

令和5年度 山口大学2次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医(医)・農・教育・経済・国際総合科・共同獣医
令和5年2月25日

- 理(理数科以外)・工・教育理系 1 2 3 4 数I・II・III・A・B (120分)
- 理(理数科)・医(医)学部 2 5 6 7 数I・II・III・A・B (120分)
- 教育文系 1 3 8 9 数I・II・II・A・B (120分)

1 関数 $f(x) = |x^2 - x - 2| - x - 1$ を考える. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(1, f(1))$ における接線を l とする. このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めなさい.
- (2) 関数 $y = f(x)$ の極値を調べ, そのグラフをかきなさい.
- (3) 接線 l の方程式を求めなさい.
- (4) 曲線 $y = f(x)$ と接線 l で囲まれた部分の面積を求めなさい.

2 7つの文字 A, A, A, D, I, M, Y すべてを1列に並べてできる文字列について, 次の問いに答えなさい.

- (1) 文字列は全部で何通りあるか求めなさい.
- (2) A と D が隣り合う文字列は全部で何通りあるか求めなさい.
- (3) 2つ以上の A が隣り合う文字列は全部で何通りあるか求めなさい.
- (4) 全部の文字列をアルファベット順の辞書式に並べるとき, 文字列 YAMADAI は何番目の文字列か求めなさい.

3 ベクトル \vec{a} を $\vec{a} = (\sqrt{2} - \sqrt{6}, \sqrt{2} + \sqrt{6})$ とし, ベクトル \vec{b} を次の2つの条件を満たすようにとる.

- $|\vec{b}| = \sqrt{2}$
- 関数 $f(t) = |\vec{a} + t\vec{b}|$ が $t = -\sqrt{2}$ で最小値をとる

このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 次の2つの等式が成り立つことを示しなさい.

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めなさい.
- (3) ベクトル \vec{b} を求めなさい.

4 複素数 z が, $2z^4 + (1 - \sqrt{5})z^2 + 2 = 0$ を満たしているとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) $z^{10} = 1$ が成り立つことを示しなさい.
- (2) $z + z^3 + z^5 + z^7 + z^9$ の値を求めなさい.
- (3) $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$ が成り立つことを示しなさい.

5 $\triangle ABC$ において, $AB = 7$, $BC = 9$, $CA = 8$ とし, 次の3つの条件を満たす2つの円 C_1 , C_2 を考える.

- 円 C_1 は, 辺 AB と辺 CA に接しており, 辺 BC とは2点で交わらない.
- 円 C_2 は, 辺 AB と辺 BC に接しており, 辺 CA とは2点で交わらない.
- 円 C_1 と円 C_2 は外接している.

このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 円 C_1 が $\triangle ABC$ の内接円であるとき, 円 C_1 の半径を求めなさい.
- (2) 円 C_1 と円 C_2 の半径が等しいとき, 円 C_1 の半径を求めなさい.
- (3) 円 C_1 の周の長さ と円 C_2 の周の長さの和が最小になるとき, 円 C_1 と円 C_2 の半径をそれぞれ求めなさい.

6 座標平面上で, 不等式

$$\frac{1}{4}x^2 - 2 \leq y \leq 0 \quad \text{または} \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

の表す領域を D_1 とし, 不等式

$$y > \sqrt{3}x \quad \text{かつ} \quad x^2 + y^2 < 2$$

の表す領域を D_2 とし, 不等式

$$y > -\sqrt{3}x \quad \text{かつ} \quad x^2 + y^2 < 2$$

の表す領域を D_3 とする. また, D_2 と D_3 の和集合を X とし, D_1 から X を除いた領域を Y とする. このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 領域 D_1 を図示しなさい.
- (2) 領域 D_1 の面積を求めなさい.
- (3) 領域 Y を図示しなさい.
- (4) 領域 Y の面積を求めなさい.

7 $\pi = 3.1415\dots$ を円周率, $e = 2.7182\dots$ を自然対数の底とし,
関数 $f(x) = e^{-x} + \sin x - 1$ を考える. このとき, 次の問いに答えなさい.

(1) $x > 0$ のとき, 次の不等式が成り立つことを示しなさい.

$$e^x \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) < 1$$

(2) $x > 0$ のとき, 次の不等式が成り立つことを示しなさい.

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

必要ならば, $\theta > 0$ のとき, $|\sin \theta| < \theta$ が成り立つことを用いてよい.

(3) 関数 $f(x)$ は, 区間 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ において極大値をとることを示しなさい.

(4) 方程式 $f(x) = 0$ は, 区間 $(0, \pi)$ においてただ1つの実数解をもつことを示しなさい.

8 次の問いに答えなさい.

(1) 3451 と 2737 の最大公約数を d とするとき, ユークリッドの互除法を用いて d の値を求めなさい.

(2) (1) で求めた d に対して, x, y についての一次不定方程式

$$3451x - 2737y = 6d$$

の整数解をすべて求めなさい.

(3) すべての 2023 の倍数は, x, y を用いて $3451x - 2737y$ と表されることを示しなさい.

9 次の問いに答えなさい.

(1) $x^4 - 6x^2 + 25$ を因数分解しなさい.

(2) 方程式 $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$ の4つの解を p, q, r, s とするとき, $p^3 + q^3 + r^3 + s^3$ の値を求めなさい.

(3) (2) で定めた p, q, r, s に対して, $p^3q^3 + p^3r^3 + p^3s^3 + q^3r^3 + q^3s^3 + r^3s^3$ の値を求めなさい.

解答例

- 1 (1) $f(x) = 0$ より $|x+1||x-2| = x+1$
 $x+1 \geq 0$ であるから, $|x+1| = x+1$ とすると

$$(x+1)|x-2| = x+1 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(|x-2| - 1) = 0$$

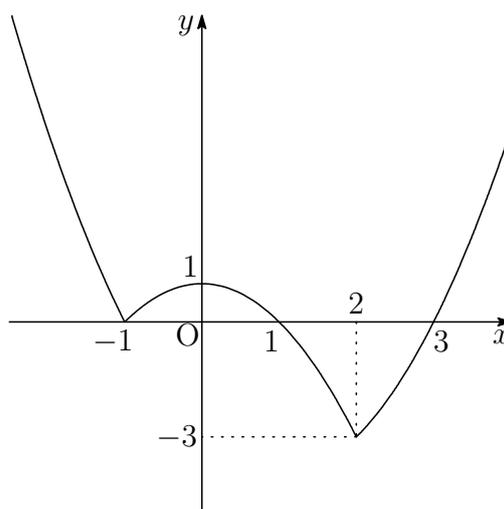
$x+1 \geq 0$ に注意して, これを解くと $x = -1, 1, 3$

- (2) $f(x) = |(x+1)(x-2)| - x - 2$
 $x \leq -1, 2 \leq x$ のとき

$$f(x) = (x^2 - x - 2) - x - 1 = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

$-1 \leq x \leq 2$ のとき

$$f(x) = -(x^2 - x - 2) - x - 1 = -x^2 + 1$$



- (3) $-1 \leq x \leq 2$ において $f(x) = -x^2 + 1$ であるから

$$f'(x) = -2x \quad (-1 < x < 2)$$

$f(1) = 0, f'(1) = -2$ より, l は点 $(1, 0)$ を通り, 傾き -2 の直線

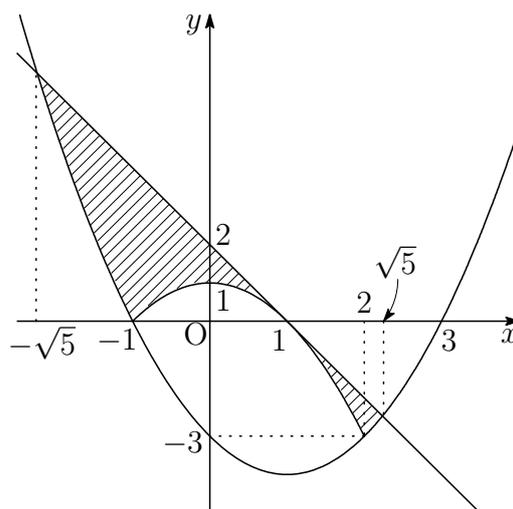
$$y = -2(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x + 2$$

(4) l と $y = f(x)$ の接点以外の共有点の x 座標は,

$$x^2 - 2x - 3 = -2x + 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{5}$$

曲線 $y = f(x)$ と l で囲まれた部分は、下の図の斜線部分でその面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \{(-2x + 2) - (x^2 - 2x - 3)\} dx \\ &\quad - \int_{-1}^2 \{(-x^2 + 1) - (x^2 - 2x - 3)\} dx \\ &= - \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) dx + 2 \int_{-1}^2 (x + 1)(x - 2) dx \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{5} + \sqrt{5})^3 - 2 \cdot \frac{1}{6}(2 + 1)^3 = \frac{20\sqrt{5}}{3} - 9 \end{aligned}$$



■

2 (1) $\frac{7!}{3!} = 840$ (通り)

(2) 3つのAとDが隣り合わない文字数の列を求める.

(i) Dが左端にあるとき

Dの右隣の文字はI, M, Yのいずれかで3通りあり, それぞれの文字に対して(Aを3個含む)残り5文字の並べ方は

$$\frac{5!}{3!} = 20 \text{ (通り)}$$

よって $3 \cdot 20 = 60$ (通り)

(ii) Dが右端にあるとき

(i)と同様に, 60通りある.

(iii) Dが両端にないとき

Dの両隣の文字はI, M, Yのいずれかで, ${}_3P_2 = 6$ 通りある. さらに, この文字列をひとまとまりとみた5つの並べ方の総数であるから

$$6 \cdot \frac{5!}{3!} = 120 \text{ (通り)}$$

(1)と(i)~(iii)から, 求める総数は

$$840 - (60 + 60 + 120) = 600 \text{ (通り)}$$

(3) Aのどの2つも隣り合わない文字列は

|○|○|○|○|

の並びにおいて, 4つの○にD, I, M, Yが1つずつ入り, 5つの(|)のうち3つにAが入る総数であるから

$$4! \cdot {}_5C_3 = 24 \times 10 = 240 \text{ (通り)}$$

よって, 求める総数は, これと(1)の結果から

$$840 - 240 = 600 \text{ (通り)}$$

(4) 左端がYである文字列は $\frac{6!}{3!} = 120$ (通り)

したがって, 左端がYでない文字列は $840 - 120 = 720$ (通り)

左端がYAAである文字列は $4! = 24$ (通り)

左端がYAD, YAIである文字列はそれぞれ ${}_4P_2 = 12$ (通り)

左端がYAMである文字列を順に並べると

YAMAADI, YAMAAID, YAMADAI, ...

よって $720 + 24 + 12 \cdot 2 + 3 = 771$ (番目) ■

3 (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \\ \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用すると、 \vec{a} の成分について

$$\vec{a} = 4(-\sin 15^\circ, \cos 15^\circ) = 4(\cos 105^\circ, \sin 105^\circ) \quad (*)$$

$|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ より, $\vec{a} // \vec{b}$ とすると, $f(t) = |\vec{a} + t\vec{b}|$ が最小となるとき

$$\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0} \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{a}| = |t||\vec{b}|$$

このとき, $4 = |t|\sqrt{2}$, すなわち, $|t| = 2\sqrt{2}$ となり, 条件に反するから, \vec{a} , \vec{b} は 1 次独立である. したがって, $f(t) = |\vec{a} + t\vec{b}| \neq 0$ に注意して

$$\frac{1}{2}f(t)^2 = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2)$$

これを t について微分すると

$$f(t)f'(t) = \vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2$$

$f'(-\sqrt{2}) = 0$ であるから, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + (-\sqrt{2})(\sqrt{2})^2 = 0 \quad \text{よって} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{2}$$

(3) \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = 60^\circ$$

$|\vec{b}| = \sqrt{2}$ および (*) により

$$\vec{b} = \sqrt{2}(\cos(105^\circ \pm 60^\circ), \sin(105^\circ \pm 60^\circ)) \quad (\text{複号同順})$$

$$\text{よって} \quad \vec{b} = \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right), \quad (1, 1) \quad \blacksquare$$

- 4 (1) $2z^4 + (1 - \sqrt{5})z^2 + 2 = 0$ より, $2z^4 + z^2 + 2 = \sqrt{5}z^2$ の両辺を平方すると

$$4z^8 + z^4 + 4 + 4z^6 + 4z^2 + 8z^4 = 5z^4$$

整理すると $z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0 \quad \dots (*)$

したがって $z^{10} - 1 = (z^2 - 1)(z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1) = 0 \quad \dots (**)$

よって $z^{10} = 1$

別解 $\theta = \frac{\pi}{5}$ とおくと, $3\theta = \pi - 2\theta$ より

$$\sin 3\theta = \sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta$$

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$, $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を上式に代入すると

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad 3 - 4\sin^2\theta = 2\cos\theta$$

整理すると $4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$

$0 < \cos\theta < 1$ であることに注意して $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$2z^4 + (1 - \sqrt{5})z^2 + 2 = 0$ より $z^2 + \frac{1}{z^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = 4\cos^2\theta$$

$z + \frac{1}{z} = \pm 2\cos\theta$ より $z^2 \mp 2z\cos\theta + 1 = 0$

これを解いて $z = \pm\cos\theta \pm i\sin\theta$ (複号任意) よって $z^{10} = 1$

(2) (*) より $z + z^3 + z^5 + z^7 + z^9 = z(1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8) = 0$

(3) $z = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$ とすると, $z^{10} = 1$, (**) より, (*) が成立するから

$$z^4 + \frac{1}{z^4} + z^2 + \frac{1}{z^2} + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 1 = 0$$

したがって $2\cos\frac{2\pi}{5} = z^2 + \frac{1}{z^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

さらに $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$

ゆえに $2\cos\frac{\pi}{5} = z + \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ よって $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$

参考 $\theta = \frac{\pi}{n}$ ($n \geq 2$), $\alpha = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ とおくと

$$z^n - 1 = (z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \alpha^k)$$

また $z^n - 1 = (z - 1) \sum_{k=1}^n z^{n-k}$ ゆえに $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \alpha^k) = \sum_{k=1}^n z^{n-k} \dots (*)$

(*) は, z に関する恒等式であるから, $z = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \cos 2k\theta - i \sin 2k\theta) = \prod_{k=1}^{n-1} (2 \sin^2 k\theta - 2i \sin k\theta \cos k\theta) \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1} (\sin k\theta - i \cos k\theta) \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} - k\theta \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - k\theta \right) \right\} \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \times (\cos 0 - i \sin 0) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = n$$

よって, 次式が成立する.

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

たとえば, $n = 5, 10$ のとき

$$\prod_{k=1}^4 \sin \frac{k\pi}{5} = \frac{5}{2^4}, \quad \prod_{k=1}^9 \sin \frac{k\pi}{10} = \frac{10}{2^9}$$

上の2式から

$$\prod_{k=1}^5 \sin \frac{2k-1}{10} \pi = \frac{1}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5}, \quad \sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5} \quad \text{であるから} \quad \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} \quad \blacksquare$$

- 5 (1) $\triangle ABC$ の面積 S をヘロンの公式で求める.

$2s = 7 + 9 + 8$ とすると, $s = 12$ より

$$S = \sqrt{12(12-7)(12-9)(12-8)} = 12\sqrt{5}$$

$\triangle ABC$ の内接円の半径を r とすると

$$r = \frac{S}{s} = \frac{12\sqrt{5}}{12} = \sqrt{5}$$

- (2) $\triangle ABC$ の内心 I から AB , BC , CA にそれぞれ垂線 IL , IM , IN を引く.

$\alpha = AN = AL$, $\beta = BL = BM$, $\gamma = CM = CN$ とすると

$$\alpha + \beta = 7, \quad \beta + \gamma = 9, \quad \gamma + \alpha = 8$$

これを解いて $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$

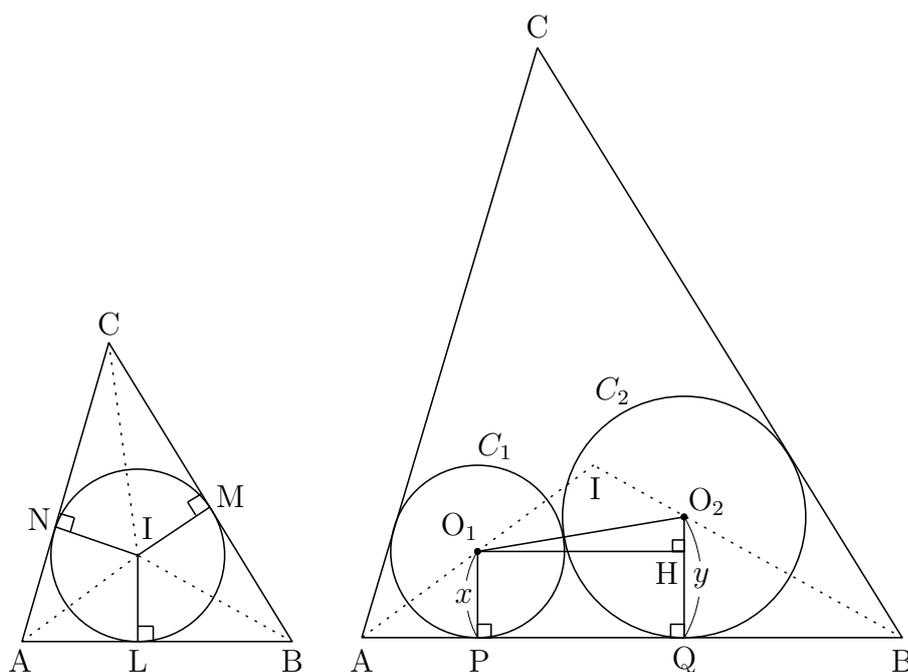
C_1 , C_2 の中心をそれぞれ O_1 , O_2 とし, その半径をそれぞれ x , y とする.

O_1 , O_2 は, それぞれ線分 AI , BI 上の点である. O_1 , O_2 から線分 AB にそれぞれ垂線 O_1P , O_2Q を引くと

$$\frac{AP}{x} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \frac{BQ}{y} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \text{ゆえに} \quad AP = \frac{3x}{\sqrt{5}}, \quad BQ = \frac{4y}{\sqrt{5}}$$

右下の図の直角三角形 O_1O_2H により

$$PQ = O_1O_2 = \sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2} = 2\sqrt{xy}$$



AP + BQ + PQ = 7 より

$$\frac{3x + 4y}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{xy} = 7 \quad (*)$$

条件から, $y = x$ を上式に代入すると

$$\frac{7x}{\sqrt{5}} + 2x = 7 \quad \text{ゆえに} \quad (7 + 2\sqrt{5})x = 7\sqrt{5}$$

よって, C_1 の半径は $x = \frac{7\sqrt{5}}{7 + 2\sqrt{5}} = \frac{49\sqrt{5} - 70}{29}$

(3) (*) より, y は x の関数 (陰関数) であるから, (*) を x で微分すると

$$\frac{3 + 4y'}{\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{y}{x}} + y' \sqrt{\frac{x}{y}} = 0 \quad (A)$$

両辺に $\sqrt{5xy}$ を掛けると

$$(3 + 4y')\sqrt{xy} + \sqrt{5}(y + xy') = 0 \quad (B)$$

これをさらに x で微分すると

$$4y''\sqrt{xy} + \frac{1}{2}(3 + 4y') \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + y' \sqrt{\frac{x}{y}} \right) + \sqrt{5}(2y' + xy'') = 0 \quad (C)$$

C_1 と C_2 の周の長さの和が最小であるとき, $x + y$ が最小となる. $x + y$ は x の関数であるから, $f(x) = x + y$ とおくと

$$f'(x) = 1 + y', \quad f''(x) = y''$$

$f'(x) = 0$ とすると, $y' = -1$ より, これを (C) に代入し, 整理すると

$$(4\sqrt{xy} + \sqrt{5}x)y'' = 2\sqrt{5}$$

これから, $y'' > 0$ となり, $f'(x) = 0$ となるとき, $f''(x) > 0$ であるから, このときの極値は極小値である.

$y' = -1$ を (A) に代入し, $t = \sqrt{\frac{y}{x}}$ とすると ($t > 0$)

$$t - \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{5}t^2 - t - \sqrt{5} = 0 \quad (D)$$

$t > 0$ に注意して, これを解くと $t = \frac{1 + \sqrt{21}}{2\sqrt{5}} \dots \textcircled{1}$

(*) の両辺に $\frac{5}{x}$ をかけると

$$3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}t^2 + 10t = \frac{35}{x}$$

(D) の第 2 式から, $\sqrt{5}t^2 = t + \sqrt{5}$ を上式に代入すると

$$3\sqrt{5} + 4(t + \sqrt{5}) + 10t = \frac{35}{x} \quad \text{ゆえに} \quad 2t + \sqrt{5} = \frac{5}{x}$$

① を上の第 2 式に代入すると

$$2 \cdot \frac{1 + \sqrt{21}}{2\sqrt{5}} + \sqrt{5} = \frac{5}{x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{6 + \sqrt{21}}{\sqrt{5}} = \frac{5}{x}$$

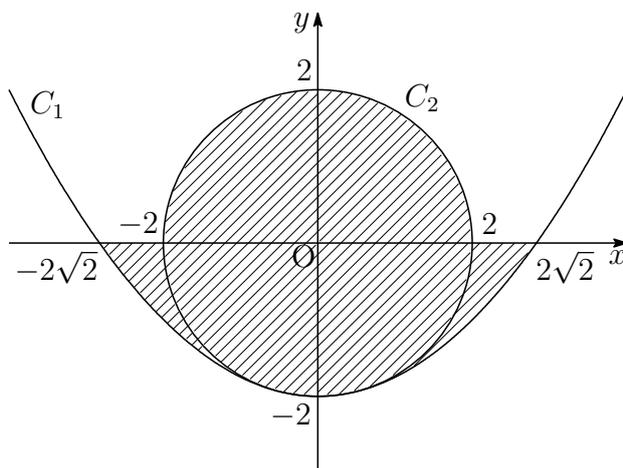
したがって
$$x = \frac{5\sqrt{5}}{6 + \sqrt{21}} = \frac{\sqrt{5}(6 - \sqrt{21})}{3}$$

① より
$$\frac{y}{x} = t^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{21}}{2\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{11 + \sqrt{21}}{10}$$

よって
$$y = x \cdot \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{5}(6 - \sqrt{21})}{3} \cdot \frac{11 + \sqrt{21}}{10} = \frac{\sqrt{5}(9 - \sqrt{21})}{6}$$
 ■

6 (1) $C_1: y = \frac{1}{4}x^2$, $C_2: x^2 + y^2 = 4$ とする.

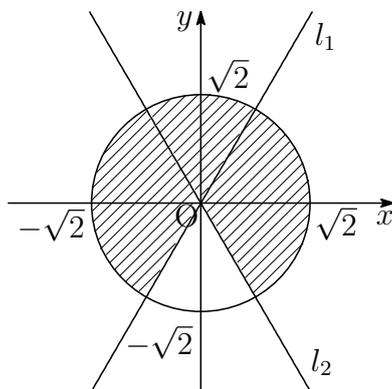
$\frac{1}{4}x^2 - 2 \leq y \leq 0$ の表す領域は, C_1 と x 軸で囲まれた部分 (境界線を含む) を表し, $x^2 + y^2 \leq 4$ の表す領域は, C_2 の内部 (境界線を含む) を表す. よって, D_1 の表す領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



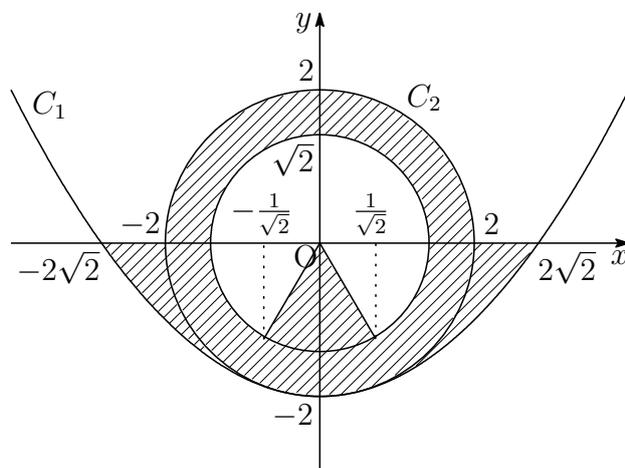
(2) (1) の結果から, 領域 D_1 の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned}
 S_1 &= - \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4}x^2 - 2 \right) dx + \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 \\
 &= -\frac{1}{4} \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) dx + 2\pi \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} (4\sqrt{2})^3 + 2\pi = \frac{16\sqrt{2}}{3} + 2\pi
 \end{aligned}$$

(3) 領域 X は、次の図の斜線部分で境界線を含まない。



よって、領域 Y は、下の図の斜線部分で境界線を含む。



(4) 半径 $\sqrt{2}$, 中心角 $\frac{5\pi}{3}$ の扇形の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

よって、領域 Y の面積は

$$S_1 - S_2 = \frac{16\sqrt{2}}{3} + 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{16\sqrt{2} + \pi}{3}$$



7 (1) $x > 0$ のとき, $1 - e^{-x} > 0$ より

$$\int_0^x (1 - e^{-t}) dt = \left[t + e^{-t} \right]_0^x = x - 1 + e^{-x} > 0$$

$x > 0$ のとき, $x - 1 + e^{-x} > 0$ より

$$\int_0^x (t - 1 + e^{-t}) dt = \left[\frac{t^2}{2} - t - e^{-t} \right]_0^x = \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x} > 0$$

$x > 0$ のとき, $\frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x} > 0$ より

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - t + 1 - e^{-t} \right) dt &= \left[\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t + e^{-t} \right]_0^x \\ &= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x} > 0 \end{aligned}$$

したがって $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < e^{-x}$

よって $e^x \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) < 1$

(2) $x > 0$ において

$$\int_0^x (1 - \cos t) dt = \left[t - \sin t \right]_0^x = x - \sin x > 0$$

これから, $x > 0$ において

$$\int_0^x (t - \sin t) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \cos t \right]_0^x = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x > 0$$

さらに, $x > 0$ において

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - 1 + \cos t \right) dx &= \left[\frac{t^3}{6} - t + \sin t \right]_0^x \\ &= \frac{x^3}{6} - x + \sin x > 0 \end{aligned}$$

よって, $x > 0$ において $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$

$$(3) f(x) = e^{-x} + \sin x - 1 \text{ より } f'(x) = -e^{-x} + \cos x$$

$$f' \left(\frac{\pi}{3} \right) = -e^{-\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2e^{\frac{\pi}{3}}} (e^{\frac{\pi}{3}} - 2) > \frac{1}{2e^{\frac{\pi}{3}}} (e - 2) > 0$$

$$f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -e^{-\frac{\pi}{2}} < 0$$

$f'(x)$ は連続であるから、区間 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$ において極大値をもつ。

- (4) (3) の結果から、 $x = \alpha$ で極大値をとるとすると、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	α	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

$f(0) = 0$, $f(\pi) = e^{-\pi} - 1 < 0$ より、 $f(x) = 0$ は $(0, \pi)$ においてただ1つの実数解をもつ。 ■

- 8 (1) ユークリッドの互除法により

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \\
 \hline
 119 \) 595 \) 714 \) 2737 \) 3451 \\
 \quad 595 \quad 595 \quad 2142 \quad 2737 \\
 \quad \hline
 \quad \quad 0 \quad 119 \quad 595 \quad 714
 \end{array}$$

よって $d = 119$

- (2) (1)の結果から $3451 = 29d$, $2737 = 23d$
したがって、与えられた1次不定方程式は

$$29x - 23y = 6 \quad \text{ゆえに} \quad 29(x-1) = 23(y-1)$$

29と23は互いに素であるから、整数 k を用いて

$$x - 1 = 23k, \quad y - 1 = 29k$$

よって $x = 23k + 1$, $y = 29k + 1$ (k は整数)

- (3) $3451a - 2737b = 2023 \cdots (*)$ を満たす整数 a, b を1つ求める。これから

$$29a - 23b = 17 \quad \cdots \textcircled{1}$$

法23について、 $29 \equiv 6$, $17 \equiv -6$ より

$$6a \equiv -6 \quad \text{ゆえに} \quad 6(a+1) \equiv 0 \pmod{23}$$

6は23と互いに素であるから $a+1 = 23j$ (j は整数)

$a = 23j - 1$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$29(23j - 1) - 23b = 17 \quad \text{ゆえに} \quad b = 29j - 2$$

N を整数とすると、 $(*)$ より、 $3451x - 2737y = 2023N$ に対して

$$3451Na - 2737Nb = 2023N$$

であるから、 $x = Na$, $y = Nb$ とすればよい。

$$x = N(23j - 1), \quad y = N(29j - 2) \quad (j \text{は整数})$$



$$\boxed{9} \quad (1) \quad x^4 - 6x^2 + 25 = (x^2 + 5)^2 - 16x^2 \\ = (x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 5)$$

(2) (1)の結果から、一般性を失うことなく、 $x^2 + 4x + 5 = 0$ の解を p, q とし、 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の解を r, s とすると、解と係数の関係から

$$p + q = -4, \quad pq = 5, \quad r + s = 4, \quad rs = 5$$

したがって

$$p^3 + q^3 = (p + q)^3 - 3pq(p + q) = (-4)^3 - 3 \cdot 5 \cdot (-4) = -4 \\ r^3 + s^3 = (r + s)^3 - 3rs(r + s) = 4^3 - 3 \cdot 5 \cdot 4 = 4$$

よって $p^3 + q^3 + r^3 + s^3 = -4 + 4 = \mathbf{0}$

(3) (2)の結果を用いると

$$p^3q^3 + p^3r^3 + p^3s^3 + q^3r^3 + q^3s^3 + r^3s^3 \\ = (pq)^3 + (rs)^3 + (p^3 + q^3)(r^3 + s^3) \\ = 5^3 + 5^3 + (-4) \cdot 4 = \mathbf{234}$$

