}, \overline{\alpha^2}$ は (*) の解である.

$\alpha, \alpha^2, \overline{\alpha}, \overline{\alpha^2}$ が方程式 (*) の解であるから, 解と係数の関係 (3 次の係数) により

$$\alpha + \alpha^2 + \overline{\alpha} + \overline{\alpha^2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha + \alpha^2 + \overline{\alpha} + \overline{\alpha^2} = 0 \quad (\text{B})$$

(A), (B) から, $\alpha + \alpha^2$ は純虚数である.

(4) 解と係数の関係により

$$\alpha\overline{\alpha}\alpha^2\overline{\alpha^2} = 27 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^6 = 27 \quad \text{よって} \quad |\alpha| = \sqrt[3]{3}$$

$x = \operatorname{Re}(\alpha), y = \operatorname{Im}(\alpha)$ とおくと $\alpha = x + yi$

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha^2 &= (x + yi) + (x + yi)^2 \\ &= x + x^2 - y^2 + (2x + 1)yi \end{aligned}$$

$|\alpha|^2 = 3$ および (3) の結果から

$$(*) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x + x^2 - y^2 = 0 \\ (2x + 1)y \neq 0 \end{cases}$$

$x > 0, y > 0$ は (*) の第 3 式を満たす.

(*) の第 1 式と第 2 式から y^2 を消去すると

$$2x^2 + x - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2x + 3)(x - 1) = 0$$

$x > 0$ であるから $x = 1$ これを (*) の第 1 式に代入して $y^2 = 2$

$y > 0$ であるから $y = \sqrt{2}$ よって $\alpha = 1 + \sqrt{2}i$

(5) (4)の結果から $\bar{\alpha} = 1 - \sqrt{2}i$

$$\alpha^2 = (1 + \sqrt{2}i)^2 = -1 + 2\sqrt{2}i, \quad \overline{\alpha^2} = -1 - 2\sqrt{2}i$$

これから $\alpha + \bar{\alpha} = 2, \quad \alpha^2 + \overline{\alpha^2} = -2$

方程式(*)の解が $\alpha, \bar{\alpha}, \alpha^2, \overline{\alpha^2}$ であるから

$$\begin{aligned} (z - \alpha)(z - \bar{\alpha})(z - \alpha^2)(z - \overline{\alpha^2}) &= 0 \\ \{z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + |\alpha|^2\}\{z^2 - (\alpha^2 + \overline{\alpha^2})z + |\alpha|^4\} &= 0 \\ (z^2 - 2z + 3)(z^2 + 2z + 9) &= 0 \\ z^4 + 8z^3 - 12z + 27 &= 0 \end{aligned}$$

よって $p = 8, q = -12$ ■

3.23 (1) $|z - 1| = \sqrt{2}$ より $|z - 1|^2 = 2$

$$(z - 1)(\bar{z} - 1) = 2 \quad \text{ゆえに} \quad |z|^2 = 1 + z + \bar{z}$$

したがって

$$\left| \frac{1}{z} + 1 \right|^2 = \frac{|1 + z|^2}{|z|^2} = \frac{1 + z + \bar{z} + |z|^2}{|z|^2} = \frac{|z|^2 + |z|^2}{|z|^2} = 2$$

(2) $w = z + \frac{1}{z}$ より

$$\begin{aligned} |w - 2||w + 2| &= \left| z + \frac{1}{z} - 2 \right| \left| z + \frac{1}{z} + 2 \right| \\ &= \left| \frac{z^2 + 1 - 2z}{z} \right| \left| \frac{z^2 + 1 + 2z}{z} \right| \\ &= \left| \frac{(z - 1)^2}{z} \right| \left| \frac{(z + 1)^2}{z} \right| \\ &= \left| \frac{(z - 1)^2(z + 1)^2}{z^2} \right| \\ &= |z - 1|^2 \left| \frac{z + 1}{z} \right|^2 \\ &= |z - 1|^2 \left| \frac{1}{z} + 1 \right|^2 = 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$
■

3.24 (1) $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ より $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

$\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = \alpha - 2$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - 2 = (\alpha - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = 2 + \frac{\alpha - 2}{2^{n-1}}$$

(2) $a_n = \int_0^1 f(t) dt$ とおくと, $f_1(x) = 3x$ より

$$a_1 = \int_0^1 3t dt = \left[\frac{3}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) x \quad \text{より} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_{n+1}(t) dt &= \int_0^1 (n+2)t^{n+1} dt + a_n \int_0^1 t dt \\ a_{n+1} &= \left[t^{n+2} \right]_0^1 + \frac{1}{2}a_n \left[t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}a_n + 1 \end{aligned}$$

したがって, (1) の結果に $\alpha = \frac{3}{2}$ を代入すると

$$a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$n \geq 1 \text{ のとき } f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) x$$

上式に $n = 0$ を代入すると $f_1(x) = 3x$ となるから, 次式が成立する.

$$f_n(x) = (n+1)x^n + \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

■

3.25 (1) $f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n-3)x + 1$ より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) &= \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^3 - 2n\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 + (2n-3)\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) + 1 \\ &= \frac{1 - 2n(1-\alpha) + (2n-3)(1-\alpha)^2 + (1-\alpha)^3}{(1-\alpha)^3} \\ &= \frac{-\alpha^3 + 2n\alpha^2 - (2n-3)\alpha - 1}{(1-\alpha)^2} = -\frac{f(\alpha)}{(1-\alpha)^2} \end{aligned}$$

$$\alpha \text{ は } f(x) = 0 \text{ の解であるから, } f(\alpha) = 0 \text{ より } f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = 0$$

(2) n は正の整数であるから

$$f(-1) = 3 - 4n < 0, \quad f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = -1 < 0$$

よって, $f(x) = 0$ の解は, 3つの区間 $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x$ にそれぞれ1個ずつ実数解が存在する.

(3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ とすると, (2) の結果から

$$-1 < \alpha_n < 0 < \beta_n < 1 < \gamma_n$$

さらに, (1) の結論から

$$\alpha_n = \frac{1}{1 - \gamma_n}, \quad \beta_n = \frac{1}{1 - \alpha_n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{1 - \beta_n}$$

上の第3式から $\beta_n = 1 - \frac{1}{\gamma_n} \quad \dots (*)$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } f(n) &= -n^3 + 2n^2 - 3n + 1 \\ &= -n^2(n - 2) - 3n + 1 < 0 \end{aligned}$$

したがって $n < \gamma_n \quad \dots (**)$

(*), (**) より $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$

補足 (**) および $\alpha_n = \frac{1}{1 - \gamma_n}$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ■

3.26 (1) $f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3}$ を微分すると ($x \geq 0$)

$$f'_n(x) = -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\sin \frac{x}{3}$$

$x \geq 0$ のとき, $-\frac{n}{2}e^{nx} \leq -\frac{n}{2}$, $-\frac{1}{3}\sin \frac{x}{3} \leq \frac{1}{3}$ であるから

$$f'_n(x) \leq -\frac{n}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(n - \frac{2}{3}\right) < 0$$

したがって, $f_n(x)$ は単調減少.

また, $f_n(0) = \frac{3}{2} > 0$, $f_n\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{3n}{2}\pi} < 0$ であるから, 方程式

$$f_n(x) = 0$$

は, ただ1つの実数解 $x \in \left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$ をもつ.

$$(2) \quad f_n(a_n) = 0 \text{ より } 1 - \frac{1}{2}e^{na_n} + \cos \frac{a_n}{3} = 0$$

$$e^{na_n} = 2 \left(1 + \cos \frac{a_n}{3} \right) \quad \text{ゆえに} \quad na_n = \log 2 \left(1 + \cos \frac{a_n}{3} \right) \quad (*)$$

$a_n \in \left(0, \frac{3}{2}\pi \right)$ であるから, $\log 2 < \log 2 \left(1 + \cos \frac{a_n}{3} \right) < \log 4$ に注意して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2 \left(1 + \cos \frac{a_n}{3} \right) = 0$$

$$(3) \quad (2) \text{ の結果を } (*) \text{ に代入して } \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \log 4 \quad \blacksquare$$

3.27 (2) で設定された数列 z_n, a_n, b_n, c_n について, 次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \quad a_0 = b_0 = c_0 = 0 \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{6}(a_n + b_n + c_n) \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}(z_n + b_n + c_n) \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{6}(a_n + z_n + c_n) \\ c_{n+1} &= \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{6}(a_n + b_n + z_n) \end{aligned} \quad (*)$$

$z_n + a_n + b_n + c_n = 1$ であるから, $\{z_n\}, \{a_n\}$ について

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{6}(1 - z_n) = \frac{1}{3}z_n + \frac{1}{6} \\ a_0 &= 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}(1 - a_n) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{これから} \quad z_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \left(z_n - \frac{1}{4} \right), \quad a_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \left(a_n - \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{したがって} \quad z_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n, \quad a_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} \quad (**)$$

$$(1) \quad (i) \quad z_2 = \frac{1}{3} \quad (ii) \quad a_2 = \frac{2}{9} \quad (iii) \quad a_3 = \frac{13}{54} \quad (iv) \quad \frac{z_2 \cdot \frac{1}{6}}{a_3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \bigg/ \frac{13}{54} = \frac{3}{13}$$

(2) (i) (P) $a_n = b_n = c_n$ とすると, $(*)$ より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - b_n), \quad b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - c_n), \quad c_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(c_n - b_n)$$

$a_0 = b_0 = c_0$ より, $n = 0$ のとき, (P) は成立する.

$n = k$ のとき, (P) が成立すると仮定すると, 上の漸化式から

$$a_{k+1} - b_{k+1} = 0, \quad b_{k+1} - c_{k+1} = 0, \quad c_{k+1} - a_{k+1} = 0$$

よって, $n = k + 1$ のときも, (P) が成立する.

したがって, すべての自然数 n について, (P) は成立する.

$$(ii) \quad (**) \text{ より } z_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$(iii) \quad (ii) \text{ の結果から } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{4}$$

■

$$\begin{aligned} 3.28 \quad (1) \quad & \text{AQ}_n = \text{AP}_n \tan \theta \\ & = a_n \tan \theta, \\ & \text{BR}_n = (1 - \text{AQ}_n) \tan \theta \\ & = (1 - a_n \tan \theta) \tan \theta \\ & = \tan \theta - a_n \tan^2 \theta, \\ & \text{CS}_n = (1 - \text{BR}_n) \tan \theta \\ & = (1 - \tan \theta + a_n \tan^2 \theta) \tan \theta \\ & = \tan \theta - \tan^2 \theta + a_n \tan^3 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \text{AP}_{n+1} = 1 - \text{OP}_{n+1} \\ & = 1 - \text{OS}_n \tan \theta \\ & = 1 - (1 - \text{CS}_n) \tan \theta \end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 - (1 - \tan \theta + \tan^2 \theta - a_n \tan^3 \theta) \tan \theta \\ &= 1 - \tan \theta + \tan^2 \theta - \tan^3 \theta + a_n \tan^4 \theta \end{aligned} \quad (A)$$

(3) (2) で得られた漸化式の特異方程式の解を α とすると

$$\alpha = 1 - \tan \theta + \tan^2 \theta - \tan^3 \theta + \alpha \tan^4 \theta \quad (B)$$

$$\text{したがって} \quad (1 - \tan^4 \theta) \alpha = (1 + \tan^2 \theta)(1 - \tan \theta)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より, $0 < \tan^4 \theta < 1$ であるから

$$\alpha = \frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 - \tan \theta)}{1 - \tan^4 \theta} = \frac{1}{1 + \tan \theta}$$

$$(A), (B) \text{ より } a_{n+1} - \alpha = \tan^4 \theta (a_n - \alpha)$$

数列 $\{a_n - \alpha\}$ は, 初項 $a_1 - \alpha$, 公比 $\tan^4 \theta$ の等比数列であるから

$$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)(\tan^4 \theta)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad a_n &= (a_1 - \alpha)(\tan^4 \theta)^{n-1} + \alpha \\ &= \left(a_1 - \frac{1}{1 + \tan \theta} \right) (\tan^4 \theta)^{n-1} + \frac{1}{1 + \tan \theta} \end{aligned}$$

(4) (i) $P_1 = P_2$ のとき, $a_1 = a_2$ より

$$a_1 = 1 - \tan \theta + \tan^2 \theta - \tan^3 \theta + a_1 \tan^4 \theta \quad \text{ゆえに} \quad a_1 = \frac{1}{1 + \tan \theta}$$

(ii) $P_1 \neq P_2$ のとき, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より, $0 < \tan^4 \theta < 1$

$$(3) \text{ の結果から} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1 + \tan \theta}$$

(i), (ii) の結果から

$$\begin{aligned} OP_n : P_n A &= (1 - a_n) : a_n \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \tan \theta} : \frac{1}{1 + \tan \theta} \\ &= \tan \theta : 1 = \sin \theta : \cos \theta \end{aligned}$$

よって, P_n は線分 OA を $\sin \theta : \cos \theta$ に内分する点に近づく. ■

3.29 (1) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ より

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{x-2}{2x\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{3}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{-x+6}{4x^2\sqrt{x}}$$

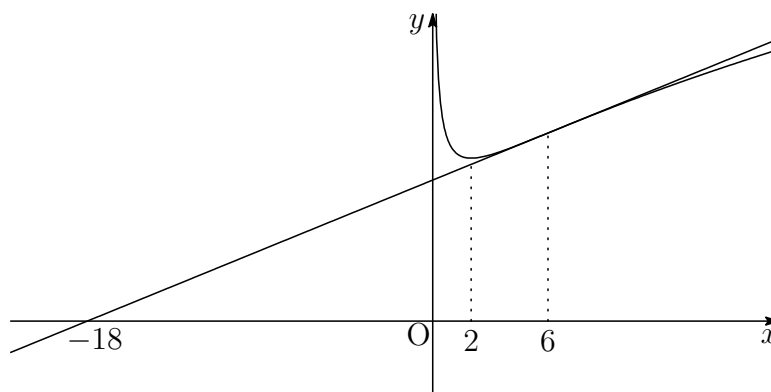
x	(0)	$\dots$	2	$\dots$	6	$\dots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{8}{\sqrt{6}}$	$\nearrow$

よって、極小値 $f(2) = 2\sqrt{2}$ をとる.

(2) (1) の結果から、 $y = f(x)$ 上の変曲点 $(6, f(6))$ における接線の方程式は

$$y - \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3\sqrt{6}}(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{3\sqrt{6}}(x + 18)$$

$y = f(x)$ のグラフの凹凸から、 t の値の範囲は $t < -18$



別解 (3) の 2 次方程式 (*) が異なる 2 つの実数解 α, β がともに正であるから

$$D = (t+6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2t) = t^2 + 20t + 36 = (t+18)(t+2) > 0,$$

$$\alpha + \beta = -(t+6) > 0, \quad \alpha\beta = -2t > 0$$

これを解いて $t < -18$

(3) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$y = \frac{\alpha - 2}{2\alpha\sqrt{\alpha}}(x - \alpha) + \sqrt{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{(\alpha - 2)x + \alpha^2 + 6\alpha}{2\alpha\sqrt{\alpha}}$$

この直線が点 $P(t, 0)$ を通るから

$$(\alpha - 2)t + \alpha^2 + 6\alpha = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2 + (t + 6)\alpha - 2t = 0$$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(\beta, f(\beta))$ における接線についても、同様の結果を得る．2次方程式

$$x^2 + (t + 6)x - 2t = 0 \quad (*)$$

の解が α, β であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -(t + 6), \quad \text{ゆえに} \quad t = -(\alpha + \beta + 6)$$

α, β がともに整数であるから、 t は整数である．(*) より

$$(x - 2)t = -x^2 - 6x$$

上式から、 $x \neq 2$ であることに注意して

$$t = \frac{-x^2 - 6x}{x - 2} = -x - 8 - \frac{16}{x - 2}$$

x, t は整数であるから ($x > 0$)

x	1	3	4	6	10	18
t	7	-27	-20	-18	-20	-27

$t < -18, \alpha < \beta$ であることに注意して

$$t = -27 \text{ のとき} \quad (\alpha, \beta) = (3, 18)$$

$$t = -20 \text{ のとき} \quad (\alpha, \beta) = (4, 10)$$

よって $(\alpha, \beta) = (3, 18), (4, 10)$

補足 解と係数の関係から $\alpha + \beta = -(t + 6), \quad \alpha\beta = -2t$

上の2式から t を消去して整理すると

$$\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) - 12 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha - 2)(\beta - 2) = 16$$

$0 < \alpha < \beta$ を満たす整数 (α, β) は

$$(\alpha - 2, \beta - 2) = (1, 16), (2, 8)$$

よって $(\alpha, \beta) = (3, 18), (4, 10)$ ■

3.30 (1) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + a$ より $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

$y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y = \left(2t + \frac{1}{t^2}\right)(x - t) + t^2 - \frac{1}{t} + a$$

すなわち $y = \left(2t + \frac{1}{t^2}\right)x - t^2 - \frac{2}{t} + a$

(2) (1) で求めた直線が原点を通るから

$$-t^2 - \frac{2}{t} + a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = t^2 + \frac{2}{t} \quad (*)$$

(*) の解が丁度 2 個存在すればよい. $g(t) = t^2 + \frac{2}{t}$ とおくと

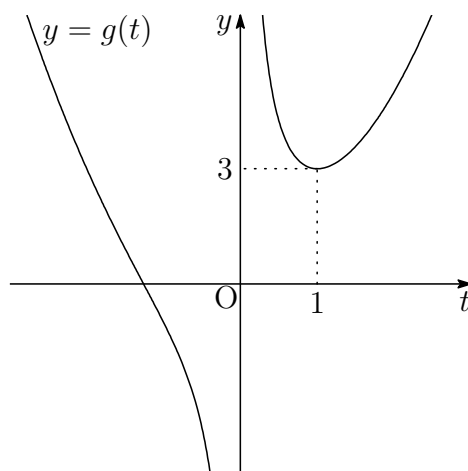
$$g'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = \frac{2(t^3 - 1)}{t^2}$$

$g(t)$ の増減表は

t	$\dots$	(0)	$\dots$	1	$\dots$
$g'(t)$	$-$		$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$		$\searrow$	3	$\nearrow$

$$\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow -0} g(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} g(t) = \infty$$

よって, 条件を満たす a の値は $a = 3$



3.31 (1) (部分積分法を利用)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^2 \sin x \, dx &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^2 (-\cos x)' \, dx \\
 &= \left[x^2 (-\cos x) - 2x (-\sin x) + 2 \cos x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\
 &= \left[(2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\
 &= \frac{2}{9}\pi^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - 3
 \end{aligned}$$

補足 本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

は漸化式である． $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで， n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが， $f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned}
 \int f(x)g'(x) \, dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x) \\
 &\quad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x) \, dx
 \end{aligned}$$

が成立する．同様に，次式も成立する．

$$\begin{aligned}
 \int f'(x)g(x) \, dx &= f(x)g(x) - f^{(-1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(-2)}(x)g^{(2)}(x) \\
 &\quad \cdots + (-1)^n f^{(-n)}(x)g^{(n)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(-n)}(x)g^{(n+1)}(x) \, dx
 \end{aligned}$$

- (2) 3 点 P, Q, R が正三角形をなすのは，Q を中心に R を $\pm \frac{\pi}{3}$ だけ回転した点が P(z) であるから

$$\begin{aligned}
 z - (-1) &= \{(\sqrt{3} - 1 - i) - (-1)\} \left\{ \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \right\} \\
 z &= -1 + (\sqrt{3} - i) \cdot \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i) \\
 &= -1 + \sqrt{3} + i, -1 - 2i
 \end{aligned}$$

- (3) 正の整数 n, p, q が， $p > q$ かつ ${}_p C_2 + {}_q C_1 = n$ ， ${}_m C_2 \leq n$ より

$${}_m C_2 \leq {}_p C_2 + {}_q C_1 < {}_p C_2 + {}_p C_1 = {}_{p+1} C_2$$

よって，求める最大の整数 m は $m = p$ ■

3.32 (1) $x = \tan \theta$ とすると $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{x-t}{1+t^2} dt + \int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2} dt \\ &= x \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt + \int_x^1 \frac{t}{1+t^2} dt - x \int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt \end{aligned} \quad (*)$$

これを微分すると

$$f'(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt - \int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$t = \tan \varphi \text{ とすると } \frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

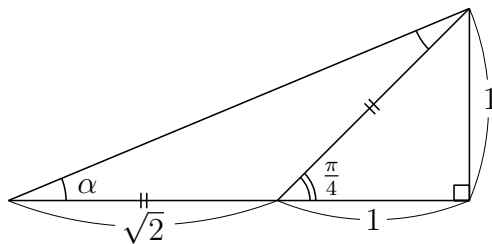
$$\begin{aligned} f'(\tan \theta) &= \int_0^\theta \frac{1}{1+\tan^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} - \int_\theta^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \\ &= \int_0^\theta d\varphi - \int_\theta^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = 2\theta - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$f'(\tan \alpha) = 0$ とすると

$$2\alpha - \frac{\pi}{4} = 0 \quad \text{よって} \quad \alpha = \frac{\pi}{8}$$

(2) (1) の結果から

$$\tan \alpha = \tan \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$



(3) (*) より, $x = \tan \theta$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left[\varphi \right]_0^\theta - \frac{1}{2} \left[\log(1+t^2) \right]_0^x + \frac{1}{2} \left[\log(1+t^2) \right]_x^1 - x \left[\varphi \right]_\theta^{\frac{\pi}{4}} \\ &= x \left(2\theta - \frac{\pi}{4} \right) + \log \frac{\sqrt{2}}{1+x^2} \end{aligned} \quad (**)$$

(2) の結果から, $f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

(**) より

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} \log 2 \\ f(\sqrt{2}-1) &= \log \frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \log \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ f(1) &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

$\log 2 < 0.7$ より

$$f(1) - f(0) = \frac{\pi}{4} - \log 2 = \frac{\pi - 4 \log 2}{4} > \frac{\pi - 4 \times 0.7}{4} > 0$$

よって 最大値 $f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$,

$$\text{最小値 } f(\sqrt{2}-1) = \log \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

■

3.33 (1) 相加平均・相乗平均の大小関係から

$$f(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{2} + e^{-2x} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{e^x}{2} \cdot \frac{e^x}{2} \cdot e^{-2x}} = 3 \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}$$

上式で等号が成立するとき

$$\frac{e^x}{2} = e^{-2x} \quad \text{すなわち} \quad e^x = \sqrt[3]{2} \quad \left(x = \frac{1}{3} \log 2 \right)$$

よって, 最小値 $f\left(\frac{1}{3} \log 2\right) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}$

(2) $f(x) = 2$ より $e^x + e^{-2x} = 2$ ゆえに $e^{3x} - 2e^{2x} + 1 = 0$
 $t = e^x$ とおくと ($t > 0$)

$$t^3 - 2t^2 + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-1)(t^2 - t - 1) = 0$$

$$t > 0 \text{ に注意して } t = 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{よって} \quad x = 0, \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(3) $t = e^x$ より $\frac{dt}{dx} = e^x = t$

x	$a_1 \longrightarrow a_2$
t	$1 \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

求める立体の体積を V とし, $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと ($k^2 - k - 1 = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{a_1}^{a_2} (e^x + e^{-2x}) dx = \int_1^k (t + t^{-2})^2 t^{-1} dt \\ &= \int_1^k (t + 2t^{-2} + t^{-5}) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t^{-1} - \frac{1}{4}t^{-4} \right]_1^k \\ &= \frac{1}{2}k^2 - \frac{2}{k} - \frac{1}{4k^4} + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

ここで, $k^2 = k + 1, \frac{1}{k} = k - 1$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} &= k^2 - 2k + 1 = (k + 1) - 2k + 1 = -k + 2 \\ \frac{1}{k^4} &= (-k + 2)^2 = k^2 - 4k + 4 = (k + 1) - 4k + 4 = -3k + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \frac{V}{\pi} &= \frac{1}{2}(k + 1) - 2(k - 1) - \frac{1}{4}(-3k + 5) + \frac{7}{4} \\ &= -\frac{3}{4}k + 3 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 3 = \frac{21 - 3\sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V = \frac{21 - 3\sqrt{5}}{8} \pi$$



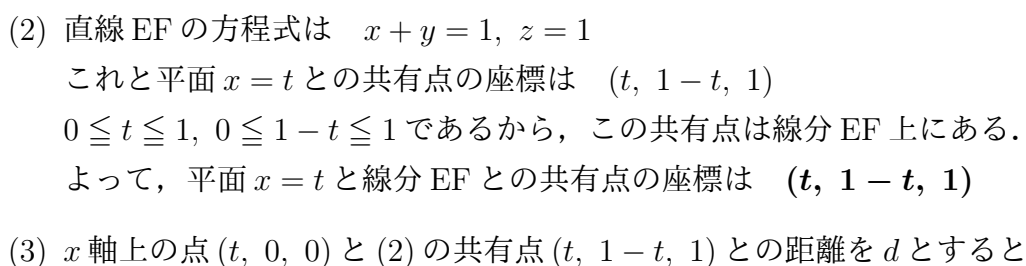
3.34 (1) 直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体 X_1 の体積 V_1 は

$$V_1 = \pi AC^2 \cdot AE = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 4\pi$$

$$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), H(0, -1, 1) \text{ より } AB = \sqrt{2}, AH^2 = 3$$

直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体 X_2 の体積 V_2 は

$$V_2 = \pi AH^2 \cdot AB = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}\pi$$



$$d^2 = (t - 1)^2 + 1$$

したがって、求める回転体 X_3 の体積 V_3 は

$$\begin{aligned}\frac{V_3}{2\pi} &= \int_0^1 d^2t = \int_0^1 \{(t-1)^2 + 1\} dt \\ &= \left[\frac{1}{3}(t-1)^3 + t \right]_0^1 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

よつて $V_3 = \frac{8}{3}\pi$

3.35 (1) $\sin x = \cos 2x$ とすると $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$

$$(\sin x + 1)(2 \sin x - 1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

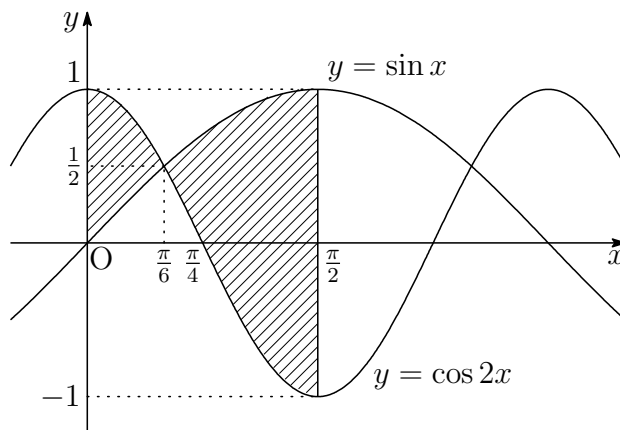
$f(x) = \cos 2x - \sin x$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$ とおく.

D は、下の図の斜線部分であるから、その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \\ &= 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$F(0) = 1, \quad F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ であるから}$$

$$S = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1 - 0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1$$



$$(2) \quad |\sin x| \geq |\cos 2x| \text{ より } \sin^2 x - \cos^2 2x \geq 0$$

$$(\sin x + \cos 2x)(\sin x - \cos 2x) \geq 0$$

$$(-2\sin^2 x + \sin x + 1)(2\sin^2 x + \sin x - 1) \geq 0$$

$$-(\sin x - 1)(2\sin x + 1)(\sin x + 1)(2\sin x - 1) \geq 0$$

$$\cos^2 x(2\sin x + 1)(2\sin x - 1) \geq 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ に注意して解くと } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad g(x) &= \cos^2 2x - \sin^2 x = \frac{1 + \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x
 \end{aligned}$$

$g(x)$ の原始関数の 1 つを $G(x) = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x$ とする.
 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x) dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} g(x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\
 &= 2G\left(\frac{\pi}{6}\right) - G(0) - G\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{16} - 0 - \frac{1}{4} + \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{8}
 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V = \pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{8} \right)$$

■

3.36 (1) $y = e^{\sqrt{x}}$ より

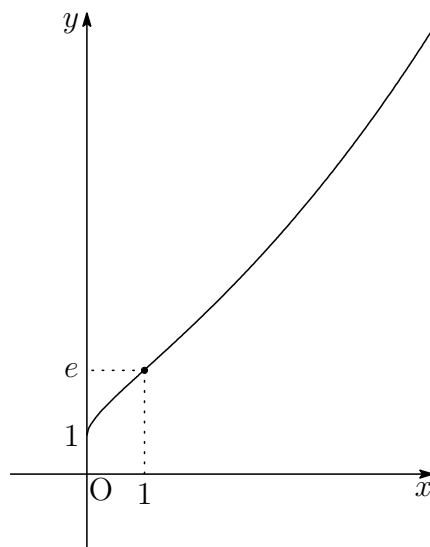
$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}, \\
 y'' &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{4x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

したがって, y の増減および凹凸は, 次のようになる.

x	0	...	1	...
y'		+	+	+
y''		-	0	+
y	1	↗	e	↗

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$$

$y = e^{\sqrt{x}}$ のグラフの概形は, 次のようになる. 変曲点は $(1, e)$



(2) $y = e^{\sqrt{x}}$ 上の点 $(t, e^{\sqrt{t}})$ における接線の方程式は

$$y - e^{\sqrt{t}} = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}x + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)e^{\sqrt{t}}$$

これが原点 O を通るから

$$1 - \frac{\sqrt{t}}{2} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 4$$

$$\text{よって} \quad k = \frac{e^{\sqrt{4}}}{2\sqrt{4}} = \frac{e^2}{4}, \quad P(4, e^2)$$

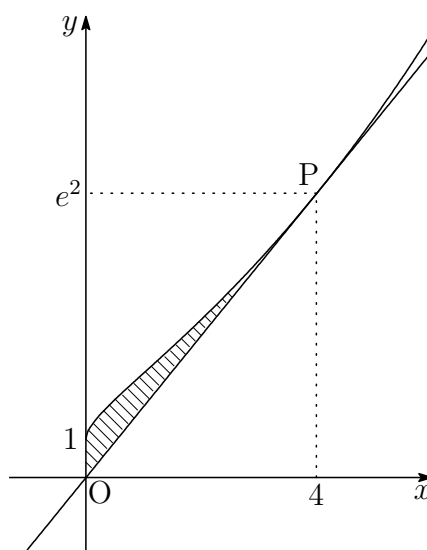
(3) 求める面積を S とすると, 下の図から

$$S = \int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot e^2$$

$$u = \sqrt{x} \text{ とおくと, } x = u^2 \text{ より } \frac{dx}{du} = 2u \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 4 \\ \hline u & 0 \rightarrow 2 \end{array}$$

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 e^u \cdot 2u du = \left[e^u(2u - 2) \right]_0^2 = 2e^2 + 2$$

$$\text{よって } S = (2e^2 + 2) - 2e^2 = 2$$



補足 次の積分公式 (第1式) を利用している⁶.

$$\begin{aligned} \int e^x f(x) dx &= e^x \{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\} + C \\ \int e^{-x} f(x) dx &= -e^{-x} \{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\} + C \end{aligned}$$



3.37 (1) $y = e^x$ を微分すると $y' = e^x$

したがって, 曲線 $y = e^x$ 上の点 (a, e^a) における接線の方程式は

$$y - e^a = e^a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = e^a x + e^a(1 - a)$$

(2) (1) の結果から $p = e^a, \quad q = e^a(1 - a)$

$$e^a = p, \quad a = \log p \text{ より } \quad q = p(1 - \log p)$$

⁶http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2023.pdf (p.10 の解説を参照)

(3) (2)の結果から $f(x) = x(1 - \log x)$ これを微分すると $f'(x) = -\log x$

$y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - a(1 - \log a) = -(x - a) \log a \quad \text{ゆえに} \quad y = -x \log a + a$$

ℓ_1, ℓ_2 は, 上式の a にそれぞれ $1, e$ を代入したものであるから

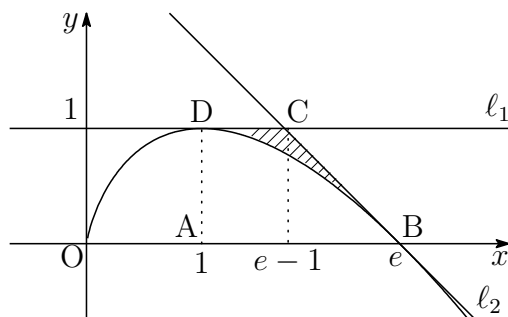
$$\ell_1 : y = 1, \quad \ell_2 : y = -x + e$$

(4) $f''(x) = -\frac{1}{x} < 0$ から, ℓ_1, ℓ_2 は曲線 $y = f(x)$ の上側にある. ここで

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x(1 - \log x) dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' (1 - \log x) dx \\ &= \frac{x^2}{2}(1 - \log x) - \int \frac{x^2}{2} \left(-\frac{1}{x}\right) dx \\ &= x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \log x\right) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

求める面積を S とすると, 下の図から

$$\begin{aligned} S &= \text{台形 ABCD} - \int_1^e f(x) dx \\ &= \frac{1}{2}\{(e-2) + (e-1)\} - \left[x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \log x\right) \right]_1^e \\ &= -\frac{1}{4}(e^2 - 4e + 3) \end{aligned}$$



■

3.38 (1) $x = 3 \cos^3 \theta, y = 3 \sin^3 \theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = -9 \cos^2 \theta \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 9 \sin^2 \theta \cos \theta \quad (*)$$

したがって $\left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}\right) = 9 \sin \theta \cos \theta (-\cos \theta, \sin \theta)$

$\vec{v} = (-\cos \theta, \sin \theta)$ とし, C 上の $P(3\cos^3 \theta, 3\sin^3 \theta)$ における接線を ℓ とする. ℓ 上の $T(x, y)$ について, $\vec{v} // \vec{PT}$ であるから

$$(x - 3\cos^3 \theta) \sin \theta + (y - 3\sin^3 \theta) \cos \theta = 0$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\sin \theta \neq 0$, $\cos \theta \neq 0$ に注意して整理すると

$$x \sin \theta + y \cos \theta = 3 \sin \theta \cos \theta \quad \text{ゆえに} \quad \ell: \frac{x}{3 \cos \theta} + \frac{y}{3 \sin \theta} = 1$$

よって **$Q(3 \cos \theta, 0)$, $R(0, 3 \sin \theta)$**

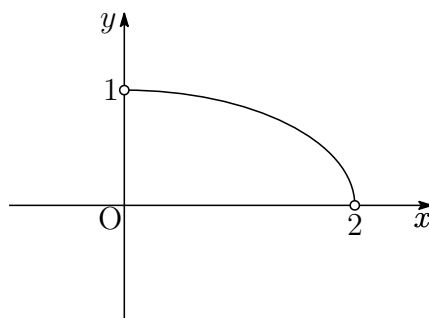
(2) 線分 QR を $1:2$ 内分する点 S は

$$\vec{OS} = \frac{2\vec{OQ} + \vec{OR}}{3} = (2 \cos \theta, \sin \theta)$$

$x = 2 \cos \theta$, $y = \sin \theta$ とすると $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0)$$

よって, 点 S の軌跡は楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の第 1 象限の部分を表す.



(2) で求めた方程式から $x^2 = 4(1 - y^2)$ ($0 \leq y \leq 1$)

よって、求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = 4 \int_0^1 (1 - y^2) dy = 4 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

よって $V = \frac{8}{3}\pi$

(3) (*) から ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} &= 9\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \\ &= 9 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

よって、求める曲線の部分の長さは

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{9}{2} \sin 2\theta d\theta \\ &= -\frac{9}{4} \left[\cos 2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

■

3.39 (1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1} = 1 - 2(x^2 + 1)^{-1}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x(x^2 + 1)^{-2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \\ f''(x) &= 4(x^2 + 1)^{-2} + 4x \cdot (-4x)(x^2 + 1)^{-3} \\ &= \frac{4(x^2 + 1) - 16x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{4(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$ より $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$$(3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2 + 1} \leq 0 \quad \text{これを解いて} \quad -1 \leq x \leq 1$$

よって $\mathbf{a = -1, b = 1}$

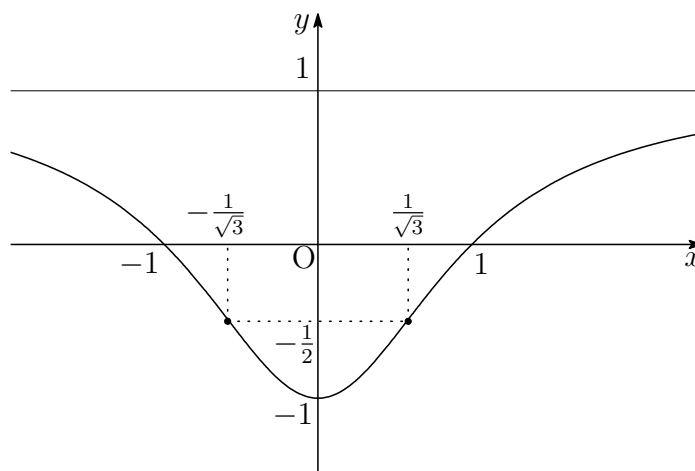
$$x = \tan \theta \text{ より } (-1 \leq x \leq 1) \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \longrightarrow 1 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

(4) (1), (2) の結果から

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$

極小値 $f(0) = -1$, 変曲点 $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$, 漸近線 $\mathbf{y = 1}$



(5) (3) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} S &= - \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{x^2 + 1} - 1 \right) dx \\ &= 2I - \int_{-1}^1 dx = \pi - 2 \end{aligned}$$

■

3.40 (1) $p = \frac{1}{8}$, $q = \frac{5}{8}$ とおく.

持ち点が 0, すなわち, 「0」が n 回出る確率は q^n

持ち点が1, すなわち, 「1」が1回, 「0」が $n-1$ 回出る確率は

$${}_nC_1pq^{n-1} = npq^{n-1}$$

持ち点が2, すなわち, 「2」が1回, 「0」が $n-1$ 回, または, 「1」が2回, 「0」が $n-2$ 回出る確率は

$${}_nC_1pq^{n-1} + {}_nC_2p^2q^{n-2} = npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} & q^n + npq^{n-1} + \left\{ npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2} \right\} \\ &= \left\{ q^2 + 2npq + \frac{n(n-1)}{2}p^2 \right\} q^{n-2} \\ &= \left(\frac{25}{8^2} + \frac{10n}{8^2} + \frac{n^2-n}{2 \cdot 8^2} \right) \cdot \frac{5^{n-2}}{8^{n-2}} = \frac{(n^2 + 19n + 50) \cdot 5^{n-2}}{2 \cdot 8^n} \end{aligned}$$

- (2) 持ち点が10, すなわち, 「1」が1回, 「3」が3回, または, 「2」が2回, 「3」が2回出る確率は

$${}_4C_1p \cdot p^3 + {}_4C_2p^2 \cdot p^2 = 10p^4$$

持ち点が11, すなわち, 「2」が1回, 「3」が3回出る確率は

$${}_4C_1p \cdot p^3 = 4p^4$$

持ち点が12, すなわち, 「3」が4回出る確率は p^4

以上から, 試行を4回行って得点が10以上になる確率は

$$10p^4 + 4p^4 + p^4 = 15p^4$$

試行を4回行って持ち点が10以上で, さらにこの試行を2回行って持ち点が17以上となるのは, 次の場合である.

- (i) 4回行って持ち点が11で, さらに「3」が2回出る確率は

$$4p^4 \times p^2 = 4p^6$$

- (ii) 4回行って持ち点が12で, さらに「2」が1回, 「3」が1回, または「3」が2回出る確率は

$$p^4 \times ({}_2C_1p \cdot p + p^2) = 3p^6$$

求める条件付き確率は $\frac{4p^6 + 3p^6}{15p^4} = \frac{7}{15}p^2 = \frac{7}{15} \left(\frac{1}{8} \right)^2 = \frac{7}{960}$ ■

3.41 (1) サイコロの目 1, 2, 3, 4, 5, 6 の最小公倍数は 60

よって、求める 3 つの数は **60, 120, 180**

(2) n の約数となるサイコロの目の集合を A とし、 A の大きさ (要素の個数) を $|A|$ とする. $1 \in A, 2 \notin A \Rightarrow 6 \notin A, 3 \notin A \Rightarrow 6 \notin A, \{2, 3\} \subset A \Rightarrow 6 \in A$ に注意すると、 $|A| = 5$ となる A は次の 2 通り.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad \text{または} \quad A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

これを満たす n を小さい順に 3 つ求めると **12, 24, 30**

(3) $160 = 2^5 \cdot 5$ より $A = \{1, 2, 4, 5\}$

このとき、5 の目が出るのは 1 回まで、3 回とも 4 の目は出ない.

● 5 の目が出ないときの確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{26}{216}$$

● 5 の目が 1 回出るときの確率は

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{27}{216}$$

これらの事象は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{26}{216} + \frac{27}{216} = \frac{53}{216}$$

■

3.42 (1) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}(1 - x) = \frac{1}{6}$ とおく.

(i) $t = 1$ のとき, R が点 O, A, C, D にある確率は, それぞれ

$$x, y, y, y$$

したがって, $t = 2$ のとき, R が点 O にある確率は

$$xx + (y + y + y)y = x^2 + 3y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

(ii) $t = 2$ のとき, R が点 A, O, B, E にある確率は, それぞれ

$$2xy, x^2 + 3y^2, 2y^2, 2y^2$$

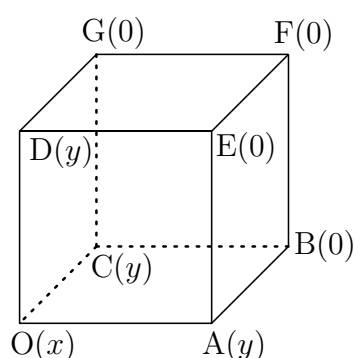
したがって, $t = 3$ のとき, R が点 A にある確率は

$$\begin{aligned} & 2xy \cdot x + \{(x^2 + 3y^2) + 2y^2 + 2y^2\}y \\ &= (3x^2 + 7y^2)y = \left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\} \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{108} \end{aligned}$$

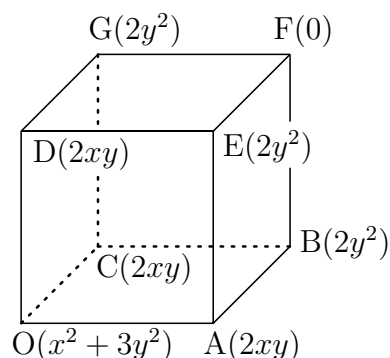
(iii) (i), (ii) の結果から, 求める条件付き確率は

$$\frac{(x^2 + 3y^2) \cdot y}{(3x^2 + 7y^2)y} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 7} = \frac{3^2 + 3}{3 \cdot 3^2 + 7} = \frac{6}{17}$$

$$(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{6})$$



[1 秒後]



[2 秒後]

(2) $y = \frac{1}{3}(1-x)$ とする.

(i) $t = 2$ のとき, R が点 B, A, C, F にある確率は, それぞれ

$$2y^2, 2xy, 2xy, 0$$

したがって, $t = 3$ のとき, R が点 B にある確率は

$$\begin{aligned} 2y^2 \cdot x + (2xy + 2xy + 0)y &= 6xy^2 = 6x \left\{ \frac{1}{3}(1-x) \right\}^2 \\ &= \frac{2}{3}x(1-x)^2 \end{aligned}$$

(ii) 対称性から, 3 秒後に R が点 B, E, G にある確率は等しい.

3 点 O, R, S が正三角形をなすのは, $\triangle OBE$, $\triangle OBG$, $\triangle OEG$ である. このとき, R, S は点 B, E, G のいずれかにあるから, (i) の結果を利用して

$$p(x) = {}_3P_2 \left\{ \frac{2}{3}x(1-x)^2 \right\}^2 = \frac{8}{3}x^2(1-x)^4$$

(iii) 3 正数 $2x, 1-x, 1-x$ の相加平均・相乗平均の大小関係から

$$2x + (1-x) + (1-x) \geq 3\sqrt[3]{2x \cdot (1-x) \cdot (1-x)}$$

$$\text{整理すると } 2 \geq 3\sqrt[3]{2x(1-x)^2} \quad \text{ゆえに} \quad x(1-x)^2 \leq \frac{4}{27}$$

$$\text{等号が成立するとき } 2x = 1-x \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\text{このとき, 最大値 } \frac{8}{3} \left(\frac{4}{27} \right)^2 = \frac{128}{2187}$$

■

3.43 (1) $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ より $M_2(8!) = 7$

$$D(8!) = (7+1)(2+1)(1+1)(1+1) = \mathbf{96}$$

(2) 1 から 30 までの自然数で 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 で割り切れる個数に注目すると

$$M_2(30!) = 15 + 7 + 3 + 1 = \mathbf{26}$$

1 から 30 までの自然数で 3, 3^2 , 3^3 で割り切れる個数に注目すると

$$M_3(30!) = 10 + 3 + 1 = \mathbf{14}$$

したがって, $30! = 2^{26} \cdot 3^{14} A$ とおくと (A は 2, 3 と互いに素)

$$30! = 3(2^2 \cdot 3)^{13} A = 3 \cdot 12^{13} A \quad \text{よって} \quad M_{12}(30!) = \mathbf{13}$$

$$(3) \quad d = D(30!) = D(2^{26} \cdot 3^{14} A) = D(2^{26})D(3^{14})D(A) \\ = (26+1)(14+1)D(A) = 27 \cdot 15 D(A)$$

(2) の結果から $n = M_{12}(30!) = 13$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{30!}{12^i} \right) &= \sum_{i=1}^{13} D \left(\frac{2^{26} \cdot 3^{14} A}{2^{2i} 3^i} \right) \\ &= D(A) \sum_{i=1}^{13} D(2^{26-2i}) D(3^{14-i}) \\ &= D(A) \sum_{i=1}^{13} (27-2i)(15-i) \\ &= D(A) \sum_{i=1}^{13} \{2(14-i)-1\} \{(14-i)+1\} \\ &= D(A) \sum_{i=1}^{13} (2i-1)(i+1) = D(A) \sum_{i=1}^{13} (2i^2 + i - 1) \\ &= D(A) \left(2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 27 + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 - 13 \right) \\ &= 13 \cdot 132 D(A) \\ &= 13 \cdot 132 \cdot \frac{d}{27 \cdot 15} = \frac{13 \cdot 44}{9 \cdot 15} d = \frac{572}{135} d \end{aligned}$$

■

3.44 (1) p_k は k 回投げて, k 回とも 1 の目が出る確率であるから

$$p_k = \left(\frac{1}{6} \right)^k = \frac{1}{6^k}$$

p_{k+1} は k 回目までに 1 の目が出る $k-1$ 回出て, $k+1$ 回目に 1 の目が出る確率であるから

$$p_{k+1} = {}_k C_{k-1} \left(\frac{1}{6} \right)^{k-1} \cdot \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5k}{6^{k+1}}$$

(2) p_n は $n-1$ 回目までに 1 の目が出る $k-1$ 回出て, n 回目に 1 の目が出る確率であるから

$$p_n = {}_{n-1} C_{k-1} \left(\frac{1}{6} \right)^{k-1} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-k} \times \frac{1}{6} = {}_{n-1} C_{k-1} \left(\frac{1}{6} \right)^k \left(\frac{5}{6} \right)^{n-k}$$

(3) (2) の結論を $p_n < p_{n+1}$ に代入すると

$${}_{n-1}C_{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} < {}_nC_{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1-k}$$

$${}_{n-1}C_{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}, \quad {}_nC_{k-1} = \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} \text{ より}$$

$$1 < \frac{n}{n+1-k} \cdot \frac{5}{6} \quad \text{ゆえに} \quad n < 6k - 6$$

$p_n < p_{n+1}$ となるとき, $k \leq n$ に注意して $\mathbf{k \leq n < 6k - 6}$

$p_n = p_{n+1}$ となるとき, $n = 6k - 6$ より $p_{6k-6} = p_{6k-5}$

$p_n > p_{n+1}$ となるとき, $n > 6k - 6$ より $n \geq 6k - 5$

したがって $p_k < p_{k+1} < \cdots < p_{6k-6} = p_{6k-5} > p_{6k-4} > \cdots$

よって, p_n が最大になる n は $\mathbf{6k - 6, 6k - 5}$ ■

3.45 (1) n 回投げて点 P の座標が $(1, n-1)$, すなわち, n 回投げて奇数が 1 回, 6 の目が $n-1$ 回出る場合の総数であるから

$$\frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot 3 \cdot 1^{n-1} = \mathbf{3n} \quad (\text{通り})$$

(2) n 回投げて点 P の座標が $(0, n-2)$, すなわち, n 回投げて奇数が 1 回, 2 または 4 が 1 回, 6 の目が $n-2$ 回出る場合の総数であるから

$$\frac{n!}{1!1!(n-2)!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1^{n-2} = \mathbf{6n(n-1)} \quad (\text{通り})$$

(3) (i) n 回投げて点 P の座標が $(2, n-2)$, すなわち, n 回投げて奇数が 2 回, 6 の目が $n-2$ 回出る場合の総数は

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot 3^2 \cdot 1^{n-2} = \frac{9}{2}n(n-1)$$

(ii) n 回投げて点 P の座標が $(0, n)$, すなわち, n 回投げて 6 の目が n 回出る場合の総数は

$$1 \quad (\text{通り})$$

求める場合の総数は, (1), (2) および (i), (ii) の場合であるから

$$3n + 6n(n-1) + \frac{9}{2}n(n-1) + 1 = \frac{21}{2}n^2 - \frac{15}{2}n + 1 \quad (\text{通り})$$

■

- 3.46 (1) 3面が赤, 3面が黒く塗られているサイコロをP, 2面が赤, 4面が黒く塗られているサイコロをQとし, P, Qの赤い面が出る確率をそれぞれ p, q とすると

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

1回の試行で赤い面がちょうど1回出る確率は

$$p(1-q) + (1-p)q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

- (2) 1回目で終了する確率は pq

2回目で終了する確率は $(1-pq) \cdot pq$

2回以下の試行で終了する確率は, $pq = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ より

$$pq + (1-pq)pq = pq(2-pq) = \frac{1}{6} \left(2 - \frac{1}{6} \right) = \frac{11}{36}$$

- (3) 1回の試行で得点が0, 1, 2である確率をそれぞれ α, β, γ とすると

$$\alpha = (1-p)(1-q) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad \gamma = pq = \frac{1}{6},$$

$$\beta = 1 - (\alpha + \gamma) = \frac{1}{2}$$

ゲームの得点が0点となる確率は $\alpha^3 = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$

ゲームの得点が1点となる確率は

$$\alpha\alpha\beta + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha\alpha = 3\alpha^2\beta = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

ゲームの得点が2点となる確率は

$$\begin{aligned} & \gamma + \alpha\gamma + \alpha\alpha\gamma + \alpha\beta\beta + \beta\alpha\beta + \beta\beta\alpha \\ &= \gamma(1 + \alpha + \alpha^2) + 3\alpha\beta^2 \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{53}{108} \end{aligned}$$

ゲームの得点が3点となる確率は

$$\begin{aligned} \beta\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma + \beta\beta\beta &= \beta\gamma(1 + 2\alpha) + \beta^3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{8} = \frac{19}{72} \end{aligned}$$

ゲームの得点が4点となる確率は $\beta\beta\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$ ■

- 3.47** (1) 1 回目, 2 回目がともに白玉を取り出し, 3 回目に赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{9}{12} \times \frac{9}{12} \times \left(1 - \frac{{}_9C_2}{{}_{12}C_2}\right) = \frac{45}{176}$$

- (2) A が赤玉を取り出してゲームが終了するのは 1 回目, 3 回目, 5 回目である.

- (i) 1 回目に終了する確率は

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

- (ii) 3 回目に終了する確率は

$$\frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \left(1 - \frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}\right) = \frac{16}{55}$$

- (iii) 5 回目に終了する確率は

$$\frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_8C_2} \times \left(1 - \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3}\right) = \frac{19}{220}$$

- (i)~(iii) は互いに排反であるから

$$\frac{1}{4} + \frac{16}{55} + \frac{19}{220} = \frac{69}{110}$$

■

- 3.48** (1) $b > a$ のとき, $b - 1 \geq a$ であるから $(b - 1)! \geq a!$

$$b! = b \cdot (b - 1)! \geq b \cdot a! \quad \text{よって} \quad \frac{b!}{a!} \geq b$$

- (2) $2 \cdot a! = b!$ より $\frac{b!}{a!} = 2 > 1$ であるから

$$a! < b! \quad \text{すなわち} \quad a < b$$

$a < b$ より, (1) の結論を用いると

$$2 = \frac{b!}{a!} \geq b > a \quad \text{よって} \quad (a, b) = (1, 2)$$

- (3) (i) $a \leq c, b \leq c$ のとき

$$\frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} = 2, \quad \frac{a!}{c!} \leq 1, \quad \frac{b!}{c!} \leq 1$$

$$\text{このとき} \quad \frac{a!}{c!} = 1, \quad \frac{b!}{c!} = 1 \quad \text{すなわち} \quad a = c, \quad b = c \quad \cdots (*)$$

- (ii) $a > c$ または $b > c$ のとき, 一般性を失うことなく, $b > c$ とし,
(1) の結論を用いると

$$2 = \frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} \geq \frac{a!}{c!} + b > b > c \geq 1$$

これをみたす b, c は存在しない.

- (i), (ii) より $(a, b, c) = (n, n, n)$ (n は自然数) ■

3.49 (1)

$$\begin{aligned} Q &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ &= (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) \\ &= P^2 - 3(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

上式から

$$P \text{ が } 3 \text{ の倍数} \implies Q \text{ は } 3 \text{ の倍数} \quad (\text{A})$$

P が 3 の倍数のとき, Q は 3 の倍数である.

- (2) $P^2 = Q + 3(ab + bc + ca)$ より, Q が 3 の倍数のとき, P^2 は 3 の倍数であるから, P は 3 を因数にもつ. したがって

$$Q \text{ が } 3 \text{ の倍数} \implies P \text{ は } 3 \text{ の倍数} \quad (\text{B})$$

(3)

$$\begin{aligned} R &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= PQ \end{aligned} \quad (*)$$

R が 3 の倍数ならば, (*) より, P または Q が 3 の倍数.

このとき, (A), (B) より, P, Q はともに 3 の倍数である.

よって, R が 3 の倍数ならば, R は 9 の倍数である. ■

3.50 (1) 2点 B, C の x 座標をそれぞれ b, c とすると

$$\overrightarrow{OA} = (a, a^2 - 6a + 6), \quad \overrightarrow{BC} = (c - b, (c - b)(c + b - 6))$$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ より

$$a = c - b \cdots \textcircled{1}, \quad a^2 - 6a + 6 = (c - b)(c + b - 6) = a(c + b - 6)$$

上の第2式の両辺を a で割ると

$$a - 6 + \frac{6}{a} = c + b - 6 \quad \text{ゆえに} \quad c + b = a + \frac{6}{a} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } b = \frac{3}{a}, c = a + \frac{3}{a} \cdots (*)$$

よって, 点 B の x 座標は $\frac{3}{a}$

(2) (i) (*) より, $a = 1$ のとき, $b = 3, c = 4$ であるから

$$A(1, 1), B(3, -3), C(4, -2)$$

$$\overrightarrow{OA} = (1, 1), \overrightarrow{OB} = (3, -3) \text{ より } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

よって, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角は $\frac{\pi}{2}$

(ii) 四角形 OACB は平行四辺形であるから, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ より

$$|1 \cdot (-3) - 1 \cdot 3| = 6$$

(iii) (i) の結果から, $\triangle ABC$ の外接円は, AB を直径とする円である.
円周上の点を $P(x, y)$ とすると, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ であるから

$$(x-1)(x-3) + (y-1)(y+3) = 0$$

が成立する (P が A, B と一致するときも上式は成立する).

よって, 求める方程式は $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ ■

3.51 (1) $P_1(3, -1, 1), P_2(5, 0, -1)$ より $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1, -2)$

$$P_1P_2 = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$$

(2) $d_1 = P_1P_3, d_2 = P_2P_3$ とし, C の半径を r とすると

$$d_1 + d_2 = 3, \quad d_1^2 + r^2 = 5, \quad d_2^2 + r^2 = 2 \quad (*)$$

(*) の第2式, 第3式から r^2 を消去し, 第1式を代入すると

$$d_1^2 - d_2^2 = (d_1 + d_2)(d_1 - d_2) = 3 \quad \text{ゆえに} \quad d_1 - d_2 = 1$$

d_1, d_2 の連立方程式を解いて $d_1 = 2, d_2 = 1$ (*) から $r = 1$

P_3 は線分 P_1P_2 を $2:1$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -1, 1) + \frac{2}{3}(2, 1, -2) = \left(\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

よって $P_3\left(\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

- (3) xy 平面, H はそれぞれベクトル $\vec{v} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1, -2)$ に垂直であるから, 求めるベクトルと平行なベクトルは

$$\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 2, 0)$$

$$|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{5} \text{ より, 求める単位ベクトルは } \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0)$$

- (4) (3) で求めた単位ベクトルの 1 つを $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0)$ とする.

$\overrightarrow{P_1P_2}$ と (3) で求めたベクトルの両方に垂直なベクトルは

$$(2, 1, -2) \times (-1, 2, 0) = (4, 2, 5)$$

これと平行な単位ベクトルの 1 つを $\vec{e}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4, 2, 5)$ とする.

C の半径は 1 であるから, C 上の点 $Q(x, y, z)$ は, 媒介変数 θ を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_3} + (\cos \theta)\vec{e}_1 + (\sin \theta)\vec{e}_2 \quad (**)$$

P_3 の z 座標が負であるから, $\sin \theta = -1$ のとき, 最大値 $d = \frac{1 + \sqrt{5}}{3}$

$$\sin \theta = -1, \cos \theta = 0 \text{ により } \mathbf{Q} \left(\frac{65 - 4\sqrt{5}}{15}, -\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}, -\frac{1 + \sqrt{5}}{3} \right)$$

解説 $P_1(3, -1, 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 の方程式は

$$S_1 : (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

$P_2(5, 0, -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 の方程式は

$$S_2 : (x-5)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$$

S_1 および S_2 の方程式の辺々の差をとり整理すると、 C を含む平面

$$H : 2x + y - 2z - 9 = 0$$

を得る．このとき、 H の法ベクトル $\vec{n} = (2, 1, -2)$ は $\overrightarrow{P_1P_2}$ と平行である．

また、直線 P_1P_2 上に点 $P(x, y, z)$ をとると、媒介変数 t を用いて

$$\overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2} \quad \text{ゆえに} \quad (x-3, y+1, z-1) = t(2, 1, -2)$$

これから t を介して、次の直線 ℓ の方程式を得る．

$$\ell : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2} = t$$

ℓ と H の交点 P_3 は

$$x = 2t + 3, \quad y = t - 1, \quad z = -2t + 1 \quad (\text{A})$$

を H に代入すると

$$2(2t+3) + t - 1 - 2(-2t+1) - 9 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2}{3}$$

これを (A) に代入すると、 $P_3\left(\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ を得る．

また、点 $P_1(3, -1, 1)$ と平面 H の距離は、点と平面の距離の公式により

$$\frac{|2 \cdot 3 + (-1) - 2 \cdot 1 - 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2$$

直線の方程式

点 $P(x_1, y_1, z_1)$ を通り、方向ベクトル $\vec{v} = (a, b, c)$ の直線 ℓ の方程式は

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} = t \quad (t \text{ は媒介変数})$$

点と平面の距離

点 $P(x_1, y_1, z_1)$ と平面 $H: ax + by + cz + d = 0$ の距離 h は

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

証明 平面 H の法ベクトルは $\vec{n} = (a, b, c)$

点 P を通り、方向ベクトルが $\vec{n}$ の直線の方程式が ℓ であるから

$$x = at + x_1, \quad y = bt + y_1, \quad z = ct + z_1$$

ℓ と H の交点を $Q(x_2, y_2, z_2)$ とし、そのときの t の値を t_0 とすると

$$x_2 = at_0 + x_1, \quad y_2 = bt_0 + y_1, \quad z_2 = ct_0 + z_1 \quad (*)$$

Q は H 上の点であるから

$$a(at_0 + x_1) + b(bt_0 + y_1) + c(ct_0 + z_1) + d = 0$$

これを t_0 について解くと $t_0 = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$

(*) より、 $\overrightarrow{PQ} = (at_0, bt_0, ct_0)$ であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}| &= |t_0| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \left| -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{証終} \end{aligned}$$

補足 3点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ を通る平面の法ベクトルを

$$\vec{n} = (a, b, c) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

とする．平面 ABC 上の任意の点を $T(x, y, z)$ とすると、 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AT}$ より

$$a(x - a_1) + b(y - b_1) + c(z - c_1) = 0$$

点 $D(d_1, d_2, d_3)$ から平面 ABC までの距離 h は

$$\begin{aligned} h &= \frac{|a(d_1 - a_1) + b(d_2 - a_2) + c(d_3 - a_3)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ の面積は $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ より ⁷, 四面体 ABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \cdot \frac{|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| \quad \blacksquare$$

3.52 (1) 4点 $A(a, -1, -1)$, $B(-1, b, -1)$, $C(-a, 1, 1)$, $D(1, -b, 1)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-1-a, 1+b, 0), & \overrightarrow{AC} &= (-2a, 2, 2), \\ \overrightarrow{AD} &= (1-a, 1-b, 2)\end{aligned}$$

上式より $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ が成立する.

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2$ を満たせばよいから

$$(-1-a)^2 + (1+b)^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2 + 2^2$$

整理すると $\mathbf{b = 1 - a}$

$-1 < b < 1$ であるから

$$-1 < 1-a < 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a < 2$$

$-1 < a < 1$ に注意して よって $\mathbf{0 < a < 1, \quad b = 1 - a}$

補足 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0$ であるから

$$-2a \cdot 2 + 2 \cdot (-2b) + 2 \cdot 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 1$$

(2) $-1 < b < 1$ であるから, (1) の結果より

$$-1 < 1-a < 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a < 2$$

$-1 < a < 1$ に注意して $0 < a < 1 \quad \dots \textcircled{1}$

$$\overrightarrow{AB} = (-1-a, 2-a, 0), \quad \overrightarrow{AD} = (1-a, a, 2)$$

したがって $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = 2(2-a, 1+a, -1+a-a^2)$

四角形 ABCD の面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S^2}{4} &= (2-a)^2 + (1+a)^2 + (-1+a-a^2)^2 \\ &= a^4 - 2a^3 + 5a^2 - 4a + 6\end{aligned}$$

⁷<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2004.pdf> (p.10)

$f(a) = \frac{S^2}{4}$ とおき、これを微分すると

$$\begin{aligned} f'(a) &= 4a^3 - 6a^2 + 10a - 4 \\ &= 2(2a - 1)(a^2 - a + 2) \\ &= 2(2a - 1) \left\{ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right\} \end{aligned}$$

① の範囲で増減を考えると

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって、 $a = \frac{1}{2}$ のとき、 S の最小値は

$$2\sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{2}$$

別解 四角形 ABCD はひし形であるから、その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}|\vec{AC}||\vec{BD}|$$

$\vec{AC} = (-2a, 2, 2)$, $\vec{BD} = (2, -2b, 2)$ より

$$|\vec{AC}| = 2\sqrt{a^2 + 2}, \quad |\vec{BD}| = 2\sqrt{b^2 + 2}$$

したがって、(1) の結果に注意して

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{4} &= (a^2 + 2)(b^2 + 2) = a^2b^2 + 2(a^2 + b^2) + 4 \\ &= (2 - ab)^2 + 2(a + b)^2 = \{2 - a(1 - a)\}^2 + 2 \\ &= (a^2 - a + 2)^2 + 2 \\ &= \left\{ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right\}^2 + 2 \geq \frac{81}{16} \end{aligned}$$

よって、 $a = \frac{1}{2}$ のとき、 S の最小値は $\frac{9}{2}$



3.53 (1) $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, -1)$ であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 3$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 1$$

- (2) $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (1, -1, 1)$ より, 平面 α 上の点を $P(x, y, z)$ とすると,
 $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ より, 平面 α の方程式は

$$x - y + z = 0$$

点 $C(1, 2, -1)$ を通り, 方向ベクトルが $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ の直線の方程式は

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} = t \quad (t \text{ は媒介変数})$$

$$\text{これから} \quad x = t + 1, \quad y = -t + 2, \quad z = t - 1 \quad \cdots (*)$$

(*) を平面 α の方程式に代入すると

$$(t+1) - (-t+2) + (t-1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2}{3}$$

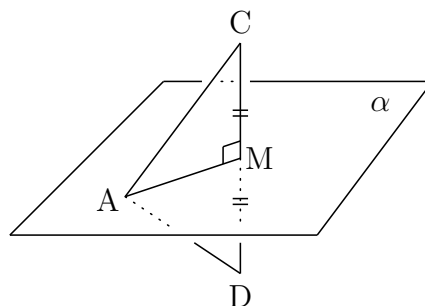
$$\text{これを} (*) \text{に代入して} \quad x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{4}{3}, \quad z = -\frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad M\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

- (3) 条件から, M は CD の中点であるから

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} \\ &= 2\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (1, 2, -1) \\ &= \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad D\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$



- (4) $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad \overrightarrow{CD} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ より

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CD}| |\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{6} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

■

- 3.54** (1) 3点 $P(-1, 1, -1), Q(1, 1, 1), R(a, a^2, a^3)$ より

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 0, 2), \quad \overrightarrow{PR} = (a+1, a^2-1, a^3+1)$$

3点 P, Q, R が一直線上にあると仮定すると, $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ の y 成分から

$$a^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \pm 1$$

これは, $a \neq -1, a \neq 1$ に反する.

よって, 3点 P, Q, R は一直線上にない.

$$(2) |\overrightarrow{PQ}|^2 = 8, \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 2(a^3 + a + 2)$$

点 R から直線 PQ に垂線 RH を引くと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PH} &= \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}|^2} \overrightarrow{PQ} = \frac{2(a^3 + a + 2)}{8} (2, 0, 2) \\ &= \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a}{2} + 1, 0, \frac{a^3}{2} + \frac{a}{2} + 1 \right), \\ \overrightarrow{RH} &= \overrightarrow{PH} - \overrightarrow{PR} = \left(-\frac{a}{2} + \frac{a^3}{2}, 1 - a^2, \frac{a}{2} - \frac{a^3}{2} \right) \\ &= (1 - a^2) \left(-\frac{a}{2}, 1, \frac{a}{2} \right)\end{aligned}$$

$-1 < a < 1$ より, $1 - a^2 > 0$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{RH}| &= (1 - a^2) \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - a^2) \sqrt{2 + a^2} \\ \Delta PQR &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{RH}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - a^2) \sqrt{2 + a^2} \\ &= (1 - a^2) \sqrt{2 + a^2}\end{aligned}$$

ここで, $t = 1 - a^2$ とおくと $0 < t \leq 1$

$$\Delta PQR = t\sqrt{3-t} = \sqrt{3t^2 - t^3}$$

$$f(t) = 3t^2 - t^3 \text{ とおくと } f'(t) = 6t - 3t^2 = 3t(2-t) > 0$$

$f(t)$ は単調増加であるから, $t = 1$, すなわち, $a = 0$ のとき, ΔPQR の面積は, 最大値 $\sqrt{2}$ をとる.

補足 (外積を用いる解法)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= (2(1-a^2), 2a(1-a^2), -2(1-a^2)) \\ &= 2(1-a^2)(1, a, -1)\end{aligned}$$

$-1 < a < 1$ に注意して

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = (1-a^2)\sqrt{2+a^2}$$

(面積公式を用いる解法)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= 2^2 + 0^2 + 2^2 = 8, \\ |\overrightarrow{PR}|^2 &= (a+1)^2 + (a^2-1)^2 + (a^3+1)^2 \\ &= (a+1)^2 \{1 + (a-1)^2 + (a^2-a+1)^2\} \\ &= (a+1)^2 (a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3), \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= 2(a+1) + 0 + 2(a^3+1) \\ &= 2(a+1)(a^2 - a + 2)\end{aligned}$$

$-1 < a < 1$ に注意して

$$\begin{aligned}\triangle PQR &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{8 \cdot (a+1)^2 (a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3) - \{2(a+1)(a^2 - a + 2)\}^2} \\ &= (a+1) \sqrt{2(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3) - (a^2 - a + 2)^2} \\ &= (a+1) \sqrt{a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 2} \\ &= (a+1) \sqrt{(a-1)^2 (a^2 + 2)} \\ &= (a+1)(1-a) \sqrt{a^2 + 2} \\ &= (1-a^2) \sqrt{2+a^2}\end{aligned}$$

■

3.55 (1) $\overrightarrow{OA} = (4, -2, 6)$, $\overrightarrow{OB} = (2, -6, 4)$, $\overrightarrow{OC} = (7, -1, -5)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-6) + 6 \cdot 4 = \mathbf{44} \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= 4 \cdot 7 + (-2) \cdot (-1) + 6 \cdot (-5) = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 2 \cdot 7 + (-6) \cdot (-1) + 4 \cdot (-5) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

(2) 立体 OADB-CEGF は平行六面体であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (4, -2, 6) + (2, -6, 4) = \mathbf{(6, -8, 10)} \\ \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = (4, -2, 6) + (7, -1, -5) = \mathbf{(11, -3, 1)} \\ \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (2, -6, 4) + (7, -1, -5) = \mathbf{(9, -7, -1)} \\ \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = (6, -8, 10) + (7, -1, -5) = \mathbf{(13, -9, 5)}\end{aligned}$$

(3) $|\overrightarrow{OA}|^2$, $|\overrightarrow{OB}|^2$, $|\overrightarrow{OC}|^2$ をそれぞれ求めると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OA}|^2 &= 4^2 + (-2)^2 + 6^2 = 56, \\ |\overrightarrow{OB}|^2 &= 2^2 + (-6)^2 + 4^2 = 56 \\ |\overrightarrow{OC}|^2 &= 7^2 + (-1)^2 + (-5)^2 = 75\end{aligned}$$

平行四辺形 OADB の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \sqrt{56 \cdot 56 - 44^2} = \sqrt{(56 + 44)(56 - 44)} \\ &= \sqrt{100 \cdot 12} = 20\sqrt{3}\end{aligned}$$

(1) の結果より, $OA \perp OC$, $OB \perp OC$ であるから, 求める体積は

$$S|\overrightarrow{OC}| = 20\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = \mathbf{300}$$

別解 求める体積を V とすると, $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (28, -4, -20)$ より

$$V = |(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}| = 300$$

補足 $V = |(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}| = |(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA}| = |(\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB}|$ ■

3.56 (1) $A(2, 0, 4)$, $B(3, -2, 5)$, $C(3, 2, 2)$, $D(4, 3, 0)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 1), \quad \overrightarrow{CD} = (1, 1, -2) \quad (*)$$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ のなす角を θ とすると ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = -\frac{1}{2}$$

したがって $\theta = 120^\circ$

- (2) (*) より $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = 3(1, 1, 1)$
 l 上の点 $A(2, 0, 4)$, m 上の点 $C(3, 2, 2)$ について $\overrightarrow{AC} = (1, 2, -2)$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \neq 0$$

したがって、直線 l , m は交わらない.

- (3) n と l , n と m の交点をそれぞれ P , Q とする.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CD} \quad \text{とおけるから}$$

$$\overrightarrow{OP} = (2, 0, 4) + s(1, -2, 1) = (2 + s, -2s, 4 + s)$$

$$\overrightarrow{OQ} = (3, 2, 2) + t(1, 1, -2) = (3 + t, 2 + t, 2 - 2t)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-s + t + 1, 2s + t + 2, -s - 2t - 2)$$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}) // \overrightarrow{PQ} \quad \text{であるから}$$

$$-s + t + 1 = 2s + t + 2 = -s - 2t - 2$$

$$\text{これを解いて} \quad s = -\frac{1}{3}, \quad t = -1$$

$$\text{したがって} \quad P\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right), \quad Q(2, 1, 4)$$

$$\text{よって} \quad n \text{ と } l \text{ の交点は} \quad \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

$$n \text{ と } m \text{ の交点は} \quad (2, 1, 4)$$



3.57 (1) 2 点 $P_n(an, 0)$, $Q_n(0, bn)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{an} + \frac{y}{bn} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad bx + ay = abn$$

x, y は整数であるから、上の第 2 式から $bx \equiv 0 \pmod{a}$

a と b は互いに素であるから、整数 k を用いて $x = ak \quad \cdots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ を直線の方程式に代入すると

$$abk + ay = abn \quad \text{ゆえに} \quad y = b(n - k) \quad \cdots \textcircled{2}$$

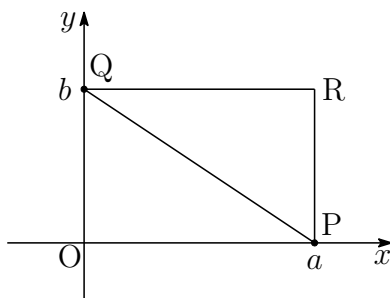
$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ において, $x \geq 0, y \geq 0$ であるから, 条件を満たす格子点は

$$(ak, b(n - k)) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

(2) 四角形 OPRQ 上の格子点の個数は $(a+1)(b+1)$

三角形 OPQ 上と三角形 RPQ 上の格子点の個数 S は等しく、格子点 $(a, 0)$ および $(0, b)$ の 2 個を共有しているから

$$S + S - 2 = (a+1)(b+1) \quad \text{ゆえに} \quad S = \frac{ab + a + b + 3}{2}$$



(3) $R_n(an, bn)$ とすると、四角形 $OP_nR_nQ_n$ 上の格子点の個数は

$$(an+1)(bn+1)$$

三角形 OP_nQ_n 上と三角形 $R_nP_nQ_n$ 上の格子点の個数 S_n は等しく、(1) で示した格子点 $n+1$ 個を共有しているから

$$S_n + S_n - (n+1) = (an+1)(bn+1)$$

したがって
$$S_n = \frac{abn^2 + (a+b+1)n + 2}{2}$$

- (4) 4点 $O(0, 0, 0)$, $X(an, 0, 0)$, $Y(0, bn, 0)$, $Z(0, 0, n)$ を頂点とする四面体 $OXYZ$ の境界および内部を含む領域は

$$\frac{x}{an} + \frac{y}{bn} + \frac{z}{n} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

上の領域と平面 $z = k$ の共有部分は $(k = 0, 1, \dots, n)$

$$bx + ay = ab(n - k), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

求める格子点の個数は, (3) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n S_{n-k} &= \sum_{k=0}^n S_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \{abk^2 + (a+b+1)k + 2\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ ab \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} (a+b+1)n(n+1) + 2(n+1) \right\} \\ &= \frac{1}{12} (n+1) \{abn(2n+1) + 3(a+b+1)n + 12\} \end{aligned}$$

■

3.58 (1) $f(x) = x^3 - 8$ より $f'(x) = 3x^2$

C 上の点 $Q_n(a_n, f(a_n))$ における接線 l_n の方程式は

$$y = 3a_n^2(x - a_n) + a_n^3 - 8 \quad \text{すなわち} \quad y = 3a_n^2x - 2a_n^3 - 8$$

- (2) 接線 l_n と x 軸の交点の x 座標が a_{n+1} であるから

$$0 = 3a_n^2a_{n+1} - 2a_n^3 - 8 \quad \text{ゆえに} \quad 3a_n^2a_{n+1} = 2a_n^3 + 8$$

$a_1 > 0$ であるから, 上の第2式より帰納的に $a_n > 0$

$$\text{よって} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n^3 + 8}{3a_n^2}$$

- (3) (*) $a_n > 2$

[1] $a_1 > 2$ より, $n = 1$ のとき, (*) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, (*) が成立すると仮定すると, (2) の結果から

$$\begin{aligned} a_{k+1} - 2 &= \frac{2a_k^3 + 8}{3a_k^2} - 2 = \frac{2(a_k^3 - 3a_k^2 + 4)}{3a_k^2} \\ &= \frac{2(a_k - 2)^2(a_k + 1)}{3a_k^2} > 0 \end{aligned}$$

よって, $n = k + 1$ のときも (*) が成立する.

[1] , [2] より, すべての自然数 n について, $(*)$ が成立する.

(4) (2), (3) の結果から

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{2a_n^3 + 8}{3a_n^2} = \frac{a_n^3 - 8}{3a_n^2} > 0$$

したがって $a_n > a_{n+1}$

(5) (3) の計算および $a_n > 2$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(a_n + 1)(a_n - 2)}{a_n^2} (a_n - 2) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{a_n} - \frac{2}{a_n^2} \right) (a_n - 2) < \frac{2}{3} (a_n - 2) \end{aligned}$$

したがって $0 < a_n - 2 < (a_1 - 2) \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - 2) \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

■

3.59 (1) $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) より (a_n, b_n は自然数)

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad b_1 = 1, \\ (2 + \sqrt{3})^{n+1} &= (2 + \sqrt{3})(a_n + \sqrt{3}b_n) \\ &= (2a_n + 3b_n) + (a_n + 2b_n)\sqrt{3} \end{aligned}$$

したがって $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n$

$(2 - \sqrt{3})^n = x_n - \sqrt{3}y_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とすると (x_n, y_n は整数)

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \quad y_1 = 1, \\ (2 - \sqrt{3})^{n+1} &= (2 - \sqrt{3})(x_n - \sqrt{3}y_n) \\ &= (2x_n + 3y_n) - (x_n + 2y_n)\sqrt{3} \end{aligned}$$

したがって $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n, \quad y_{n+1} = x_n + 2y_n$

以上の結果から, $x_n = a_n, \quad y_n = b_n$ であるから, すべての自然数 n に対して

$$(2 - \sqrt{3})^n = a_n - \sqrt{3}b_n$$

が成り立つ.

$$(2) \quad c_n = \frac{a_n}{b_n} - \sqrt{3} = \frac{a_n - \sqrt{3}b_n}{b_n} \text{ より } (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{a_{n+1} - \sqrt{3}b_{n+1}}{b_{n+1}} \bigg/ \frac{a_n - \sqrt{3}b_n}{b_n} \\ &= \frac{a_{n+1} - \sqrt{3}b_{n+1}}{a_n - \sqrt{3}b_n} \cdot \frac{b_n}{b_{n+1}} \\ &= (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{b_n}{a_n + 2b_n} \\ &< (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{b_n}{2b_n} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \end{aligned}$$

$c_n > 0$ より, すべての自然数 n に対して, 次式が成立する.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1 \quad \text{よって} \quad c_n > c_{n+1}$$

■

3.60 (1) $f(x) = x^2 - 2(c+1)x + c^2 - 2c + 9$ とおくと ($c \geq 3$)

$$f(c) = -4c + 9 = -4(c-3) - 3 < 0$$

$f(x)$ の x^2 の係数が正であるから, $f(x) = 0$ は, c より大きい実数解と c より小さい実数解をもつ.

(2) 2 次方程式

$$x^2 - 2(a_n + 1)x + a_n^2 - 2a_n + 9 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

の実数解のうち, 大きい方が a_{n+1} であるから, 2 次方程式

$$x^2 - 2(a_{n-1} + 1)x + a_{n-1}^2 - 2a_{n-1} + 9 = 0 \quad (n \geq 2)$$

の解が a_n であるから

$$a_n^2 - 2(a_{n-1} + 1)a_n + a_{n-1}^2 - 2a_{n-1} + 9 = 0$$

上式を変形すると

$$a_{n-1}^2 - 2(a_n + 1)a_{n-1} + a_n^2 - 2a_n + 9 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

③ から, a_{n-1} は 2 次方程式 ② の解である.

2 次方程式 ② の 2 つの解 a_{n+1} , a_{n-1} は, (1) の結論から $a_{n-1} < a_n < a_{n+1}$

(3) 2 次方程式 ② の解と係数の関係により

$$a_{n+1} + a_{n-1} = 2(a_n + 1) \quad \text{よって} \quad a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2$$

(4) $a_1 = 3$ を ② に代入すると $x^2 - 8x + 12 = 0$

これを解いて $x = 2, 6$ ゆえに $a_2 = 6$

(3) の結果から $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} + 2$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ をこれに適用すると $b_n = b_{n-1} + 2$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 3 = 3$, 公差 2 の等差数列であるから

$$b_n = 3 + 2(n - 1) = 2n + 1$$

$$n > 1 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1) = n^2 + 2$$

上式は $n = 1$ のときも成立するから $a_n = n^2 + 2$ ■

4.1 (1) $x \geq 2 \log_t x$ より $x + 1 \geq 2 \log_t x + 1 = 2 \log_t \sqrt{t}x \quad \cdots \textcircled{1}$

$x > \frac{1}{\sqrt{t} - 1}$ より ($t > 1$), $(\sqrt{t} - 1)x > 1$ であるから

$$\sqrt{t}x - (x + 1) = (\sqrt{t} - 1)x - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{t}x > x + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から $x + 1 > 2 \log_t (x + 1)$

(2) (1) の結論に $t = 2$ を代入すると, $x > \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$ のとき

$$x \geq 2 \log_2 x \implies x + 1 > 2 \log_2 (x + 1)$$

これから, $x > \sqrt{2} + 1$ のとき $2^x \geq x^2 \implies 2^{x+1} > (x + 1)^2 \quad \cdots (*)$

(*) より, $2^N \geq N^2$ ($N \geq 3$) を満たす自然数 N が存在するならば, $n > N$ であるすべての自然数 n について, 次が成立する.

$$2^n > n^2$$

$n \leq 2 \log_2 n$ を変形すると $2^n \leq n^2 \quad \cdots (**)$

したがって, (**) を満たす n は $n \leq N$ に限られる.

$n = 1, 2, 3, 4$ について, 2^n と n^2 の値を調べると, 下の表から $N = 4$

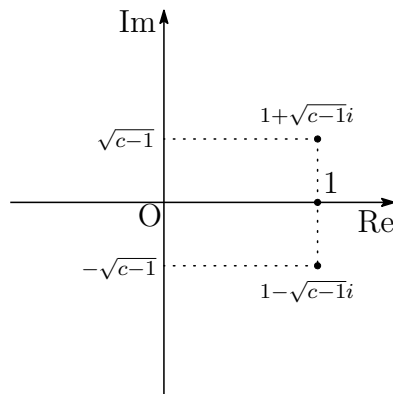
n	1	2	3	4
2^n	2	4	8	16
n^2	1	4	9	16

よって, (**) を満たす n は $n = 2, 3, 4$ ■

4.2 (1)

$$\begin{aligned}
 P(z) &= z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c \\
 &= z(z^2 - 3z + 2) + c(z-1) \\
 &= z(z-1)(z-2) + c(z-1) \\
 &= (z-1)\{z(z-2) + c\} \\
 &= (z-1)(z^2 - 2z + c)
 \end{aligned}$$

$$P(z) = 0 \text{ とすると } (c > 1) \quad z = 1, 1 \pm \sqrt{c-1}i$$



(2) $\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ より, $\alpha^4 = -1$ であるから

$$\begin{aligned}
 Q(z) &= -\alpha^7 z^3 + 3\alpha^6 z^2 + (c+2)\alpha z - c \\
 &= \alpha^3 z^3 - 3\alpha^2 z^2 + (c+2)\alpha z - c \\
 &= P(\alpha z)
 \end{aligned}$$

$Q(z) = 0$ より, $P(\alpha z) = 0$ であるから, (1) の結果を利用して

$$\alpha z = 1, 1 \pm \sqrt{c-1}i \quad \text{ゆえに} \quad z = \bar{\alpha}, \bar{\alpha}(1 \pm \sqrt{c-1}i)$$

これを計算すると

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \\
 \bar{\alpha}(1 \pm \sqrt{c-1}i) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(1 \pm \sqrt{c-1}i) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \mp \sqrt{c-1}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \sqrt{c-1})i \\
 &\quad \text{(複号同順)}
 \end{aligned}$$

よって、 $Q(z) = 0$ の解のうち実部が最大のものは

$$\frac{1 + \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i$$

(3) (2) で示したように、 $Q(z) = 0$ の解は、 $P(z) = 0$ の解を複素数平面上で原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させたものであるから、これらの共通解 β は

$$\beta = 1 + \sqrt{c-1}i = \frac{1 + \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i$$

$$\text{したがって } 1 = \frac{1 + \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{c-1} = \frac{1 - \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ゆえに } \sqrt{c-1} = \sqrt{2} - 1 \quad \text{すなわち } c = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\beta = 1 + (\sqrt{2} - 1)i$$

別解 $\beta = 1 + \sqrt{c-1}i$, $\arg \beta = \frac{\pi}{8}$ であるから

$$\frac{\operatorname{Im}(\beta)}{\operatorname{Re}(\beta)} = \sqrt{c-1} = \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \quad \text{よって } c = 4 - 2\sqrt{2}$$

■

4.3 (1) $[x+1] = [x] + 1$ であるから、 $f(x) = (x - [x])^2 - (x - [x]) + \frac{1}{6}$ について

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1 - [x+1])^2 - (x+1 - [x+1]) + \frac{1}{6} \\ &= (x - [x])^2 - (x - [x]) + \frac{1}{6} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用する.

$$S(x) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} + x\right) \tag{A}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + x\right) + f(1+x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + x\right) + f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + x\right) \tag{B}$$

(B) の x を $x + \frac{1}{n}$ に置き換えると

$$\begin{aligned} S\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + x + \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n} + x\right) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} + x\right) = S(x) \end{aligned}$$

(3) (B) を利用すると, $0 \leq x < \frac{1}{n}$ のとき,

$$0 \leq \frac{k}{n} + x < 1 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

このとき

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + x\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(\frac{k}{n} + x\right)^2 - \left(\frac{k}{n} + x\right) + \frac{1}{6} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{2x-1}{n}k + x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{2x-1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \\ &= nx^2 - x + \frac{1}{6n} \end{aligned}$$

$S(0) = S\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6n} > 0$, $S\left(\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{12n} < 0$ に注意して, $S(x) = 0$ を解くと

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot n \cdot \frac{1}{6n}}}{2n} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}}{2n} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6n}$$

(4) (2), (3) の結論から, $S(x) = 0$ の解は ($x \geq 0$)

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6n} + \frac{j}{n} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

■

4.4 (1) $A_1 = \{(x, y) \mid x = 1, 2, 3, \dots, n, y = 1\}$,
 $A_2 = \{(x, y) \mid x = 1, 2, 3, \dots, n, y = 2\}$ とする.

(i) $k = 0$ のとき, 3 点がすべて A_1 または A_2 にあるから

$$p_k = \frac{{}_2n C_3}{{}_{2n} C_3} = \frac{2 \cdot n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)(2n-2)} = \frac{n-2}{2(2n-1)}$$

- (ii) $1 \leq k \leq n-1$ のとき, 3点 $(j, 1)$, $(j+k, 1)$, $(l, 2)$ または 3点 $(j, 2)$, $(j+k, 2)$, $(l, 1)$ を結んで得られる図形 (三角形) であるから $(j = 1, 2, \dots, n-k, l = 1, 2, \dots, n)$

$$p_k = \frac{(n-k) \cdot n \cdot 2}{{}_n C_3} = \frac{3(n-k)}{(n-1)(2n-1)}$$

- (iii) $0 \leq X \leq \frac{n-1}{2}$ であるから, $n \leq k$ のとき, $p_k = 0$

$$(i) \sim (iii) \text{ より } p_k = \begin{cases} \frac{n-2}{2(2n-1)} & (k=0) \\ \frac{3(n-k)}{(n-1)(2n-1)} & (1 \leq k \leq n-1) \\ 0 & (n \leq k) \end{cases}$$

- (2) $m = \left[\frac{n}{2} \right]$ とすると (m は $\frac{n}{2}$ を超えない最大の整数)

$$\begin{aligned} q_n &= p_0 + \sum_{k=1}^m p_k = \frac{n-2}{2(2n-1)} + \sum_{k=1}^m \frac{3(n-k)}{(n-1)(2n-1)} \\ &= \frac{n-2}{2(2n-1)} + \frac{3}{(n-1)(2n-1)} \left\{ nm - \frac{1}{2}m(m+1) \right\} \\ &= \frac{1 - \frac{2}{n}}{2(2 - \frac{1}{n})} + \frac{3}{(1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n})} \left\{ \frac{m}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{n} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{n-1}{2} \leq \left[\frac{n}{2} \right] \leq \frac{n}{2} \text{ より, } \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{m}{n} \leq \frac{1}{2} \text{ であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって } \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{13}{16}$$

■

- 4.5 (1) C , C_1 , C_2 の半径はそれぞれ 1 , p , q より

$$OD = 1 - p, \quad OE = 1 - q, \quad DE = p + q$$

$\theta = \angle DOE$ であるから, $\triangle DOE$ に余弦定理を適用すると

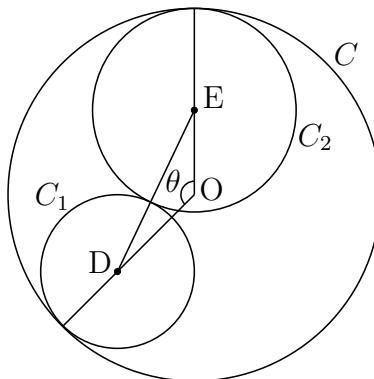
$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos \theta$$

$$\text{したがって } (p+q)^2 = (1-p)^2 + (1-q)^2 - 2(1-p)(1-q) \cos \theta$$

q について整理すると

$$\{1 + p - (1-p) \cos \theta\} q = (1-p)(1 - \cos \theta)$$

よって
$$q = \frac{(1-p)(1-\cos\theta)}{1+p-(1-p)\cos\theta}$$



(2) (1) の結果から

$$q = \frac{(1-p)\sin^2\theta}{\{1+p-(1-p)\cos\theta\}(1+\cos\theta)}$$

したがって

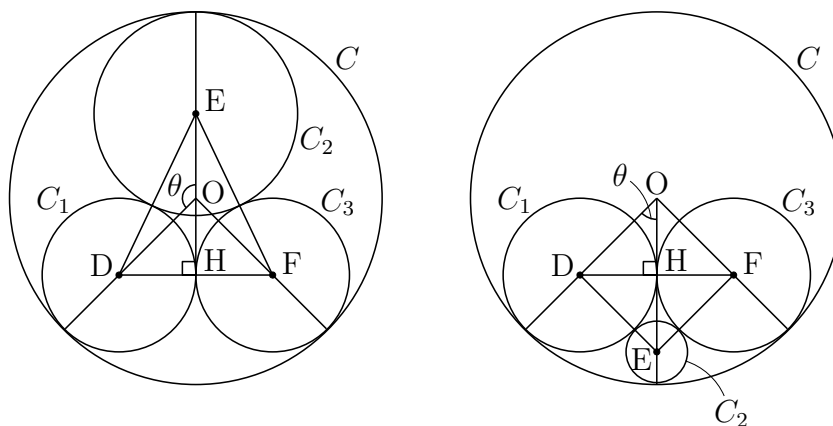
$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{q}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1-p}{\{1+p-(1-p)\cos\theta\}(1+\cos\theta)} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \right)^2 \\ &= \frac{1-p}{\{1+p-(1-p) \cdot 1\}(1+1)} \cdot 1^2 = \frac{1-p}{4p} \end{aligned}$$

(3) C_1 と C_3 の半径が等しいから, $p = \sqrt{2} - 1$ より

$$OD = OF = 1 - p = 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}p, \quad DF = 2p$$

$OD : OF : DF = 1 : 1 : \sqrt{2}$ であるから, $\triangle ODF$ は $\angle DOF$ が直角である直角二等辺三角形である. また, $DE = FE$ であるから, 下の図より

$$\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}$$



$p = \sqrt{2} - 1$ を (1) の結果に代入すると

$$q = \frac{(2 - \sqrt{2})(1 - \cos \theta)}{\sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) \cos \theta}$$

• $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき

$$q = \frac{(2 - \sqrt{2}) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) \frac{1}{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

• $\theta = \frac{3}{4}\pi$ のとき

$$q = \frac{(2 - \sqrt{2}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{7}$$

よって $q = 3 - 2\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2} + 1}{7}$

(4) C_1 と C_3 の接点を H とすると, $OD = 1 - p$, $DH = p$ であるから

$$\sin \theta = \frac{p}{1-p} \quad \text{ゆえに} \quad p = \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} \quad (*)$$

(*) を (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned} q &= \frac{\left(1 - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}\right) (1 - \cos \theta)}{1 + \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} - \left(1 - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}\right) \cos \theta} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta + 2 \sin \theta} \\ &= \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) + 2 \sin \theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta(1 + \cos \theta)} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta + 2(1 + \cos \theta)} \end{aligned}$$

上式および (*) から

$$\frac{q}{p} = \frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta + 2(1 + \cos \theta)} \quad \text{よって} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{q}{p} = \frac{1}{4}$$

■

4.6 (1) $F(m, n) = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_k C_m t^k$ より ($m \geq 0$, $n \geq 1$, $0 < t < 1$)

$n = 1$ のとき, $F(m, 1) = \sum_{k=m}^m {}_k C_m t^k = t^m$ より

$$(t-1)F(m+1, 1) + tF(m, 1) = (t-1)t^{m+1} + t \cdot t^m = t^{m+2}$$

$n > 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
& (t-1)F(m+1, n) + tF(m, n) \\
&= (t-1) \sum_{k=m+1}^{m+n} {}_k C_{m+1} t^k + t \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_k C_m t^k \\
&= (t-1) \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k+1} C_{m+1} t^{k+1} + t \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_k C_m t^k \\
&= \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k+1} C_{m+1} t^{k+2} - \sum_{k=m}^{m+n-1} ({}_{k+1} C_{m+1} - {}_k C_m) t^{k+1} \\
&= \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k+1} C_{m+1} t^{k+2} - \sum_{k=m+1}^{m+n-1} ({}_{k+1} C_{m+1} - {}_k C_m) t^{k+1} \\
&= t^{m+2} + \sum_{k=m+1}^{m+n-1} {}_{k+1} C_{m+1} t^{k+2} - \sum_{k=m+1}^{m+n-1} {}_k C_{m+1} t^{k+1} \\
&= {}_{m+n} C_{m+1} t^{m+n+1}
\end{aligned}$$

よって $p = m + n + 1$, $A = {}_{m+n} C_{m+1}$

(2) (1) で求めた A を $\binom{m+n}{m+1}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\binom{m+n}{m+1} &= \frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!} = \frac{1}{(m+1)!} \cdot \frac{(m+n)!}{(n-1)!} \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \prod_{k=0}^m (k+n) \tag{*}
\end{aligned}$$

したがって, $\binom{m+n}{m+1}$ は, n の $m+1$ 次多項式である.

(1) の結果から $(t-1)F(m+1, n) + tF(m, n) = \binom{m+n}{m+1} t^{m+n+1}$

$$F(m, n) - \frac{1-t}{t} F(m+1, n) = \binom{m+n}{m+1} t^{m+n}$$

上式の両辺に $\left(\frac{1-t}{t}\right)^m$ を掛けると

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-t}{t}\right)^m F(m, n) - \left(\frac{1-t}{t}\right)^{m+1} F(m+1, n) \\ = t^n \binom{m+n}{m+1} (1-t)^m \end{aligned}$$

$m \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ \left(\frac{1-t}{t}\right)^j F(j, n) - \left(\frac{1-t}{t}\right)^{j+1} F(j+1, n) \right\} \\ = t^n \sum_{j=0}^{m-1} \binom{j+n}{j+1} (1-t)^j \end{aligned}$$

したがって

$$F(0, n) - \left(\frac{1-t}{t}\right)^m F(m, n) = t^n \sum_{j=0}^{m-1} \binom{j+n}{j+1} (1-t)^j \quad (\text{P})$$

ここで、定義式より

$$F(0, n) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kC_0 t^k = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t} \quad (\text{Q})$$

(*) を利用して、(P), (Q) の 2 式について、 $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ F(0, n) - \left(\frac{1-t}{t}\right)^m F(m, n) \right\} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F(0, n) &= \frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} F(m, n) = \frac{1}{1-t} \left(\frac{t}{1-t}\right)^m$

上式は $m=0$ のときも成立するから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(m, n) = \frac{1}{1-t} \left(\frac{t}{1-t}\right)^m$$

■

4.7 (1) $\tan \theta = \frac{a}{b}$, $A_0 = A$, $C_0 = C$ とおくと

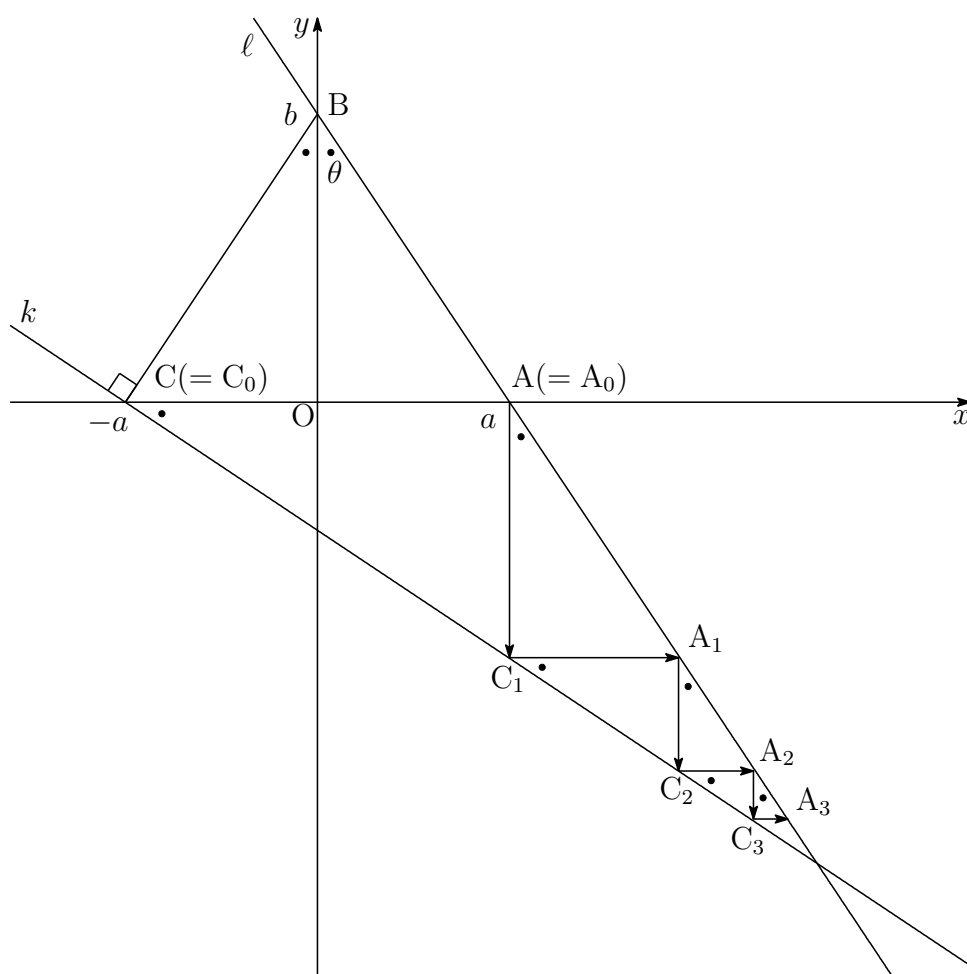
$$\begin{aligned} C_0 A_0 &= 2a, & A_0 C_1 &= C_0 A_0 \tan \theta = 2a \tan \theta, \\ C_1 A_1 &= A_0 C_1 \tan \theta = 2a \tan^2 \theta, & A_1 C_2 &= C_1 A_1 \tan \theta = 2a \tan^3 \theta \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0 A_1} &= (2a \tan^2 \theta, -2a \tan \theta), & \overrightarrow{C_0 C_1} &= (2a, -2a \tan \theta) \\ \overrightarrow{A_n A_{n+1}} &= (\tan^2 \theta) \overrightarrow{A_{n-1} A_n}, & \overrightarrow{C_n C_{n+1}} &= (\tan^2 \theta) \overrightarrow{C_{n-1} C_n} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_n} &= \overrightarrow{OA_0} + \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{A_k A_{k+1}} = (a, 0) + \frac{1 - \tan^{2n} \theta}{1 - \tan^2 \theta} (2a \tan^2 \theta, -2a \tan \theta) \\ \overrightarrow{OC_n} &= \overrightarrow{OC_0} + \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{C_k C_{k+1}} = (-a, 0) + \frac{1 - \tan^{2n} \theta}{1 - \tan^2 \theta} (2a, -2a \tan \theta) \end{aligned}$$



前の2式について $\tan \theta = \frac{a}{b}$ とすると

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA_n} &= (a, 0) + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\} \left(\frac{2a^3}{b^2}, -\frac{2a^2}{b} \right) \\
&= (a, 0) + \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\} (a, -b) \\
&= \left(\frac{a(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} - \frac{2a^3}{b^2 - a^2} \left(\frac{a}{b} \right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\} \right), \\
\overrightarrow{OC_n} &= (-a, 0) + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\} \left(2a, -\frac{2a^2}{b} \right) \\
&= (-a, 0) + \frac{2ab}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\} (b, -a) \\
&= \left(\frac{a(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} - \frac{2ab^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{a}{b} \right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\} \right)
\end{aligned}$$

よって、求める座標は

$$\begin{aligned}
A_n &\left(\frac{a(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} - \frac{2a^3}{b^2 - a^2} \left(\frac{a}{b} \right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\} \right) \\
C_n &\left(\frac{a(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} - \frac{2ab^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{a}{b} \right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2 - a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\} \right)
\end{aligned}$$

(2) 点 A_n の x 座標を x_n とすると

$$\begin{aligned}
S_n &= \triangle ABC \times \frac{x_n}{a} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b \times \frac{1}{a} \left\{ \frac{a(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} - \frac{2a^3}{b^2 - a^2} \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\} \\
&= ab \left\{ \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right\}
\end{aligned}$$

(3) $BC = BA$ であるから

$$\frac{BA_n}{BC} = \frac{BA_n}{BA} = \frac{x_n}{a} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{a}{b} \right)^{2n}$$

$0 < a < b$ より, $0 < \frac{a}{b} < 1$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BA_n}{BC} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$$

■

4.8 (1) 与えられた条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$X_1 = \frac{1}{3}, \quad X_{n+1} = \frac{2}{3}X_n + \frac{1}{3}(1 - X_n) = \frac{1}{3}X_n + \frac{1}{3}$$

$$X_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(X_n - \frac{1}{2}\right), \quad X_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \text{ より}$$

$$X_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad X_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

別解 1 成功しない確率を $\overline{X}_n$ とすると

$$X_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} {}_n C_{2k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2k-1}$$

$$\overline{X}_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} {}_n C_{2k} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2k}$$

$$X_n + \overline{X}_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^n, \quad -X_n + \overline{X}_n = \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^n$$

上の 2 式から
$$X_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

別解 2 次の関数を考える．

$$\varphi_n(x) = \prod_{k=1}^n \{p_k x + (1 - p_k)\}$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ の中で表が j 回出た確率は $\varphi_n(x)$ の x^j の係数に等しい．

$\varphi_n(x)$ は，偶関数 $\frac{\varphi_n(x) + \varphi_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{2}$ の和である．

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi_n(x) + \varphi_n(-x)}{2} + \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{2}$$

したがって，成功する確率，すなわち，奇関数 $\frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$X_n = \frac{\varphi_n(1) - \varphi_n(-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n (1 - 2p_k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

(2) 与えられた条件から、次の確率漸化式が成立する.

$$Y_1 = \frac{1}{4}, \quad Y_{n+1} = (1 - p_{n+1})Y_n + p_{n+1}(1 - Y_n)$$

$$p_n = \frac{1}{2(n+1)} \text{ であるから}$$

$$Y_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}Y_n + \frac{1}{2(n+2)} \quad \text{ゆえに} \quad (n+2)Y_{n+1} - (n+1)Y_n = \frac{1}{2}$$

$$n > 1 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \{(k+2)Y_{k+1} - (k+1)Y_k\} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって} \quad (n+1)Y_n - 2Y_1 = \frac{1}{2}(n-1)$$

$$\text{上式は、} n=1 \text{ のときも成立するから} \quad Y_n = \frac{n}{2(n+1)}$$

別解 次の関数を考える.

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^n \{p_k x + (1 - p_k)\}$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ の中で表が j 回出た確率は $f_n(x)$ の x^j の係数に等しい.

$f_n(x)$ は、偶関数 $\frac{f_n(x) + f_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\frac{f_n(x) - f_n(-x)}{2}$ の和である.

$$f_n(x) = \frac{f_n(x) + f_n(-x)}{2} + \frac{f_n(x) - f_n(-x)}{2}$$

したがって、成功する確率、すなわち、奇関数 $\frac{f_n(x) - f_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{f_n(1) - f_n(-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n (1 - 2p_k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n \left\{ 1 - 2 \cdot \frac{1}{2(k+1)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{n}{2(n+1)} \end{aligned}$$

(3) 次の関数を考える.

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \prod_{k=1}^n \{p_k x + (1 - p_k)\} \\
&= \prod_{k=1}^m \left\{ \frac{1}{3m} x + \left(1 - \frac{1}{3m}\right) \right\} \prod_{k=m+1}^{2m} \left\{ \frac{2}{3m} x + \left(1 - \frac{2}{3m}\right) \right\} \\
&\quad \times \prod_{k=2m+1}^{3m} \left\{ \frac{1}{m} x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right\} \\
&= \left\{ \frac{1}{3m} x + \left(1 - \frac{1}{3m}\right) \right\}^m \left\{ \frac{2}{3m} x + \left(1 - \frac{2}{3m}\right) \right\}^m \left\{ \frac{1}{m} x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right\}^m
\end{aligned}$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ の中で表が j 回出た確率は $g_n(x)$ の x^j の係数に等しい.

$g_n(x)$ は, 偶関数 $\frac{g_n(x) + g_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\frac{g_n(x) - g_n(-x)}{2}$ の和である.

したがって, 成功する確率, すなわち, 奇関数 $\frac{g_n(x) - g_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$\begin{aligned}
Z_{3m} &= \frac{g_n(1) - g_n(-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^m \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^m \left(1 - \frac{2}{m}\right)^m \right\}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^{-\frac{3m}{2}} \right\}^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}} \\
\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^{-\frac{3m}{4}} \right\}^{-\frac{4}{3}} = e^{-\frac{4}{3}} \\
\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{m}\right)^m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{m}\right)^{-\frac{m}{2}} \right\}^{-2} = e^{-2}
\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Z_{3m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}} e^{-2} \right) = \frac{1 - e^{-4}}{2}$$

■

4.9 $a_k = 2^{\sqrt{k}}$ について a_k の整数部分が n 桁であるとき

$$10^{n-1} \leq 2^{\sqrt{k}} < 10^n$$

上式の辺々の常用対数をとると $n-1 \leq \sqrt{k} \log_{10} 2 < n$

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 \leq k < \left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2$$

$[x]$ を x を超えない最大の整数とすると、整数 k の範囲は

$$\left[\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right] + 1 \leq k \leq \left[\left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2\right]$$

したがって

$$N_n = \left[\left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right]$$

a_k の整数部分が n 桁であり、その最高位の数字が 1 であるとき

$$10^{n-1} \leq 2^{\sqrt{k}} < 2 \times 10^{n-1}$$

上式の辺々の常用対数をとると $n-1 \leq \sqrt{k} \log_{10} 2 < \log_{10} 2 + n-1$

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 \leq k < \left(1 + \frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2$$

このとき、整数 k の範囲は

$$\left[\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right] + 1 \leq k \leq \left[\left(1 + \frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right]$$

したがって

$$L_n = \left[\left(1 + \frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right]$$

$x-1 < [x] \leq x$ であるから、 $x-y-1 < [x] - [y] < x-y+1$ より

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 - 1 &< N_n < \left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 + 1, \\ \left(1 + \frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 - 1 &< L_n < \left(1 + \frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

前の2式をそれぞれ整理すると

$$\begin{aligned}\frac{2n-1}{(\log_{10} 2)^2} - 1 &< N_n < \frac{2n-1}{(\log_{10} 2)^2} + 1, \\ \frac{2n-2}{\log_{10} 2} &< L_n < \frac{2n-2}{\log_{10} 2} + 2\end{aligned}$$

上の2式をそれぞれ $2n$ で割ると

$$\begin{aligned}\frac{1 - \frac{1}{2n}}{(\log_{10} 2)^2} - \frac{1}{2n} &< \frac{N_n}{2n} < \frac{1 - \frac{1}{2n}}{(\log_{10} 2)^2} + \frac{1}{2n}, \\ \frac{1 - \frac{1}{n}}{\log_{10} 2} &< \frac{L_n}{2n} < \frac{1 - \frac{1}{n}}{\log_{10} 2} + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{2n} = \frac{1}{(\log_{10} 2)^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{2n} = \frac{1}{\log_{10} 2}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{N_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{2n} \cdot \frac{2n}{N_n} = \frac{1}{\log_{10} 2} \cdot (\log_{10} 2)^2 = \log_{10} 2$$

■

4.10 (1) $xf(x) = \log(2x-3)$ の両辺を微分すると

$$f(x) + xf'(x) = \frac{2}{2x-3}$$

両辺に $x(2x-3)$ を掛けると

$$x(2x-3)f(x) + x^2(2x-3)f'(x) = 2x$$

$$\begin{aligned}\text{したがって} \quad g(x) &= x^2(2x-3)f'(x) = 2x - x(2x-3)f(x) \\ &= \mathbf{2x - (2x-3) \log(2x-3)}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $g'(x) = -2\log(2x-3)$

x	(0)	...	2	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{2x - (2x-3)\log(2x-3)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2x-3) \left\{ \frac{2x}{2x-3} - \log(2x-3) \right\} = -\infty\end{aligned}$$

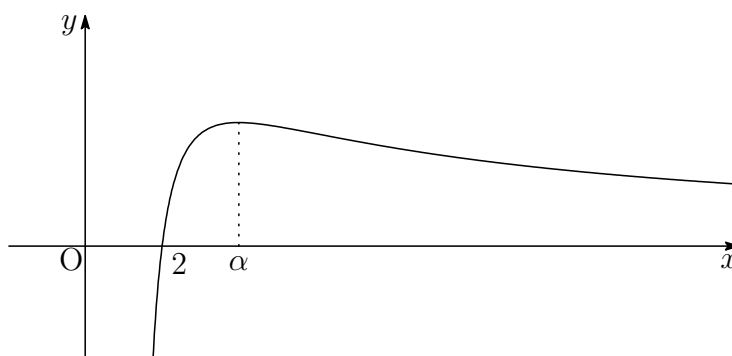
よって $g(\alpha) = 0$ を満たす2以上の実数 α がただ1つ存在する.

(3) $x > 2$ のとき, $f'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号と一致するから

x	2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(2x-3)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x} \cdot \frac{\log(2x-3)}{2x-3} = 0$$

したがって, グラフの概形は次のようになる.



(4) $f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$ より $e^{f(x)} = (2x-3)^{\frac{1}{x}}$

$h(x) = (2x-3)^{\frac{1}{x}}$ とすると ($x \geq 2$), $h(x)$ は $x = \alpha$ で極大値をとる.

$$3^4 = 81, 5^3 = 125 \text{ より } 3^4 < 5^3 \text{ ゆえに } 3^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{4}}$$

$$5^5 = 3125, 7^4 = 2401 \text{ より } 5^5 > 7^4 \text{ ゆえに } 5^{\frac{1}{4}} > 7^{\frac{1}{5}}$$

$$9^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}} \text{ より } h(6) = h(3) \text{ ゆえに } 3^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{4}} > 7^{\frac{1}{5}} > 9^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{すなわち } h(3) < h(4) > h(5) > h(6) = h(3) \quad \cdots \textcircled{1}$$

2 整数 m, n ($2 \leq m < n$) が

$$(2m-3)^n = (2n-3)^m \text{ すなわち } h(m) = h(n)$$

を満たすとき, $2 < m < \alpha$ であるから ($3 < \alpha < 5$), ① より

$$(m, n) = (3, 6)$$



4.11 (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における法線の方程式は

$$x - t + f'(t)\{y - f(t)\} = 0$$

この直線が点 $(c(t), 0)$ を通るから

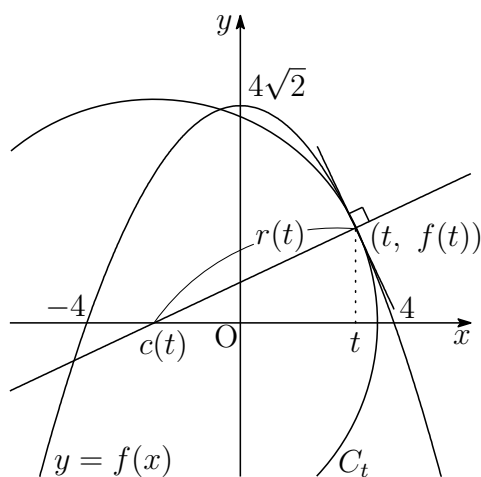
$$c(t) - t - f'(t)f(t) = 0 \text{ ゆえに } c(t) = t + f'(t)f(t)$$

2 点 $(c(t), 0)$, $(t, f(t))$ 間の距離 $r(t)$ は, 上の結果から

$$\begin{aligned} r(t)^2 &= (t - c(t))^2 + f(t)^2 \\ &= \{f'(t)f(t)\}^2 + f(t)^2 = \{f'(t)^2 + 1\}f(t)^2 \end{aligned}$$

$f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(x^2 - 16)$ より, $f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ であるから

$$\begin{aligned} c(t) &= t + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}(t^2 - 16)\right\} = \frac{t^3}{4} - 3t, \\ r(t)^2 &= \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + 1\right\} \left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}(t^2 - 16)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{16}(t^2 + 2)(t^2 - 16)^2 \\ &= \frac{1}{16}(t^2 + 2)(t + 4)^2(t - 4)^2 \end{aligned}$$



(2) $f(3) = \frac{7\sqrt{2}}{4}$ より, $0 < a < f(3)$ を満たすから

$$0 < a^2 < \frac{49}{8}$$

(1) の結果から, 円 C_t の方程式は

$$C_t : \left(x - \frac{t^3}{4} + 3t\right)^2 + y^2 = \frac{1}{16}(t^2 + 2)(t + 4)^2(t - 4)^2$$

点 $(3, a)$ は C_t 上にあるから

$$\left(3 - \frac{t^3}{4} + 3t\right)^2 + a^2 = \frac{1}{16}(t^2 + 2)(t + 4)^2(t - 4)^2$$

$$a^2 \text{ について解くと } a^2 = -\frac{3}{8}t^4 + \frac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23$$

$$g(t) = -\frac{3}{8}t^4 + \frac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23 \text{ とおくと } (0 < t < 4)$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 6t - 18 \\ &= -\frac{3}{2}(t^3 - 3t^2 - 4t + 12) = -\frac{3}{2}(t + 2)(t - 2)(t - 3) \end{aligned}$$

$g(t)$ の増減表は, 次のようになる.

t	(0)	...	2	...	3	...	4
$g'(t)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$	(23)	$\searrow$	5	$\nearrow$	$\frac{49}{8}$	$\searrow$	(-1)

$g(t) = a^2$ の実数解 t の個数は

$$\begin{cases} 0 < a^2 < 5 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a^2 = 5 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 5 < a^2 < \frac{49}{8} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} 0 < a < \sqrt{5} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = \sqrt{5} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ \sqrt{5} < a < \frac{7}{4}\sqrt{2} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

■

4.12 (1) $y = \frac{1}{2}x^2$ より $y' = x$

$T_a \left(a, \frac{1}{2}a^2 \right)$ における曲線 $y = \frac{1}{2}x^2$ の接ベクトルは $(1, a)$

これを $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた単位法ベクトルは $\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right)$

S_a の中心を P_a , 半径を r_a とすると

$$\overrightarrow{T_a P_a} = r_a \left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right)$$

これから

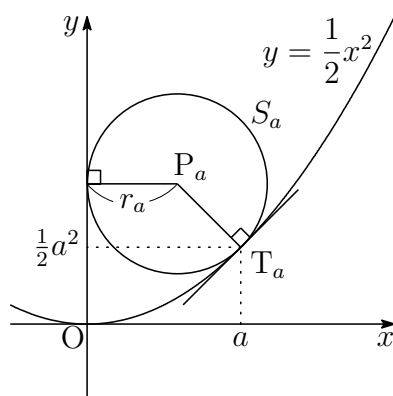
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_a} &= \overrightarrow{OT_a} + \overrightarrow{T_a P_a} \\ &= \left(a, \frac{1}{2}a^2 \right) + r_a \left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OP_a}$ の x 成分は r_a であるから

$$r_a = a + r_a \left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right) \quad \text{ゆえに} \quad r_a = a\sqrt{1+a^2} \left(\sqrt{1+a^2} - a \right)$$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_a} &= \left(a, \frac{1}{2}a^2 \right) + a\sqrt{1+a^2} \left(\sqrt{1+a^2} - a \right) \left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right) \\ &= \left(a^3 + a - a^2\sqrt{1+a^2}, a\sqrt{1+a^2} - \frac{1}{2}a^2 \right) \end{aligned} \quad (*)$$



P は $a = 1$ のときの P_a であるから, $(*)$ に $a = 1$ を代入して

$$P \left(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right)$$

(2) (*) から $C : (x, y) = \left(a^3 + a - a^2\sqrt{1+a^2}, a\sqrt{1+a^2} - \frac{1}{2}a^2 \right)$

$$\frac{dx}{da} = 3a^2 + 1 - 2a\sqrt{1+a^2} - \frac{a^3}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\frac{dy}{da} = \sqrt{1+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} - a$$

点 P における曲線 C の接ベクトルは, 上の 2 式に $a = 1$ を代入して

$$\left(\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da} \right) = \left(4 - \frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$$

よって, 点 P における曲線 C の接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{da}}{\frac{dx}{da}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1}{4 - \frac{5}{2}\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

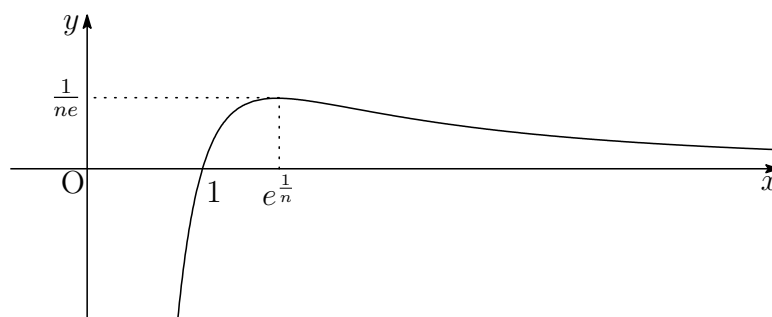
■

4.13 (1) $h(x) = 3x^3 - 2 - \frac{1}{x}$ より $h'(x) = 9x^2 + \frac{1}{x^2} > 0$

$h(x)$ は $x > 0$ で増加し, $h(1) = 0$ より, $x > 0$ における解は $x = 1$

(2) $f(x) = \frac{\log x}{x^n}$ より $f'(x) = \frac{1 - n \log x}{x^{n+1}}$

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{ne}$	$\searrow$



(3) (2) の結果から, $e^{\frac{1}{n}} < x$ の範囲で $f(x)$ は単調減少であるから

$$f(e) > f(\pi) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{e^n} > \frac{\log \pi}{\pi^n}$$

したがって $\pi^n \log e > e^n \log \pi$ よって $e^{(\pi^n)} > \pi^{(e^n)}$

$$(4) \int_e^x (f(t) + xt^2) dt = \int_e^x f(t) dt + x \int_e^x t^2 dt \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \int_e^x (f(t) + xt^2) dt &= \int_e^x f(t) dt + x \left[\frac{t^3}{3} \right]_e^x \\ &= \int_e^x f(t) dt + \frac{x^4}{3} - \frac{1}{3}e^3x \end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{5}{12}x^4 + \left(\frac{1}{3}e^3 - 2 \right)x - \log x + \int_e^x (f(t) + xt^2) dt \text{ より}$$

$$g(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x - \log x + \int_e^x f(t) dt \quad (*)$$

これを x について微分すると $g'(x) = h(x) + f(x)$

$0 < x < 1$ において $h(x) < 0, f(x) < 0$ より $g'(x) < 0$

$1 < x$ において $h(x) > 0, f(x) > 0$ より $g'(x) > 0$

$h(1) = f(1) = 0$ より $g'(1) = h(1) + f(1) = 0$

よって $g(x)$ は, $x = 1$ で最小.

(5) $n = 1$ のとき

$$\int_e^1 f(t) dt = \int_e^1 \frac{\log t}{t} dt = \frac{1}{2} \left[(\log t)^2 \right]_e^1 = -\frac{1}{2}$$

$n > 1$ のとき

$$\begin{aligned} \int_e^1 f(t) dt &= \int_e^1 t^{-n} \log t dt = \frac{1}{-n+1} \int_e^1 (t^{-n+1})' \log t dt \\ &= \frac{1}{-n+1} \left[t^{-n+1} \log t \right]_e^1 - \frac{1}{-n+1} \int_e^1 t^{-n} dt \\ &= -\frac{e^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{(-n+1)^2} \left[t^{-n+1} \right]_e^1 \\ &= -\frac{e^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1 - e^{-n+1}}{(-n+1)^2} = \frac{ne^{-n+1} - 1}{(n-1)^2} \end{aligned}$$

$x = 1$ のとき $\frac{3}{4}x^4 - 2x - \log x = -\frac{5}{4}$, $(*)$ より

$n = 1$ のとき 最小値 $g(1) = -\frac{5}{4} + \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{7}{4}$

$n > 1$ のとき 最小値 $g(1) = -\frac{5}{4} + \frac{ne^{-n+1} - 1}{(n-1)^2}$ ■

4.14 (1) $I(m, n) = \int_1^e x^m e^x (\log x)^n dx$ より (m, n は自然数)

$$\begin{aligned}
& I(m+1, n+1) \\
&= \int_1^e (e^x)' x^{m+1} (\log x)^{n+1} dx \\
&= \left[e^x x^{m+1} (\log x)^{n+1} \right]_1^e \\
&\quad - \int_1^e e^x \left\{ e^x (m+1) x^m (\log x)^{n+1} + x^{m+1} (n+1) (\log x)^n \frac{1}{x} \right\} dx \\
&= e^{m+e+1} \\
&\quad - (m+1) \int_1^e x^m e^x (\log x)^{n+1} dx - (n+1) \int_1^e x^m e^x (\log x)^n dx \\
&= e^{m+e+1} - (m+1) I(m, n+1) - (n+1) I(m, n)
\end{aligned}$$

(2) $1 \leq x \leq e$ において, $x^m e^x (\log x)^n \geq 0$ であるから (m, n は自然数)

$$I(m, n) = \int_1^e x^m e^x (\log x)^n dx \geq 0$$

上式および (1) の結果から

$$0 \leq (n+1) I(m, n) \leq e^{m+e+1} - (m+1) I(m, n+1) \leq e^{m+e+1}$$

$$\text{したがって} \quad 0 \leq I(m, n) \leq \frac{e^{m+e+1}}{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{m+e+1}}{n+1} = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(m, n) = 0$$

別解 $1 \leq x \leq e$ において, $0 \leq x^m e^x (\log x)^n \leq e^{m+e} (\log x)^n$ であるから

$$0 \leq I(m, n) \leq e^{m+e} \int_1^e (\log x)^n dx$$

$$x = e^t \text{ とおくと } \frac{dx}{dt} = e^t \quad \begin{array}{c|c|c} x & 1 & \longrightarrow e \\ t & 0 & \longrightarrow 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_1^e (\log x)^n dx &= \int_0^1 t^n e^t dt = \int_0^{1-\frac{1}{n}} t^n e^t dt + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 t^n e^t dt \\ &\leq e \int_0^{1-\frac{1}{n}} t^n dt + e \int_{1-\frac{1}{n}}^1 dt \\ &= \frac{e}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{e}{n} \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \right\}^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{e}{n} \right\} = 0 \text{ であるから, はさみうちの原理により}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^e (\log x)^n dx = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I(m, n) = 0$$

■

4.15 (1) $f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1 + k \left(0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \right)$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos^2 x - \cos x + k \\ &= -\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(*) $t = \cos x$ とし $(-1 \leq t \leq 1)$, 関数

$$\varphi(t) = -t^2 - t + k = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{1}{4}$$

とすると

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\varphi(t)$	k	$\nearrow$	$k + \frac{1}{4}$	$\searrow$	k	$\searrow$	$k - 2$

$f(x) = 0$ が解をもつのは, $k - 2 \leq 0 \leq k + \frac{1}{4}$ のときである.

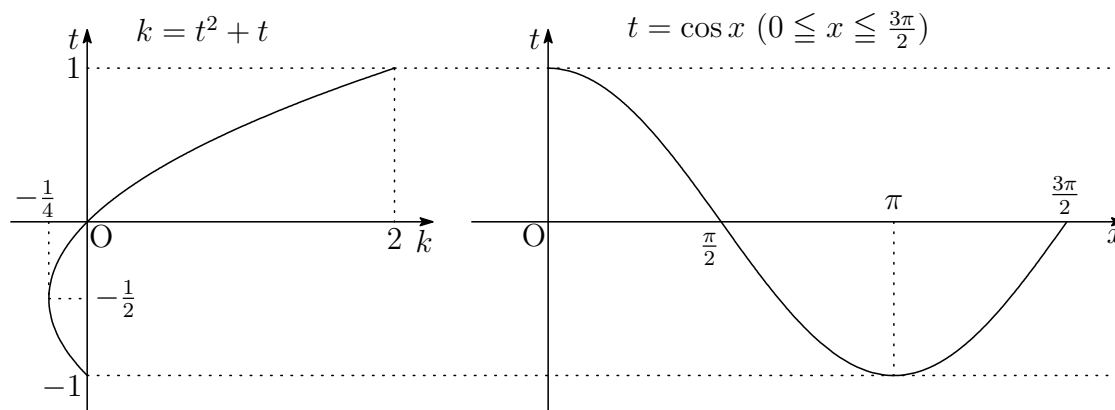
$0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ より, t $(-1 \leq t \leq 1)$ の値に対する (*) を満たす x の個数は

$t = -1$ のとき 1 個, $-1 < t \leq 0$ のとき 2 個, $0 < t \leq 1$ のとき 1 個

したがって

$0 < k - 2$ のとき	0 個
$k - 2 \leq 0 < k$ のとき	1 個
$k = 0$ のとき	3 個
$k < 0 < k + \frac{1}{4}$ のとき	4 個
$k + \frac{1}{4} = 0$ のとき	2 個
$k + \frac{1}{4} < 0$ のとき	0 個

よって	$2 < k$ のとき	0 個
	$0 < k \leq 2$ のとき	1 個
	$k = 0$ のとき	3 個
	$-\frac{1}{4} < k < 0$ のとき	4 個
	$k = -\frac{1}{4}$ のとき	2 個
	$k < -\frac{1}{4}$ のとき	0 個



(2) (1) の結果から, $f(x) = 0$ の解の個数が 2 個以上であるとき

$$-\frac{1}{4} \leq k \leq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$f(x) = \varphi(t)$, $t = \cos x$ より, $\alpha = \cos p_1$, $\beta = \cos p_2$ とおくと

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \varphi(t) = -(t - \alpha)(t - \beta)$$

(*) より, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ であるから

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_{p_1}^{p_2} f(x) \sin x \, dx = - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \, dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)(t - \beta) \, dt = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(\alpha - \beta)^3 \end{aligned}$$

$\varphi(t) = 0$ の解と係数の関係により $\alpha + \beta = -1$, $\alpha\beta = -k \quad \cdots \textcircled{2}$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 + 4k$$

①, ② より, $\alpha = \cos p_1 \leq 0$, $\beta = \cos p_2 \leq 0$ であるから, t に対する x の値に注意すると

$$\frac{\pi}{2} \leq p_1 < p_2 \leq \pi \quad \text{ゆえに} \quad \cos p_2 \leq \cos p_1 \quad \left(\text{等号は } k = -\frac{1}{4} \text{ のとき} \right)$$

$$\alpha - \beta \geq 0 \text{ であるから } \alpha - \beta = \sqrt{1 + 4k} \quad \text{ゆえに} \quad g(k) = \frac{1}{6}(1 + 4k)^{\frac{3}{2}}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \quad \text{最大値 } g(0) = \frac{1}{6}, \text{ 最小値 } g\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \quad \blacksquare$$

4.16 (1) $P(0, 0, 1)$, $Q(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ より $\overrightarrow{PQ} = (\cos \theta, \sin \theta, -1)$

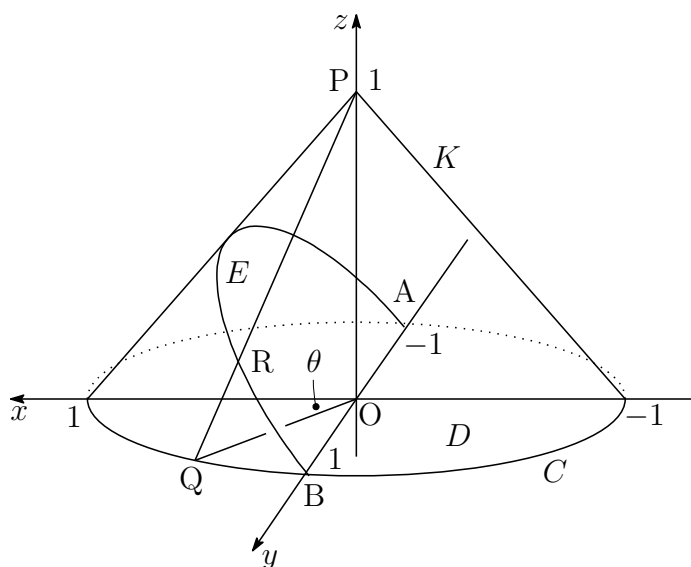
$\overrightarrow{PR} = t\overrightarrow{PQ}$ とすると (t は媒介変数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1) + t(\cos \theta, \sin \theta, -1) \\ &= (t \cos \theta, t \sin \theta, 1 - t)\end{aligned}$$

R は平面 $z = x$ 上の点であるから

$$1 - t = t \cos \theta \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{1 + \cos \theta}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2} \text{ であるから} \quad r(\theta) = |t||\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{2}}{1 + \cos \theta}$$

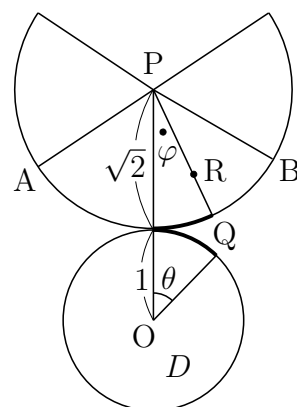


(2) 右の図の展開図において, PR の偏角を φ とし, これと D 上の偏角 θ について

$$\theta = \sqrt{2}\varphi$$

であるから, $\tilde{r}(\varphi) = r(\theta)$ とすると

$$\tilde{r}(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{1 + \cos \sqrt{2}\varphi}$$



θ と φ の変換に注意して

$$S(\theta + h) - S(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}} \tilde{r}(\varphi)^2 d\varphi \quad (\text{A})$$

$\tilde{r}(\varphi) = r(\sqrt{2}\varphi)$, $\tilde{r}(\varphi)$ は $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ において, 単調増加であるから

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}} \tilde{r} \left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} \right)^2 d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}} \tilde{r}(\varphi)^2 d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}} \tilde{r} \left(\frac{\theta+h}{\sqrt{2}} \right)^2 d\varphi$$

$$\text{したがって} \quad \frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}} \tilde{r}(\varphi)^2 d\varphi \leq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \quad (\text{B})$$

(A), (B) から次式が成立する.

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leq S(\theta+h) - S(\theta) \leq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 展開図において, 半径 $\sqrt{2}$ で中心角 $\angle APB = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ の扇形の面積を S_1 とし, 線分 PR が通過する部分の面積を S_2 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} \tilde{r}(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(\theta)^2 \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{1 + \cos \theta} \right)^2 d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1 + \cos \theta} \right)^2 d\theta \end{aligned}$$

$$u = \tan \frac{\theta}{2} \text{ とすると } \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1+u^2}{2} \quad \begin{array}{c|c} \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} \text{ より, } \frac{1}{1+\cos \theta} = \frac{1+u^2}{2} \text{ であるから}$$

$$S_2 = \sqrt{2} \int_0^1 \left(\frac{1+u^2}{2} \right)^2 \frac{2du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 (1+u^2) du = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{よって} \quad T = S_1 - S_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

補足 (2) の結果から, $S'(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(\theta+h) - S(\theta)}{h} = \frac{1}{2}r(\theta)^2$ でもよい. ■

4.17 3直線 AB, BD, AC の方程式は

$$\text{直線 AB : } x + y = 1, z = 0,$$

$$\text{直線 BD : } x = \frac{y-1}{-2} = z,$$

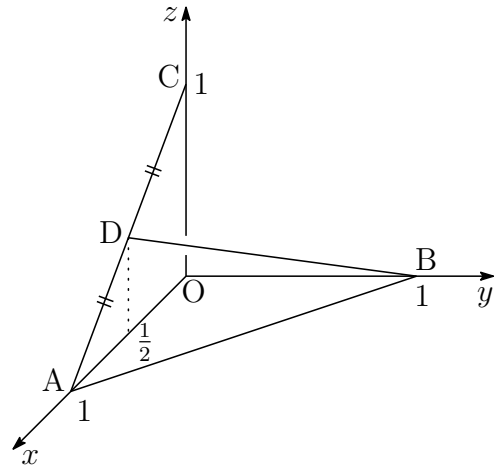
$$\text{直線 AC : } z + x = 1, y = 0$$

3直線 AB, BD, AC と平面 $x = t$ との
交点をそれぞれ P, Q, R とすると

$$P(t, 1-t, 0) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

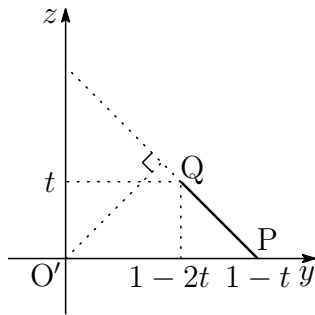
$$Q(t, 1-2t, t) \quad (0 \leq t \leq \frac{1}{2}),$$

$$R(t, 0, 1-t) \quad (\frac{1}{2} \leq t \leq 1)$$

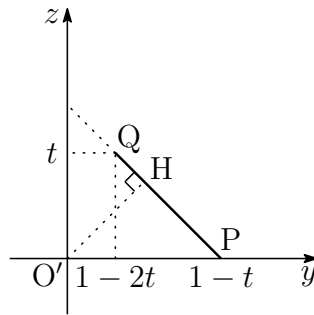


$\triangle ABD$ の平面 $x = t$ による断面は次のようになる.

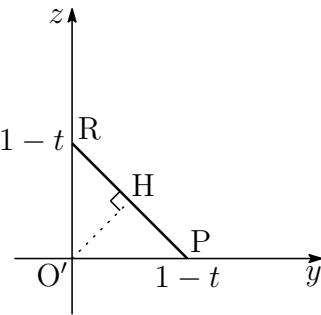
$$(i) \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$$



$$(ii) \quad \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2}$$



$$(iii) \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$



直線 PQ と x 軸との距離を $O'H$ とすると, 図 (i)~図 (iii) より

$$O'H = \frac{O'P}{\sqrt{2}}, \quad O'P = 1-t, \quad O'Q = \sqrt{(1-2t)^2 + t^2}$$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{3}} (O'P^2 - O'Q^2) dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 (O'P^2 - O'H^2) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} (2t - 4t^2) dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{2} (t-1)^2 dt \\ &= \left[t^2 - \frac{4}{3}t^3 \right]_0^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{1}{6}(t-1)^3 \right]_{\frac{1}{3}}^1 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

したがって $V = \frac{\pi}{9}$



4.18 (1) (*) $f'(t) = -f(t)g(t)$, $g'(t) = f(t)^2$ より

$$2f'(t)f(t) = -2f(t)^2g(t) = -2g'(t)g(t)$$

したがって $2f(t)f'(t) + 2g(t)g'(t) = 0$

これを t について積分すると

$$f(t)^2 + g(t)^2 = C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数})$$

$f(0) = 1$, $g(0) = 0$ より, $C_1 = 1$ であるから

$$(**) \quad p(t) = f(t)^2 + g(t)^2 = 1 \quad \text{よって} \quad p'(t) = 0$$

(2) $f(t)^2 + g(t)^2 = 1$, $g'(t) = f(t)^2$ から $f(t)^2$ を消去すると

$$g'(t) = 1 - g(t)^2$$

$|g(t)| < 1$ より, $g(t) \neq \pm 1$ に注意して

$$\frac{g'(t)}{1+g(t)} + \frac{g'(t)}{1-g(t)} = 2$$

両辺を t について積分すると

$$\log \left| \frac{1+g(t)}{1-g(t)} \right| = 2t + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数})$$

$|g(t)| < 1$, $g(0) = 0$ より, $C_2 = 0$ であるから

$$q(t) = \log \frac{1+g(t)}{1-g(t)} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad q'(t) = 2$$

したがって, $q'(t)$ は定数である.

(3) (2) の結果から

$$\frac{1+g(t)}{1-g(t)} = e^{2t} \quad \text{ゆえに} \quad g(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

よって $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} = 1$

(4) $f'(t) = -f(t)g(t)$ および (3) で求めた $g(t)$ より

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = 1 - \frac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}}$$

$f(t) > 0$ に注意して、両辺を t について積分すると

$$\log f(t) = t - \log(1 + e^{2t}) + \log C_3 \quad (C_3 \text{ は積分定数})$$

$$\text{したがって} \quad \log f(t) = \log \frac{C_3 e^t}{1 + e^{2t}} \quad \text{ゆえに} \quad f(t) = \frac{C_3 e^t}{1 + e^{2t}}$$

$$f(0) = 1 \text{ より, } C_3 = 2 \text{ であるから} \quad f(t) = \frac{2e^t}{1 + e^{2t}}$$

$$f(T) = g(T) \text{ とすると} \quad \frac{2e^T}{1 + e^{2T}} = \frac{1 - e^{2T}}{1 + e^{2T}}$$

$$2e^T = 1 - e^{2T} \quad \text{ゆえに} \quad e^T = 1 + \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

(*), (**) より

$$\begin{aligned} f'(t)^2 + g'(t)^2 &= f(t)^2 g(t)^2 + f(t)^4 \\ &= f(t)^2 \{g(t)^2 + f(t)^2\} \\ &= f(t)^2 \end{aligned}$$

求める弧長を L とすると、 $f(t) > 0$ であるから

$$L = \int_0^T \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt = \int_0^T f(t) dt = \int_0^T \frac{2e^t}{1 + e^{2t}} dt$$

$$u = e^t \text{ とおくと} \quad \frac{du}{dt} = e^t \quad \textcircled{1} \text{ より} \quad \begin{array}{c|c} t & 0 \longrightarrow T \\ \hline u & 1 \longrightarrow 1 + \sqrt{2} \end{array}$$

$$L = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{1 + u^2} du$$

$$u = \tan \theta \text{ とおくと} \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{c|c} u & 1 \longrightarrow 1 + \sqrt{2} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{3}{8}\pi \end{array}$$

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} \frac{2}{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \left[2\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} = \frac{\pi}{4}$$

■

4.19 (1) n 回の試行で赤玉を k 回取り出す確率を $P_n(k)$ とすると

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - P_n(0) = 1 - (1-p)^n \\ f(2) &= 1 - P_n(0) - P_n(1) = 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1} \end{aligned}$$

(2) 等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx$$

を変形すると ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \int_0^p (x^k)' (1-x)^{n-k} dx \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left[x^k (1-x)^{n-k} \right]_0^p \\ &\quad - \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \int_0^p x^k (1-x)^{n-k-1} (-1) dx \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \int_0^p x^k (1-x)^{n-k-1} dx \\ &= P_n(k) + f(k+1) \end{aligned}$$

$f(k) - f(k+1) = P_n(k)$ が成立するから ($k = 1, 2, \dots, n-1$)

$$\sum_{j=1}^{k-1} \{f(j) - f(j+1)\} = \sum_{j=1}^{k-1} P_n(j)$$

$$f(1) - f(k) = \sum_{j=1}^{k-1} P_n(j)$$

$$1 - P_n(0) - f(k) = \sum_{j=1}^{k-1} P_n(j)$$

$$1 - \sum_{j=0}^{k-1} P_n(j) = f(k)$$

$$k = n \text{ のときも成立するから } f(k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} P_n(j) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

(3) (2) で示した結果において, $f(k)$ を $f_n(k)$ とおくと

$$f_n(k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} P_n(j) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx$$

上式において, n, k をそれぞれ $2k+1, k+1$ とおくと, $p = \frac{1}{2}$ のとき,
 $f_{2k+1}(k+1) = \frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2} = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx$$

よって
$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx = \frac{(k!)^2}{2(2k+1)!}$$

別解 $I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x) dx$ において, $x = 1-y$ とおくと $\frac{dy}{dx} = -1$

x	$0 \rightarrow \frac{1}{2}$
y	$1 \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\frac{1}{2}} (1-y)^k y^k (-1) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 y^k (1-y)^k dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x^k (1-x)^k dx \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^k(1-x)^k dx \\ &= \int_0^1 x^k(1-x)^k dx = \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

よって
$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx = \frac{(k!)^2}{2(2k+1)!}$$

補足 定積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる⁸.



⁸http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf [1]

4.20 (1) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ に $y = a$ を代入すると ($a \geq 1$)

$$a = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^x)^2 - 2ae^x + 1 = 0$$

$a \geq 1$ に注意して, e^x について解くと $e^x = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$

$x \geq 0$ のとき, $e^x \geq 1$ であるから, $(a + \sqrt{a^2 - 1})(a - \sqrt{a^2 - 1}) = 1$ より

$$e^x = a + \sqrt{a^2 - 1} \quad \text{ゆえに} \quad x = \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$$

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ に $y = a$ を代入すると ($a \geq 1$)

$$a = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^x)^2 - 2ae^x - 1 = 0$$

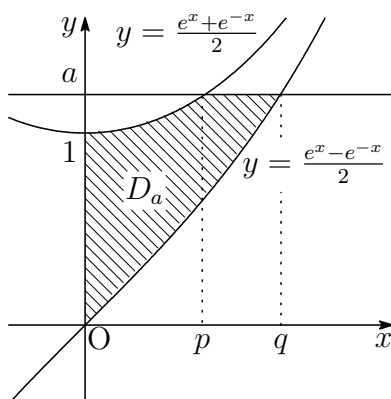
$e^x > 0$ に注意して, x について解くと

$$e^x = a + \sqrt{a^2 + 1} \quad \text{ゆえに} \quad x = \log(a + \sqrt{a^2 + 1})$$

$p = \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$, $q = \log(a + \sqrt{a^2 + 1})$ とおくと

$$e^p = a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad e^{-p} = a - \sqrt{a^2 - 1}$$

$$e^q = a + \sqrt{a^2 + 1}, \quad e^{-q} = -a + \sqrt{a^2 + 1}$$



したがって, D_a の面積 S_a は

$$\begin{aligned} S_a &= \int_0^p \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx + \int_p^q \left(a - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx \\ &= \left[-e^{-x} \right]_0^p + \left[ax - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]_p^q \\ &= 1 + a(q - p) + \frac{e^p - e^{-p}}{2} - \frac{e^q + e^{-q}}{2} \\ &= 1 + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt{a^2 - 1} - \sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

(2) まず

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (\sqrt{a^2 - 1} - \sqrt{a^2 + 1}) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{a^2 + 1}} = 0 \quad (\text{A})$$

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 + 1}} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} < \frac{\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{a^2 - 1}} \text{ より}$$

$$1 < \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} < \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

したがって

$$0 < a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} < \frac{a}{2} \log \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \quad (*)$$

このとき

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{2} \log \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{a^2 - 1} \log \left(1 + \frac{2}{a^2 - 1} \right)^{\frac{a^2 - 1}{2}} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a - \frac{1}{a}} = 0 \end{aligned} \quad (**)$$

(*), (**) から, はさみうちの原理により

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} = 0 \quad (\text{B})$$

(A), (B) から

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S_a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt{a^2 - 1} - \sqrt{a^2 + 1} \right) = 1$$

■

4.21 (1) $u = \tan \theta$ とすると $\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

u	$0 \longrightarrow \tan \alpha$
θ	$0 \longrightarrow \alpha$

$$\begin{aligned} f(\tan \alpha) &= \frac{1}{2} \int_{-\tan \alpha}^{\tan \alpha} \frac{1}{1 + u^2} du = \int_0^{\tan \alpha} \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\alpha} d\theta = \alpha \end{aligned}$$

(2) $x = \tan \theta_1$, $y = \tan \theta_2$ とすると, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

$$0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{4}$$

次に, $f(x) + f(y) \leq f(1)$ を (1) の結論に適用すると

$$\theta_1 + \theta_2 \leq \frac{\pi}{4} \quad (\text{A})$$

$x = y = 1$, すなわち, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{4}$ とすると, (A) に反するから

$$0 \leq xy < 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(A) から $\tan(\theta_1 + \theta_2) \leq \tan \frac{\pi}{4}$

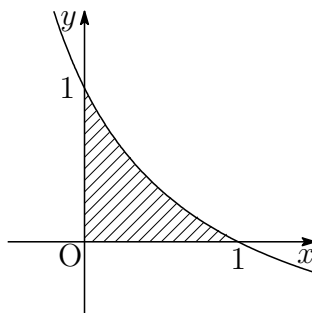
$$\frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x + y}{1 - xy} \leq 1$$

①, ② に注意して, 上の第 2 式を y について解くと

$$0 \leq y \leq \frac{-x + 1}{x + 1} = \frac{2}{x + 1} - 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

求める面積は, 下の図の斜線部分であるから

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right) dx = \left[2 \log(x+1) - x \right]_0^1 = 2 \log 2 - 1$$



■

4.22 (1) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ より

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$x > 0$ で, $f''(x) < 0$ より, $x > 0$ で $y = f(x)$ は上に凸である.

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$t \geq 0 \text{ のとき, } \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1 \text{ より}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \leq \int_0^x dt \quad (x \geq 0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f(0) = 0 \text{ であるから}$$

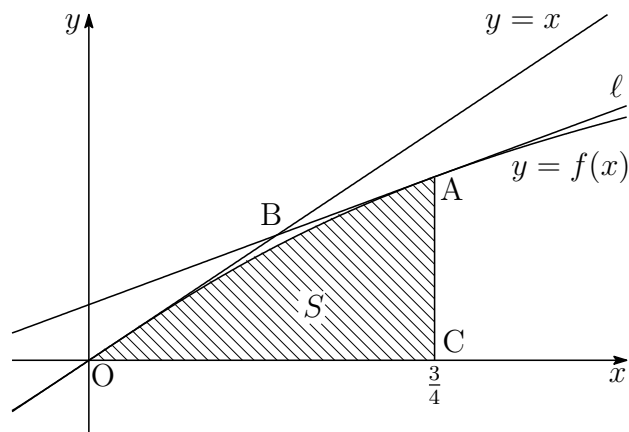
$$x \geq 0 \text{ のとき } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq f(x) \leq x$$

$$(3) \quad \{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x), \quad xf'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = (\sqrt{1+x^2})' \text{ より}$$

$$f(x) = \left\{ xf(x) - \sqrt{1+x^2} \right\}'$$

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = \log 2 \text{ であるから}$$

$$S = \int_0^{\frac{3}{4}} f(x) dx = \left[xf(x) - \sqrt{1+x^2} \right]_0^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \log 2 - \frac{1}{4}$$



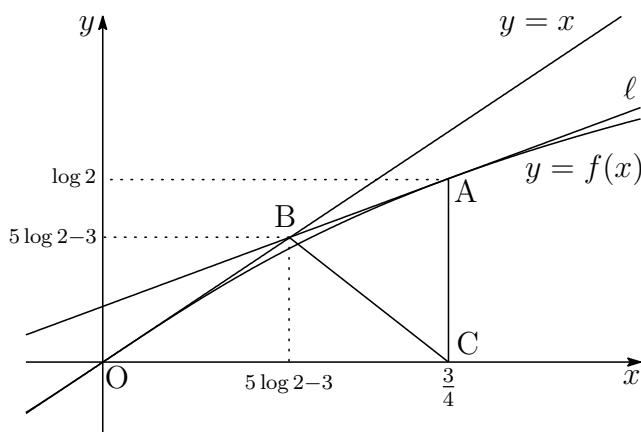
(4) $f\left(\frac{3}{4}\right) = \log 2$, $f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}$ より, ℓ の方程式は

$$y - \log 2 = \frac{4}{5}\left(x - \frac{3}{4}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{4}{5}x + \log 2 - \frac{3}{5}$$

ℓ と直線 $y = x$ の交点 B は $(5 \log 2 - 3, 5 \log 2 - 3)$

したがって, 四角形 ABOC の面積 T は

$$\begin{aligned} T &= \triangle OBC + \triangle ABC \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (5 \log 2 - 3) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{4} - (5 \log 2 - 3) \right\} \log 2 \\ &= -\frac{5}{2} (\log 2)^2 + \frac{15}{4} \log 2 - \frac{9}{8} \end{aligned}$$



(5) (2) の結論に $x = \frac{3}{4}$ を代入すると $\frac{3}{5} \leq \log 2 \leq \frac{3}{4} \quad \dots \textcircled{1}$

$S < T$ であるから, これに (3), (4) の結果を代入すると

$$\frac{3}{4} \log 2 - \frac{1}{4} < -\frac{5}{2} (\log 2)^2 + \frac{15}{4} \log 2 - \frac{9}{8}$$

整理すると $20(\log 2)^2 - 24 \log 2 + 7 < 0$

$$(2 \log 2 - 1)(10 \log 2 - 7) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} < \log 2 < \frac{7}{10} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より $\frac{3}{5} \leq \log 2 < \frac{7}{10}$

よって, $\log 2$ の小数第 1 位の数字は **6**



4.23 (1) $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \log(1-x)$ より $(-1 < x < 1)$

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{(1+x)(1-x)}$$

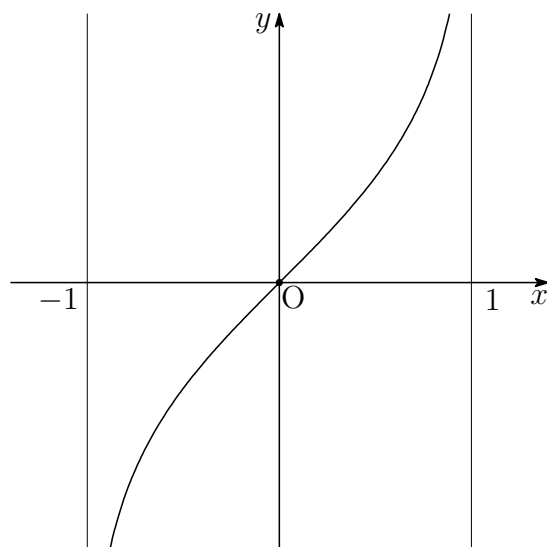
$$f''(x) = -\frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{2x}{(1+x)^2(1-x)^2}$$

(2) $x \rightarrow -1+0$ のとき $\frac{1+x}{1-x} \rightarrow +0$ より $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty$
 $x \rightarrow 1-0$ のとき $\frac{1+x}{1-x} \rightarrow \infty$ より $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \infty$

(3) (1), (2) から, $f(x)$ の増減および凹凸は

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		+	+	+	
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	

よって 変曲点 $(0, 0)$, グラフの概形は次のようになる.



$$(4) \quad y = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \text{ より } 2y = \log \frac{1+x}{1-x}$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{よって} \quad x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

また

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{e^y + e^{-y}} \right) = -\frac{(e^y + e^{-y})'}{(e^y + e^{-y})^2} = -\frac{e^y - e^{-y}}{(e^y + e^{-y})^2}$$

(5) (4) の結果から

$$1 - x^2 = 1 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \right)^2 = \frac{4}{(e^y + e^{-y})^2} = \frac{4e^{2y}}{(e^{2y} + 1)^2}$$

したがって

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \pi \int_0^\alpha (1 - x^2) dy = \pi \int_0^\alpha \frac{4e^{2y}}{(e^{2y} + 1)^2} dy \\ &= \pi \left[-\frac{2}{e^{2y} + 1} \right]_0^\alpha = \pi \left(1 - \frac{2}{e^{2\alpha} + 1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} V(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \pi \left(1 - \frac{2}{e^{2\alpha} + 1} \right) = \pi \quad \blacksquare$$

4.24 (1) 袋 A_k から白玉，黒玉が取り出される確率は，それぞれ $\frac{k}{n}$ ， $1 - \frac{k}{n}$ である ($k = 1, 2, \dots, n$)．求める確率は，2回の試行で白玉が1回，黒玉が1回取り出される確率であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n {}_2C_1 \cdot \frac{k}{n} \cdot \left(1 - \frac{k}{n} \right) &= \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{n} k^2 \right) \\ &= \frac{2}{n^2} \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{3n^2} \end{aligned}$$

(2) $A = A_k$ のとき， s 回の試行で白玉がちょうど t 回取り出される確率 $p(t)$ は

$$p(t) = {}_sC_t \left(\frac{k}{n} \right)^t \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{s-t} \quad (*)$$

上式に $s = 100$ ， $n = 3k$ を代入すると

$$p(t) = {}_{100}C_t \left(\frac{1}{3} \right)^t \left(\frac{2}{3} \right)^{100-t} = \frac{100!}{t!(100-t)!} \left(\frac{2}{3} \right)^{100} \left(\frac{1}{2} \right)^t$$

$$\begin{aligned}\text{これから} \quad \frac{p(t+1)}{p(t)} - 1 &= \frac{t!(100-t)!}{(t+1)!(99-t)!} \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{100-t}{2(t+1)} - 1 = \frac{98-3t}{2(t+1)}\end{aligned}$$

ゆえに $p(0) < p(1) < \cdots < p(32) < p(33) > p(34) > \cdots > p(100)$

よって、求める t の値は $t = 33$

(3) (*) に $s = 10$, $t = 3$ を代入した $p(3)$ を利用して

$$q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(3) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n {}_{10}C_3 \left(\frac{k}{n}\right)^3 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^7$$

したがって⁹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = {}_{10}C_3 \int_0^1 x^3(1-x)^7 dx = {}_{10}C_3 \frac{3!7!}{11!} (1-0)^{11} = \frac{1}{11}$$

■

4.25 (1) $f(x) = x(x^2 + 10x + 20)$ より, $f(n)$ が素数となるのは, 次の場合である.

- $n = p$ のとき (p は素数)

$$p^2 + 10p + 20 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p(p+10) = -19$$

これを満たす素数 p は存在しない.

- $n = -q$ のとき (q は素数)

$$q^2 - 10q + 20 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (q-3)(q-7) = 0$$

これを解いて $q = 3, 7$ すなわち $n = -3, -7$

- $n = 1$ のとき, $f(1) = 1(1^2 + 10 \cdot 1 + 20) = 31$
 $f(1)$ は素数であるから, $n = 1$ は条件を満たす.
- $n = -1$ のとき, $f(-1) = -1 \cdot \{(-1)^2 + 10 \cdot (-1) + 20\} = -11$
 $f(-1)$ は素数でないから, $n = -1$ は条件を満たさない.

以上の結果から $n = -3, -7, 1$

⁹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010.kouki.pdf 1

(2) $g(x) = x(x^2 + ax + b)$ より (a, b は整数), $h(x) = x^2 + ax + b$ とおくと, $g(n)$ が素数となるのは, (i)~(iv) の場合である.

(i) $n = p$ のとき (p は素数), $h(p) = 1$

(ii) $n = -q$ のとき (q は素数), $h(-q) = -1$

(iii) $n = 1$ のとき, $h(1)$ は素数

(iv) $n = -1$ のとき, $-h(-1)$ は素数

[A] (i), (ii) を満たす素数 p, q がともに存在すると仮定すると

$$p^2 + ap + b = 1, \quad q^2 - aq + b = -1$$

上の2式の辺々の差をとると

$$p^2 - q^2 + a(p + q) = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (p + q)(p - q + a) = 2$$

$p + q \geq 4$, $p - q + a$ は整数であるから, 上の第2式を満たす素数 p, q は存在しない. よって, (i) と (ii) は同時に成立しない.

[B] (i) を満たす素数 p_1, p_2 が存在すると仮定すると

$$h(x) - 1 = (x - p_1)(x - p_2)$$

$x = -1$ を上式に代入すると

$$h(-1) - 1 = (-1 - p_1)(-1 - p_2) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad -h(-1) < -1$$

このとき, (iv) は成立しない

[C] (ii) を満たす素数 q_1, q_2 が存在すると仮定すると

$$h(x) + 1 = (x + q_1)(x + q_2)$$

$x = -1$ を上式に代入すると

$$h(-1) + 1 = (-1 - q_1)(-1 - q_2) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad -h(-1) < 1$$

このとき, (iv) は成立しない

[A] ~ [C] から, $g(n)$ が素数となる整数 n の個数は3個以下である. ■

4.26 (1) $n = p^a q^b r^c$ とする.

n 以下の自然数で p, q, r で割り切れる数の個数は, それぞれ

$$\frac{n}{p}, \quad \frac{n}{q}, \quad \frac{n}{r}$$

n 以下の自然数で pq, qr, rp で割り切れる数の個数は, それぞれ

$$\frac{n}{pq}, \quad \frac{n}{qr}, \quad \frac{n}{rp}$$

n 以下の自然数で pqr で割り切れる数の個数は

$$\frac{n}{pqr}$$

したがって¹⁰

$$\begin{aligned} f(n) &= n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} + \frac{n}{r} \right) + \left(\frac{n}{pq} + \frac{n}{qr} + \frac{n}{rp} \right) - \frac{n}{pqr} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right) \left(1 - \frac{1}{r} \right) \\ &= p^a q^b r^c \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right) \left(1 - \frac{1}{r} \right) \\ &= p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1) \end{aligned} \quad (*)$$

(2) 次の (i)~(iv) を考える.

(i) $n = p^a$ のとき (p は素数, a は自然数)

$$f(n) = n - \frac{n}{p} = n \left(1 - \frac{1}{p} \right) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{f(n)} = \frac{p}{p-1}$$

上の第2式は整数で, p と $p-1$ はそれぞれ互いに素であるから

$$p-1 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p = 2$$

(ii) $n = p^a q^b$ のとき (p, q は素数 ($p < q$), a, b は自然数)

$$f(n) = n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} \right) + \frac{n}{pq} = n \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right)$$

$$\text{したがって} \quad \frac{n}{f(n)} = \frac{pq}{(p-1)(q-1)}$$

上式は整数で, p と $p-1$, q と $q-1$ はそれぞれ互いに素であるから

$$p-1 = 1, \quad q-1 = p \quad \text{ゆえに} \quad p = 2, \quad q = 3$$

¹⁰http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusu/saga/saga_2005.pdf (p.6(定理 3) を参照)

- (iii) $n = p^a q^b r^c$ のとき (p, q, r は素数 ($p < q < r$), a, b, c は自然数),
 (*) より

$$\frac{n}{f(n)} = \frac{pqr}{(p-1)(q-1)(r-1)}$$

上式は整数で, p と $p-1$, q と $q-1$, r と $r-1$ はそれぞれ互いに素,
 $q-1, r-1$ はともに偶数であるから, 上式は条件を満たさない.

- (iv) n が 4 つ以上の素因数をもつとき, $n \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ となり, n が 100
 以下の自然数であることに反する.

(i)~(iv) より, 求める 5 以上 100 以下の自然数 n は, 整数 a, b を用いて

$$n = 2^a 3^b \quad (a \geq 1, b \geq 0)$$

で与えられる. これを満たす整数 (a, b) の組は, 次の 13 組

$$\begin{aligned} (a, b) = & (3, 0), (4, 0), (5, 0), (6, 0), \\ & (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), \\ & (1, 2), (2, 2), (3, 2), \\ & (1, 3) \end{aligned}$$

よって, 求める n は

$$n = 6, 8, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96$$



4.27 (1) $k^2 - \ell^2 = 3^m$ より $(k + \ell)(k - \ell) = 3^m$

$k + \ell > k - \ell$ より, 自然数 m_1, m_2 を用いて

$$k + \ell = 3^{m_1}, \quad k - \ell = 3^{m_2} \quad (m_1 + m_2 = m, m_1 > m_2 \geq 0)$$

とすると, $3^{m_1} \equiv 1, 3^{m_2} \equiv 1 \pmod{2}$ に注意して

$$k = \frac{3^{m_1} + 3^{m_2}}{2}, \quad \ell = \frac{3^{m_1} - 3^{m_2}}{2} \quad (*)$$

$0 \leq m_2 \leq \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$ であるから, 求める自然数 (k, ℓ) の組の個数は

$$\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$$

- (2) 2 つの整数 a, b の最大公約数を $\gcd(a, b)$ とする. x は 3 の倍数でないから, ユークリッドの互除法により

$$\gcd(x, x + 3^m) = \gcd(x, 3^m) = 1$$

x が 3 の倍数でないとき, x と $x + 3^m$ は互いに素である.

$\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数であるとき, 整数 k, ℓ を用いて

$$x + 3^m = k^2, \quad x = \ell^2 \quad \text{ゆえに} \quad (k + \ell)(k - \ell) = 3^m$$

したがって, (*) を得る. このとき, $x = \ell^2$ より, ℓ は 3 の倍数でないから

$$(m_1, m_2) = (m, 0), (0, m) \quad \text{よって} \quad x = \left(\frac{3^m - 1}{2} \right)^2$$

(3) x が 3^m を約数にもつとき, $x = 3^m A$ とおくと ($A > 0$ は整数)

$$\sqrt{x(x+3^m)} = \sqrt{3^m A(3^m A + 3^m)} = 3^m \sqrt{A} \sqrt{A+1}$$

$\gcd(A, A+1) = \gcd(A, 1) = 1$ より, 上式が整数のとき, $\sqrt{A}, \sqrt{A+1}$ は整数であるから, 次式より, これを満たす整数 x は存在しない.

$$1 = (\sqrt{A+1})^2 - (\sqrt{A})^2 = (\sqrt{A+1} + \sqrt{A})(\sqrt{A+1} - \sqrt{A})$$

$x = 3^j B_j$ ($B_j > 0$ は 3 で割り切れない) とすると ($j = 0, 1, \dots, m-1$)

$$\sqrt{x(x+3^m)} = \sqrt{3^j B_j(3^j B_j + 3^m)} = 3^j \sqrt{B_j(B_j + 3^{m-j})}$$

このとき, $\sqrt{B_j(B_j + 3^{m-j})}$ は整数であるから, (2) の結論より

$$B_j = \left(\frac{3^{m-j} - 1}{2} \right)^2 \quad \text{すなわち} \quad x = 3^j B_j \quad (j = 0, 1, \dots, m-1)$$

よって, 求める x の個数は m (個) ■

4.28 (1) G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$$

(2) $\triangle ABC$ は, 1 辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos \frac{\pi}{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

D は線分 BC を 1 : 3 に内分する点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{4}(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}(3\vec{b} + \vec{c}) \\ \overrightarrow{GD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(3\vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{12}(5\vec{b} - \vec{c}) \end{aligned}$$

E は線分 AB 上にあるから, $\overrightarrow{AE} = k\vec{a}$ とすると (k は実数)

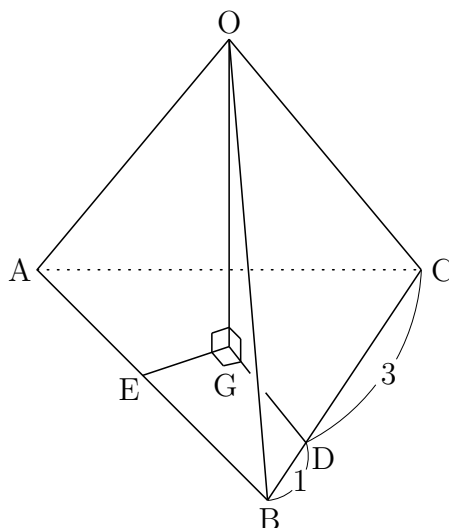
$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG} = k\vec{b} - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\{(3k-1)\vec{b} - \vec{c}\}$$

$\overrightarrow{GD} \perp \overrightarrow{GE}$ より, $\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{GE} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} (5\vec{b} - \vec{c}) \cdot \{(3k-1)\vec{b} - \vec{c}\} &= 5(3k-1)|\vec{b}|^2 - (3k+4)\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= 5(3k-1) - \frac{1}{2}(3k+4) + 1 \\ &= \frac{3}{2}(9k-4) = 0 \end{aligned}$$

これを解いて $k = \frac{4}{9}$ すなわち $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{9}\vec{b}$

したがって $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG} = \frac{4}{9}\vec{b} - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{9}(\vec{b} - 3\vec{c})$



$$\overrightarrow{GD} = \frac{1}{12}(5\vec{b} - \vec{c}), \quad \overrightarrow{GE} = \frac{1}{9}(\vec{b} - 3\vec{c}) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |5\vec{b} - \vec{c}|^2 &= 25|\vec{b}|^2 - 10\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= 25 \cdot 1^2 - 10 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 = 21, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{b} - 3\vec{c}|^2 &= |\vec{b}|^2 - 6\vec{b} \cdot \vec{c} + 9|\vec{c}|^2 \\ &= 1^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 1^2 = 7 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad |\overrightarrow{GD}| = \frac{\sqrt{21}}{12}, \quad |\overrightarrow{GE}| = \frac{\sqrt{7}}{9}$$

(3) $\triangle ABC$ は正三角形であるから、 $\triangle ABC$ の重心と外心は一致する。

O から平面 ABC に垂線 OH を引くと、 $\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$ であるから、 $AH = BH = CH$ より、H は $\triangle ABC$ の外心である。

G と H は一致するから

$$\overrightarrow{OG} \perp \vec{b}, \quad \overrightarrow{OG} \perp \vec{c} \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{OG} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{c} = 0$$

(4) 点 P から直線 GE に垂線 PQ を引くと

$$\triangle DGP = \triangle DGQ = \frac{1}{2}|\overrightarrow{GD}||\overrightarrow{GQ}| = 1 \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{GQ}| = \frac{2}{|\overrightarrow{GD}|}$$

$\overrightarrow{GQ}$ と $\overrightarrow{GE}$ は同じ向きのベクトルであることに注意して

$$\overrightarrow{GQ} = |\overrightarrow{GQ}| \cdot \frac{\overrightarrow{GE}}{|\overrightarrow{GE}|} = \frac{2}{|\overrightarrow{GD}|} \cdot \frac{\overrightarrow{GE}}{|\overrightarrow{GE}|}$$

$\overrightarrow{QP}$ と $\overrightarrow{GD}$ は平行であるから、実数 ξ を用いて $\overrightarrow{QP} = \xi \overrightarrow{GD}$

上の諸式から

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OG} + \frac{2}{|\overrightarrow{GD}|} \cdot \frac{\overrightarrow{GE}}{|\overrightarrow{GE}|} + \xi \overrightarrow{GD}$$

$\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{GD} \perp \overrightarrow{GE}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{GE} &= \left(\overrightarrow{OG} + \frac{2}{|\overrightarrow{GD}|} \cdot \frac{\overrightarrow{GE}}{|\overrightarrow{GE}|} + \xi \overrightarrow{GD} \right) \cdot \overrightarrow{GE} = \frac{2|\overrightarrow{GE}|}{|\overrightarrow{GD}|} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{9} \bigg/ \frac{\sqrt{21}}{12} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$



4.29 (1) $(2, 1), (1, 2), (-1, 2), (-2, 1),$

$(-2, -1), (-1, -2), (1, -2), (2, -1)$

(2) P が n 秒後に点 (a, b) にいる確率を $P_n(a, b)$ とすると, 規則 (ii) より, 確率漸化式

$$P_{n+1}(j, k) = \frac{1}{3}P_n(j, -k) + \frac{1}{3}P_n(-j, k) + \frac{1}{6}P_n(k, j) + \frac{1}{6}P_n(-k, -j) \quad (\text{A})$$

が成立する $(j, k = \pm 1, \pm 2, j \neq k)$.

(A) において, j, k をそれぞれ $-j, -k$ に置き換えると

$$P_{n+1}(-j, -k) = \frac{1}{3}P_n(-j, k) + \frac{1}{3}P_n(j, -k) + \frac{1}{6}P_n(-k, -j) + \frac{1}{6}P_n(k, j) \quad (\text{B})$$

(A), (B) の右辺がそれぞれ等しいから, 自然数 n について

$$P_n(j, k) = P_n(-j, -k) \quad (j, k = \pm 1, \pm 2, j \neq k) \quad (\text{C})$$

が成立する. したがって, $P_n(2, 1) = P_n(-2, -1)$ が成立する.

(3) (C) より, $P_n(-j, k) = P_n(j, -k)$, $P_n(-k, -j) = P_n(k, j)$ であるから, これらを (A) に代入すると

$$P_{n+1}(j, k) = \frac{2}{3}P_n(j, -k) + \frac{1}{3}P_n(k, j) \quad (\text{D1})$$

(D1) は (C) に注意しながら, 次のように書き直すことができる.

$$P_{n+1}(k, j) = \frac{2}{3}P_n(k, -j) + \frac{1}{3}P_n(j, k) \quad (\text{D2})$$

$$P_{n+1}(j, -k) = \frac{2}{3}P_n(j, k) + \frac{1}{3}P_n(k, -j) \quad (\text{D3})$$

$$P_{n+1}(k, -j) = \frac{2}{3}P_n(k, j) + \frac{1}{3}P_n(j, -k) \quad (\text{D4})$$

(D1), (D4) より

$$P_{n+1}(j, k) + P_{n+1}(k, -j) = P_n(k, j) + P_n(j, -k) \quad (\text{E1})$$

$$P_{n+1}(j, k) - P_{n+1}(k, -j) = -\frac{1}{3}\{P_n(k, j) - P_n(j, -k)\} \quad (\text{E2})$$

(D2), (D3) より

$$P_{n+1}(k, j) + P_{n+1}(j, -k) = P_n(j, k) + P_n(k, -j) \quad (\text{E3})$$

$$P_{n+1}(k, j) - P_{n+1}(j, -k) = -\frac{1}{3}\{P_n(j, k) - P_n(k, -j)\} \quad (\text{E4})$$

ここで

$$\begin{aligned}a_n &= P_n(j, k) + P_n(k, -j), & b_n &= P_n(j, k) - P_n(k, -j), \\c_n &= P_n(k, j) + P_n(j, -k), & d_n &= P_n(k, j) - P_n(j, -k)\end{aligned}$$

とおくと, (E1)~(E4) より

$$a_{n+1} = c_n, \quad b_{n+1} = -\frac{1}{3}d_n, \quad c_{n+1} = a_n, \quad d_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n$$

これから

$$\begin{aligned}a_{n+1} + c_{n+1} &= a_n + c_n, & b_{n+1} + d_{n+1} &= -\frac{1}{3}(b_n + d_n), \\a_{n+1} - c_{n+1} &= -(a_n - c_n), & b_{n+1} - d_{n+1} &= \frac{1}{3}(b_n - d_n)\end{aligned}$$

上の4つの漸化式から

$$\begin{aligned}a_n + c_n &= a_1 + c_1, & b_n + d_n &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} (b_1 + d_1), \\a_n - c_n &= (-1)^{n-1} (a_1 - c_1), & b_n - d_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (b_1 - d_1)\end{aligned}$$

$j = 2, k = 1$ とすると

$$\begin{aligned}P_1(-2, 1) &= P_1(2, -1) = \frac{1}{3}, & P_1(1, 2) &= P_1(-1, 2) = \frac{1}{6}, \\P_1(2, 1) &= P_1(-1, 2) = P_1(-2, -1) = P_1(1, -2) = 0\end{aligned}$$

このとき, $a_1 = b_1 = 0, c_1 = \frac{1}{2}, d_1 = -\frac{1}{6}$ であるから

$$a_n = \frac{1}{4}\{1 + (-1)^n\}, \quad b_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n \{1 + (-1)^n\}$$

したがって, 自然数 n について

$$P_n(2, 1) = \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{8}\{1 + (-1)^n\} \left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

注意 $P_0(2, 1) = 1, P_0(-2, -1) = 0$ より, $n = 0$ のとき (C) は成立しないから, $n \geq 1$ で $P_n(2, 1)$ を求める.

別解 最初から n 秒後に P が

$$\begin{aligned} \text{点 } (2, 1) \text{ または点 } (-2, -1) \text{ にいる確率を } & p_n \\ \text{点 } (1, 2) \text{ または点 } (-1, -2) \text{ にいる確率を } & q_n \\ \text{点 } (-1, 2) \text{ または点 } (1, -2) \text{ にいる確率を } & r_n \\ \text{点 } (-2, 1) \text{ または点 } (2, -1) \text{ にいる確率を } & s_n \end{aligned}$$

とおくと，条件 (ii) から，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{3}r_n + \frac{1}{3}s_n, & q_{n+1} &= \frac{1}{3}r_n + \frac{2}{3}s_n, \\ r_{n+1} &= \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, & s_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} (p_{n+1} + q_{n+1}) + (r_{n+1} + s_{n+1}) &= (p_n + q_n) + (r_n + s_n) \\ (p_{n+1} + q_{n+1}) - (r_{n+1} + s_{n+1}) &= -\{(p_n + q_n) - (r_n + s_n)\} \\ (p_{n+1} - q_{n+1}) + (r_{n+1} - s_{n+1}) &= -\frac{1}{3}\{(p_n - q_n) + (r_n - s_n)\} \\ (p_{n+1} - q_{n+1}) - (r_{n+1} - s_{n+1}) &= \frac{1}{3}\{(p_n - q_n) - (r_n - s_n)\} \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} (p_n + q_n) + (r_n + s_n) &= (p_0 + q_0) + (r_0 + s_0) \\ (p_n + q_n) - (r_n + s_n) &= (-1)^n \{(p_0 + q_0) - (r_0 + s_0)\} \\ (p_n - q_n) + (r_n - s_n) &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n (p_0 - q_0) + (r_0 - s_0) \\ (p_n - q_n) - (r_n - s_n) &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \{(p_0 - q_0) - (r_0 - s_0)\} \end{aligned}$$

$p_0 = 1, q_0 = r_0 = s_0 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} 2(p_n + q_n) &= 1 + (-1)^n \\ 2(p_n - q_n) &= \{1 + (-1)^n\} \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

よって，求める確率は (n は自然数)

$$\frac{1}{2}p_n = \frac{1}{8}\{1 + (-1)^n\} \left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$



5.1 (1) $C: 4x - 4y^2 - 3 = 0$ より $x = y^2 + \frac{3}{4}$ ゆえに $\frac{dx}{dy} = 2y$

逆関数定理により $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y}$

点 A の座標を $\left(a^2 + \frac{3}{4}, a\right)$ とおくと, 点 A における接線 l の方程式は,

その傾き $\frac{1}{2a}$ が正であることを注意して

$$l: y - a = \frac{1}{2a} \left\{ x - \left(a^2 + \frac{3}{4} \right) \right\} \quad (a > 0)$$

l は原点 O を通るから

$$-a = -\frac{1}{2a} \left(a^2 + \frac{3}{4} \right) \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = \frac{3}{4}$$

$$a > 0 \text{ より, } a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ であるから} \quad l: y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad A \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(2) C 上の点 $A \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ における法線の方程式は

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \left(x - \frac{3}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad y = -\sqrt{3}(x - 2)$$

この法線上に接する円の中心があるから, その中心を $T(t + 2, -\sqrt{3}t)$ とし, C 上の点 $P \left(y^2 + \frac{3}{4}, y \right)$ とし, 次の関数を考える.

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= TP^2 - TA^2 \\ &= \left(y^2 - t - \frac{5}{4} \right)^2 + (y + \sqrt{3}t)^2 - \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ &= \left(y^2 - \frac{3}{4} \right) \left(y^2 - 2t - \frac{7}{4} \right) + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(y + 2\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left\{ \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(y^2 - 2t - \frac{7}{4} \right) + \left(y + 2\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\ &= \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left\{ \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(y^2 - \frac{3}{4} \right) - 2t \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\ &= \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \left\{ \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2t \right\} \end{aligned}$$

$\varphi(y) = 0$ が異なる 2 つの解をもてばよいから

$$\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2t = 0$$

が重解 $\left(y \neq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ または $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を解にもつときであるから

$$t = 0 \quad \text{または} \quad t = \frac{3}{2}$$

求める円の半径を r とすると

$$r^2 = \text{TA}^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

中心 $T(t+2, -\sqrt{3}t)$ より、求める円の方程式は

$$(x-2)^2 + y^2 = 1, \quad \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 16$$

補足 $\frac{\sqrt{3}}{2} = a < s < t$ とし、 C 上に 3 点

$$A\left(a^2 + \frac{3}{4}, a\right), S\left(s^2 + \frac{3}{4}, s\right), T\left(t^2 + \frac{3}{4}, t\right)$$

をとる. 3 点 A, S, T を通る円を考え、その中心を (p, q) 、半径を r とし、関数

$$f(y) = \left(y^2 + \frac{3}{4} - p\right)^2 + (y - q)^2 - r^2$$

を考えると、次式が成立する.

$$f(a) = f(s) = f(t) = 0 \quad (*)$$

$f(y)$ の第 1 次導関数および第 2 次導関数を求めると

$$\begin{aligned} f'(y) &= 4y \left(y^2 + \frac{3}{4} - p\right) + 2(y - q), \\ f''(y) &= 4 \left(y^2 + \frac{3}{4} - p\right) + 4y \cdot 2y + 2 \\ &= 12y^2 + 5 - 4p \end{aligned}$$

(*) にロルの定理を適用すると (ロルの定理は平均値の定理の一部)

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0 \quad (a < c_1 < s < c_2 < t)$$

を満たす c_1, c_2 が存在する. 上式にさらにロルの定理を適用すると

$$f''(c_3) = 0 \quad (c_1 < c_3 < c_2)$$

を満たす c_3 が存在する. ここで, $t \rightarrow a$ とすると, 次式が成立する.

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0$$

したがって

$$4a \left(a^2 + \frac{3}{4} - p \right) + 2(a - q) = 0, \quad 12a^2 + 5 - 4p = 0$$

これを解いて

$$p = 3a^2 + \frac{5}{4}, \quad q = -4a^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$f(a) = 0$ であるから

$$\left(a^2 + \frac{3}{4} - 3a^2 - \frac{5}{4} \right)^2 + (a + 4a^3) - r^2 = 0$$

整理すると

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{4}(1 + 4a^2)^2 + a^2(1 + 4a^2)^2 \quad \cdots \textcircled{2} \\ &= \frac{1}{4}(1 + 4a^2)^3 \end{aligned}$$

これから, C 上の点 A における接触円 S_1 の中心および半径は

$$\text{中心} \left(3a^2 + \frac{5}{4}, -4a^3 \right), \quad \text{半径} \frac{1}{2}(1 + 4a^2)^{\frac{3}{2}}$$

補足 接触円 (曲率円) の中心を曲率中心といい, 半径を曲率半径という. また, 曲率中心は, C の A における法線上の点である. 点 A で接する円の半径が曲率半径よりも大きいとき, 円と C の共有点の個数は 3 個ある. また, 点 A で接する円の半径が曲率半径よりも小さいときは, 距離 2 乗関数を用いて確認する必要がある.

①, ②により, $f(y)$ は

$$\begin{aligned}
 f(y) &= \left(y^2 + \frac{3}{4} - 3a^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (y + 4a^3)^2 - \frac{1}{4}(1 + 4a^2)^2 - a^2(1 + 4a^2)^2 \\
 &= \left(y^2 - 3a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + 2a^2\right)^2 + (y + 4a^3)^2 - (a + 4a^3)^2 \\
 &= (y^2 - a^2)(y^2 - 5a^2 - 1) + (y + 8a^3 + a)(y - a) \\
 &= (y - a)\{(y + a)(y^2 - 5a^2 - 1) + (y + 8a^3 + a)\} \\
 &= (y - a)(y^3 + ay^2 - 5a^2y + 3a^3) \\
 &= (y - a)^3(y + 3a)
 \end{aligned}$$

$f(y) = 0$ の解は 2 個であるから, S_1 は C と異なる 2 点を共有する. C の y 座標が $y < -3a$, $a < y$ のとき, C は S_1 の外部にあり, C の y 座標が $-3a < y < a$ のとき, C は S_1 の内部にある.

また, C の A における法線と x 軸の交点を B とすると $B(2, 0)$

C の x 軸に関する対称性から, B を中心とする半径 BA の円 S_2 も異なる接点を 2 個もつことが分かるが, これ以外に共有点を持たないことを距離 2 乗関数を使って示す必要がある.

$$BA^2 = \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 = 1$$

C 上の点 $P\left(y^2 + \frac{3}{4}, y\right)$ をとり, 次の関数 $g(y)$ を考える.

$$\begin{aligned}
 g(y) &= BP^2 - BA^2 = \left(y^2 + \frac{3}{4} - 2\right)^2 + y^2 - 1 \\
 &= \left(y^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 - 1 = y^4 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{9}{16} \\
 &= \left(y^2 - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

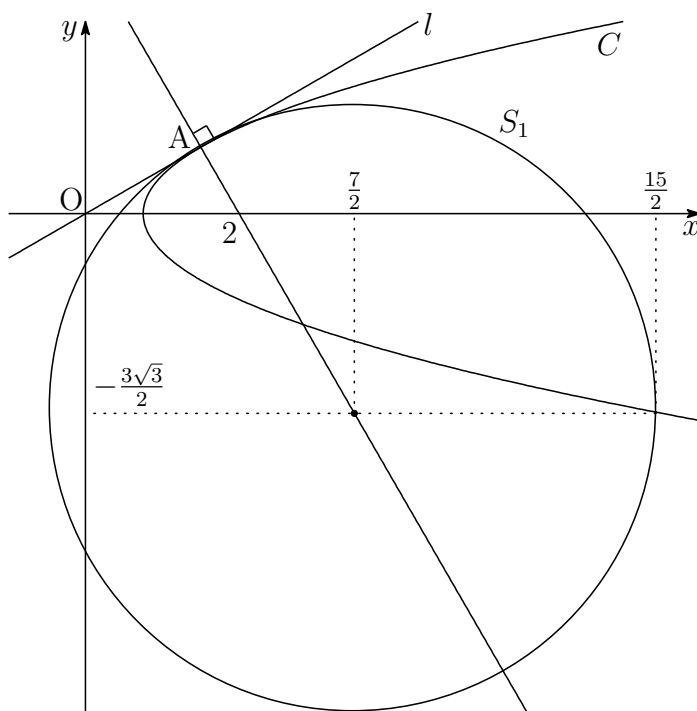
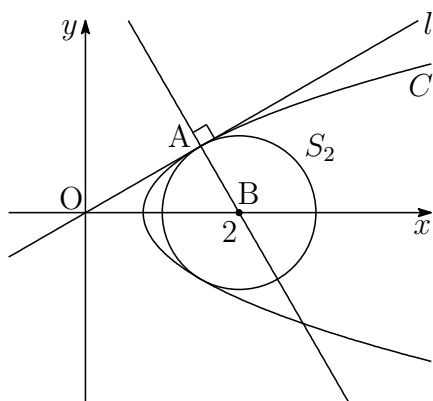
$g(y) = 0$ の解は 2 個であるから, S_2 と C は異なる 2 点を共有する.

よって, 求める円の方程式は

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 16, \quad (x - 2)^2 + y^2 = 1$$

(3) $C : x = y^2 + \frac{3}{4}$, $l : x = \sqrt{3}y$ の方程式から、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(y^2 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}y \right) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 dy \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$



■

5.2 (1) 求める体積 V_1 は

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^1 \{x^2 - (x^2)^2\} dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15}$$

よって $V_1 = \frac{2}{15}\pi$

(2) 直線 m は点 $P(t, t^2)$ を通り、傾き -1 であるから

$$y = -(x - t) + t^2 \quad \text{すなわち} \quad m: y = -x + t + t^2$$

これと $l: y = x$ の共有点 Q の座標は $\left(\frac{t+t^2}{2}, \frac{t+t^2}{2} \right)$

(3) $P(t, t^2), Q\left(\frac{t+t^2}{2}, \frac{t+t^2}{2}\right)$ より

$$PQ^2 = \left(t - \frac{t+t^2}{2}\right)^2 + \left(t^2 - \frac{t+t^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(t - t^2)^2$$

(4) $Q\left(\frac{t+t^2}{2}, \frac{t+t^2}{2}\right)$ より $(0 \leq t \leq 1)$, $OQ = \frac{t+t^2}{\sqrt{2}}$ であるから

$$s = \frac{t+t^2}{\sqrt{2}}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1+2t}{\sqrt{2}}$$

(5) s と t について

t	$0 \rightarrow 1$
s	$0 \rightarrow \sqrt{2}$

体積 V_2 は, (3), (4) の結果を利用して ¹¹

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{\pi} &= \int_0^{\sqrt{2}} PQ^2 ds = \int_0^1 PQ^2 \frac{ds}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(t-t^2)^2}{2} \cdot \frac{1+2t}{\sqrt{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 t^2(1-t)^2 dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 t^3(1-t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2!2!}{5!} (1-0)^5 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3!2!}{6!} (1-0)^6 = \frac{1}{30\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{60} \end{aligned}$$

よって $V_2 = \frac{\sqrt{2}}{60}\pi, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{2}}{60}\pi \bigg/ \frac{2}{15}\pi = \frac{\sqrt{2}}{8}$

¹¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010.kouki.pdf> の [1] を参照.

別解 C 上の点 $P(t, t^2)$, l 上の点 $R(t, t)$ をとる ($0 \leq t \leq 1$).

線分 PR の中点を M とすると $M\left(t, \frac{t^2+t}{2}\right)$

M から直線 $l: x - y = 0$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{\left|t - \frac{t^2+t}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{t - t^2}{2\sqrt{2}}$$

$\Delta S = PR\Delta t = (t - t^2)\Delta t$ を l の周りに 1 回転させた体積 ΔV_2 は, パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem) により ¹²

$$\Delta V_2 = 2\pi d \Delta S = 2\pi \cdot \frac{t - t^2}{2\sqrt{2}} \cdot (t - t^2)\Delta t = \frac{\pi t^2(1 - t)^2}{\sqrt{2}} \Delta t$$

$$\text{よって } V_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 t^2(1 - t)^2 dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2!2!}{5!} (1 - 0)^5 = \frac{\sqrt{2}}{60} \pi$$

■

¹²<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2012.pdf> (p.6 を参照)

6 索引

北大理系	1 p.4	2 p.42	3 p.36	4 p.4	5 p.20	
東北大理系	1 p.20	2 p.53	3 p.4	4 p.48	5 p.57	6 p.59
筑波大	1 p.5	2 p.21	3 p.30	4 p.21	5 p.5	6 p.32
千葉大	1 p.5	2 p.6	3 p.30	4 p.39	5 p.54	6 p.40
	7 p.36	8 p.55	9 p.55			
東大理系	1 p.6	2 p.39	3 p.65	4 p.57	5 p.60	6 p.63
東工大	1 p.58	2 p.60	3 p.56	4 p.56	5 p.6	
一橋大	1 p.7	2 p.30	3 p.28	4 p.48	5 p.23	
名大理系	1 p.39	2 p.53	3 p.7	4 p.60		
京大理系	1 p.7	2 p.32	3 p.24	4 p.23	5 p.61	6 p.56
阪大理系	1 p.37	2 p.33	3 p.24	4 p.8	5 p.64	
神戸大理系	1 p.8	2 p.28	3 p.43	4 p.40	5 p.61	
広大理系	1 p.9	2 p.49	3 p.50	4 p.33	5 p.62	
山口大	1 p.10	2 p.29	3 p.10	4 p.44	8 p.18	9 p.48
山大理医	2 p.29	5 p.45	6 p.37	7 p.54		
九大理系	1 p.49	2 p.34	3 p.47	4 p.10	5 p.58	
九工大	1 p.58	2 p.22	3 p.34	4 p.11		
福教大	1 p.18	2 p.45	3 p.12	4 p.40		
佐賀大	1 p.12	2 p.46	3 p.41	4 p.35		
佐賀医	1 p.12	2 p.46	5 p.31	6 p.29		
長崎大	3 p.19	4 p.19	6 p.51	7 p.66	10 p.25	
長大医	5 p.13	7 p.66	8 p.38	9 p.35		
熊大理系	1 p.41	2 p.14	3 p.29	4 p.23		
熊大医	1 p.63	2 p.14	3 p.59	4 p.64		
大分大	1 p.14	2 p.31	3 p.46	4 p.41		
分大医	1 p.14	3 p.46	4 p.41			
宮崎大	1 p.15	2 p.49	3 p.47	4 p.28	5 p.42	
	7 p.29	11 p.51				
宮大医	6 p.47	7 p.29	8 p.64	9 p.16	10 p.62	
鹿児島大	1 p.20	2 p.32	3 p.52	4 p.50	5 p.27	6 p.66
琉球大	1 p.22	2 p.39	3 p.35	4 p.17		7 p.17