令和５年度　山口大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医 (医)・農・教育・経済・国際総合科・共同獣医
令和５年２月25日

- 理 (理数科以外)・工・教育理系　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (120 分)
- 理 (理数科)・医 (医) 学部　$\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文系　$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 数I・II・II・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x) = |x^2 - x - 2| - x - 1$ を考える．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$ における接線を l とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めなさい．

(2) 関数 $y = f(x)$ の極値を調べ，そのグラフをかきなさい．

(3) 接線 l の方程式を求めなさい．

(4) 曲線 $y = f(x)$ と接線 l で囲まれた部分の面積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 7 つの文字 A，A，A，D，I，M，Y すべてを 1 列に並べてできる文字列について，次の問いに答えなさい．

(1) 文字列は全部で何通りあるか求めなさい．

(2) A と D が隣り合う文字列は全部で何通りあるか求めなさい．

(3) 2 つ以上の A が隣り合う文字列は全部で何通りあるか求めなさい．

(4) 全部の文字列をアルファベット順の辞書式に並べるとき，文字列 YAMADAI は何番目の文字列か求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ ベクトル $\vec{a}$ を $\vec{a} = (\sqrt{2} - \sqrt{6},\ \sqrt{2} + \sqrt{6})$ とし，ベクトル $\vec{b}$ を次の 2 つの条件を満たすようにとる．

- $|\vec{b}| = \sqrt{2}$
- 関数 $f(t) = |\vec{a} + t\vec{b}|$ が $t = -\sqrt{2}$ で最小値をとる

このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 次の 2 つの等式が成り立つことを示しなさい．

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めなさい．

(3) ベクトル $\vec{b}$ を求めなさい．

4 複素数 z が，$2z^4+(1-\sqrt{5})z^2+2=0$ を満たしているとき，次の問いに答えなさい．

(1) $z^{10}=1$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $z+z^3+z^5+z^7+z^9$ の値を求めなさい．

(3) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}$ が成り立つことを示しなさい．

5 $\triangle$ABC において，AB $=7$，BC $=9$，CA $=8$ とし，次の 3 つの条件を満たす 2 つの円 C_1，C_2 を考える．

- 円 C_1 は，辺 AB と辺 CA に接しており，辺 BC とは 2 点で交わらない．
- 円 C_2 は，辺 AB と辺 BC に接しており，辺 CA とは 2 点で交わらない．
- 円 C_1 と円 C_2 は外接している．

このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 円 C_1 が $\triangle$ABC の内接円であるとき，円 C_1 の半径を求めなさい．

(2) 円 C_1 と円 C_2 の半径が等しいとき，円 C_1 の半径を求めなさい．

(3) 円 C_1 の周の長さと円 C_2 の周の長さの和が最小になるとき，円 C_1 と円 C_2 の半径をそれぞれ求めなさい．

6 座標平面上で，不等式

$$\frac{1}{4}x^2-2\leqq y\leqq 0 \quad \text{または} \quad x^2+y^2\leqq 4$$

の表す領域を D_1 とし，不等式

$$y>\sqrt{3}x \quad \text{かつ} \quad x^2+y^2<2$$

の表す領域を D_2 とし，不等式

$$y>-\sqrt{3}x \quad \text{かつ} \quad x^2+y^2<2$$

の表す領域を D_3 とする．また，D_2 と D_3 の和集合を X とし，D_1 から X を除いた領域を Y とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 領域 D_1 を図示しなさい．

(2) 領域 D_1 の面積を求めなさい．

(3) 領域 Y を図示しなさい．

(4) 領域 Y の面積を求めなさい．

7 $\pi = 3.1415\cdots$ を円周率，$e = 2.7182\cdots$ を自然対数の底とし，
関数 $f(x) = e^{-x} + \sin x - 1$ を考える．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $x > 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを示しなさい．

$$e^x\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) < 1$$

(2) $x > 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを示しなさい．

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

必要ならば，$\theta > 0$ のとき，$|\sin\theta| < \theta$ が成り立つことを用いてよい．

(3) 関数 $f(x)$ は，区間 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$ において極大値をとることを示しなさい．

(4) 方程式 $f(x) = 0$ は，区間 $(0,\ \pi)$ においてただ 1 つの実数解をもつことを示しなさい．

8 次の問いに答えなさい．

(1) 3451 と 2737 の最大公約数を d とするとき，ユークリッドの互除法を用いて d の値を求めなさい．

(2) (1) で求めた d に対して，x，y についての一次不定方程式

$$3451x - 2737y = 6d$$

の整数解をすべて求めなさい．

(3) すべての 2023 の倍数は，x，y を用いて $3451x - 2737y$ と表されることを示しなさい．

9 次の問いに答えなさい．

(1) $x^4 - 6x^2 + 25$ を因数分解しなさい．

(2) 方程式 $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$ の 4 つの解を p，q，r，s とするとき，$p^3 + q^3 + r^3 + s^3$ の値を求めなさい．

(3) (2) で定めた p，q，r，s に対して，$p^3q^3 + p^3r^3 + p^3s^3 + q^3r^3 + q^3s^3 + r^3s^3$ の値を求めなさい．

解答例

1 (1) $f(x)=0$ より　$|x+1||x-2|=x+1$

$x+1 \geqq 0$ であるから，$|x+1|=x+1$ とすると

$$(x+1)|x-2|=x+1 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(|x-2|-1)=0$$

$x+1 \geqq 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{x=-1,\ 1,\ 3}$

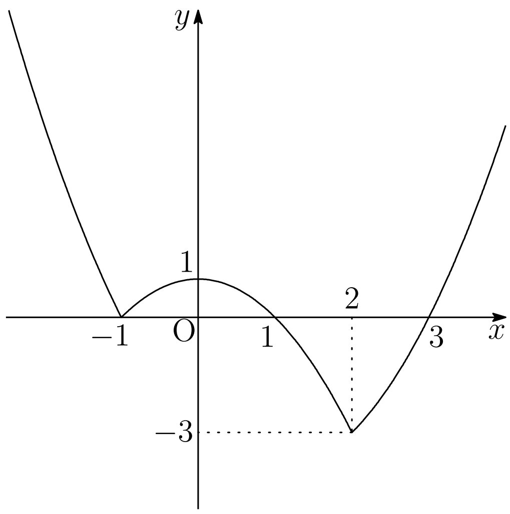
(2) $f(x)=|(x+1)(x-2)|-x-2$

$x \leqq -1,\ 2 \leqq x$ のとき

$$f(x)=(x^2-x-2)-x-1=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$$

$-1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$f(x)=-(x^2-x-2)-x-1=-x^2+1$$



(3) $-1 \leqq x \leqq 2$ において　$f(x)=-x^2+1$ であるから

$$f'(x)=-2x \quad (-1<x<2)$$

$f(1)=0$，$f'(1)=-2$ より，l は点 $(1,\ 0)$ を通り，傾き -2 の直線

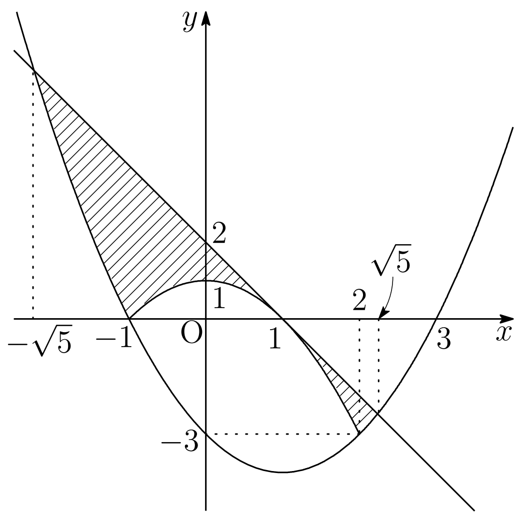
$$y=-2(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-2x+2}$$

(4) l と $y=f(x)$ の接点以外の共有点の x 座標は，

$$x^2-2x-3=-2x+2 \quad \text{これを解いて} \quad x=\pm\sqrt{5}$$

曲線 $y=f(x)$ と l で囲まれた部分は，下の図の斜線部分でその面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\{(-2x+2)-(x^2-2x-3)\}\,dx \\ &\qquad\qquad -\int_{-1}^{2}\{(-x^2+1)-(x^2-2x-3)\}\,dx \\ &= -\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})\,dx+2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{5}+\sqrt{5})^3-2\cdot\frac{1}{6}(2+1)^3=\boldsymbol{\frac{20\sqrt{5}}{3}-9} \end{aligned}$$



2 (1) $\dfrac{7!}{3!} = \mathbf{840}$ (通り)

(2) 3つのAとDが隣り合わない文字数の列を求める．

(i) <u>Dが左端にあるとき</u>
Dの右隣の文字はI，M，Yのいずれかで3通りあり，それぞれの文字に対して(Aを3個含む)残り5文字の並べ方は

$$\frac{5!}{3!} = 20 \quad (\text{通り})$$

よって　$3 \cdot 20 = 60$ (通り)

(ii) <u>Dが右端にあるとき</u>
(i)と同様に，60通りある．

(iii) <u>Dが両端にないとき</u>
Dの両隣の文字はI，M，Yのいずれかで，${}_3\mathrm{P}_2 = 6$ 通りある．さらに，この文字列をひとまとまりとみた5つの並べ方の総数であるから

$$6 \cdot \frac{5!}{3!} = 120 \quad (\text{通り})$$

(1)と(i)〜(iii)から，求める総数は

$$840 - (60 + 60 + 120) = \mathbf{600} \quad (\text{通り})$$

(3) Aのどの2つも隣り合わない文字列は

$$|\bigcirc|\bigcirc|\bigcirc|\bigcirc|$$

の並びにおいて，4つの◯にD，I，M，Yが1つずつ入り，5つの(|)のうち3つにAが入る総数であるから

$$4! \cdot {}_5\mathrm{C}_3 = 24 \times 10 = 240 \quad (\text{通り})$$

よって，求める総数は，これと(1)の結果から

$$840 - 240 = \mathbf{600} \quad (\text{通り})$$

(4) 左端がYである文字列は　$\dfrac{6!}{3!} = 120$ (通り)
したがって，左端がYでない文字列は　$840 - 120 = 720$ (通り)
左端がYAAである文字列は　$4! = 24$ (通り)
左端がYAD，YAIである文字列はそれぞれ　${}_4\mathrm{P}_2 = 12$ (通り)
左端がYAMである文字列を順に並べると

YAMAADI,　YAMAAID,　YAMADAI,　…

よって　$720 + 24 + 12 \cdot 2 + 3 = \mathbf{771}$ (番目)　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \\ \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用すると，$\vec{a}$ の成分について

$$\vec{a} = 4(-\sin 15^\circ,\ \cos 15^\circ) = 4(\cos 105^\circ,\ \sin 105^\circ) \qquad (*)$$

$|\vec{a}| = 4$，$|\vec{b}| = \sqrt{2}$ より，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ とすると，$f(t) = |\vec{a} + t\vec{b}|$ が最小となるとき

$$\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0} \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{a}| = |t||\vec{b}|$$

このとき，$4 = |t|\sqrt{2}$，すなわち，$|t| = 2\sqrt{2}$ となり，条件に反するから，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立である．したがって，$f(t) = |\vec{a} + t\vec{b}| \neq 0$ に注意して

$$\frac{1}{2}f(t)^2 = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + 2t\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2\right)$$

これを t について微分すると

$$f(t)f'(t) = \vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2$$

$f'(-\sqrt{2}) = 0$ であるから，$|\vec{b}| = \sqrt{2}$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b} + (-\sqrt{2})(\sqrt{2})^2 = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\sqrt{2}}$$

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{2}}{4\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = 60^\circ$$

$|\vec{b}| = \sqrt{2}$ および $(*)$ により

$$\vec{b} = \sqrt{2}(\cos(105^\circ \pm 60^\circ),\ \sin(105^\circ \pm 60^\circ)) \quad (\text{複号同順})$$

よって $\boldsymbol{\vec{b} = \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right),\ (1,\ 1)}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $2z^4+(1-\sqrt{5})z^2+2=0$ より，$2z^4+z^2+2=\sqrt{5}z^2$ の両辺を平方すると

$$4z^8+z^4+4+4z^6+4z^2+8z^4=5z^4$$

整理すると　　$z^8+z^6+z^4+z^2+1=0 \quad \cdots(*)$

したがって　　$z^{10}-1=(z^2-1)(z^8+z^6+z^4+z^2+1)=0 \quad \cdots(**)$

よって　　$z^{10}=1$

別解 $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ とおくと，$3\theta=\pi-2\theta$ より

$$\sin 3\theta=\sin(\pi-2\theta)=\sin 2\theta$$

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を上式に代入すると

$$3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta\cos\theta \quad ゆえに \quad 3-4\sin^2\theta=2\cos\theta$$

整理すると　　$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

$0<\cos\theta<1$ であることに注意して　　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

$2z^4+(1-\sqrt{5})z^2+2=0$ より　$z^2+\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{\sqrt{5}+3}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=4\cos^2\theta$$

$z+\dfrac{1}{z}=\pm 2\cos\theta$ より　　$z^2\mp 2z\cos\theta+1=0$

これを解いて　$z=\pm\cos\theta\pm i\sin\theta$　(複号任意)　　よって　$z^{10}=1$

(2) $(*)$ より　$z+z^3+z^5+z^7+z^9=z(1+z^2+z^4+z^6+z^8)=\mathbf{0}$

(3) $z=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$ とすると，$z^{10}=1$，$(**)$ より，$(*)$ が成立するから

$$z^4+\frac{1}{z^4}+z^2+\frac{1}{z^2}+1=0 \quad ゆえに \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-1=0$$

したがって　$2\cos\dfrac{2\pi}{5}=z^2+\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

さらに　$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$

ゆえに　$2\cos\dfrac{\pi}{5}=z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　よって　$\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}$

参考 $\theta=\dfrac{\pi}{n}\ (n \geqq 2)$，$\alpha=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ とおくと

$$z^n-1=(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)$$

また　$z^n-1=(z-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)=\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　$\cdots(*)$

$(*)$ は，z に関する恒等式であるから，$z=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \prod_{k=1}^{n-1}(1-\cos 2k\theta-i\sin 2k\theta)=\prod_{k=1}^{n-1}(2\sin^2 k\theta-2i\sin k\theta\cos k\theta)\\
&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}(\sin k\theta-i\cos k\theta)\\
&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)\right\}\\
&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\times(\cos 0-i\sin 0)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\\
(\text{右辺}) &= n
\end{aligned}$$

よって，次式が成立する．

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

たとえば，$n=5,\ 10$ のとき

$$\prod_{k=1}^{4}\sin\frac{k\pi}{5}=\frac{5}{2^4},\quad \prod_{k=1}^{9}\sin\frac{k\pi}{10}=\frac{10}{2^9}$$

上の 2 式から

$$\prod_{k=1}^{5}\sin\frac{2k-1}{10}\pi=\frac{1}{16}\quad \text{ゆえに}\quad \sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}$$

$\sin\dfrac{\pi}{10}=\cos\dfrac{2\pi}{5}$，$\sin\dfrac{3\pi}{10}=\cos\dfrac{\pi}{5}$ であるから　$\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}$　■

5 (1) △ABC の面積 S をヘロンの公式で求める．

$2s = 7 + 9 + 8$ とすると，$s = 12$ より

$$S = \sqrt{12(12-7)(12-9)(12-8)} = 12\sqrt{5}$$

△ABC の内接円の半径を r とすると

$$r = \frac{S}{s} = \frac{12\sqrt{5}}{12} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$$

(2) △ABC の内心 I から AB，BC，CA にそれぞれ垂線 IL，IM，IN を引く．

$\alpha = \mathrm{AN} = \mathrm{AL}$，$\beta = \mathrm{BL} = \mathrm{BM}$，$\gamma = \mathrm{CM} = \mathrm{CN}$ とすると

$$\alpha + \beta = 7, \quad \beta + \gamma = 9, \quad \gamma + \alpha = 8$$

これを解いて　　$\alpha = 3,\ \beta = 4,\ \gamma = 5$

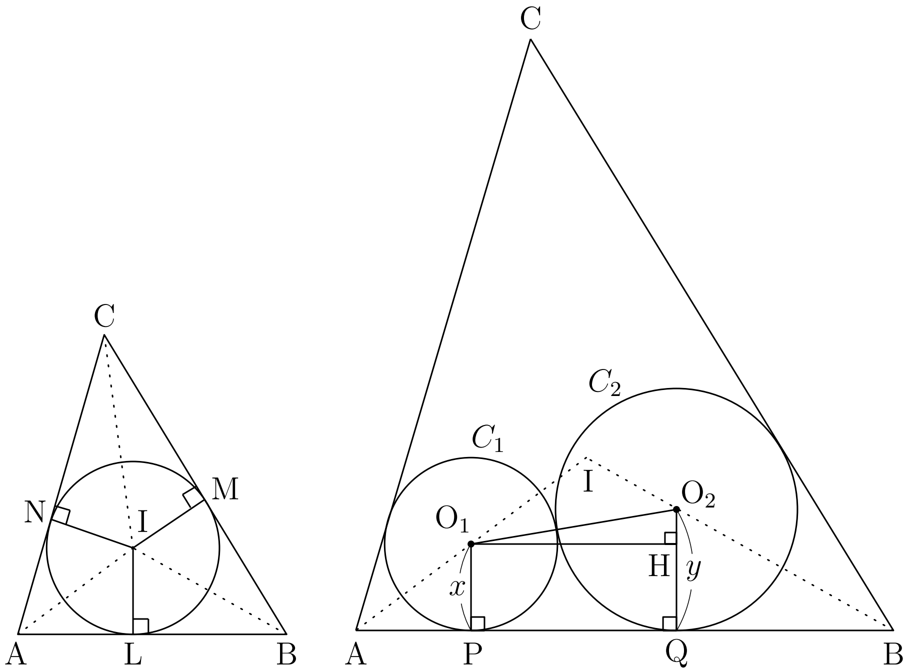
C_1，C_2 の中心をそれぞれ $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ とし，その半径をそれぞれ x, y とする．

$\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ は，それぞれ線分 AI，BI 上の点である．$\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ から線分 AB にそれぞれ垂線 $\mathrm{O_1P}$, $\mathrm{O_2Q}$ を引くと

$$\frac{\mathrm{AP}}{x} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \frac{\mathrm{BQ}}{y} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AP} = \frac{3x}{\sqrt{5}}, \ \mathrm{BQ} = \frac{4y}{\sqrt{5}}$$

右下の図の直角三角形 $\mathrm{O_1O_2H}$ により

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{O_1O_2} = \sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2} = 2\sqrt{xy}$$



$\mathrm{AP}+\mathrm{BQ}+\mathrm{PQ}=7$ より

$$\frac{3x+4y}{\sqrt{5}}+2\sqrt{xy}=7 \tag{$*$}$$

条件から，$y=x$ を上式に代入すると

$$\frac{7x}{\sqrt{5}}+2x=7 \quad \text{ゆえに} \quad (7+2\sqrt{5})x=7\sqrt{5}$$

よって，C_1 の半径は　$x=\dfrac{7\sqrt{5}}{7+2\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{49\sqrt{5}-70}{29}}$

(3) $(*)$ より，y は x の関数 (陰関数) であるから，$(*)$ を x で微分すると

$$\frac{3+4y'}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{y}{x}}+y'\sqrt{\frac{x}{y}}=0 \tag{A}$$

両辺に $\sqrt{5xy}$ を掛けると

$$(3+4y')\sqrt{xy}+\sqrt{5}(y+xy')=0 \tag{B}$$

これをさらに x で微分すると

$$4y''\sqrt{xy}+\frac{1}{2}(3+4y')\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+y'\sqrt{\frac{x}{y}}\right)+\sqrt{5}(2y'+xy'')=0 \tag{C}$$

C_1 と C_2 の周の長さの和が最小であるとき，$x+y$ が最小となる．$x+y$ は x の関数であるから，$f(x)=x+y$ とおくと

$$f'(x)=1+y', \quad f''(x)=y''$$

$f'(x)=0$ とすると，$y'=-1$ より，これを (C) に代入し，整理すると

$$(4\sqrt{xy}+\sqrt{5}x)y''=2\sqrt{5}$$

これから，$y''>0$ となり，$f'(x)=0$ となるとき，$f''(x)>0$ であるから，このときの極値は極小値である．

$y'=-1$ を (A) に代入し，$t=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ とすると $(t>0)$

$$t-\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{5}t^2-t-\sqrt{5}=0 \tag{D}$$

$t>0$ に注意して，これを解くと　$t=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2\sqrt{5}}$　$\cdots$①

$(*)$ の両辺に $\dfrac{5}{x}$ をかけると

$$3\sqrt{5}+4\sqrt{5}t^2+10t=\frac{35}{x}$$

(D) の第 2 式から，$\sqrt{5}t^2=t+\sqrt{5}$ を上式に代入すると

$$3\sqrt{5}+4(t+\sqrt{5})+10t=\frac{35}{x} \quad \text{ゆえに} \quad 2t+\sqrt{5}=\frac{5}{x}$$

① を上の第 2 式に代入すると

$$2\cdot\frac{1+\sqrt{21}}{2\sqrt{5}}+\sqrt{5}=\frac{5}{x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{6+\sqrt{21}}{\sqrt{5}}=\frac{5}{x}$$

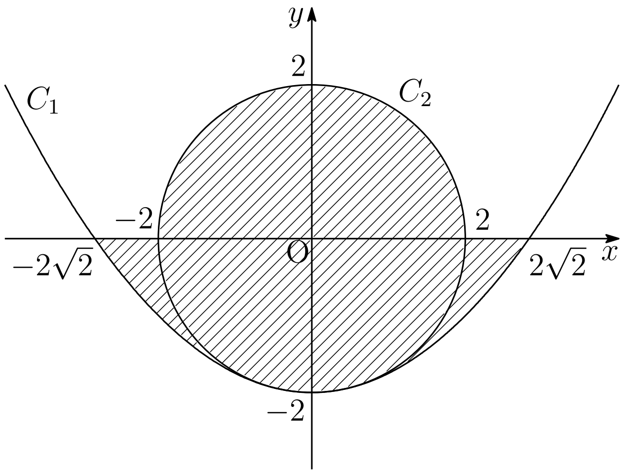
したがって　$x=\dfrac{5\sqrt{5}}{6+\sqrt{21}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}(6-\sqrt{21})}{3}}$

① より　$\dfrac{y}{x}=t^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{11+\sqrt{21}}{10}$

よって　$y=x\cdot\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sqrt{5}(6-\sqrt{21})}{3}\cdot\dfrac{11+\sqrt{21}}{10}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}(9-\sqrt{21})}{6}}$ ■

6 (1) $C_1 : y = \dfrac{1}{4}x^2$，$C_2 : x^2 + y^2 = 4$ とする．

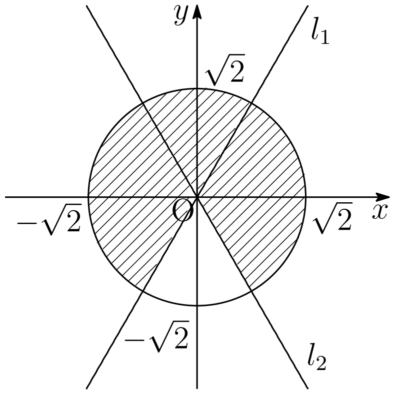
$\dfrac{1}{4}x^2 - 2 \leqq y \leqq 0$ の表す領域は，C_1 と x 軸で囲まれた部分 (境界線を含む) を表し，$x^2 + y^2 \leqq 4$ の表す領域は，C_2 の内部 (境界線を含む) を表す．よって，D_1 の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



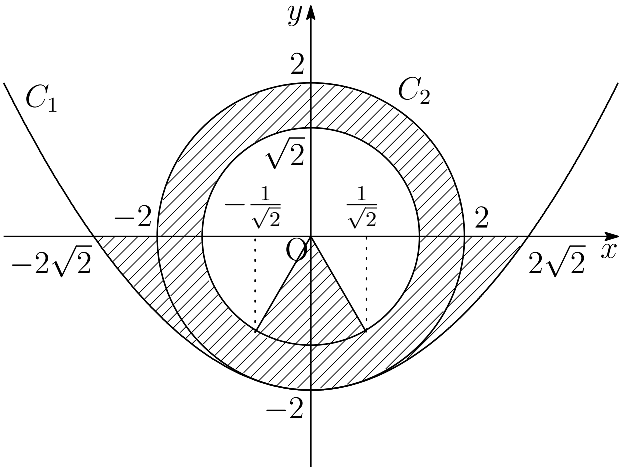
(2) (1) の結果から，領域 D_1 の面積を S_1 とすると

$$
\begin{aligned}
S_1 &= -\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) dx + \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 \\
&= -\frac{1}{4}\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})\, dx + 2\pi \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}(4\sqrt{2})^3 + 2\pi = \boldsymbol{\frac{16\sqrt{2}}{3} + 2\pi}
\end{aligned}
$$

(3) 領域 X は，次の図の斜線部分で境界線を含まない．



よって，領域 Y は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



(4) 半径 $\sqrt{2}$，中心角 $\dfrac{5\pi}{3}$ の扇形の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

よって，領域 Y の面積は

$$S_1 - S_2 = \frac{16\sqrt{2}}{3} + 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{16\sqrt{2}+\pi}{3}}$$

■

$\boxed{7}$ (1) $x>0$ のとき，$1-e^{-x}>0$ より

$$\int_0^x (1-e^{-t})\,dt = \Big[\,t+e^{-t}\,\Big]_0^x = x-1+e^{-x}>0$$

$x>0$ のとき，$x-1+e^{-x}>0$ より

$$\int_0^x (t-1+e^{-t})\,dt = \left[\,\frac{t^2}{2}-t-e^{-t}\,\right]_0^x = \frac{x^2}{2}-x+1-e^{-x}>0$$

$x>0$ のとき，$\dfrac{x^2}{2}-x+1-e^{-x}>0$ より

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\frac{t^2}{2}-t+1-e^{-t}\right)dt &= \left[\,\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+t+e^{-t}\,\right]_0^x \\ &= \frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+x-1+e^{-x}>0\end{aligned}$$

したがって　$1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}<e^{-x}$

よって　$e^x\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\right)<1$

(2) $x>0$ において

$$\int_0^x (1-\cos t)\,dt = \Big[\,t-\sin t\,\Big]_0^x = x-\sin x>0$$

これから，$x>0$ において

$$\int_0^t (t-\sin t)\,dt = \left[\,\frac{t^2}{2}+\cos t\,\right]_0^x = \frac{x^2}{2}-1+\cos x>0$$

さらに，$x>0$ において

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\frac{t^2}{2}-1+\cos t\right)dx &= \left[\,\frac{t^3}{6}-t+\sin t\,\right]_0^x \\ &= \frac{x^3}{6}-x+\sin x>0\end{aligned}$$

よって，$x>0$ において　$\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$

(3) $f(x) = e^{-x} + \sin x - 1$ より　$f'(x) = -e^{-x} + \cos x$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -e^{-\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2e^{\frac{\pi}{3}}}(e^{\frac{\pi}{3}} - 2) > \frac{1}{2e^{\frac{\pi}{3}}}(e - 2) > 0$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}} < 0$$

$f'(x)$ は連続であるから，区間 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$ において極大値をもつ．

(4) (3) の結果から，$x = \alpha$ で極大値をとるとすると，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(0) = 0$，$f(\pi) = e^{-\pi} - 1 < 0$ より，$f(x) = 0$ は $(0,\ \pi)$ においてただ 1 つの実数解をもつ．■

$\boxed{8}$ (1) ユークリッドの互除法により

$$\begin{array}{rrrrr} & 5 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 119\,) & 595\,) & 714\,) & 2737\,) & 3451 \\ & 595 & 595 & 2142 & 2737 \\ \hline & 0 & 119 & 595 & 714 \end{array}$$

よって　　$\boldsymbol{d = 119}$

(2) (1) の結果から　$3451 = 29d$，$2737 = 23d$
したがって，与えられた 1 次不定方程式は

$$29x - 23y = 6 \quad \text{ゆえに} \quad 29(x-1) = 23(y-1)$$

29 と 23 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$x - 1 = 23k,\quad y - 1 = 29k$$

よって　　$\boldsymbol{x = 23k + 1,\ \ y = 29k + 1}$ **($\boldsymbol{k}$ は整数)**

(3) $3451a - 2737b = 2023 \cdots (*)$ を満たす整数 a，b を 1 つ求める．これから

$$29a - 23b = 17 \quad \cdots ①$$

法 23 について，$29 \equiv 6$, $17 \equiv -6$ より

$$6a \equiv -6 \quad \text{ゆえに} \quad 6(a+1) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 23)$$

6 は 23 と互いに素であるから　$a + 1 = 23j$　(j は整数)
$a = 23j - 1$ を ① に代入すると

$$29(23j-1) - 23b = 17 \quad \text{ゆえに} \quad b = 29j - 2$$

N を整数とすると，$(*)$ より，$3451x - 2737y = 2023N$ に対して

$$3451Na - 2737Nb = 2023N$$

であるから，$x = Na$，$y = Nb$ とすればよい．

$$x = N(23j-1),\quad y = N(29j-2) \quad (j \text{ は整数})$$

■

9 (1) $x^4-6x^2+25=(x^2+5)^2-16x^2$
$$=\boldsymbol{(x^2+4x+5)(x^2-4x+5)}$$

(2) (1) の結果から，一般性を失うことなく，$x^2+4x+5=0$ の解を $p,\ q$ とし，$x^2-4x+5=0$ の解を $r,\ s$ とすると，解と係数の関係から

$$p+q=-4,\quad pq=5,\quad r+s=4,\quad rs=5$$

したがって

$$p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)=(-4)^3-3\cdot5\cdot(-4)=-4$$
$$r^3+s^3=(r+s)^3-3rs(r+s)=4^3-3\cdot5\cdot4=4$$

よって　$p^3+q^3+r^3+s^3=-4+4=\mathbf{0}$

(3) (2) の結果を用いると

$$\begin{aligned}&p^3q^3+p^3r^3+p^3s^3+q^3r^3+q^3s^3+r^3s^3\\=&(pq)^3+(rs)^3+(p^3+q^3)(r^3+s^3)\\=&5^3+5^3+(-4)\cdot4=\mathbf{234}\end{aligned}$$

■