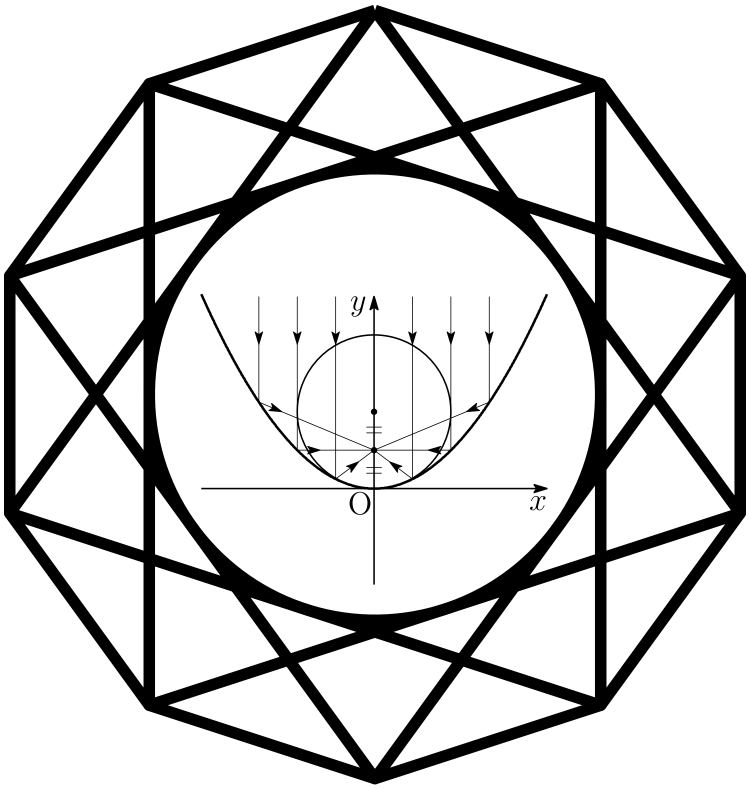
入試の軌跡

大学入試　問題集

2023年 国立大学

理系数学



2024 年 3 月 15 日

Typed by LaTeX 2_ε

序

本書 [PDF] は，受験指導＋ ICT 教材をコンセプトとした入試問題集です．本書の構成は，次のとおりです．

Pick Up　類比問題　頻出問題　応用問題　発展問題　索引

令和 5 年 (2023 年) 度に次の大学で実施された一般前期試験 (理系問題) をすべて掲載しました．なお，一橋大学は理系レベルのため掲載しました．

北海道大学	東北大学	筑波大学	千葉大学	東京大学
東京工業大学	一橋大学	名古屋大学	京都大学	大阪大学
神戸大学	広島大学	山口大学	九州大学	九州工業大学
福岡教育大学	佐賀大学	長崎大学	熊本大学	大分大学
宮崎大学	鹿児島大学	琉球大学		

パソコン・スマートフォン・電子黒板での使用を想定して作成しています．

1. 電子黒板を利用される場合は，電子黒板の PDF ブラウザをご使用ください．ファイルサイズに優れ，ハイパーリンク・拡縮・スワイプ・書き込みもスムーズに機能します．

2. スマートフォンでの使用も想定し，問題と解答に相互リンクを施しています．

令和 6 年 2 月　西村　信一

目 次

1　Pick Up

1.1　北海道大学

□□ 1.1　［北大理系 2023］ $\boxed{3}$

以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底を表す．

(1) k を実数の定数とし，$f(x) = xe^{-x}$ とおく．方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数を求めよ．ただし，$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ を用いてもよい．

(2) $xye^{-(x+y)} = c$ をみたす正の実数 x，y の組がただ 1 つ存在するときの実数 c の値を求めよ．

(3) $xye^{-(x+y)} = \dfrac{3}{e^4}$ をみたす正の実数 x，y を考えるとき，y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ．

□□ 1.2　［北大理系 2023］ $\boxed{4}$

n を 2 以上の自然数とする．1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に a_1，a_2，$\cdots$，a_n とし，

$$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$$

とおく．また，K_n のとりうる値の最小値を q_n とする．

(1) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ．

(2) q_n を求めよ．また，$K_n = q_n$ となるための a_1，a_2，$\cdots$，a_n に関する必要十分条件を求めよ．

(3) n を 4 以上の自然数とする．$L_n = K_n + |a_4 - 4|$ とおき，L_n のとりうる値の最小値を r_n とする．$L_n = r_n$ となる確率 p_n を求めよ．

1.2　東北大学

□□ 1.3　［東北大理系 2023］ $\boxed{1}$

赤玉 4 個と白玉 5 個の入った，中の見えない袋がある．玉はすべて，色が区別できる他には違いはないものとする．A，B の 2 人が，A から交互に，袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う．ただし取り出した玉は袋の中には戻さない．A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし，その時点でゲームを終了する．B が白玉を取り出したら B の勝ちとし，その時点でゲームを終了する．袋から玉がなくなったら引き分けとし，ゲームは終了する．

(1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ．

(2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ．

□□ 1.4　［東北大理系 2023］ $\boxed{6}$

関数 $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{6x+1}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の接線で，傾きが 1 であり，かつ接点の x 座標が正であるものの方程式を求めよ．

(2) 座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ を考える．x が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形 S の概形を描け．また S の面積を求めよ．

1.3　筑波大学

□□ 1.5　［筑波大 2023］ $\boxed{1}$

曲線 $C : y = x - x^3$ 上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ における接線を ℓ とし，C と ℓ の共有点のうち A とは異なる点を B とする．また，$-2 < t < 1$ とし，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t-t^3)$ をとる．さらに，三角形 ABP の面積を $S(t)$ とする．

(1) 点 B の座標を求めよ．

(2) $S(t)$ を求めよ．

(3) t が $-2 < t < 1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ．

□□ **1.6** ［筑波大 2023］ $\boxed{2}$

α，β を実数とし，$\alpha > 1$ とする．曲線 $C_1 : y = |x^2 - 1|$ と曲線 $C_2 : y = -(x-\alpha)^2 + \beta$ が，点 $(\alpha,\ \beta)$ と点 $(p,\ q)$ の 2 点で交わるとする．また，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_1 とし，x 軸，直線 $x = \alpha$，および C_1 の $x \geqq 1$ を満たす部分で囲まれた図形の面積を S_2 とする．

(1) p を α を用いて表し，$0 < p < 1$ であることを示せ．

(2) S_1 を α を用いて表せ．

(3) $S_1 > S_2$ であることを示せ．

1.4 千葉大学

□□ **1.7** ［千葉大 2023］ $\boxed{1}$

座標平面上に点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 1)$ をとる．線分 OA 上に点 O，点 A と異なる点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ をとり，線分 BP 上の点 Q を，$\triangle$APQ と $\triangle$OBQ の面積が等しくなるようにとる．

(1) 直線 BP を表す方程式を求めよ．

(2) $\triangle$OBQ の面積を p を用いて表せ．

(3) p が $0 < p < 2$ の範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

□□ **1.8** ［千葉大 2023］ $\boxed{2}$

1 個のさいころを投げて出た目によって得点を得るゲームを考える．出た目が 1，2 であれば得点は 2，出た目が 3 であれば得点は 1，出た目が 4，5，6 であれば得点は 0 とする．このゲームを k 回繰り返すとき，得点の合計を S_k とする．

(1) $S_2 = 3$ となる確率を求めよ．

(2) S_3 が奇数となる確率を求めよ．

(3) $S_4 \geqq n$ となる確率が $\dfrac{1}{9}$ 以下となる最小の整数 n を求めよ．

□□ **1.9** ［千葉大 2023］ $\boxed{3}$

以下の問いに答えよ．

(1) p を実数とする．曲線 $y = |x^2 + x - 2|$ と直線 $y = x + p$ の共有点の個数を求めよ．

(2) 等式 $f(x) = x^2 + \displaystyle\int_{-1}^{2} (xf(t) - t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

1.5　東京大学

□□ **1.10**　［東大理系 2023］ $\boxed{1}$

(1) 正の整数 k に対し,

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく．次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) 正の整数 n に対し,

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ．

1.6　東京工業大学

□□ **1.11**　［東工大 2023］ $\boxed{1}$

実数 $\displaystyle\int_0^{2023} \frac{2}{x+e^x}\,dx$ の整数部分を求めよ．

1.7　一橋大学

□□ **1.12**　［一橋大 2023］ $\boxed{1}$

n を 2 以上 20 以下の整数，k を 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする．

$${}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1} = 2({}_n\mathrm{C}_{k-1} + {}_n\mathrm{C}_{k+1})$$

が成り立つような整数の組 $(n,\ k)$ を求めよ．

□□ **1.13**　［一橋大 2023］ $\boxed{5}$

A，B，C の 3 人が，A，B，C，A，B，C，A，$\cdots$ という順番にさいころを投げ，最初に 1 を出した人を勝ちとする．だれかが 1 を出すか，全員が n 回ずつ投げたら，ゲームを終了する．A，B，C が勝つ確率 P_{A}，P_{B}，P_{C} をそれぞれ求めよ．

1.8　名古屋大学

□□ 1.14　［名大理系 2023］ $\boxed{3}$

(1) 方程式 $e^x = \dfrac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解の個数を求めよ．

(2) $y = x(x^2-3)$ と $y = e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点の個数を求めよ．

(3) a を正の実数とし，関数 $f(x) = x(x^2-a)$ を考える．$y=f(x)$ と $y=e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点は 1 個のみであるとする．このような a がただ 1 つ存在することを示せ．

1.9　京都大学

□□ 1.15　［京大理系 2023］ $\boxed{1}$

次の各問に答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx$ の値を求めよ．

(2) 整式 $x^{2023}-1$ を整式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割ったときの余りを求めよ．

1.10　大阪大学

□□ 1.16　［阪大理系 2023］ $\boxed{2}$

平面上の 3 点 O，A，B が

$$|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1 \quad \text{かつ} \quad (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする．

(1) $(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ を求めよ．

(2) 平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})| \leqq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \leqq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値と最小値を求めよ．

1.11　神戸大学

□□ **1.17**　［神戸大理系 2023］ $\boxed{\mathbf{2}}$

$a,\ b$ を実数とする．整式 $f(x)$ を $f(x)=x^2+ax+b$ で定める．以下の問に答えよ．ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数える．

(1) 2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に 0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

(3) 2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

□□ **1.18**　［神戸大理系 2023］ $\boxed{\mathbf{3}}$

n を 2 以上の整数とする．袋の中には 1 から $2n$ までの整数が 1 つずつ書いてある $2n$ 枚のカードが入っている．以下の問に答えよ．

(1) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(2) この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(3) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が $2n+1$ 以上である確率を求めよ．

1.12　広島大学

□□ 1.19　［広大理系 2023］ $\boxed{2}$

原点を O とする座標平面上の 2 点 A(3, 0)，B(1, 1) を考える．α，β を実数とし，点 P(α, β) は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないとする．直線 OA に関して点 P と対称な点を Q とし，直線 OB に関して点 P と対称な点を R とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 Q および点 R の座標を，α，β を用いて表せ．

(2) 直線 OA と直線 QR が交点 S をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．さらに，このときの交点 S の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．

(3) 直線 OB と直線 QR が交点 T をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．さらに，このときの交点 T の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ．

(4) α，β は (2) と (3) の両方の条件を満たすとし，S，T は (2)，(3) で定めた点であるとする．このとき，直線 OA と直線 BS が垂直となり，直線 OB と直線 AT が垂直となる α，β の値を求めよ．

□□ 1.20　［広大理系 2023］ $\boxed{3}$

空間内の 6 点 A，B，C，D，E，F は 1 辺の長さが 1 の正八面体の頂点であり，四角形 ABCD は正方形であるとする．$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{d}$，$\vec{b}\cdot\vec{e}$，$\vec{d}\cdot\vec{e}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$ を満たす実数 p，q，r の値を求めよ．

(3) 辺 BE を $1:2$ に内分する点を G とする．また，$0<t<1$ を満たす実数 t に対し，辺 CF を $t:(1-t)$ に内分する点を H とする．t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△AGH の面積が最小となる t の値とそのときの △AGH の面積を求めよ．

1.13　山口大学

□□ **1.21**　［山口大 2023］ $\boxed{2}$ ［山大理医 2023］ $\boxed{2}$

7 つの文字 A，A，A，D，I，M，Y すべてを 1 列に並べてできる文字列について，次の問いに答えなさい．

(1) 文字列は全部で何通りあるか求めなさい．

(2) A と D が隣り合う文字列は全部で何通りあるか求めなさい．

(3) 2 つ以上の A が隣り合う文字列は全部で何通りあるか求めなさい．

(4) 全部の文字列をアルファベット順の辞書式に並べるとき，文字列 YAMADAI は何番目の文字列か求めなさい．

□□ **1.22**　［山大理医 2023］ $\boxed{6}$

座標平面上で，不等式

$$\frac{1}{4}x^2 - 2 \leqq y \leqq 0 \quad \text{または} \quad x^2 + y^2 \leqq 4$$

の表す領域を D_1 とし，不等式

$$y > \sqrt{3}x \quad \text{かつ} \quad x^2 + y^2 < 2$$

の表す領域を D_2 とし，不等式

$$y > -\sqrt{3}x \quad \text{かつ} \quad x^2 + y^2 < 2$$

の表す領域を D_3 とする．また，D_2 と D_3 の和集合を X とし，D_1 から X を除いた領域を Y とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 領域 D_1 を図示しなさい．

(2) 領域 D_1 の面積を求めなさい．

(3) 領域 Y を図示しなさい．

(4) 領域 Y の面積を求めなさい．

□□ **1.23**　［山口大 2023］ $\boxed{9}$

次の問いに答えなさい．

(1) $x^4 - 6x^2 + 25$ を因数分解しなさい．

(2) 方程式 $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$ の 4 つの解を p，q，r，s とするとき，$p^3 + q^3 + r^3 + s^3$ の値を求めなさい．

(3) (2) で定めた p，q，r，s に対して，$p^3q^3 + p^3r^3 + p^3s^3 + q^3r^3 + q^3s^3 + r^3s^3$ の値を求めなさい．

1.14　九州大学

□□ 1.24 ［九大理系 2023］ $\boxed{1}$

以下の問いに答えよ。

(1) 4 次方程式 $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$ を解け。

(2) 複素数平面上の △ABC の頂点を表す複素数をそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする．

$$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$$

が成り立つとき，△ABC はどのような三角形になるか答えよ。

1.15　九州工業大学

□□ 1.25 ［九工大 2023］ $\boxed{1}$

$a \neq 0$ を実数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=-x+2a\sqrt{x-3}$ とする．曲線 $C: y=f(x)$ の点 $(7,\ f(7))$ における接線 l が，点 $\mathrm{A}(4,\ 0)$ と直線 $y=x-2$ 上にある点 P とを結ぶ線分 AP の垂直二等分線となるとき，次に答えよ．

(1) 接線 l の方程式を a を用いて表せ．

(2) a をすべて求めよ．

(3) 原点を通り接線 l に平行な直線を m とする．曲線 C と直線 m で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

1.16 福岡教育大学

□□ 1.26 ［福教大 2023］ $\boxed{1}$

次の問いに答えよ．

(1) α を実数とし，$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が $|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 2$，$|\vec{c}| = \sqrt{3}$ をみたし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$，$\vec{c}$ と $\vec{a}$ のなす角がそれぞれ α，$\dfrac{\pi}{2} - \alpha$，$\dfrac{5}{6}\pi$ であるとする．このとき，$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの α の値をそれぞれ求めよ．

(2) 次の連立方程式を解け．ただし，x，y は正の実数であり，$x \neq 1$，$y \neq 1$ とする．

$$\begin{cases} 2\log_2 \dfrac{x}{4} + \log_3 3y = 2 \\ \log_x 8 + \log_y 9 = 3 \end{cases}$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx$ の値を求めよ．

□□ 1.27 ［福教大 2023］ $\boxed{2}$

A の袋には白玉が w 個，青玉が b 個入っていて，B の袋にも白玉が w 個，青玉が b 個入っている．次の問いに答えよ．ただし，w，b はそれぞれ自然数とする．

(1) A の袋から玉を 2 個同時に取り出したとき，白玉，青玉が 1 個ずつ取り出される確率を求めよ．

(2) A の袋から玉を 2 個同時に取り出し，それらを B の袋に入れる．よくかき混ぜて B の袋から玉を 1 個取り出したとき，この玉が白玉である確率を求めよ．

1.17　佐賀大学

□□ **1.28**　［佐賀大 2023］ $\boxed{\mathbf{1}}$　［佐大医 2022］ $\boxed{\mathbf{1}}$

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とおく．これらは

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = \sqrt{3}$$

および

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{1}{2}$$

を満たすとする．頂点 O から △ABC を含む平面に垂線を引き，交点を H とする．次の問に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 実数 s，t により $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表されるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ．

(3) (2) の s，t の値をそれぞれ求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積を求めよ．

□□ **1.29**　［佐賀大 2023］ $\boxed{\mathbf{3}}$

a，b，c，d は実数とし，$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ を $f(x)$ とおく．4 次方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの実数解 $\sqrt{6}$，$-\sqrt{6}$ および 2 つの虚数解 α，β を持つとする．次の問に答えよ．

(1) 整式 $f(x)$ は $x^2 - 6$ で割り切れることを示せ．

(2) $\alpha + \beta$，$\alpha\beta$，c，d を a，b を用いて表せ．

(3) 複素数平面上において $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{6})$ が同一直線上にあるとき，a の値を求めよ．

(4) (3) において，さらに点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{D}(\sqrt{6})$ が正三角形の 3 つの頂点となるとき，b の値を求めよ．

□□ **1.30**　［佐大医 2023］ $\boxed{\mathbf{5}}$

a，b，c，d は実数とし，$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ を $f(x)$ とおく．4 次方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの実数解 $\sqrt{6}$，$-\sqrt{6}$ および 2 つの虚数解 α，β を持つとする．次の問に答えよ．

(1) $\alpha + \beta$，$\alpha\beta$，c，d を a，b を用いて表せ．

(2) 複素数平面上において $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{6})$ が同一直線上にあるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) において，さらに点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{D}(\sqrt{6})$ が正三角形の 3 つの頂点となるとき，b の値を求めよ．

1.18　長崎大学

□□ **1.31**　［長崎大 2023］ $\boxed{\mathbf{3}}$　［長大医 2023］ $\boxed{\mathbf{3}}$

以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 次のように，項数 m の 2 つの等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある．

$$\begin{array}{ll} \{a_n\} & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ m-2,\ m-1,\ m \\ \{b_n\} & m,\ m-1,\ m-2,\ \cdots,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \end{array}$$

数列 $\{c_n\}$ の一般項を $c_n = a_nb_n$ とするとき，c_n の最大値，および $\sum_{k=1}^{m} c_k$ をそれぞれ m の式で表せ．

(2) $\triangle$OAB の 3 辺の長さは，それぞれ OA $= 2$，AB $= 3$，BO $= 3$ である．頂点 O から辺 AB に垂線を下ろし，直線 AB との交点を H とする．また，$\triangle$OAB の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表し，線分 GH の長さを求めよ．

(3) $x > 0$ のとき，不等式

$$\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，対数は自然対数とする．

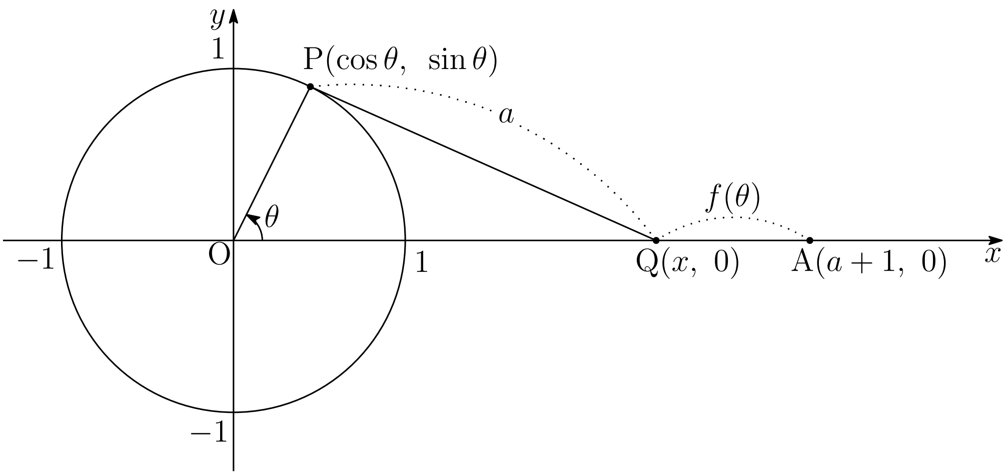
(4) a, b を定数とする．すべての実数 x で連続な関数 $f(x)$ について，等式

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

が成り立つことを証明せよ．また，定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx$ を求めよ．

□□ **1.32** ［長崎大 2023］ $\boxed{4}$

下図のように，xy 座標平面上に，原点Oを中心とする単位円周上の動点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と x 軸上の動点 $\mathrm{Q}(x,\ 0)$ $(x > 0)$ がある．2 点 P，Q 間の距離は a $(a > 1)$ で一定とし，定点 $\mathrm{A}(a+1,\ 0)$ と動点 $\mathrm{Q}(x,\ 0)$ の 2 点間の距離 $f(\theta)$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，(1) は答えのみでよい．



(1) $f(0)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(\pi)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 点 Q の x 座標を a，θ を用いて表せ．

(3) $f(\theta)$ を a，θ を用いて表し，$f(\theta)$ の導関数 $f'(\theta)$ を求め，$f(\theta)$ の増減を調べよ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{f(\theta)}{\theta^2}$ を求めよ．

1.19　熊本大学

□□ 1.33　［熊大理系 2023］ $\boxed{1}$

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{8}, \qquad (4n^2-1)(a_n - a_{n+1}) = 8(n^2-1)a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3 を求めよ。

(2) $a_n \neq 0$ を示せ。

(3) $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$ を n の式で表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

□□ 1.34　［熊大理系 2023］ $\boxed{3}$

α, β を複素数とし，複素数平面上の 3 点 O(0)，A(α)，B(β) が三角形をなすとする．点 A を点 O を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を P，点 O を点 B を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を Q，点 B を点 A を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を R とする。△POA，△QBO，△RAB の重心をそれぞれ G，H，I とする。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 P，Q，R を表す複素数のそれぞれを α, β を用いて表せ。

(2) 3 点 G，H，I を表す複素数のそれぞれを α, β を用いて表せ。

(3) 3 点 G，H，I が三角形をなすとき，△GHI が正三角形かどうか判定せよ。

□□ 1.35　［熊大医 2023］ $\boxed{4}$

平面上の 2 つの円が直交するとは，2 つの円が 2 点で交わり，各交点において 2 つの円の接線が互いに直交することである。以下の問いに答えよ。

(1) C_1，C_2 は半径がそれぞれ r_1，r_2 の円とする。C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を d とする。C_1 と C_2 が直交するための必要十分条件を d，r_1，r_2 の関係式で表せ。

(2) p，r_1，r_2 は $p > r_1 + r_2$，$r_1 > 0$，$r_2 > 0$ を満たす実数とする。座標平面上において，原点 O を中心とする半径 r_1 の円を C_1，点 $(p,\ 0)$ を中心とする半径 r_2 の円を C_2 とする。C_1 と C_2 のいずれにも直交する円の中心の軌跡を求めよ。

(3) 互いに外部にある 3 つの円の中心が一直線上にないとき，それら 3 つの円のいずれにも直交する円がただ 1 つ存在することを示せ。

1.20　大分大学

□□ **1.36**　［大分大 2023］ $\boxed{1}$

直角三角形 ABC において $\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=12$，$\mathrm{CA}=13$ とする．$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする．

(1) 線分 AD の長さを求めなさい．

(2) $\angle\mathrm{A}$ の二等分線と $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の交点のうち，点 A と異なる点を E とする．線分 DE の長さを求めなさい．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とし，線分 BO と線分 AD の交点を P とする．$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}$ を求めなさい．

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の中心を I とする．$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}$ を求めなさい．

□□ **1.37**　［分大医 2023］ $\boxed{6}$

n を自然数とする．5 個の赤玉と n 個の白玉が入った袋がある．袋から玉を取り出し，取り出した玉は袋に戻さない．袋から 1 個ずつ玉を取り出していくとき，6 回目が赤玉で袋の中の赤玉がなくなる確率を $p(n)$ とする．以下の問に答えなさい．

(1) $p(n)$ を二項係数を用いて表しなさい．

(2) $p(n)=A\left(\dfrac{1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_4}-\dfrac{1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_4}\right)$ となる定数 A を求めなさい．

(3) $S_n=p(1)+p(2)+\cdots+p(n)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めなさい．

1.21 宮崎大学

□□ **1.38** ［宮崎大 2023］ $\boxed{1}$

次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 関数 $f(x) = \cos\sqrt{x+1}$ の導関数は，$f'(x) = \boxed{\quad あ \quad}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{\log x}$ の導関数は，$f'(x) = \boxed{\quad い \quad}$ である．

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\quad う \quad} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(4) 関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\log\boxed{\quad え \quad} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{0} \log(x+3)\,dx$ の値は，$\boxed{\quad お \quad}$ である．

□□ **1.39** ［宮崎大 2023］ $\boxed{5}$ ［宮大医 2023］ $\boxed{5}$

座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ がある．また，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $x > 1$，$y > 0$ を満たしながら座標平面上を動くとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

(2) $\tan\angle\mathrm{APB}$ を，x と y を用いて表せ．

(3) 点 P が $x > 1$，$y > 0$，$\angle\mathrm{APB} \leqq \dfrac{\pi}{12}$ を満たしながらくまなく動くとき，点 P の動きうる領域を座標平面上に図示せよ．

□□ **1.40** ［宮崎大 2023］ $\boxed{10}$

関数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos(ax)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $a = 1$ のとき，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $y = f(x)$ のグラフをかけ．また，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) $a = \pi$ のとき，$f(x)$ は周期関数でないことを示せ．ただし，π は無理数であることを用いてよい．

1.22　鹿児島大学

□□ 1.41　［鹿児島大 2023］ $\boxed{\mathbf{1}}$

次の各問いに答えよ．

(1) 3 辺の長さがそれぞれ $2,\ 4,\ 2\sqrt{5}$ である三角形に内接する円の面積を求めよ．

(2) $\theta=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ とする．有理数を係数とする 4 次の整式 $f(x)$ のうち，$f(\theta)=0$ を満たし 4 次の項の係数が 1 となるものを 1 つ答えよ．

(3) 1 個のサイコロを 3 回投げるとき，出る目の和が 7 以上である確率を求めよ．

□□ 1.42　［鹿児島大 2023］ $\boxed{\mathbf{2}}$

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 5k)$ および放物線

$$C : y=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}$$

を考える．ただし，k は正の定数とする．

(1) 点 P が A，B からの距離の比が $3:2$ の点をすべて動くとき，P の軌跡を求めよ．

(2) (1) の軌跡と放物線 C の共有点の個数がちょうど 2 になるような k の値の範囲を求めよ．

1.23　琉球大学

□□ 1.43　［琉球大 2023］ $\boxed{\textbf{1}}$

$a > 0$ とする．座標平面で関数 $y = \dfrac{1}{x^a}$ のグラフ上の点 $(1,\ 1)$ における接線が x 軸と交わる点を A，y 軸と交わる点を B とし，原点を O とする．三角形 OAB の面積を $S(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $S(a)$ を求めよ．

(2) $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

□□ 1.44　［琉球大 2023］ $\boxed{\textbf{3}}$

空間内に 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ をとる．時刻 $t = 0$ から $t = 1$ まで 3 点 P，Q，R は次のように動くものとする．

- $t = 0$ に 3 点は点 O を出発する．
- 動点 P は線分 OA 上を速さ 1 で点 A に向かって動く．
- 動点 Q は線分 OB 上を速さ $\dfrac{1}{2}$ で点 B に向かって動く．
- 動点 R は線分 OC 上を速さ 2 で動く．$t = \dfrac{1}{2}$ までは点 C へ向かって動き，$t = \dfrac{1}{2}$ 以後は点 C から点 O に向かって動く．

時刻 t における三角形 PQR の面積を $S(t)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $S(t)$ を求めよ．

(2) $S(t)$ を最大にする t の値を求めよ．

2　類比問題

2.1　複素数平面 (数学 III)

□□ 2.1 ［筑波大 2023］ $\boxed{6}$

i を虚数単位とする．複素数平面に関する以下の問いに答えよ．

(1) 等式 $|z+2| = 2|z-1|$ を満たす点 z の全体が表す図形は円であることを示し，その円の中心と半径を求めよ．

(2) 等式

$$\{|z+2| - 2|z-1|\}|z+6i| = 3\{|z+2| - 2|z-1|\}|z-2i|$$

を満たす点 z の全体が表す図形を S とする．このとき S を複素数平面上に図示せよ．

(3) 点 z が (2) における図形 S 上を動くとき，$w = \dfrac{1}{z}$ で定義される点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

□□ 2.2 ［宮崎大 2023］ $\boxed{11}$

複素数平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周を C とする．C 上に異なる 2 点 $\mathrm{P_1}(z_1)$，$\mathrm{P_2}(z_2)$ をとり，C 上にない 1 点 $\mathrm{P_3}(z_3)$ をとる．さらに，

$$w_1 = \frac{1}{z_1}, \quad w_2 = \frac{1}{z_2}, \quad w_3 = \frac{1}{z_3}$$

とおき，複素数 w_1, w_2, w_3 と対応する点をそれぞれ $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{Q_3}$ とする．また，i を虚数単位とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，$z_2 = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$，$z_3 = \dfrac{z_1+z_2}{2}$ のとき，w_1，w_2，w_3 をそれぞれ $a+bi$ (a, b は実数) の形で求めよ．

(2) $\angle\mathrm{P_1OP_2}$ が直角であるとき，$\mathrm{P_3}$ が線分 $\mathrm{P_1P_2}$ 上にあれば，$\angle\mathrm{Q_1Q_3Q_2}$ も直角であることを示せ．

□□ **2.3** ［鹿児島大 2023］ $\boxed{7}$

次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) z_1，z_2 を異なる 2 つの複素数とするとき，$\dfrac{1+iz_1}{z_1+i} \neq \dfrac{1+iz_2}{z_2+i}$ となることを示せ．ただし，$z_1 \neq -i$，$z_2 \neq -i$ とする．

(2) w を i 以外の複素数とするとき，$\dfrac{1+iz}{z+i} = w$ かつ $z \neq -i$ を満たす複素数 z が存在することを示せ．

(3) $-i$ 以外の複素数 z について，z の虚部が b となることと，$w = \dfrac{1+iz}{z+i}$ が $\left|w - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ を満たすことが同値になるように実数 b を定めよ．

2.2 積分法の応用 (数学 III)

□□ **2.4** ［神戸大理系 2023］ $\boxed{5}$

媒介変数表示

$$x = \sin t, \quad y = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\sin t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 0$ または $\dfrac{dy}{dt} = 0$ となる t の値を求めよ．

(2) C の概形を xy 平面上に描け．

(3) C の $y \leqq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

□□ **2.5** ［九大理系 2023］ $\boxed{5}$

xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = t + 2\sin^2 t, \quad y = t + \sin t \quad (0 < t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。

(2) 曲線 C のうち $y \leqq x$ の領域にある部分と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

□□ 2.6 ［長崎大 2023］ $\boxed{5}$ ［長大医 2023］ $\boxed{5}$

はじめに，図1のように xy 座標平面上に4点 P$(0,\ 0)$，Q$(2,\ 0)$，R$(2,\ 2)$，S$(0,\ 2)$ を頂点とする一辺の長さが2の正方形PQRSがある．この正方形を，図2のように反時計周りに移動させる．ただし，Pが x 軸上を点 $(0,\ 0)$ から点 $(2,\ 0)$ に毎秒1の速さで正の方向に動くと同時に，Sは y 軸上を点 $(0,\ 2)$ から点 $(0,\ 0)$ に動くものとする．この移動で，2秒後には図3のような状態になる．この移動を繰り返すことによって，正方形は8秒後には図1の状態に戻る．以下の問いに答えよ．ただし，(1) は答えのみでよい．

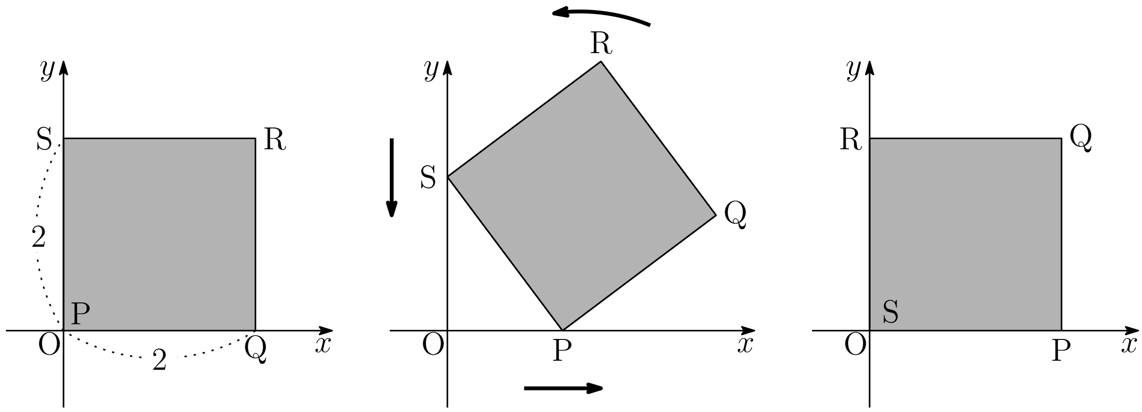


図1　　　図2　　　図3

(1) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における4点P，Q，R，Sの座標を，それぞれ t を用いて表せ．

(2) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における点 Q$(x,\ y)$ の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ．また，$t = \sqrt{2}$ のときのQの速さを求めよ．

(3) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における点Qの x 座標を $f(t)$ とする．$f(t)$ の最大値を求めよ．また，そのときのQとRの座標を求めよ．

(4) 正方形の対角線の交点を D$(x,\ y)$ とする．正方形が移動をはじめてから8秒間における点Dは，どのような図形上にあるか説明せよ．

(5) 正方形が移動をはじめてから8秒間における点Pの軌跡を C とする．C で囲まれる図形の面積 T を求めよ．

□□ 2.7 ［熊大医 2023］ $\boxed{3}$

xy 平面上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとり，θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする．点 A は y 軸上の点で，y 座標が負であり，$\mathrm{AP} = 2$ を満たす。点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 4\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を満たす点とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標を θ を用いて表せ。

(2) 点 Q の x 座標の最大値と最小値および y 座標の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

(3) 点 Q の軌跡と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

□□ 2.8 ［大分大 2023］ $\boxed{4}$

曲線 C を媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表す.

(1) 曲線 C 上の点で，y 座標の値が最大となる点の座標 $(x,\ y)$ を求めなさい．また，曲線 C 上の点で，y 座標の値が最小となる座標 $(x,\ y)$ をすべて求めなさい．

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めなさい．

2.3 整数の性質

□□ 2.9 ［山口大 2023］ $\boxed{8}$

次の問いに答えなさい．

(1) 3451 と 2737 の最大公約数を d とするとき，ユークリッドの互除法を用いて d の値を求めなさい．

(2) (1) で求めた d に対して，x，y についての一次不定方程式

$$3451x - 2737y = 6d$$

の整数解をすべて求めなさい．

(3) すべての 2023 の倍数は，x，y を用いて $3451x - 2737y$ と表されることを示しなさい．

□□ 2.10 ［宮崎大 2023］ $\boxed{8}$

次の各問に答えよ．

(1) $a = 2023$，$b = 1742$ とする．このとき，

$$\frac{1}{ab} = \frac{m}{a} + \frac{n}{b}$$

となる整数の組 $(m,\ n)$ で，$1 \leqq n \leqq 2000$ を満たすものをすべて求めよ．

(2) p を 3 以上の素数とする．このとき

$$(p-1)! \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right)$$

は p の倍数であることを示せ．

2.4 平面上のベクトル (数学 B)

□□ 2.11 ［九大理系 2023］ $\boxed{3}$

点 O を原点とする座標平面上の $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\overrightarrow{m} = (a,\ c), \quad \overrightarrow{n} = (b,\ d)$$

に対して，$D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル $\overrightarrow{q}$ に対して，次の条件を考える。

条件 I　$r\overrightarrow{m} + s\overrightarrow{n} = \overrightarrow{q}$ を満たす実数 r，s が存在する。
条件 II　$r\overrightarrow{m} + s\overrightarrow{n} = \overrightarrow{q}$ を満たす整数 r，s が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 I がすべての $\overrightarrow{q}$ に対して成り立つとする。$D \neq 0$ であることを示せ。

以下，$D \neq 0$ とする。

(2) 座標平面上のベクトル $\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ で

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w} = 1, \quad \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) さらに a，b，c，d が整数であるとし，x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル $\overrightarrow{q}$ に対して条件 II が成り立つとする。D のとりうる値をすべて求めよ。

□□ 2.12 ［熊大医 2023］ $\boxed{2}$

原点を O とする座標平面上に 3 点 A，B，C がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{w}$ とおく。$\vec{e}_1 = (1,\ 0)$，$\vec{e}_2 = (0,\ 1)$ とするとき，3 つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ は

$$\begin{cases} \vec{u} = -\vec{e}_1, & & \\ \vec{v}\cdot\vec{e}_1 = 4, & |\vec{v}| = 2\sqrt{5}, & \vec{v}\cdot\vec{e}_2 < 0, \\ \vec{w}\cdot\vec{e}_1 = 8, & |\vec{w}| = 8\sqrt{2}, & \vec{w}\cdot\vec{e}_2 > 0 \end{cases}$$

を満たすとする。ただし，$|\vec{x}|$ はベクトル $\vec{x}$ の大きさを表し，$\vec{x}\cdot\vec{y}$ は 2 つのベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。

(3) 3 点 A，B，C を通る円の中心を P とするとき，△ABC の面積と △ABP の面積の比を求めよ。

2.5 空間のベクトル (数学 B)

□□ **2.13** ［北大理系 2023］ $\boxed{2}$

O を原点とする座標空間において，3 点 A$(4,\ 2,\ 1)$，B$(1, -4,\ 1)$，C$(2,\ 2, -1)$ を通る平面を α とおく．また，球面 S は半径が 9 で，S と α の交わりは A を中心とし B を通る円であるとする．ただし，S の中心 P の z 座標は正とする．

(1) 線分 AP の長さを求めよ．

(2) P の座標を求めよ．

(3) S と直線 OC は 2 点で交わる．その 2 点間の距離を求めよ．

□□ **2.14** ［東北大理系 2023］ $\boxed{5}$

四面体 OABC において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，次が成り立つとする．

$$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ, \quad |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |\vec{c}| = \sqrt{6}, \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = 3$$

ただし，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ は，2 つのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を表す．さらに，線分 OC と線分 AB は垂直であるとする．点 C から 3 点 O，A，B を含む平面に下ろした垂線を CH とし，点 O から 3 点 A，B，C を含む平面に下ろした垂線を OK とする．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) ベクトル $\vec{c}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ は平行であることを示せ．

□□ **2.15** ［東工大 2023］ $\boxed{5}$

xyz 空間の 4 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 1)$，C$(-1,\ 1, -1)$，D$(-1,\ 0,\ 0)$ を考える．

(1) 2 直線 AB，BC から等距離にある点全体のなす図形を求めよ．

(2) 4 直線 AB，BC，CD，DA に共に接する球面の中心と半径の組をすべて求めよ．

□□ **2.16** ［神戸大理系 2023］ $\boxed{\mathbf{4}}$

四面体 OABC があり，辺 OA，OB，OC の長さはそれぞれ $\sqrt{13}$，5，5 である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -11$ とする．頂点 O から △ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする．以下の問に答えよ．

(1) 線分 AB の長さを求めよ．

(2) 実数 s，t を $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたすように定めるとき，s と t の値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

□□ **2.17** ［宮崎大 2023］ $\boxed{\mathbf{3}}$ ［宮大医 2023］ $\boxed{\mathbf{3}}$

空間に四面体 OABC があり，$\mathrm{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{OB} = 2$，$\mathrm{OC} = \sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = 45^\circ$ とする．点 B から直線 OA におろした垂線の足を D とし，点 C から平面 OAB におろした垂線の足を E とする．また，点 F を，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{DB}}$ となるように定める．このとき，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{OF}}$ として，次の各問に答えよ．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|$ の値も求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{f}$ を用いて表せ．

(4) 四面体 OACF の体積を求めよ．

3　頻出問題

3.1　微分法と積分法 (数学 II)

□□ 3.1 ［一橋大 2023］ $\boxed{2}$

a を正の実数とする．2 つの曲線 $C_1 : y = x^3 + 2ax^2$ および $C_2 : y = 3ax^2 - \dfrac{3}{a}$ の両方に接する直線が存在するような a の範囲を求めよ．

□□ 3.2 ［山口大 2023］ $\boxed{1}$

関数 $f(x) = |x^2 - x - 2| - x - 1$ を考える．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$ における接線を l とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めなさい．

(2) 関数 $y = f(x)$ の極値を調べ，そのグラフをかきなさい．

(3) 接線 l の方程式を求めなさい．

(4) 曲線 $y = f(x)$ と接線 l で囲まれた部分の面積を求めなさい．

□□ 3.3 ［大分大 2023］ $\boxed{3}$

$0 \leqq k \leqq 2$ とし，

$$S(k) = \int_k^{k+1} |x^2 - 2x|\, dx$$

とする．

(1) 関数 $y = |x^2 - 2x|$ のグラフを描きなさい．

(2) $0 \leqq k \leqq 1$ のとき，$S(k)$ を k を用いて表しなさい．

(3) $0 \leqq k \leqq 1$ のとき，$S(k)$ の最大値とそのときの k の値を求めなさい．

(4) $1 \leqq k \leqq 2$ のとき，$S(k)$ を k を用いて表しなさい．

(5) $1 \leqq k \leqq 2$ のとき，$S(k)$ が最小となる k の値を求めなさい．

□□ **3.4** ［宮崎大 2023］ $\boxed{9}$

座標平面上に放物線 $C_1 : y = x^2 - 6x + 2$，$C_2 : y = -x^2 + 10x - 22$ がある．このとき，次の各問に答えよ．

(1) C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ．

(2) P を C_1 上の点とし，P の x 座標を t とするとき，P における C_1 の接線 ℓ の方程式を，t を用いて表せ．

(3) (2) の ℓ が C_1 と C_2 の交点を通る直線に平行なとき，ℓ と C_2 の交点の x 座標を求めよ．

(4) (3) のとき，C_1 と ℓ および 2 直線 $x = 2$，$x = 6$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．

3.2 複素数平面 (数学 III)

□□ **3.5** ［北大理系 2023］ $\boxed{1}$

複素数平面上における図形 C_1，C_2，$\cdots$，C_n，$\cdots$ は次の条件 (A) と (B) をみたすとする．ただし，i は虚数単位とする．

(A) C_1 は原点 O を中心とする半径 2 の円である．

(B) 自然数 n に対して，z が C_n 上を動くとき $2w = z + 1 + i$ で定まる w の描く図形が C_{n+1} である．

(1) すべての自然数 n に対して，C_n は円であることを示し，その中心を表す複素数 α_n と半径 r_n を求めよ．

(2) C_n 上の点と O との距離の最小値を d_n とする．このとき，d_n を求めよ．また，$\lim_{n \to \infty} d_n$ を求めよ．

□□ **3.6** ［東北大理系 2023］ $\boxed{4}$

実数 $a = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ に対して，整式 $f(x) = x^2 - ax + 1$ を考える．

(1) 整式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ は $f(x)$ で割り切れることを示せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の虚数解であって虚部が正のものを α とする．α を極形式で表せ．ただし，$r^5 = 1$ を満たす実数 r が $r = 1$ のみであることは，認めて使用してよい．

(3) 設問 (2) の虚数 α に対して，$\alpha^{2023} + \alpha^{-2023}$ の値を求めよ．

□□ **3.7** ［福教大 2023］ $\boxed{3}$

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1+\sqrt{3}i$ および $1+i$ を極形式で表せ．ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$ を α を用いて表せ．

(3) $\beta = \sqrt{2}\alpha^3$，$\gamma = 2\sqrt{2}\,i$ とおく．複素数平面において，点 β を，点 γ を中心として $-\dfrac{\pi}{12}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ．

(4) $z = \dfrac{\alpha^4}{2}$ とおく．n を 2 より大きい自然とし，

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$$

とする．S_n が純虚数であり S_n の虚部が正となる最小の n とそのときの S_n の値を求めよ．

3.3 極限 (数学 III)

□□ **3.8** ［東北大理系 2023］ $\boxed{2}$

関数 $f(x) = \sin 3x + \sin x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち，最小のものを求めよ．

(2) 正の整数 m に対して，$f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち，m 以下のものの個数を $p(m)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{p(m)}{m}$ を求めよ．

□□ **3.9** ［千葉大 2023］ $\boxed{4}$

2 つの実数 $a,\ b$ は $0 < b < a$ を満たすとする．関数

$$f(x) = \frac{1}{b}(e^{-(a-b)x} - e^{-ax})$$

の最大値を $M(a,\ b)$，最大値をとるときの x の値を $X(a,\ b)$ と表す．ここで，e は自然対数の底である．

(1) $X(a,\ b)$ を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0} X(a,\ b)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0} M(a,\ b)$ を求めよ．

3.4 微分法とその応用 (数学 III)

□□ 3.10 ［宮崎大 2023］ $\boxed{2}$

関数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ および座標平面上の原点 O を通る曲線 $C: y=f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) 直線 $y=ax$ が曲線 C に O で接するときの定数 a の値を求めよ．また，このとき，$x>0$ において，$ax>f(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，変曲点および漸近線を調べて，曲線 C の概形をかけ．

(4) (2) で求めた a の値に対し，曲線 C と直線 $y=ax$ および直線 $x=\sqrt{3}$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

3.5 積分法 (数学 III)

□□ 3.11 ［広大理系 2023］ $\boxed{5}$

関数 $f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい．

(2) s を定数とするとき，次の x についての方程式 $(*)$ の異なる実数解の個数を調べよ．

$$(*) \qquad f(x)=s$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx$ の値を求めよ．

(4) (2) の $(*)$ が実数解をもつ s に対して，(2) の $(*)$ の実数解のうち最大のものから最小のものを引いた差を $g(s)$ とする．ただし，(2) の $(*)$ の実数解が一つだけであるときには $g(s)=0$ とする．関数 $f(x)$ の最大値を α とおくとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{\alpha} g(s)\,ds$ の値を求めよ．

□□ **3.12** ［佐賀大 2023］ $\boxed{4}$

次の問に答えよ．

(1) 等式 $(\tan\theta)' = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を示せ．また，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

(2) 等式

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$$

を示せ．また，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

□□ **3.13** ［佐大医 2023］ $\boxed{6}$

次の問に答えよ．

(1) 等式 $(\tan\theta)' = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を示せ．また，定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

(2) 等式

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$$

を示せ．また，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

□□ **3.14** ［熊大理系 2023］ $\boxed{4}$

t は正の実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = 2tx^2e^{-tx^2}$ の極値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{t}} 4tx(1-tx^2)e^{-tx^2}\log x\,dx$ の値を t を用いて表せ。

(3) (2) で求めた値を $g(t)$ とおく。$1 < t < 4$ のとき，不等式

$$g(t) > (t^{\frac{5}{2}} - t^2 + 1)e^{-t^2} - e^{-t}$$

が成り立つことを示せ。

3.6　積分法の応用 (数学 III)

□□ 3.15 ［筑波大 2023］ $\boxed{4}$

a，b を実数とし，$f(x) = x + a\sin x$，$g(x) = b\cos x$ とする．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ を求めよ．

(2) 不等式
$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) + g(x)\}^2\,dx \geqq \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2\,dx$$
が成り立つことを示せ．

(3) 曲線 $y = |f(x) + g(x)|$，2 直線 $x = -\pi$，$x = \pi$，および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．このとき不等式
$$V \geqq \frac{2}{3}\pi^2(\pi^2 - 6)$$
が成り立つことを示せ．さらに，等号が成立するときの a，b を求めよ．

□□ 3.16 ［福教大 2023］ $\boxed{4}$

$f(x) = |x - 1|e^x$ とする．次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $f(x)$ は $x = 1$ において微分可能でないことを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(3) $g(x) = 2xe^x$ とする．2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と y 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ．

□□ 3.17 ［琉球大 2023］ $\boxed{2}$

a を実数とし，$f(x) = xe^{-|x|}$，$g(x) = ax$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ は証明なしに用いてよい．

(2) $0 < a < 1$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積を和を求めよ．

3.7 場合の数と確率 (数学 A)

□□ 3.18 ［京大理系 2023］ $\boxed{3}$

n を自然数とする．1 個のさいころを n 回投げ，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とし，n 個の数の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を Y とする．

(1) Y が 5 で割り切れる確率を求めよ．

(2) Y が 15 で割り切れる確率を求めよ．

□□ 3.19 ［熊大理系 2023］ $\boxed{2}$

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて，出た目の数の積をとる。積が 12 となる確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) p_2，p_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n \geqq 4$ とする。出た目の数の積が n 回目にはじめて 12 となる確率を求めよ。

□□ 3.20 ［熊大医 2023］ $\boxed{1}$

n を 3 以上の自然数とする．1 個のさいころを n 回投げて，出た目の数の積をとる。積が 60 となる確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) p_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n \geqq 4$ とする．出た目の数の積が n 回目にはじめて 60 となる確率を求めよ。

□□ 3.21 ［宮崎大 2023］ $\boxed{4}$ ［宮大医 2023］ $\boxed{4}$

表に A，裏に B と書かれたコインがある．このコインを n 回投げる試行を行い，A が出た回数と同じ枚数のイヌの絵はがき，B が出た回数と同じ枚数のネコの絵はがきを貰えるとする．例えば，$n = 3$ のとき，ABA と出たら，イヌの絵はがきを 2 枚，ネコの絵はがきを 1 枚貰える．このとき，次の各問に答えよ．ただし，使用するコインは，表，裏がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るものとする．

(1) $n = 3$ のとき，イヌの絵はがきを 2 枚以上貰える確率を求めよ．

(2) $n = 3$ のとき，イヌとネコのどちらかの絵はがきも貰える確率を求めよ．

(3) $n \geqq 3$ のとき，A が連続して 3 回以上出たら，貰えるイヌやネコの絵はがきに追加してウシの絵はがきも貰えることにする．$n = 6$ のとき，イヌ，ネコ，ウシのいずれの絵はがきも貰える確率を求めよ．

3.8　整数の性質 (数学 A)

□□ 3.22　［宮崎大 2023］ $\boxed{12}$

次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $a^2 = b^2 + 15$ を満たす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(2) k を定数とする．連立方程式

$$(*)\begin{cases} x^2 - 4y + k = 0 \\ y^2 - 2x + k + 18 = 0 \end{cases}$$

が自然数解 $x = x_0$，$y = y_0$ をもつとき，自然数の組 $(x_0,\ y_0)$ および k の値を求めよ．

(3) (2) で求めた k に対し，連立方程式 $(*)$ の $(x_0,\ y_0)$ 以外の解をすべて求めよ．

3.9　平面のベクトル (数学 B)

□□ 3.23　［千葉大 2023］ $\boxed{5}$

点 O を原点とする座標平面において，点 A と点 B が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 5$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3$ を満たすとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるような実数 k は存在しないことを示せ．

(2) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3) 実数 t に対し，直線 OA 上の点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるようにとる．同様に直線 OB 上の点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるようにとる．点 P を通り直線 OA と直交する直線を ℓ_1 とし，点 Q を通り直線 OB と直交する直線を ℓ_2 とする．ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t$ を用いて表せ．

(4) 3 点 O，A，B を通る円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

□□ **3.24** ［山口大 2023］ $\boxed{3}$

ベクトル $\vec{a}$ を $\vec{a}=(\sqrt{2}-\sqrt{6},\ \sqrt{2}+\sqrt{6})$ とし，ベクトル $\vec{b}$ を次の 2 つの条件を満たすようにとる．

- $|\vec{b}|=\sqrt{2}$
- 関数 $f(t)=|\vec{a}+t\vec{b}|$ が $t=-\sqrt{2}$ で最小値をとる

このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 次の 2 つの等式が成り立つことを示しなさい．

$$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\quad \cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めなさい．

(3) ベクトル $\vec{b}$ を求めなさい．

3.10 空間のベクトル (数学 B)

□□ **3.25** ［筑波大 2023］ $\boxed{3}$

座標空間内の原点 O を中心とする半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 ABCD が，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$$

を満たしているとする．また三角形 ABC の重心を G とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を r を用いて表せ．

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の最大値を r を用いて表せ．さらに，最大値をとるときの点 P に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$ を r を用いて表せ．

□□ **3.26** ［一橋大 2023］ $\boxed{3}$

原点を O とする座標空間内に 3 点 A$(-3,\ 2,\ 0)$，B$(1,\ 5,\ 0)$，C$(4,\ 5,\ 1)$ がある．P は $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|\leqq 36$ を満たす点である．4 点 O，A，B，P が同一平面上にないとき，四面体 OABP の体積の最大値を求めよ．

□□ **3.27** ［京大理系 2023］ $\boxed{\mathbf{2}}$

空間内の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．点 D，P，Q を次のように定める．点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たし，点 P は線分 OA を 1 : 2 に内分し，点 Q は線分 OB の中点である．さらに，直線 OD 上の点 R を，直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める．このとき，線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 OR : RD を求めよ．

□□ **3.28** ［阪大理系 2023］ $\boxed{\mathbf{4}}$

a，b を $a^2+b^2 > 1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする．座標空間の点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ b)$ と点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ をとる．点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし，平面 α と直線 AP との交点を Q とする．

(1) $(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$ が成り立つことを示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 1$ をみたすように点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ が xy 平面上を動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

□□ **3.29** ［九工大 2023］ $\boxed{\mathbf{3}}$

四面体 OABC は $\mathrm{OA} = \mathrm{OC} = 1$，$\mathrm{OB} = \sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \dfrac{\pi}{4}$ をみたしている．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\angle\mathrm{COA} = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ として，次に答えよ．

(1) 線分 AB の長さおよび内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ および三角形 ABC の面積 S を θ を用いて表せ．

(3) 3 点 A，B，C の定める平面を α とし，α 上の点 H を直線 OH と α が垂直になるように選ぶ．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ および θ を用いて表せ．

(4) (3) の点 H に対して，線分 OH の長さを θ を用いて表せ．

(5) 四面体 OABC の体積を V とする．V を θ を用いて表せ．また，θ が変化するとき，V の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

□□ 3.30 ［分大医 2023］ $\boxed{5}$

xyz-空間内の 2 点 P$(-1,\ 1,-4)$ と Q$(1,\ 2,-2)$ を通る直線 l と，原点 O を中心とする半径 r の球面 S_r が与えられている．以下の問に答えなさい．

(1) 球面 S_r と直線 l が 2 点で交わるための r の条件を求めなさい．

(2) 球面 S_r と直線 l が 2 点 A，B で交わるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を r を用いて表しなさい．

(3) (2) のとき，三角形 OAB の面積を r を用いて表しなさい．

□□ 3.31 ［鹿児島大 2023］ $\boxed{4}$

空間に異なる 4 点 P，A，B，C があり，次の条件が満たされているとする．

- 三角形 PAB は 1 辺の長さが 1 の正三角形である．
- 線分 PA と線分 PC は正六角形の隣り合う 2 辺である．この正六角形を α とおく．
- 線分 PB と線分 PC は α とは異なる正六角形の隣り合う 2 辺である．この正六角形を β とおく．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，および $\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を求めよ．

さらに次の条件を満たすような異なる 3 点 H，Q，R を考える．

- H は線分 PA 上にある．
- Q は 3 点 P，A，B によって定まる平面を直線 PA で 2 分割した領域の B を含む側にあり，線分 HQ は長さ 1 で PA に垂直である．
- R は正六角形 α の内部にあり，線分 HR は長さ 1 で PA に垂直である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を用いてあらわせ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HR}}$ のなす角を θ とするとき $\cos\theta$ を求めよ

3.11　数列 (数学 B)

□□ **3.32**　［東北大理系 2023］ $\boxed{3}$

s を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = s, \quad (n+2)a_{n+1} = na_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) a_n を n と s を用いて表せ．

(2) ある正の整数 m に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = 0$ が成り立つとする．s を m を用いて表せ．

□□ **3.33**　［千葉大 2023］ $\boxed{6}$

1 個のさいころを投げて出た目によって数直線上の点 P を動かすことを繰り返すゲームを考える．最初の P の位置を $a_0 = 0$ とし，さいころを n 回投げたあとの P の位置 a_n を次のルールで定める．

- $a_{n-1} = 7$ のとき，$a_n = 7$
- $a_{n-1} \neq 7$ のとき，n 回目に出た目 m に応じて

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + m & (a_{n-1} + m = 1, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ のとき}) \\ 1 & (a_{n-1} + m = 2, 12 \text{ のとき}) \\ 14 - (a_{n-1} + m) & (a_{n-1} + m = 8, 9, 10, 11 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) $a_2 = 1$ となる確率を求めよ．

(2) $n \geqq 1$ について，$a_n = 7$ となる確率を求めよ．

(3) $n \geqq 3$ について，$a_n = 1$ となる確率を求めよ．

□□ **3.34** ［佐賀大 2023］ $\boxed{\mathbf{2}}$ ［佐大医 2022］ $\boxed{\mathbf{2}}$ **(2)(3)**

0 から 3 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある．この中から 1 枚のカードを取り出し，数字を確認してからもとへもどす．これを n 回くり返したとき，取り出されたカードの数字の総和を S_n で表す．S_n が 3 で割り切れる確率を p_n とし，S_n を 3 で割ると 1 余る確率を q_n とするとき，次の問に答えよ．

(1) p_2 および q_2 の値を求めよ．

(2) p_{n+1} および q_{n+1} を p_n，q_n を用いて表せ．

(3) p_n および q_n を n を用いて表せ．また，極限値 $\lim_{n\to\infty} p_n$ および $\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ．

□□ **3.35** ［長崎大 2023］ $\boxed{\mathbf{2}}$ ［長大医 2023］ $\boxed{\mathbf{2}}$

xy 座標平面上に，放物線 $C: y=(x-3)^2$ と直線 $l: y=2x+9$ があり，C と l で囲まれた領域の周および内部を図形 F とする．以下の問いに答えよ．

ただし，格子点とは，x 座標，y 座標がともに整数になる点をいう．

(1) C と l の 2 つの交点の x 座標を p，q $(p<q)$ とするとき，p と q の値をそれぞれ求めよ．また，図形 F に含まれる格子点のうち，x 座標が k $(p \leqq k \leqq q$，k は整数$)$ である格子点の個数 a_k を k の式で表せ．さらに，図形 F に含まれる格子点の総数 N を求めよ．

(2) 図形 F に含まれる格子点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とするとき，$x+y$ の最大値と最小値，およびそのときの Q の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 図形 F に含まれる 4 つの格子点を結んでできる 1 辺の長さが 1 の正方形のうち，頂点の x 座標が k および $k+1$ (k は整数) である正方形の個数を b_k とする．$b_k \geqq 1$ となる k の値の範囲を求め，b_k を k の式で表せ．

(4) 図形 F に含まれる 4 つの格子点を結んでできる 1 辺の長さが 1 の正方形の面積の総和 T を求めよ．また，図形 F の面積を S とするとき，$\dfrac{T}{S}$ の値を求めよ．

□□ **3.36** ［大分大 2023］ $\boxed{2}$

等比数列 $\{a_n\}$ は $a_2 = 3$，$a_5 = 24$ を満たし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．また，数列 $\{b_n\}$ は，

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{3}{2}b_n + S_n$$

を満たすとする．

(1) 一般項 a_n と S_n を n を用いてそれぞれ表しなさい．

(2) b_1 の値を求めなさい．

(3) b_{n+1} を b_n，n を用いて表しなさい．

(4) 一般項 b_n を n を用いて表しなさい．

□□ **3.37** ［鹿児島大 2023］ $\boxed{3}$

自然数 n に対して，a_n，b_n を

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{5}$$

を満たす有理数とする．ただし，4 つの有理数 a，b，c，d が

$$a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5}$$

を満たせば $a = c$ かつ $b = d$ が成り立つので，a_n，b_n は各自然数 n に対し 1 通りに定まることに注意する．

(1) n が 3 の倍数であるとき，a_n，b_n がともに整数となることを示せ．

(2) 自然数 n が 3 の倍数であるとき，a_n，b_n のどちらか一方が偶数で他方が奇数となることを示せ．

(3) a_n，b_n がともに整数となるのは n が 3 の倍数のときに限ることを示せ．

□□ **3.38** ［琉球大 2023］ $\boxed{4}$

1 個のさいころを 6 の目が 2 回出るまで投げ続ける．$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して p_k を $k+1$ 回目に 2 回目の 6 の目が出る確率とするとき，次の問いに答えよ．

(1) p_k を求めよ．

(2) p_k を最大にする k の値を求めよ．

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k$ を求めよ．

3.12 確率分布と統計 (数学 B)

□□ **3.39** ［鹿児島大 2023］ $\boxed{5}$

袋に赤玉 4 個と白玉 2 個が入っている．無作為に玉を 1 個取り出して，それが赤玉であれば白玉と，白玉であれば赤玉と取り換えて袋に戻すという操作を考える．この操作を 2 回繰り返したあと袋にある赤玉の数を X とし，一方，3 回繰り返したあと袋にある白玉の数を Y とする．

(1) 確率 $P(X = 4)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(3) 確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ．

4　応用問題

4.1　複素数と方程式 (数学 II)

□□ 4.1　［東大理系 2023］ $\boxed{5}$

整式 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ を考える．

(1) $g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく．$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ．

(2) a, b を実数とし，$h(x) = x^2 + ax + b$ とおく．$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく．$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a, b の組をすべて求めよ．

4.2　複素数平面 (数学 III)

□□ 4.2　［千葉大 2023］ $\boxed{8}$

実数 a，b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z = a + bi$ の形で表されるとき，a を z の実部，b を z の虚部とよび，それぞれ $a = \mathrm{Re}(z)$，$b = \mathrm{Im}(z)$ と表す．

(1) $z^3 = i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

(2) $z^{100} = i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z) \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}(z) \geqq 0$ を満たすものの個数を求めよ．

(3) n を正の整数とする．$z^n = i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z) \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすものの個数を N とする．$N > \dfrac{n}{3}$ となるための n に関する必要十分条件を求めよ．

□□ 4.3　［山口大 2023］ $\boxed{4}$

複素数 z が，$2z^4 + (1-\sqrt{5})z^2 + 2 = 0$ を満たしているとき，次の問いに答えなさい．

(1) $z^{10} = 1$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $z + z^3 + z^5 + z^7 + z^9$ の値を求めなさい．

(3) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{4}$ が成り立つことを示しなさい．

□□ 4.4 ［九工大 2023］ $\boxed{4}$

複素数 α について，実部を $\mathrm{Re}(\alpha)$，虚部を $\mathrm{Im}(\alpha)$ とおく．次に答えよ．

(1) 複素数 z について，方程式 $\dfrac{z-1}{z}=z$ を解け．

(2) 整数 a, b, c, d は $ad-bc=1$ をみたしている．等式

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}\quad(cz+d\neq 0)$$

が成り立つことを示せ．

以下では，複素数 z について，

$$\text{条件 P}: |z|=1,\ \ -\frac{1}{2}<\mathrm{Re}(z)\leqq\frac{1}{2}$$

を考える．

(3) ある整数 m, n について，$|mz+n|=1$ と条件 P をみたす複素数 z が存在する．このとき，m, n の組をすべて求めよ．

(4) $ad-bc=1$, $b<0$ をみたすある整数 a, b, c, d について，$\dfrac{az+b}{cz+d}=z$ と条件 P をみたす複素数 z が存在する．このとき，a, b, c, d の組をすべて求めよ．

□□ 4.5 ［長大医 2023］ $\boxed{6}$

複素数平面上に原点 O を中心とする単位円 C があり，2 点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$ は，円 C の周上にある．$z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$z_2=\cos\beta+i\sin\beta$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位である．

(1) z_1 と z_2 の積 z_1z_2 および z_1+z_2 を，それぞれ極形式で表せ．

(2) $w=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$ で表される点を $\mathrm{P}(w)$ とするとき，w を極形式で表せ．また，原点 O，点 $\mathrm{P}(w)$，点 $\mathrm{D}(z_1+z_2)$ の 3 点は，同一直線上にあることを示せ．

(3) 直線 AP は，円 C の接線であることを示せ．

(4) 直線 AB に関して点 P と対称な点を $\mathrm{Q}(v)$ とする．点 Q が円 C の周上にあるとき，β を α の式で表せ．

4.3 極限 (数学 III)

□□ 4.6 ［筑波大 2023］ $\boxed{5}$

$f(x) = x^{-2}e^{x}\ (x > 0)$ とし，曲線 $y = f(x)$ を C とする．また h を正の実数とする．さらに，正の実数 t に対して，曲線 C，2 直線 $x = t$，$x = t + h$，および x 軸で囲まれた図形の面積を $g(t)$ とする．

(1) $g'(t)$ を求めよ．

(2) $g(t)$ を最小にする t がただ 1 つ存在することを示し，その t を h を用いて表せ．

(3) (2) で得られた t を $t(h)$ とする．このとき極限値 $\lim_{h \to +0} t(h)$ を求めよ．

□□ 4.7 ［名大理系 2023］ $\boxed{2}$

$0 < b < a$ とする．xy 平面において，原点を中心とする半径 r の円 C と点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 b の円 D が 2 点で交わっている．

(1) 半径 r の満たすべき条件を求めよ．

(2) C と D の交点のうち y 座標が正のものを P とする．P の x 座標 $h(r)$ を求めよ．

(3) 点 $\mathrm{Q}(r,\ 0)$ と点 $\mathrm{R}(a-b,\ 0)$ をとる．D の内部にある C の弧 PQ，線分 QR，および線分 RP で囲まれる図形を A とする．xyz 空間において A を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 $V(r)$ を求めよ．ただし，答えに $h(r)$ を用いてもよい．

(4) $V(r)$ の最大値を与える r を求めよ．また，その r を $r(a)$ とおいたとき，$\lim_{a \to \infty}(r(a) - a)$ を求めよ．

□□ 4.8 ［阪大理系 2023］ $\boxed{1}$

n を 2 以上の自然数とする．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2}x^{n} \leqq (-1)^{n}\left\{\frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} \leqq x^{n} - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n \to \infty}(-1)^{n}n(a_n - \log 2)$$

□□ **4.9** ［九大理系 2023］ $\boxed{2}$

α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha \leqq 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(2) $\alpha > 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(3) $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(4) $\dfrac{3}{2} \leqq \alpha < 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

4.4 微分法とその応用 (数学 III)

□□ **4.10** ［北大理系 2023］ $\boxed{5}$

$a,\ b$ を $a^2 + b^2 < 1$ をみたす正の実数とする．また，座標平面上で原点を中心とする半径 1 の円を C とし，C の内部にある 2 点 A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$ を考える．$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対して C 上の点 P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を考え，P における C の接線に関して B と対称な点を D とおく．

(1) $f(\theta) = ab\cos 2\theta + a\sin\theta - b\cos\theta$ とおく．方程式 $f(\theta) = 0$ の解が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在することを示せ．

(2) D の座標を $b,\ \theta$ を用いて表せ．

(3) θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，3 点 A，P，D が同一直線上にあるような θ は少なくとも 1 つ存在することを示せ．また，このような θ はただ 1 つであることを示せ．

□□ **4.11** ［千葉大 2023］ $\boxed{9}$

関数 $f(x)$ と実数 t に対し，x の関数 $tx - f(x)$ の最大値があればそれを $g(t)$ と書く．

(1) $f(x) = x^4$ のとき，任意の実数 t について $g(t)$ が存在する．この $g(t)$ を求めよ．

以下，関数 $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ を持ち，次の 2 つの条件 (i)，(ii) が成り立つものとする．

(i) $f'(x)$ は増加関数，すなわち $a < b$ ならば $f'(a) < f'(b)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$

(2) 任意の実数 t に対して，x の関数 $tx - f(x)$ は最大値 $g(t)$ を持つことを示せ．

(3) s を実数とする．t が実数全体を動くとき，t の関数 $st - g(t)$ の最大値は $f(s)$ となることを示せ．

□□ **4.12** ［東大理系 2023］ $\boxed{3}$

a を実数とし，座標平面上の点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 1 の円の周を C とする．

(1) C が，不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ．

(2) a は (1) で求めた範囲にあるとする．C のうち $x \geqq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする．S 上の点 P に対し，点 P での C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_P とする．$L_Q = L_R$ となる S 上の相異なる 2 点 Q，R が存在するような a の範囲を求めよ．

□□ **4.13** ［京大理系 2023］ $\boxed{4}$

次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1 + \frac{1}{e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

ただし，e は自然対数の底であり，その値は $e = 2.71\cdots$ である．

4.5 積分法 (数学 III)

□□ 4.14 ［千葉大 2023］ $\boxed{7}$

関数

$$f(x)=\left|\cos x-\sqrt{5}\sin x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $S(t)=\displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ とおく．このとき $S(t)$ の最大値を求めよ．

□□ 4.15 ［山大理医 2023］ $\boxed{7}$

$\pi=3.1415\cdots$ を円周率，$e=2.7182\cdots$ を自然対数の底とし，
関数 $f(x)=e^{-x}+\sin x-1$ を考える．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを示しなさい．

$$e^x\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)<1$$

(2) $x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを示しなさい．

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6}$$

必要ならば，$\theta>0$ のとき，$|\sin\theta|<\theta$ が成り立つことを用いてよい．

(3) 関数 $f(x)$ は，区間 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ において極大値をとることを示しなさい．

(4) 方程式 $f(x)=0$ は，区間 $(0,\ \pi)$ においてただ 1 つの実数解をもつことを示しなさい．

□□ **4.16** ［宮大医 2023］ $\boxed{7}$

次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) $a > 1$ を満たす定数 a と，区間 $\dfrac{1}{a} \leqq x \leqq a$ において連続な関数 $f(x)$ に対して，等式

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) 定積分 $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{x(1+x^2)}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 関数 $g(x) = \dfrac{\log x}{1+x^2}$ は，区間 $0 < x \leqq \sqrt{e}$ においてつねに増加することを示せ．

(4) (3) の関数 $g(x)$ に対して，$y = g(x)$ $(x > 0)$ のグラフを C とする．曲線 C と x 軸および直線 $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で囲まれた部分の面積を S_1 とし，曲線 C と x 軸および直線 $x = \sqrt{e}$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする．このとき，S_1 と S_2 は等しいことを示せ．

4.6 積分法の応用 (数学 III)

□□ **4.17** ［東工大 2023］ $\boxed{4}$

xyz 空間において，x 軸を軸とする半径 2 の円柱から，$|y| < 1$ かつ $|z| < 1$ で表される角柱の内部を取り除いたものを A とする．また，A を x 軸のまわりに 45° 回転してから z 軸のまわりに 90° 回転したものを B とする．A と B の共通部分の体積を求めよ．

□□ **4.18** ［分大医 2023］ $\boxed{7}$

xyz-空間内の 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 1, -1)$ と $\mathrm{B}(-3,\ 1,\ 3)$ を結ぶ線分 AB を z 軸を中心に回転させてできる回転面を S とする．以下の問に答えなさい．

(1) S と yz-平面との交わりを y と z の方程式で表し，yz-平面に図示しなさい．

(2) 2 つの平面 $z = 3$ 及び $z = -1$ と S で囲まれる立体の体積を求めなさい．

□□ **4.19** ［鹿児島大 2023］ $\boxed{\mathbf{6}}$

$x > 0$ で定義された曲線

$$C : y = (\log x)^2$$

を考える．

(1) a を正の実数とするとき，点 $\mathrm{P}(a,\ (\log a)^2)$ における曲線 C の接線 L の方程式を求めよ．

(2) $a > 1$ のとき，接線 L と x 軸の交点の x 座標が最大となる場合の a の値 a_0 を求めよ．

(3) a の値が (2) の a_0 に等しいとき，直線 L の $y \geqq 0$ の部分と曲線 C と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる図形の体積を求めよ．

4.7 場合の数と確率 (数学 A)

□□ **4.20** ［東大理系 2023］ $\boxed{\mathbf{2}}$

黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる．ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする．

(1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ．

(2) どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ．

□□ **4.21** ［東工大 2023］ $\boxed{\mathbf{3}}$

実数が書かれた 3 枚のカード $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{\sqrt{3}}$ から，無作為に 2 枚のカードを順に選び，出た実数を順に実部と虚部にもつ複素数を得る操作を考える．正の整数 n に対して，この操作を n 解繰り返して得られる n 個の複素数の積を z_n で表す．

(1) $|z_n| < 5$ となる確率 P_n を求めよ．

(2) ${z_n}^2$ が実数となる確率 Q_n を求めよ．

□□ **4.22** ［広大理系 2023］ $\boxed{1}$

箱の中に1から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている．ただし，N は4以上の自然数である．「この箱からカードを1枚取り出し，書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える．この試行を4回繰り返し，カードに書かれた番号を順に X，Y，Z，W とする．次の問いに答えよ．

(1) $X = Y = Z = W$ となる確率を求めよ．

(2) X，Y，Z，W が四つの異なる番号からなる確率を求めよ．

(3) X，Y，Z，W のうち三つが同じ番号で残り一つが他と異なる番号である確率を求めよ．

(4) X，Y，Z，W が三つの異なる番号からなる確率を求めよ．

□□ **4.23** ［九工大 2023］ $\boxed{2}$

関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ を以下で定める．

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}, \quad f_3(x) = \cos(\pi x),$$
$$f_4(x) = xe^x, \quad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \qquad f_6(x) = \sin(\pi x)$$

次に答えよ．

(1) $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ について，$f_n'(0)$ および $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．以下では，(1) で得られた値が1つずつ書かれた12枚のカードから1枚を抜き出し，値を調べてからもとに戻すことを3回繰り返す．1回目，2回目，3回目に調べた値をそれぞれ a，b，c とする．

(2) $ab = 0$ となる確率を求めよ．

(3) $ab = c$ となる確率を求めよ．

4.8 整数の性質 (数学 A)

□□ **4.24** ［東工大 2023］ $\boxed{2}$

方程式
$$(x^3 - x)^2(y^3 - y) = 86400$$
を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

□□ **4.25** ［京大理系 2023］ $\boxed{6}$

p を 3 以上の素数とする．また，θ を実数とする．

(1) $\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ．

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta = \dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 m，n が存在するか否かを理由を付けて判定せよ．

4.9 空間のベクトル (数学 B)

□□ **4.26** ［東大理系 2023］ $\boxed{4}$

座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，B(1, 1, 1)，C(1, 2, 3) を考える．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ．

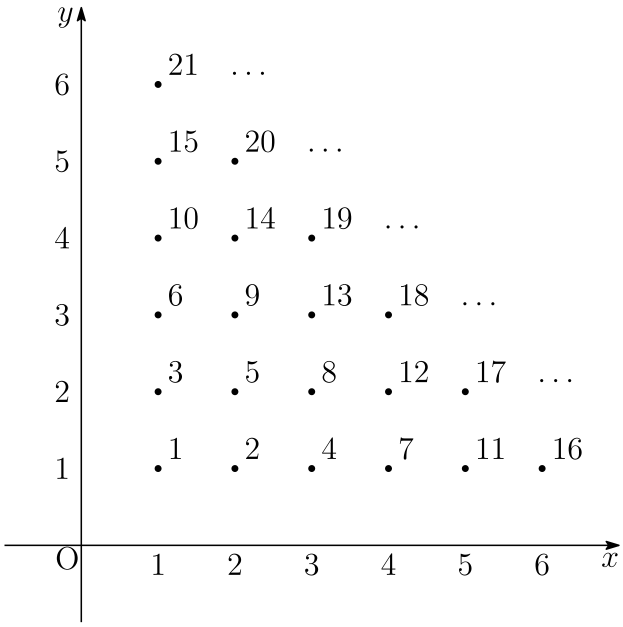
(2) 点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3) 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 r の球面 S を考える．S が三角形 OHB と共有点をもつような r の範囲を求めよ．ただし，三角形 OHB は 3 点 O，H，B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする．

4.10　数列 (数学 B)

□□ 4.27　［一橋大 2023］ $\boxed{4}$

xy 平面上で，x 座標と y 座標がともに正の整数であるような各点に，下の図のような番号をつける．点 $(m,\ n)$ につけた番号を $f(m,\ n)$ とする．たとえば，$f(1,\ 1)=1$，$f(3,\ 4)=19$ である．



(1) $f(m,\ n)+f(m+1,\ n+1)=2f(m,\ n+1)$ が成り立つことを示せ．

(2) $f(m,\ n)+f(m+1,\ n)+f(m,\ n+1)+f(m+1,\ n+1)=2023$ となるような整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ．

□□ 4.28　［阪大理系 2023］ $\boxed{5}$

1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする．b_n を

$$b_n=\sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n-k}a_k$$

により定義し，b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする．

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

□□ **4.29** [神戸大理系 2023] $\boxed{1}$

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & (x \leqq 1)\\ 2x-1 & (x>1)\end{cases}$$

で定める．a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=a, \quad a_{n+1}=f(a_n) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) すべての実数 x について $f(x) \geqq x$ が成り立つことを示せ．

(2) $a \leqq 1$ のとき，すべての正の整数 n について $a_n \leqq 1$ が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n と a を用いて表せ．

□□ **4.30** [広大理系 2023] $\boxed{4}$

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=2, \quad a_{n+1}=\left(\frac{n^6(n+1)}{{a_n}^3}\right)^2 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．また

$$b_n=\log_2\frac{a_n}{n^2} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

とおく．次の問いに答えよ．必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}=0$ であることを用いてよい．

(1) b_1，b_2 を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=0$ であることを示せ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}$ を求めよ．

□□ 4.31 ［宮大医 2023］ $\boxed{6}$

自然数 $k=1,2,3,\cdots$ と $n=1,2,3,\cdots$ に対して，$\theta_k(n)$ を，$\theta_k(n)=\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{\pi}{2}$ で定め，座標平面上の円 C_n と直線 $L_{k,n}$ をそれぞれ，

$$C_k : x^2+y^2=\frac{1}{n^2},\quad L_{k,n} : x\sin\theta_k(n)-y\cos\theta_k(n)=0$$

とする．C_n と $L_{k,n}$ との 2 つの交点のうち，x 座標が大きい方の交点の x 座標を $x_k(n)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $n \geqq k$ のときの $x_k(n)$ を求めよ．

(2) 次の空欄に当てはまる数または数式を求めよ．

自然数 m に対して，$A_t(m)$ $(t=0,1,2,\cdots)$ を，

$$A_t(m)=\sum_{k=1}^{m} x_k(k+t)$$

とし，B_N $(N=1,2,3,\cdots)$ を，

$$B_N=\sum_{t=0}^{N-1} A_t(N-t)$$

とする．このとき，$A_1(1)=\dfrac{\boxed{\text{あ}}}{4}$，$A_2(1)=\dfrac{\boxed{\text{い}}}{6}$ となる．

また，$B_2-B_1=\dfrac{\boxed{\text{う}}}{4}$，$B_3-B_2=\dfrac{\boxed{\text{え}}}{6}$ となる．

さらに，$N=2,3,4,\cdots$ に対して，

$$B_N-B_{N-1}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boxed{\text{お}}$$

となる．

(3) (2) で定めた B_N $(N=1,2,3,\cdots)$ について，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}(B_N-B_{N-1})$ の値を求めよ．

5 発展問題

5.1 複素数平面 (数学 III)

□□ 5.1 ［名大理系 2023］ $\boxed{1}$

実数係数の 4 次方程式 $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ は相異なる複素数 α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ を解に持ち，それらは全て複素数平面において，点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるとする．ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ はそれぞれ α, β と共役な複素数を表す．

(1) $\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$ を示せ．

(2) $t = \alpha + \overline{\alpha}$，$u = \beta + \overline{\beta}$ とおく．p, q, r, s をそれぞれ t と u で表せ．

(3) 座標平面において，点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲を図示せよ．

5.2 微分法とその応用 (数学 III)

□□ 5.2 ［阪大理系 2023］ $\boxed{3}$

P を座標平面上の点とし，点 P の座標を $(a,\ b)$ とする．$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲にある実数 t のうち，曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(\mathrm{P})$ とする．$N(\mathrm{P}) = 4$ かつ $0 < a < \pi$ をみたすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

□□ 5.3 ［山大理医 2023］ $\boxed{5}$

$\triangle$ABC において，AB $= 7$，BC $= 9$，CA $= 8$ とし，次の 3 つの条件を満たす 2 つの円 C_1，C_2 を考える．

- 円 C_1 は，辺 AB と辺 CA に接しており，辺 BC とは 2 点で交わらない．
- 円 C_2 は，辺 AB と辺 BC に接しており，辺 CA とは 2 点で交わらない．
- 円 C_1 と円 C_2 は外接している．

このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 円 C_1 が $\triangle$ABC の内接円であるとき，円 C_1 の半径を求めなさい．

(2) 円 C_1 と円 C_2 の半径が等しいとき，円 C_1 の半径を求めなさい．

(3) 円 C_1 の周の長さと円 C_2 の周の長さの和が最小になるとき，円 C_1 と円 C_2 の半径をそれぞれ求めなさい．

5.3 積分法 (数学 III)

□□ **5.4** ［九大理系 2023］ $\boxed{4}$

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$，$\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$，$g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A) すべての x，y について $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$

(B) すべての x，y について $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

(C) $f(0)\neq 0$

(D) $f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$，$g'(0)=1$

①条件 (A), (B), (C) から $f(0)=1$, $g(0)=0$ がわかる。以上のことから ②$f(x)$, $g(x)$ はすべての x の値で微分可能で, $f'(x)=-g(x)$，$g'(x)=f(x)$ が成立する ことが示される。
③上のことから $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$ であることが，実部と虚部を調べることによりわかる。ただし i は虚数単位である。よって条件 (A)，(B)，(C)，(D) を満たす関数は三角関数 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$ であることが示される。

さらに，a，b を実数で $b\neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)$'$ $f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=a$，$g'(0)=b$

におきかえて，条件 (A)，(B)，(C)，(D)$'$ を満たす $f(x)$，$g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも，条件 (A)，(B)，(C) から $f(0)=1$，$g(0)=0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\frac{x}{b}\right),\quad q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと，④条件 (A)，(B)，(C)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により，$p(x)$，$q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x)=\boxed{\text{ア}}$，$g(x)=\boxed{\text{イ}}$ が得られる。

(1) 下線部 ① について，$f(0)=1$，$g(0)=0$ となることを示せ。

(2) 下線部 ② について，$f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり，$f'(x)=-g(x)$ となることを示せ。

(3) 下線部 ③ について，下線部 ①，下線部 ② の事実を用いることにより，$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)=1$ となることを示せ。

(4) 下線部 ④ について，条件 (B)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ に置き換えた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が，

(B) すべての x，y について $q(x+y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)$

(D) $p(x)$，$q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0$，$q'(0)=1$

を満たすことを示せ。空欄 $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に入る関数を求めよ。

5.4 積分法の応用 (数学 III)

□□ **5.5** ［東大理系 2023］ $\boxed{6}$

O を原点とする座標空間において，不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$，$|z| \leqq 1$ の表す立方体を考える．その立方体の表面のうち，$z<1$ を満たす部分を S とする．

以下，座標空間内の 2 点 A，B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める．

(1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i)，(ii) をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ．

(i) $\mathrm{OP} \leqq \sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ．

(2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii)，(iv)，(v) をすべて満たすとき，点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ．必要ならば，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい．

(iii) $\mathrm{ON}+\mathrm{NP} \leqq \sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と S は共有点を持たない．

(v) 線分 NP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ．

□□ **5.6** ［京大理系 2023］ $\boxed{5}$

O を原点とする xyz 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件 (a)，(b)，(c) を満たしている．

(a) 点 P は x 軸上にある．

(b) 点 Q は yz 平面上にある．

(c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である．

点 P と点 Q が条件 (a)，(b)，(c) を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ．

5.5 数列 (数学 B)

□□ **5.7** ［名大理系 2023］ $\boxed{4}$

n を正の整数とし，n 次の整式 $P_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ を展開して $P_n(x) = \displaystyle\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m x^m$ と表す．

(1) 等式 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m = n!$ を示せ．

(2) 等式

$$P_n(x+1) = \sum_{m=1}^{n} ({}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_m x^m)$$

を示せ．ただし，${}_m\mathrm{C}_0$，${}_m\mathrm{C}_1$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_m$ は二項係数である．

(3) $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，等式 $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_j \cdot {}_j\mathrm{C}_k = {}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$ を示せ．

5.6　接線群の包絡線

定型問題の1つであるアステロイド (astroid)

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

が半径 a の円内をその 1/4 の半径を持つ円が滑ることなく転がるとき，内円の円周上の任意の一点の軌跡であることは入試問題でもよく取り上げられています．また，アステロイドが接線群の包絡線としても出題されています．今回は入試問題に出題される接線群の包絡線について解説します．

2016 年 大分大医医

中心が原点 O で半径が a の定円 C_1 上を，半径 $\dfrac{a}{4}$ の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転する．円 C_2 上の点 P は最初に点 A$(a,\ 0)$ にあるとする．円 C_2 の中心を B とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を a，θ で表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を a，θ で表しなさい．

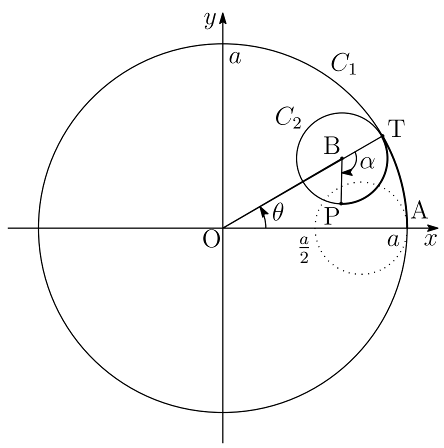
(3) $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき，動点 P が移動する距離を求めなさい．

解答　(1) C_1 と C_2 の接点を T，$\alpha=\angle\mathrm{PBT}$ とする．C_1 および C_2 上の弧について，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから

$$a\theta=\frac{a}{4}\times\alpha \quad ゆえに \quad \alpha=4\theta$$

BT の x 軸のなす角が θ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\frac{a}{4}(\cos(\theta-\alpha),\sin(\theta-\alpha))\\&=\frac{a}{4}(\cos(-3\theta),\ \sin(-3\theta))\\&=\boldsymbol{\frac{a}{4}(\cos 3\theta,-\sin 3\theta)}\end{aligned}$$



(2) $\mathrm{OB}=\mathrm{OT}-\mathrm{BT}=a-\dfrac{a}{4}=\dfrac{3}{4}a$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\&=\frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta)+\frac{a}{4}(\cos 3\theta,-\sin 3\theta)\\&=\boldsymbol{\frac{a}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とおくと，(2) の結果から

$$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{3}{4}a(\sin\theta+\sin 3\theta),\qquad \frac{dy}{d\theta}=\frac{3}{4}a(\cos\theta-\cos 3\theta)$$

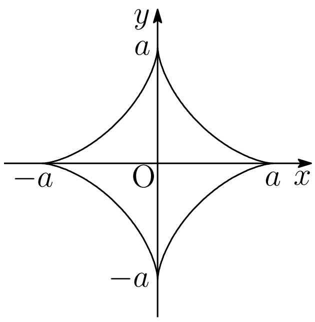
したがって
$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2&=\frac{9}{8}a^2(1-\cos 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta\sin\theta)\\&=\frac{9}{8}a^2(1-\cos 4\theta)=\frac{9}{4}a^2\sin^2 2\theta\end{aligned}$$

求める距離を s とすると，$\dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$ の周期が $\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}a|\sin 2\theta|\,d\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}a\sin 2\theta\,d\theta=\Big[-3a\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{6a}\end{aligned}$$

解説 (2) の結果は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$$



となり，その軌跡はアストロイドである．
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)&=a\left(-3\cos^2\theta\sin\theta,\ 3\sin^2\theta\cos\theta\right)\\&=3a\sin\theta\cos\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)\\&=\frac{3}{2}a\sin 2\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)\end{aligned}$$

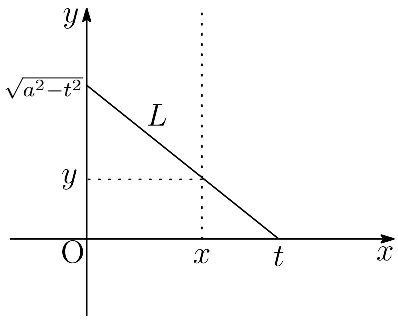
ゆえに $$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\frac{3}{2}a|\sin 2\theta|$$

アストロイド (astroid) の x 軸および y 軸に関する対称性により

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}a\sin 2\theta\, d\theta = 3a\Big[-\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \end{aligned}$$

補足 アステロイドは，次の線分 L の接線群の包絡線である．

長さ a の線分 L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，L の包絡線 (L の通る領域と通らない領域の境界線) を求める．
右の図のように L が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ にあるとき，L 上の点 $(x,\ y)$ について



$$y = -\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}x + \sqrt{a^2-t^2} \quad \cdots (*)$$

が成立する．ここで，x を固定し，y を t の関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}x - \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{a^2x-t^3}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから　$t = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$
これを $(*)$ に代入すると

$$y = -x^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$$

したがって
$$\begin{aligned} y^2 &= x^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) - 2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) + a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2 \\ &= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \end{aligned}$$

よって　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

一般に，L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，上式は成立する．

2011 年 阪大理系 2 番

実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$ および $\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$ を考える．θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする．D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

解答 2 点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$ を通る直線の方程式は $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{x}{8\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \sin\theta - \frac{x}{8}\tan\theta \quad \cdots①$$

この直線上の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \frac{x}{8\cos^2\theta} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 8\cos^3\theta \quad \cdots②$$

② を ① に代入すると

$$y = \sin\theta - \frac{8\cos^3\theta}{8}\tan\theta \quad \text{ゆえに} \quad y = \sin^3\theta \quad \cdots③$$

②，③ より，直線 PQ の包絡線は，$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のときも成立することに注意して

$$(*)\begin{cases} x = 8\cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$(*)$ から，θ を消去すると

$$y = \left\{1 - \left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} \qquad (0 \leqq x \leqq 8)$$

$x = 8t$ とおくと $\quad \dfrac{dx}{dt} = 8$

x	$0 \longrightarrow 8$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^8 y^2\,dx = \int_0^8 \left\{1 - \left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^3 dx = 8\int_0^1 (1 - t^{\frac{2}{3}})^3\,dt \\ &= 8\int_0^1 (1 - 3t^{\frac{2}{3}} + 3t^{\frac{4}{3}} - t^2)\,dt \\ &= 8\left[\ t - \frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}t^3\ \right]_0^1 = \frac{128}{105}\end{aligned}$$

よって $\qquad \boldsymbol{V = \dfrac{128}{105}\pi}$

別解 $(*)$ より $\dfrac{dx}{d\theta} = -24\cos^2\theta\sin\theta$

x	$0 \longrightarrow 8$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^8 y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6\theta(-24\cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos^2\theta)^3\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - 3\cos^4\theta + 3\cos^6\theta - \cos^8\theta)\sin\theta\,d\theta \\
&= 24\Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{3}{5}\cos^5\theta - \frac{3}{7}\cos^7\theta + \frac{1}{9}\cos^9\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128}{105}
\end{aligned}
$$

補足 $t = \sin^2\theta$ とおくと $\dfrac{dt}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow 1$

$\cos\theta = (1-t)^{\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cos^2\theta\,d\theta &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^3\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= 12\int_0^1 t^3(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= 12\cdot\frac{3!\cdot\frac{1}{2}!}{(3+\frac{1}{2}+1)!}(1-0)^{3+\frac{1}{2}+1} \\
&= 12\cdot\frac{3!\cdot\frac{1}{2}!}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!} = \frac{128}{105}
\end{aligned}
$$

2014 年 名大理系

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える．t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ．

解答 2点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線は

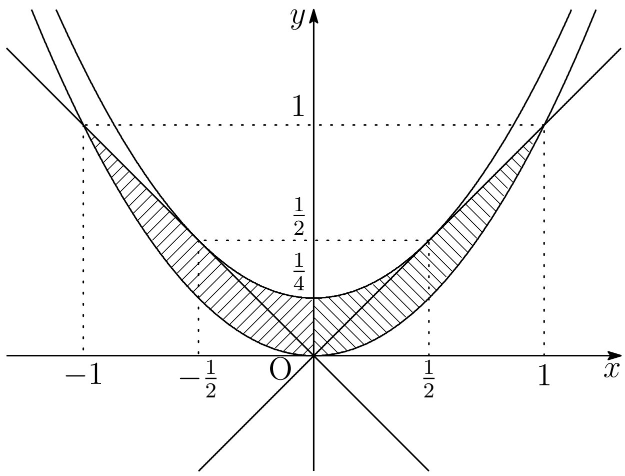
$$y-t^2=\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=(2t+1)x-t^2-t \quad \cdots ①$$

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dt}=0$ であるから

$$\frac{dy}{dt}=2x-2t-1=0\quad \text{ゆえに}\quad x=t+\frac{1}{2}\quad \cdots ②$$

①，② から t を消去すると　　$y=x^2+\dfrac{1}{4}\quad \cdots (*)$

$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき，線分 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ が通過してできる図形は，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む．



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2}&=\int_0^1(x-x^2)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-x\right\}dx\\
&=\int_0^1 x(1-x)\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx\\
&=\frac{1}{6}+\left[\ \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\ \right]_0^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{5}{24}
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S=\dfrac{5}{12}}$

2014年 東大文系

座標平面の原点をOで表す.
線分 $y=\sqrt{3}\,x\ (0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点Pと，線分 $y=-\sqrt{3}\,x\ (-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点Qが，線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く．このとき，線分PQの通過する領域を D とする.

(1) s を $-3 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ.

(2) D を図示せよ.

解答 (1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leqq p \leqq 2, -3 \leqq q \leqq 0)$，

$$\mathrm{OP}=2p, \quad \mathrm{OQ}=-2q$$

$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ であるから　$2p+(-2q)=6$　ゆえに　$q=p-3$

したがって　$0 \leqq p \leqq 2,\ -3 \leqq p-3 \leqq 0$　すなわち　$0 \leqq p \leqq 2$
2点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y-\sqrt{3}p=\frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x-p)$$

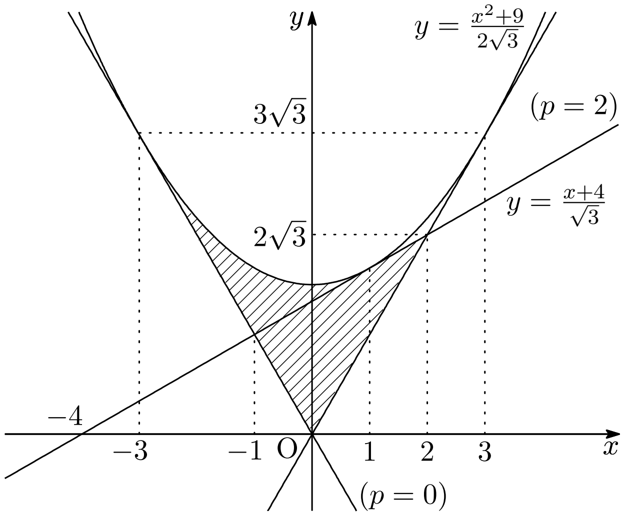
すなわち　$y=\dfrac{(2p-3)x-2p^2+6p}{\sqrt{3}}$　$\cdots$①

直線①の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dp}=0$ であるから

$$\frac{dy}{dp}=\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-4p+6)=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=2p-3 \quad \cdots ②$$

①，②から p を消去すると　$y=\dfrac{x^2+9}{2\sqrt{3}}$　$\cdots(*)$

D は，$0 \leqq p \leqq 2$ のとき，2点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分PQ(直線①)が通過する領域であるから，$(*)$ が直線PQの包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む.



よって，$0 \leqq s \leqq 2$ をみたす点 $(s,\ t)$ が D にあるとき

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{-3 \leqq s \leqq 0} \text{ のとき} \quad \boldsymbol{-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}} \\
&\boldsymbol{0 \leqq s \leqq 1} \text{ のとき} \quad \boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}} \\
&\boldsymbol{1 \leqq s \leqq 2} \text{ のとき} \quad \boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s+4}{\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

(2) 領域 D は (1) で示した領域.

2014 年 東大理系

座標平面の原点を O で表す．
線分 $y = \sqrt{3}\,x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y = -\sqrt{3}\,x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする．

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ．

(2) D を図示せよ．

解答 (1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leqq p \leqq 2, -2 \leqq q \leqq 0)$，

$$\mathrm{OP} = 2p, \quad \mathrm{OQ} = -2q$$

$\mathrm{OP} + \mathrm{OQ} = 6$ であるから　$2p + (-2q) = 6$　ゆえに　$q = p - 3$

したがって　$0 \leqq p \leqq 2,\ -2 \leqq p - 3 \leqq 0$　すなわち　$1 \leqq p \leqq 2$

2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y - \sqrt{3}p = \frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x - p)$$

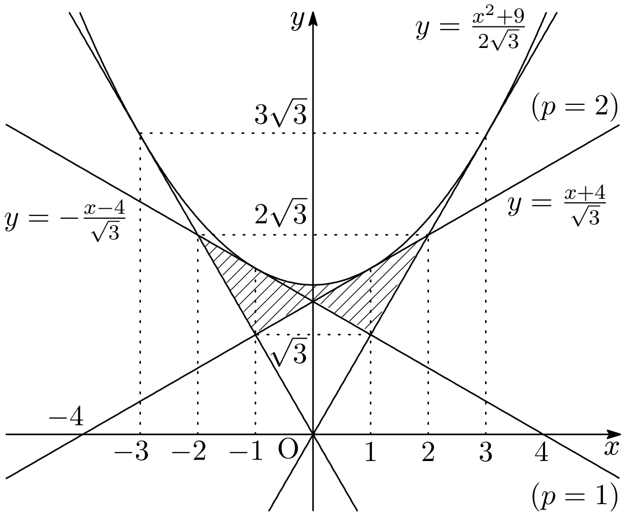
すなわち　$$y = \frac{(2p-3)x - 2p^2 + 6p}{\sqrt{3}} \quad \cdots ①$$

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dp} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dp} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x - 4p + 6) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 2p - 3 \quad \cdots ②$$

①，② から p を消去すると　$$y = \frac{x^2 + 9}{2\sqrt{3}} \quad \cdots (*)$$

D は，$1 \leqq p \leqq 2$ のとき，2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分 PQ(直線 ①) が通過する領域であるから，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む．



よって，$0 \leqq s \leqq 2$ をみたす点 $(s,\ t)$ が D にあるとき

$$\boldsymbol{0 \leqq s \leqq 1} \text{ のとき } \quad \boldsymbol{-\frac{s-4}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}}$$
$$\boldsymbol{1 \leqq s \leqq 2} \text{ のとき } \quad \boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s+4}{\sqrt{3}}}$$

(2) 領域 D は (1) で示した領域．

2023 年 京大理系

O を原点とする xyz 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件 (a)，(b)，(c) を満たしている．

(a) 点 P は x 軸上にある．

(b) 点 Q は yz 平面上にある．

(c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である．

点 P と点 Q が条件 (a)，(b)，(c) を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ．

解答

5.7 法線群の包絡線

入試問題に出題される法線群の包絡線について解説します．

放物線 $y = \dfrac{x^2}{2}$ に引ける接線の本数は，領域 $y > \dfrac{x^2}{2}$ の点からは 0 本，$y = \dfrac{x^2}{2}$ 上の点からは 1 本，領域 $y < \dfrac{x^2}{2}$ の点からは 2 本引ける．一方，放物線 $y = \dfrac{x^2}{2}$ に引ける法線の本数は簡単ではない．放物線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{2}$ に引ける法線の本数は，C_1 の法線群の包絡線 $C_2 : y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ に引ける接線の本数に等しい．C_1 に引ける法線の本数は

- 領域 $y > 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ の点からは C_1 に 3 本
- 曲線 $y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ $(x \neq 0)$ 上の点からは C_1 に 2 本，点 $(0,\ 1)$ からは C_1 に 1 本
- 領域 $y < 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ の点からは C_1 に 1 本

である．これに関する問題が次です．

2009 年 九大理系

曲線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする。ただし，$b \neq a$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) b が a に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近づく。A の座標を a で表せ。

(2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，(1) で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き，C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。

(3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　(1) $y=\dfrac{x^2}{2}$ を微分すると　$y'=x$

点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における接線の方向ベクトルは $(1,\ a)$ であるから，A における法線の方程式は

$$1(x-a)+a\left(y-\frac{a^2}{2}\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+ay=a+\frac{a^3}{2} \qquad \cdots ①$$

同様にして $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の方程式は　$x+by=b+\dfrac{b^3}{2}$　$\cdots$②

①，② から x を消去すると

$$(b-a)y=b-a+\frac{b^3-a^3}{2} \quad b\neq a \text{ より} \quad y=1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x+a\left(1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}\right)=a+\frac{a^3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{ab(a+b)}{2}$$

したがって，R の座標は　$\left(-\dfrac{ab(a+b)}{2},\ 1+\dfrac{a^2+ab+b^2}{2}\right)$

よって，$b\to a$ による R の極限の点 A の座標は　$\boldsymbol{\left(-a^3,\ 1+\dfrac{3}{2}a^2\right)}$

(2) (1) の結果から

$$x=-a^3,\ y=1+\frac{3}{2}a^2$$

とおくと，第 1 式から　$a=-x^{\frac{1}{3}}$

これを第 2 式に代入すると　$y=1+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

上式が C_2 の方程式であり，C_1，C_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{2}=1+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \quad \text{ゆえに} \quad x^2-3x^{\frac{2}{3}}-2=0$$

$x^{\frac{1}{3}}=t\cdots$③ とおくと　$x=t^3\cdots$③′

$$t^6-3t^2-2=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t^2+1)^2(t^2-2)=0$$

したがって　$t=\pm\sqrt{2}$　　③′ より　$x=\pm2\sqrt{2}$

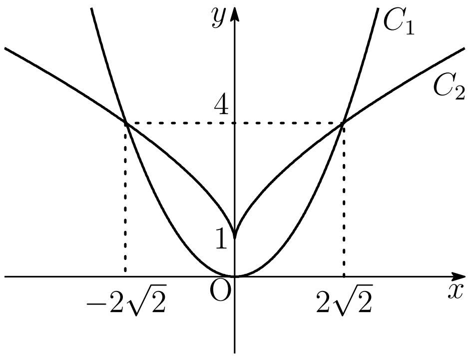
これを C_1 の方程式に代入して　$y=4$

よって，C_1 と C_2 の交点の座標は　$\boldsymbol{(\pm2\sqrt{2},\ 4)}$

$C_2 : y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ について　$y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$，$y'' = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

ゆえに　$y'' < 0$　したがって　C_2 は上に凸の曲線である．

したがって，C_1，C_2 の概形は，次のようになる．



補足

C_2 上の点 P(0, 1) について，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \left(-a^3,\ \frac{3}{2}a^2\right) = \frac{3}{2}a^2\left(-\frac{2}{3}a,\ 1\right)$$

$a \to 0$ とすると，C_2 の尖点 P(0, 1) における接線は，y 軸に平行な直線となる．尖点 (cusp) は，曲線上の可微分でない点であり，接線が定まらないのが一般的である ($y = |x|$ の尖点 (0, 0) など)．

(3) C_1，C_2 は y 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^{2\sqrt{2}} \left\{\left(1 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{x^2}{2}\right\} dx \\ &= 2\left[\ x + \frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{6}\ \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{88\sqrt{2}}{15}} \end{aligned}$$

解説

(2) で求めた C_2 は，C_1 の法線群の包絡線である．一般に $C_1 : y = f(x)$ とすると，2 点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$ における法線の方程式は $(u \neq t)$，それぞれ

$$(x-t)+f'(t)(y-f(t))=0, \quad (x-u)+f'(u)(y-f(u))=0$$

であり，これから

$$x+f'(t)y=t+f'(t)f(t) \quad \cdots ①, \quad x+f'(u)y=u+f'(u)f(u) \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$\begin{aligned}\{f'(u)-f'(t)\}y &= u-t+f'(u)f(u)-f'(t)f(t)\\ &= u-t+f'(u)\{f(u)-f(t)\}+f(t)\{f'(u)-f'(t)\}\end{aligned}$$

$u \neq t$ であるから，両辺を $u-t$ で割ると

$$\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}y = 1+f'(u)\cdot\frac{f(u)-f(t)}{u-t}+f(t)\cdot\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}$$

$u \to t$ とすると　　$f''(t)y = 1+\{f'(t)\}^2+f(t)f''(t)$

$f''(t) \neq 0$ のとき　　$y = f(t)+\dfrac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

これを ① に代入すると　$x = t-\dfrac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$

よって，t を変数として次の $(x,\ y)$ が描く軌跡が C_2 である．

$$x = t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}, \qquad y = f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

上で求めた $(x,\ y)$ は P における曲率円 (接触円) の中心でもある．P における曲率円とは，曲線上の 3 点 P，Q，R について，Q，R が曲線上を P に限りなく近づくときに占める極限の位置の円である．その中心を**曲率中心**という．

C_1 上の 3 点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$，$\mathrm{R}(v,\ f(v))$ とする $(t<u<v)$．3 点 P，Q，R を通る円を $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2-r^2=0$ とすると

$$\begin{aligned}(t-c_1)^2+\{f(t)-c_2\}^2-r^2=0\\ (u-c_1)^2+\{f(u)-c_2\}^2-r^2=0\\ (v-c_1)^2+\{f(v)-c_2\}^2-r^2=0\end{aligned}$$

ここで，$g(s)=(s-c_1)^2+\{f(s)-c_2\}^2-r^2$ とおくと　　$g(t)=g(u)=g(v)=0$

$g(t) = g(u)$ であるから，ロル (Rolle) の定理により

$$g'(t_1) = 0 \quad (t < t_1 < u)$$

を満たす t_1 が存在する．同様に，$g(u) = g(v)$ であるから

$$g'(t_2) = 0 \quad (u < t_2 < v)$$

を満たす t_2 が存在する．$g'(t_1) = g'(t_2)$ であるから，さらにロルの定理を用いると

$$g''(t_3) = 0 \quad (t_1 < t_3 < t_2)$$

を満たす t_3 が存在する．Q，R が P に限りなく近づくとき，$u \to t$，$v \to t$ となるから，上の諸式において

$$g(t) = 0, \quad g'(t) = 0, \quad g''(t) = 0$$

$g'(s)$，$g''(s)$ は

$$\begin{aligned} g'(s) &= 2(s - c_1) + 2f'(s)\{f(s) - c_2\} \\ g''(s) &= 2 + 2f''(s)\{f(s) - c_2\} + 2\{f'(s)\}^2 \end{aligned}$$

$g'(t) = 0$，$g''(t) = 0$ であるから

$$(t - c_1) + f'(t)\{f(t) - c_2\} = 0, \quad 1 + \{f'(t)\}^2 + f''(t)\{f(t) - c_2\} = 0$$

上の第 2 式から　　$c_2 - f(t) = \dfrac{1 + \{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

これを第 1 式に代入すると　　$c_1 - t = -\dfrac{f'(t)(1 + \{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$

上の 2 式を $g(t) = 0$ に代入することにより，曲率円の半径 r は

$$r^2 = \frac{(1 + \{f'(t)\}^2)^3}{\{f''(t)\}^2} \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{(1 + \{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}$$

よって，曲線の P における曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ は

$$c_1 = t - \frac{f'(t)(1 + \{f'(t)\}^2)}{f''(t)}, \qquad c_2 = f(t) + \frac{1 + \{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ の描く軌跡を**縮閉線**といい，曲線の法線群の包絡線と一致することがわかる．

曲線の弧長 s に対する接線の向きの変化率を曲率といい，曲率 κ は，次式で定義される．

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

点 $(x,\ y)$ における接線が，x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$y' = \tan\theta$$

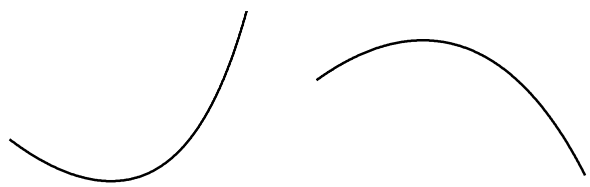
これを θ について，微分することにより

$$y''\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (y')^2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1 + (y')^2}$$

また，$\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}$ であるから，$\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$ より

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = \frac{y''}{1 + (y')^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y''}{\{1 + (y')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

曲率 κ の逆数 $\dfrac{1}{\kappa}$ を曲率半径という．曲率円の半径は曲率半径の絶対値に等しい．$\kappa > 0$ すなわち $y'' > 0$ のとき下に凸，$\kappa < 0$ すなわち $y'' <$ のとき上に凸である．変曲点は曲率の符号が変わる点であり，頂点は曲率が極値をとる点である．



$\kappa > 0$ $\qquad\qquad$ $\kappa < 0$

2008 年 長崎大理系

放物線 $y=x^2$ 上に，x 座標が t である点 $\mathrm{P}(t)$ をとる．ただし，$t \geqq 0$ とする．$h \neq 0$ とし，放物線の $\mathrm{P}(t)$ における法線と，$\mathrm{P}(t+h)$ における法線を考える．$h \to 0$ とするとき，この 2 法線の交点の x 座標の極限値を $u(t)$，y 座標の極限値を $v(t)$ とする．さらに $(u(t),\ v(t))$ を点 $\mathrm{Q}(t)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $u(t)$ と $v(t)$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Q}(t)$ が上の放物線上にあるとき，t の値と $\mathrm{Q}(t)$ の座標を求めよ．

(3) 上の放物線，曲線 $x=u(t)$，$y=v(t)$，および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答　(1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

放物線上の点 $(t,\ t^2)$ における法線の方程式は

$$1(x-t)+2t(y-t^2)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+2ty=t+2t^3 \quad \cdots ①$$

$s \neq t$ とする．放物線上の点 $(s,\ s^2)$ における法線の方程式は

$$x+2sy=s+2s^3 \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$2(s-t)y=s-t+2(s^3-t^3) \quad \text{ゆえに} \quad y=s^2+st+t^2+\frac{1}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x+2t\left(s^2+st+t^2+\frac{1}{2}\right)=t+2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad x=-2st(s+t)$$

2 直線 ①，② の交点の座標は　$\left(-2st(s+t),\ s^2+st+t^2+\dfrac{1}{2}\right)$

この点を $s \longrightarrow t$ とした極限の点が $(u(t),\ v(t))$ であるから

$$u(t)=\lim_{s\to t}\{-2st(s+t)\}=\boldsymbol{-4t^3}$$

$$v(t)=\lim_{s\to t}\left(s^2+st+t^2+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{3t^2+\frac{1}{2}}$$

(2) $\mathrm{Q}(t)$ が放物線 $y=x^2$ 上にあるから

$$3t^2+\frac{1}{2}=(-4t^3)^2 \quad \text{整理すると} \quad 32t^6-6t^2-1=0$$

ゆえに　$(2t^2-1)(4t^2+1)^2=0$　$t \geqq 0$ に注意して　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

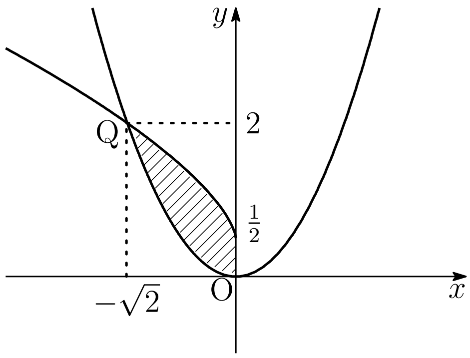
よって　$\mathbf{Q}(\boldsymbol{-\sqrt{2},\ 2})$

(3) (1) の結果から　　$x=-4t^3$，$y=3t^2+\dfrac{1}{2}$

ゆえに　　$2x=(-2t)^3$，$y=\dfrac{3}{4}(-2t)^2+\dfrac{1}{2}$

上の 2 式から t を消去すると　　$y=\dfrac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}$

求める面積は，下の図の斜線部分である．



この面積を S とすると

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left(\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}-x^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{9x(2x)^{\frac{2}{3}}}{20}+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{0}=\mathbf{\frac{11}{15}\sqrt{2}}$$

解説 曲線 $y=\dfrac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}$ を放物線 $y=x^2$ の法線群の包絡線という．

2017 年 九大後期工学部

座標平面上の曲線 $C: y=\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ を考える．C 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{p})$，$\mathrm{Q}(q,\ \sqrt{q})$ $(p>0,\ q>0)$ における，それぞれの法線 ℓ_1，ℓ_2 を考える．法線 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 R の座標を p と q で表せ．

(2) q が p に限りなく近づくとき，線分 RP の長さの極限値を p で表せ．

解答　(1) $f(x)=\sqrt{x}$ とおくと　　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{p})$ における法線 ℓ_1 の方程式は，$-\dfrac{1}{f'(p)}=-2\sqrt{p}$ より

$y-\sqrt{p}=-2\sqrt{p}(x-p)$　すなわち　$y=-2\sqrt{p}\,x+(2p+1)\sqrt{p}$　$\cdots$①

同様に，C 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ \sqrt{q})$ における法線 ℓ_2 の方程式は

$$y=-2\sqrt{q}\,x+(2q+1)\sqrt{q}\quad\cdots②$$

①，② から y を消去すると

$$\begin{aligned}2(\sqrt{p}-\sqrt{q})x&=(2p+1)\sqrt{p}-(2q+1)\sqrt{q}\\&=2(p\sqrt{p}-q\sqrt{q})+\sqrt{p}-\sqrt{q}\end{aligned}$$

2 点 P，Q は異なるので，$\sqrt{p}-\sqrt{q}\neq 0$ であるから

$$x=\frac{p\sqrt{p}-q\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}+\frac{1}{2}=p+\sqrt{pq}+q+\frac{1}{2}$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}y&=-2\sqrt{p}\left(p+\sqrt{pq}+q+\frac{1}{2}\right)+(2p+1)\sqrt{p}\\&=(-2\sqrt{pq}-2q)\sqrt{p}=-2\sqrt{pq}(\sqrt{p}+\sqrt{q})\end{aligned}$$

よって，点 R の座標は

$$\boldsymbol{\left(p+\sqrt{pq}+q+\frac{1}{2},-2\sqrt{pq}(\sqrt{p}+\sqrt{q})\right)}$$

(2) q が p に限りなく近づいたとき，点 R の極限の位置は，(1) の結果から

$$\left(3p+\frac{1}{2},\ -4p\sqrt{p}\right)$$

このとき，RP の長さは

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(3p+\frac{1}{2}-p\right)^2+(-4p\sqrt{p}-\sqrt{p})^2}\\=&\sqrt{\left(2p+\frac{1}{2}\right)^2+4p\left(2p+\frac{1}{2}\right)^2}\\=&\left(2p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+4p}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(1+4p)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

解説 q が p に限りなく近づくとき，点 R の極限の位置は，C 上の点 P における曲率中心である．このとき線分 RP の長さは曲率円 (接触円) の半径に等しい．

一般に，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における曲率中心 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は

$$x=t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)},\qquad y=f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

となる．したがって

$$\mathrm{RP}=\frac{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}\quad\cdots(*)$$

実際，本題の関数 $f(x)=\sqrt{x}$ について

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$(*)$ より，(2) の RP の長さ，すなわち，$x=p$ における曲率半径は

$$\mathrm{RP}=\left(1+\frac{1}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}\times 4p\sqrt{p}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}\times(4p)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(1+4p)^{\frac{3}{2}}$$

あるいは，$g(x)=f^{-1}(x)=x^2\ (x\geqq 0)$ とおくと

$$g'(x)=2x,\quad g''(x)=2$$

であるから，$g(x)$ の $x=\sqrt{p}$ における曲率半径は

$$\frac{(1+\{g'(\sqrt{p})^2\})^{\frac{3}{2}}}{|g''(\sqrt{p})|}=\frac{\{1+(2\sqrt{p})^2\}^{\frac{3}{2}}}{2}=\frac{1}{2}(1+4p)^{\frac{3}{2}}\quad\cdots(**)$$

一般に，$g(x)=f^{-1}(x)$ のとき，$f(g(x))=x$ であるから

$$f'(g(x))g'(x)=1,\quad f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)=0$$

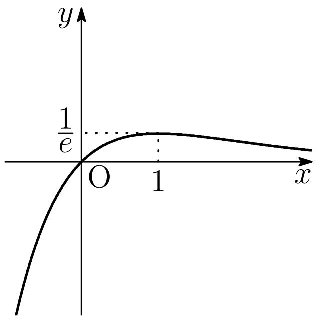
上の 2 式から $\qquad f'(g(x))=\dfrac{1}{g'(x)},\qquad f''(g(x))=-\dfrac{g''(x)}{\{g'(x)\}^3}$

これらを $(*)$ に適用すると，$x=\sqrt{p}$ における $g(x)$ の曲率半径 $(**)$ を得る．

解答例

1.1 (1) $f(x) = xe^{-x}$ より　$f'(x) = (1-x)e^{-x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{e}$	$\searrow$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$f(x) = k$ の異なる実数解の個数は，曲線 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の個数である．

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{k \leqq 0,\ k = \dfrac{1}{e}} \textbf{のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{0 < k < \dfrac{1}{e}} \textbf{のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k > \dfrac{1}{e}} \textbf{のとき} & \textbf{0 個} \end{cases}$

(2) $(*)$　$xye^{-(x+y)} = c$ をみたす正の実数 x，y の組が $(x,\ y) = (a,\ b)$ とすると $(a \neq b)$，$(x,\ y) = (b,\ a)$ も $(*)$ を満たすので，条件に反する．したがって，$(*)$ をみたす x，y がただ 1 つであるとき，$x = y$ であるから

$$x^2e^{-2x} = f(x)^2 = c \quad (c > 0)$$

このとき，$x > 0$ であるから，$f(x) > 0$ より　$f(x) = \sqrt{c}$

(1) の結果から　$\sqrt{c} = \dfrac{1}{e}$　よって　$\boldsymbol{c = \dfrac{1}{e^2}}$

(3) $xye^{-(x+y)} = \dfrac{3}{e^4}$ より

$$f(x)f(y) = f(1)f(3) \quad \text{ゆえに} \quad f(y) = \frac{f(1)f(3)}{f(x)}$$

(1) で求めたグラフから y が最大となるとき，$f(y)$ は最小値をとる．上式から，$f(y)$ が最小となるとき，$f(x)$ は最大値をとるから

$$\boldsymbol{x = 1} \quad \text{ゆえに} \quad f(y) = f(3) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y = 3}$$

■

1.2 $K_n=|1-a_1|+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6|$ より

$$\begin{aligned}K_n&=|a_1-1|+|a_2-a_1|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|+|6-a_n|\\&\geqq|(a_1-1)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+(6-a_n)|=5\end{aligned}\qquad(*)$$

したがって　　$q_n=5\cdots①$

$a_1-1\geqq0,\ 6-a_n\geqq0$ より，$(*)$ において等号が成立するとき，

$$a_2-a_1\geqq0,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1}\geqq0$$

すなわち　　$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_{n-1}\leqq a_n\leqq6$　　(A)

$a_1-1,\ a_2-a_1,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1},\ 6-a_n$ の $n+1$ 個から 5 個取る重複組合せは

$${}_{n+1}\mathrm{H}_5={}_{(n+1)+5-1}\mathrm{C}_5={}_{n+5}\mathrm{C}_5$$

$K_n=5$ となる確率 $P(K_n=5)$ は

$$P(K_n=5)=\frac{{}_6\mathrm{H}_n}{6^n}=\frac{{}_{6+n-1}\mathrm{H}_n}{6^n}=\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_5}{6^n}\qquad(**)$$

(1) $(**)$ に $n=3$ を代入して

$$P(K_3=5)=\frac{{}_8\mathrm{C}_5}{6^3}=\boldsymbol{\frac{7}{27}}$$

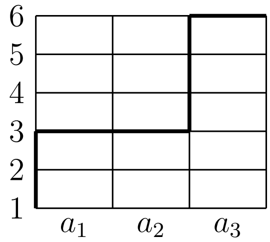
補足 $a_1-1,\ a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ 6-a_3$ の 4 個から 5 個取る重複組合せは[1]

$${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5=56$$

例えば，a_1-1 を 2 個，a_3-a_2 を 3 個取るとき

$$a_1-1=2,\quad a_2-a_1=0,\quad a_3-a_2=3,\quad 6-a_3=0$$

このとき　　$a_1=a_2=3,\ a_3=6$



[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Kdai/Kdai_ri_2022.pdf $\boxed{2}$ は関連問題．

(2) ① より　$\boldsymbol{q_n = 5}$

(A) より，求める必要十分条件は

$$\boldsymbol{1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq 6}$$

(3) $a_4 = 4$ および (A) を満たす確率を求めればよい．

$a_1 - 1$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $4 - a_3$ の 4 個から 3 個とる重複組合せは

$${}_4\mathrm{H}_3 = {}_6\mathrm{C}_3$$

$n > 4$ のとき，$a_5 - 4$, $a_6 - a_5$, $\cdots$, $a_n - a_{n-1}$, $6 - a_n$ の $n-3$ 個から 2 個とる重複組合せは

$${}_{n-3}\mathrm{H}_2 = {}_{n-2}\mathrm{C}_2$$

このとき

$$p_n = \frac{{}_6\mathrm{C}_3 \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_2}{6^n}$$

上式は，$n = 4$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{p_n = \frac{10(n-2)(n-3)}{6^n}}$$

■

1.3 (1) 赤玉 4 個，白玉 5 個の計 9 個を取り出す場合の総数は (9 個の玉を取り出して一列に並べる場合の総数)

$$\frac{9!}{4!5!} = 126 \text{（通り）}$$

ゲームが引き分けとなるのは，次の 1 通り．

白	赤	白	赤	白	赤	白	赤	白

よって，求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{1}{126}}$

(2) A が勝つのは，次の場合である．

赤								

白	赤	赤						

白	赤	白	赤	赤				

白	赤	白	赤	白	赤	赤		

これらの総数は

$$\frac{8!}{3!5!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{4!}{1!3!} + \frac{2!}{2!} = 56 + 15 + 4 + 1 = 76$$

よって，求める確率は $\dfrac{76}{126} = \boldsymbol{\dfrac{38}{63}}$ ■

1.4 (1) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{6x+1}$ を微分すると　$f'(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{24}{(6x+1)^2}$

$f'(x) = 1$ とすると　$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{24}{(6x+1)^2} = 1$

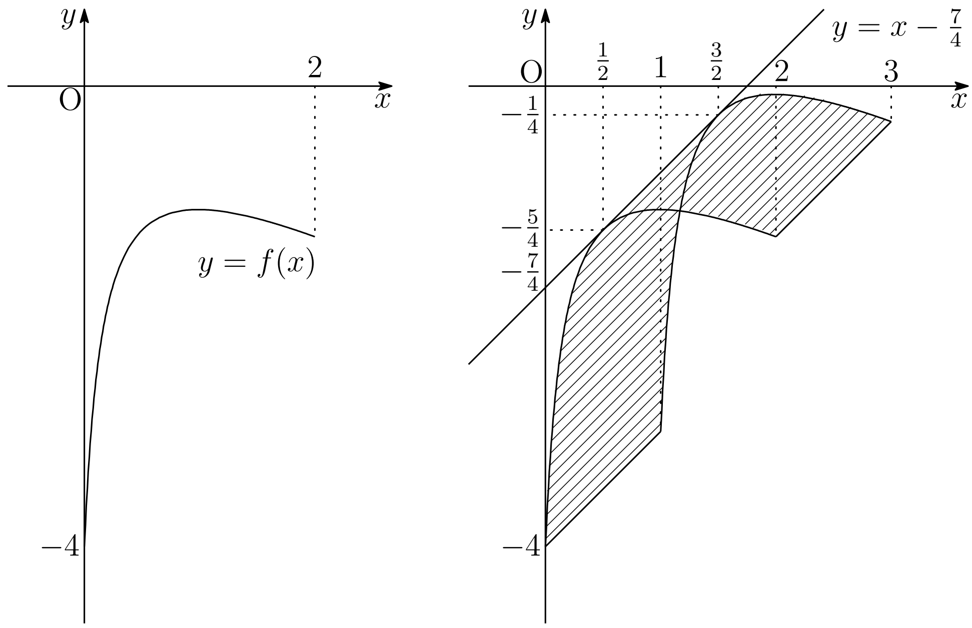
整理すると　$(6x+1)^2 = 16$　$x > 0$ より　$x = \dfrac{1}{2}$　$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{4}$

求める接線は，点 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{4}\right)$ を通り，傾き 1 であるから

$$y + \frac{5}{4} = x - \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x - \frac{7}{4}}$$

(2) $x > 0$ において $f''(x) = -\dfrac{288}{(6x+1)^3} < 0$ より，$y = f(x)$ は上に凸．

(1) の結果から点 Q の軌跡を表す曲線 $y = f(x-1)+1$ は点 $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ で (1) で求めた直線と接する．図形 S は，右下の図の斜線部分で境界線を含む．

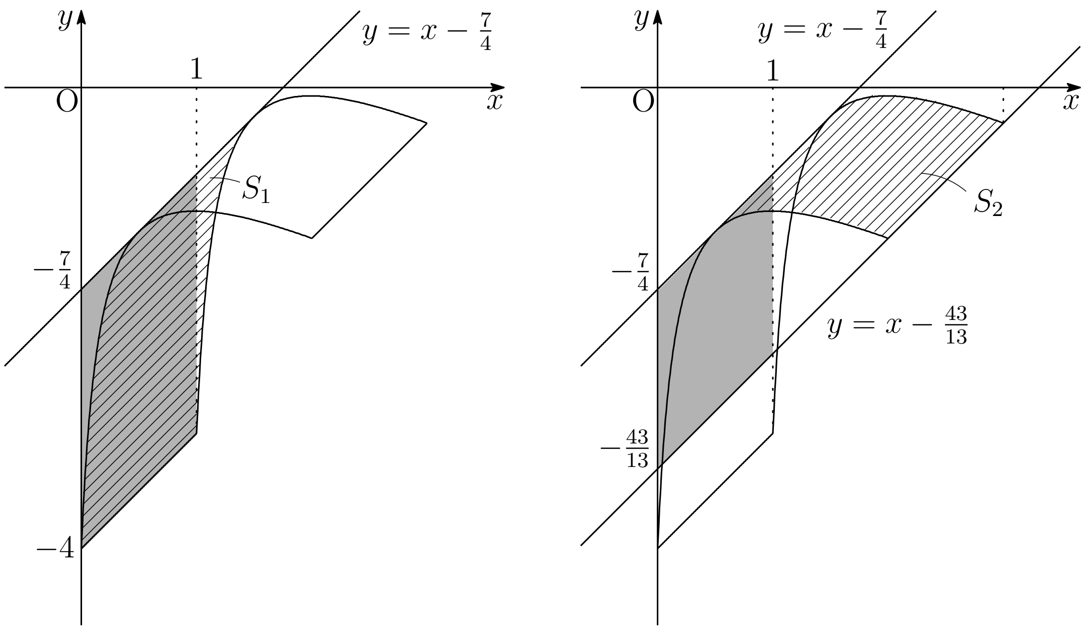


$f(0) = -4$，$f(2) = -\dfrac{17}{13}$ より，点 $(2,\ f(2))$ を通り，傾き 1 の直線は

$$y + \frac{17}{13} = x - 2 \quad ゆえに \quad y = x - \frac{43}{13}$$

カバリエリの原理により，下の図の斜線部分の面積は

$$S_1 = \left\{-\frac{7}{4} - (-4)\right\} = \frac{9}{4}, \quad S_2 = \left\{-\frac{7}{4} - \left(-\frac{43}{13}\right)\right\} = \frac{81}{52}$$



2 曲線 $y = f(x)$ と $y = f(x-1) + 1$ の共有点の x 座標は $(1 < x < 2)$

$$-\frac{x}{2} - \frac{4}{6x+1} = -\frac{x-1}{2} - \frac{4}{6x-5} + 1$$

整理すると　$12x^2 - 8x - 7 = 0$　ゆえに　$(2x+1)(6x-7) = 0$

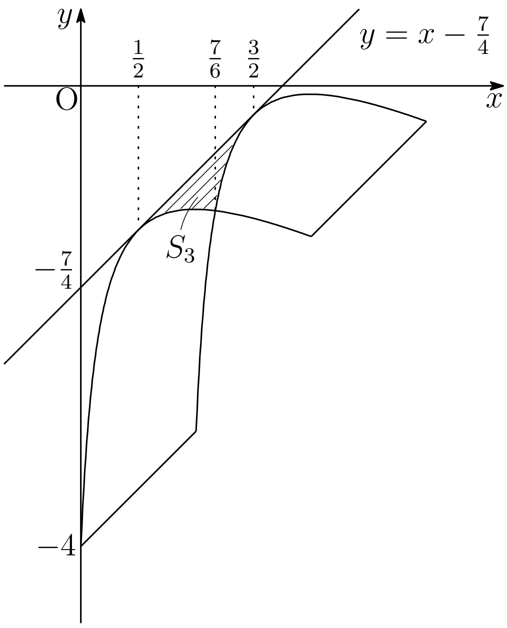
$1 < x < 2$ に注意して　$x = \dfrac{7}{6}$

$g(x) = x - \dfrac{7}{4}$ とし，下の図の斜線部分の面積を S_3 とすると

$$S_3 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{6}} \{g(x) - f(x)\}dx + \int_{\frac{7}{6}}^{\frac{3}{2}} [g(x) - \{f(x-1)+1\}]dx$$

$g(x+1) - 1 = g(x)$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{6}} \{g(x) - f(x)\}dx + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \{g(x) - f(x)\}dx \\ &= \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}} \{g(x) - f(x)\}dx = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}} \left(\frac{3}{2}x - \frac{7}{4} + \frac{4}{6x+1}\right)dx \\ &= \left[\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{2}{3}\log(6x+1)\ \right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}} = -\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\log 2 \end{aligned}$$



よって　$S_1 + S_2 - S_3 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{81}{52} - \left(-\dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{3}\log 2\right) = \boldsymbol{\dfrac{237}{52} - \dfrac{4}{3}\log 2}$ ■

1.5 (1) $y=x-x^3$ を微分すると　$y'=1-3x^2$

$x=1$ のとき，$y'=-2$ より，C 上の点 A$(1,\ 0)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=-2(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=-2x+2$$

C と ℓ の方程式から y を消去すると　$x-x^3=-2x+2$

整理すると　$x^3-3x+2=0$　ゆえに　$(x-1)^2(x+2)=0$

点 B の x 座標は　$x=-2$　これを C の方程式に代入して　$y=6$

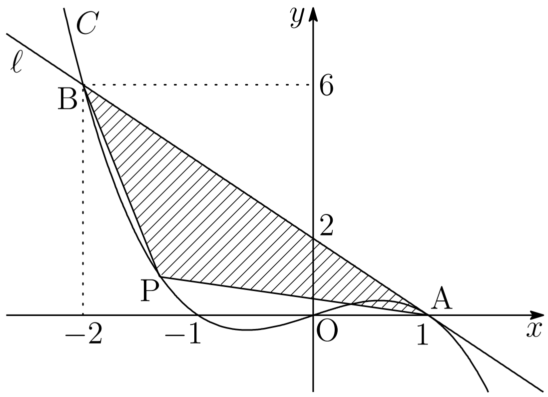
よって，点 B の座標は　**$(-2,\ 6)$**

(2) A$(1,\ 0)$，B$(-2,\ 6)$，P$(t,\ t-t^3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 6), \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(t-1,\ -t^3+t)$$

$-2<t<1$ のとき，△ABP の面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}|-3(-t^3+t)-6(t-1)|=\frac{3}{2}|t^3-3t+2|\\&=\frac{3}{2}|(t+2)(t-1)^2|=\boldsymbol{\frac{3}{2}(t+2)(t-1)^2}\end{aligned}$$



(3) $S(t)=\dfrac{3}{2}(t^3-3t+2)$ より

$$S'(t)=\frac{3}{2}(3t^2-3)=\frac{9}{2}(t+1)(t-1)$$

$-2<t<1$ における $S(t)$ の増減は次のようになる．

t	(-2)	$\cdots$	-1	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	(0)	$\nearrow$	6	$\searrow$	(0)

よって，求める最大値は　$S(-1)=\mathbf{6}$　■

1.6 (1) 点 $(\alpha,\ \beta)$ $(\alpha > 1)$ は，$C_1 : y = |x^2 - 1|$ と $C_2 : y = -(x-\alpha)^2 + \beta$ の共有点であるから

$$|\alpha^2 - 1| = -(\alpha - \alpha)^2 + \beta \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \alpha^2 - 1$$

C_1 と C_2 は 2 点 $(\alpha,\ \beta)$，$(p,\ q)$ で交わるから　$p \neq \alpha$
$C_1 : y = |x^2 - 1|$ と $C_2 : y = -x^2 + 2\alpha x - 1$ の共有点の x 座標について，次の (i)，(ii) の場合に分けて求める．

(i) $x^2 - 1 \geqq 0$，すなわち，$x \leqq -1,\ 1 \leqq x$ のとき

$$x^2 - 1 = -x^2 + 2\alpha x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad x(x - \alpha) = 0$$

共有点の x 座標は α であるから，この区間に共有点 $(p,\ q)$ はない．

(ii) $x^2 - 1 < 0$，すなわち，$-1 < x < 1$ のとき，

$$-x^2 + 1 = -x^2 + 2\alpha x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{1}{\alpha}$$

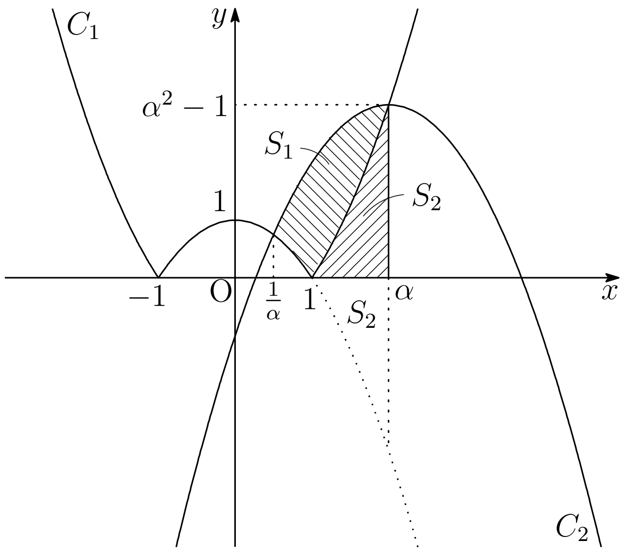
$\alpha > 1$ に注意して，$0 < \dfrac{1}{\alpha} < 1$　ゆえに　$p = \dfrac{1}{\alpha}$　よって　$0 < p < 1$

(2) 下の図から，次が成立する．

$$
\begin{aligned}
S_1+2S_2 &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \left\{(-x^2+2\alpha x-1)-(-x^2+1)\right\} dx \\
&= 2\alpha \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \left(x-\frac{1}{\alpha}\right) dx = \alpha \Big[\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2 \Big]_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \\
&= \alpha\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \alpha^3-2\alpha+\frac{1}{\alpha} \\
S_2 &= \int_1^{\alpha} (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{\alpha} = \frac{\alpha^3}{3}-\alpha+\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (S_1+2S_2)-2S_2 \\
&= \alpha^3-2\alpha+\frac{1}{\alpha}-2\left(\frac{\alpha^3}{3}-\alpha+\frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{\alpha^3}{3}+\frac{1}{\alpha}-\frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$



(3) (2) の結果および $\alpha>1$ より

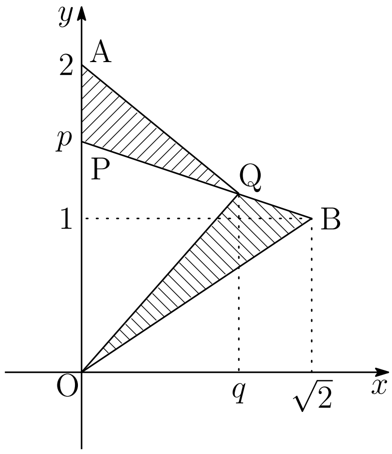
$$
\begin{aligned}
S_1-S_2 &= (S_1+2S_2)-3S_2 \\
&= \left(\alpha^3-2\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-3\left(\frac{\alpha^3}{3}-\alpha+\frac{2}{3}\right) \\
&= \alpha-2+\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\alpha-1)^2>0
\end{aligned}
$$

よって　　$S_1>S_2$ ■

1.7 (1) 2 点 P$(0,\ p)$，B$(\sqrt{2},\ 1)$ を通る直線であるから

$$y - p = \frac{1-p}{\sqrt{2}-0}(x-0) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{1-p}{\sqrt{2}}x + p}$$

(2) 点 Q の x 座標を q とする．面積について $\triangle\mathrm{APQ} = \triangle\mathrm{OBQ}$ より，$\triangle\mathrm{AOQ} = \triangle\mathrm{OBP}$ であるから



$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot q = \frac{1}{2}\cdot p\cdot\sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad q = \frac{p}{\sqrt{2}} \quad \cdots ①$$

よって

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OBQ} &= \triangle\mathrm{OBP} - \triangle\mathrm{OQP} \\ &= \frac{1}{2}\cdot p\cdot\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot p\cdot\frac{p}{\sqrt{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}p(2-p)}\end{aligned}$$

(3) ① より，$p = \sqrt{2}q$ であるから，これを (1) の結果に代入すると

$$y = \frac{1-\sqrt{2}q}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}q$$

上式に $x = q$ を代入すると　$y = -q^2 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}q$

$\mathrm{Q}\left(q, -q^2 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}q\right)$ であるから $(0 < q < \sqrt{2})$，点 Q の軌跡は

$$\textbf{放物線}\ \boldsymbol{y = -x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x \quad (0 < x < \sqrt{2})}$$

■

1.8 (1) 2 回の得点が 2 点と 1 点であるから

$$P(S_2 = 3) = \frac{2!}{1!1!}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{9}}$$

(2) S_3 が奇数となるのは，3 回とも奇数または 1 回だけ奇数であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^2 = \mathbf{\frac{19}{54}}$$

(3) $P(S_2 = 4)$，$P(S_2 = 2)$ を求めると

$$P(S_2 = 4) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$$
$$P(S_2 = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2!}{1!1!}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{13}{36}$$

これと (1) の結果から

$$\begin{aligned}
P(S_4 = 8) &= P(S_2 = 4)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}\\
P(S_4 = 7) &= 2P(S_2 = 3)P(S_2 = 4) = 2\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{81}\\
P(S_4 = 6) &= P(S_2 = 3)^2 + 2P(S_2 = 2)P(S_2 = 4)\\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 2\cdot\frac{13}{36}\cdot\frac{1}{9} = \frac{5}{54}
\end{aligned}$$

したがって

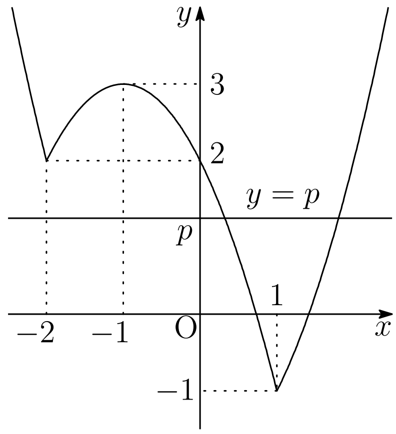
$$P(S_4 \geqq 7) = P(S_4 = 8) + P(S_4 = 7) = \frac{1}{81} + \frac{2}{81} = \frac{1}{27} < \frac{1}{9}$$
$$P(S_4 \geqq 6) = P(S_4 \geqq 7) + P(S_4 = 6) = \frac{1}{27} + \frac{5}{54} = \frac{7}{54} > \frac{1}{9}$$

よって，求める最小の整数 n は　　$\boldsymbol{n = 7}$ ■

1.9 (1) 曲線 $y = |x^2 + x - 2|$ と直線 $y = x + p$ の共有点の個数は，
曲線 $y = |x^2 + x - 2| - x$ と直線 $y = p$ の共有点の個数と等しい．

$$|x^2 + x - 2| - x = \begin{cases} x^2 - 2 & (x \leqq -2,\ 1 \leqq x) \\ -x^2 - 2x + 2 & (-2 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

したがって，$y = |x^2 + x - 2| - x$ と $y = p$ のグラフは次のようになる．



よって，求める共有点の個数は

$\boldsymbol{p < -1}$ **のとき**	**0 個**
$\boldsymbol{p = -1}$ **のとき**	**1 個**
$\boldsymbol{-1 < p < 2}$ **のとき**	**2 個**
$\boldsymbol{p = 2}$ **のとき**	**3 個**
$\boldsymbol{2 < p < 3}$ **のとき**	**4 個**
$\boldsymbol{p = 3}$ **のとき**	**3 個**
$\boldsymbol{3 < p}$ **のとき**	**2 個**

(2) $a = \displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)\,dt$ とおくと

$$f(x) = x^2 + \int_{-1}^{2} (xf(t) - t)\,dt = x^2 + x\int_{-1}^{2} f(t)\,dt - \int_{-1}^{2} t\,dt$$
$$= x^2 + ax - \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{2} = x^2 + ax - \frac{3}{2}$$

したがって　$a = \displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)\,dt = \int_{-1}^{2}\left(t^2 + at - \frac{3}{2}\right)dt$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{a}{2}t^2 - \frac{3}{2}t\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}$$

これを解いて　$a = 3$　よって　$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 3x - \frac{3}{2}}$ ■

1.10 (1) $x=\sqrt{t}$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

x	$\sqrt{k\pi} \longrightarrow \sqrt{(k+1)\pi}$
t	$k\pi \longrightarrow (k+1)\pi$

$$A_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$ において

$$\frac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}} \leqq \frac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}$$

したがって

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\,dt \leqq A_k \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}\,dt$$

$t=k\pi+u$ とおくと $\dfrac{dt}{du}=1$

$$\int_0^{\pi}\frac{|\sin(k\pi+u)|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\,du \leqq A_k \leqq \int_0^{\pi}\frac{|\sin(k\pi+u)|}{2\sqrt{k\pi}}\,du$$
$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\int_0^{\pi}|\sin u|\,du \leqq A_k \leqq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^{\pi}|\sin u|\,du$$

$\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin u|\,du=\int_0^{\pi}\sin u\,du=\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi}=2$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) $B_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} A_k$ であるから，(1) の結果より

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq B_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \lim_{n\to\infty} B_n \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}} \qquad (*)$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[\,2\sqrt{x}\,\Big]_1^2 = 2(\sqrt{2}-1)$$

これらを (∗) に代入すると，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \boldsymbol{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}}$$

■

1.11 $I=\displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 2023$ のとき，$\dfrac{2}{x+e^x} \leqq \dfrac{2}{e^x}$ より

$$I \leqq \int_0^{2023}\frac{2}{e^x}\,dx=\int_0^{2023}2e^{-x}\,dx=\Big[-2e^{-x}\Big]_0^{2023}=2-\frac{2}{e^{2023}}<2$$

$f(x)=\dfrac{2}{x+e^x}$ とおき $(x \geqq 0)$，$(x+e^x)f(x)=2$ を微分すると

$$(1+e^x)f(x)+(x+e^x)f'(x)=0 \tag{1}$$

これをさらに微分すると

$$e^xf(x)+2(1+e^x)f'(x)+(x+e^x)f''(x)=0 \tag{2}$$

(1)，(2) から $f'(x)$ を消去すると

$$\begin{aligned}(x+e^x)^2f''(x)&=\{e^{2x}+(4-x)e^x+2\}f(x)\\&=\{e^x(e^x-x-1)+5e^x+2\}f(x)>0\end{aligned} \tag{3}$$

$(1+e)f(1)=2$ であるから，$x=1$ を (1) に代入すると

$$2+(1+e)f'(1)=0 \quad ゆえに \quad f'(1)=-\frac{2}{1+e}$$

$C: y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線 $\ell: y=g(x)$ の方程式について

$$\begin{aligned}g(x)&=f'(1)(x-1)+f(1)\\&=-\frac{2}{1+e}(x-1)+\frac{2}{1+e}=-\frac{2}{1+e}(x-2)\end{aligned}$$

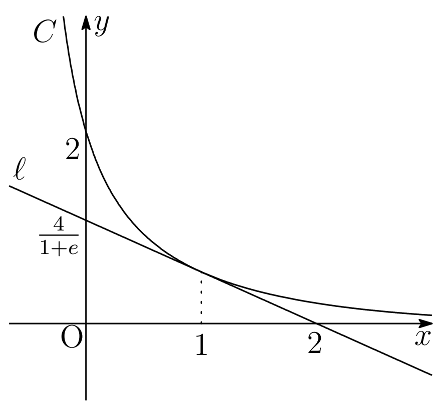
(3) より，$x \geqq 0$ において

$$f(x) \geqq g(x)$$

ℓ と x 軸，y 軸で囲まれ部分の面積から

$$I>\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{4}{1+e}>\frac{1+e}{1+e}=1$$

$1<I<2$ より，I の整数部分は　**1**



別解 $g(x)=\dfrac{x+e^x}{e^x}=xe^{-x}+1$ とおくと　$g'(x)=(1-x)e^{-x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$e^{-1}+1$	$\searrow$

これから　$\dfrac{x+e^x}{e^x}\leqq e^{-1}+1$　ゆえに　$x+e^x\leqq(e^{-1}+1)e^x$

$0\leqq x\leqq 2023$ のとき，$e^x\leqq x+e^x\leqq(e^{-1}+1)e^x$ より

$$\frac{2e}{e+1}\int_0^{2023}e^{-x}\,dx\leqq\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx\leqq 2\int_0^{2023}e^{-x}\,dx \qquad (*)$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{2023}e^{-x}\,dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^{2023}=1-e^{-2023}$

$1-e^{-2}<1-e^{-2023}<1$ であるから，上式および $(*)$ より

$$\frac{2e}{e+1}(1-e^{-2})<\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx<2\cdot1$$

$$2-\frac{2}{e}<\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx<2$$

$1<1+\dfrac{e-2}{e}=2-\dfrac{2}{e}$ より　　$\displaystyle 1<\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}\,dx<2$

よって，求める整数値は　**1**　■

1.12 ${}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1}=2({}_n\mathrm{C}_{k-1}+{}_n\mathrm{C}_{k+1})$ より

$$\frac{(n+2)!}{(k+1)!(n-k+1)!}=2\left\{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!}\right\}$$
$$(n+2)(n+1)=2\{(k+1)k+(n-k+1)(n-k)\}$$
$$(2k-n)^2=n+2$$

$n+2$ は 4 以上 22 以下の平方数となるから，$n+2=2^2,\ 3^2,\ 4^2$

$$k=\frac{n\pm\sqrt{n+2}}{2},\quad n=2,\ 7,\ 14$$

$1\leqq k\leqq n-1$ であることに注意すると

$$\boldsymbol{(n,\ k)=(7,\ 2),\ (7,\ 5),\ (14,\ 5),\ (14,\ 9)}$$ ■

1.13 k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ で A，B，C がそれぞれ勝つ確率を $P_{\mathrm{A}}(k)$，$P_{\mathrm{B}}(k)$，$P_{\mathrm{C}}(k)$ とすると

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{A}}(k) &= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3} \\
P_{\mathrm{B}}(k) &= \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \times \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{5}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3} \\
P_{\mathrm{C}}(k) &= \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \times \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{25}{216}\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3} = \frac{1}{1-\dfrac{125}{216}}\left\{1-\left(\frac{125}{216}\right)^{n}\right\} = \frac{216}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}$$ より

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{A}} &= \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{A}}(k) = \frac{1}{6}\cdot\frac{216}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\} = \boldsymbol{\frac{36}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}} \\
P_{\mathrm{B}} &= \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{B}}(k) = \frac{5}{36}\cdot\frac{216}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\} = \boldsymbol{\frac{30}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}} \\
P_{\mathrm{C}} &= \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{C}}(k) = \frac{25}{216}\cdot\frac{216}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\} = \boldsymbol{\frac{25}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}}
\end{aligned}$$

■

1.14 (1) $e^x = \dfrac{2x^3}{x-1}$ の実数解は，$2x^3 - (x-1)e^x = 0$ の解と一致する．
$g(x) = 2x^3 - (x-1)e^x$ とおくと

$$g'(x) = 6x^2 - xe^x = x(6x - e^x)$$

$x < 0$ において，常に $g'(x) > 0$ であるから，$x < 0$ において単調増加．

$$g(-1) = \frac{2}{e} - 2 < 0, \quad g(0) = 1 > 0$$

よって，$g(x) = 0$ を満たす $c < 0$ $(-1 < c < 0)$ が，ただ一つ存在する．

(2) $y = x(x^2 - 3)$ と $y = e^x$ のグラフの共有点の x 座標は，$y = x^2 - \dfrac{e^x}{x}$ と $y = 3$ のグラフの共有点の x 座標と一致する．$h(x) = x^2 - \dfrac{e^x}{x}$ とすると

$$h'(x) = 2x - \frac{(x-1)e^x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

(1) の結果から

x	$\cdots$	c	$\cdots$	0
$h'(x)$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$h(-1) > h(c)$，$h(-1) = 1 + \dfrac{1}{e} < 3$ より　$h(c) < 3$

$$\lim_{h \to -\infty} h(x) = \infty, \quad \lim_{h \to -0} h(x) = \infty$$

よって，求める共有点の個数は　**2 個**

(3) $y = f(x)$ と $y = e^x$ の共有点の x 座標は，$y = h(x)$ と $y = a$ のグラフの共有点の x 座標と一致する．この共有点が 1 個のみであるから，(2) の結果から，$a = h(c)$ のただ 1 つ存在する． ■

1.15 (1)

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx &= \frac{4}{3}\int_1^4 (x^{\frac{3}{2}})'\log x\,dx \\ &= \frac{4}{3}\Big[\,x^{\frac{3}{2}}\log x\,\Big]_1^4 - \frac{4}{3}\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{64}{3}\log 2 - \frac{8}{9}\Big[\,x^{\frac{3}{2}}\,\Big]_1^4 = \boldsymbol{\frac{64}{3}\log 2 - \frac{56}{9}}\end{aligned}$$

(2) $x^4+x^3+x^2+x+1$ に関する合同式を考えると

$$x^4+x^3+x^2+x+1 \equiv 0$$

したがって　　$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\equiv 0$

$x^5\equiv 1$ であるから　　$x^{2023}-1=(x^5)^{404}x^3-1\equiv x^3-1$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{x^3-1}$　■

1.16 (1)

$$(*)\begin{cases} |2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=1 \\ (2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{u}$，$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ とおくと　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{3}\vec{u}+\dfrac{1}{3}\vec{v}$

これらを $(*)$ に代入すると　$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$

$$\vec{u}\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}\right)=\frac{1}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

よって　$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})=\mathbf{0}$

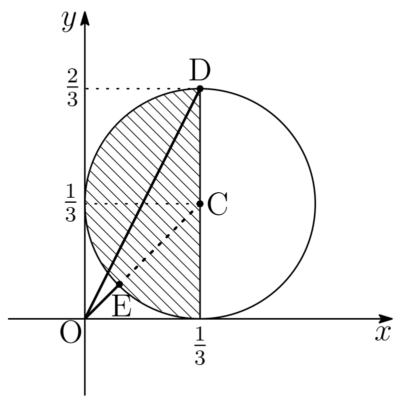
(2) 与えられた条件から

$$\left|\overrightarrow{OP}-\left(\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}\right)\right|\leqq\frac{1}{3}\quad \text{かつ}\quad \overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}\leqq\frac{1}{3}$$

(1) の結果から，$\vec{u}=(1,\ 0)$，$\vec{v}=(0,\ 1)$ とし，$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$ とおくと

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\frac{1}{9}\quad \text{かつ}\quad x\leqq\frac{1}{3}$$

点 P の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



上の図において　$|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$|\overrightarrow{OE}|=|\overrightarrow{OC}|-|\overrightarrow{CE}|=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

よって　$|\overrightarrow{OP}|$ の最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}}$ ■

1.17 (1) $f(x)=x^2+ax+b$ より　$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4}$

$f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき

$$-\frac{a}{2}>0,\quad f(0)=b>0,\quad b-\frac{a^2}{4}<0$$

よって，求める必要十分条件は　$\boldsymbol{a<0,\ b>0,\ b<\dfrac{a^2}{4}}$

(2) (i) $f(x)=0$ が実数解をもつ，すなわち，$a^2-4b\geqq 0$ のとき

$$-\frac{a}{2}<0,\quad f(0)=b>0$$

したがって　$a>0,\ \ b>0,\ \ b\leqq\dfrac{a^2}{4}$

(ii) $f(x)=0$ が虚数解をもつ，すなわち，$a^2-4b<0$ のとき

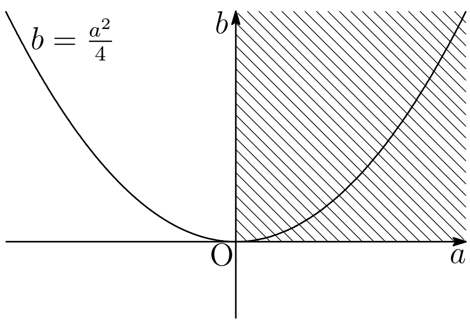
$f(x)=0$ の虚数解 $\dfrac{-a\pm\sqrt{-a^2+4b}\,i}{2}$ の実部 $-\dfrac{a}{2}$ が負であるから

$$-\frac{a}{2}<0\quad すなわち\quad a>0$$

したがって　$a>0,\ \ b>\dfrac{a^2}{4}$

(i)，(ii) から　$a>0,\ \ b>0$

よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，図の斜線部分で境界線を含まない．



(3) (i) $f(x)=0$ が実数解をもつ，すなわち，$a^2-4b \geqq 0$ のとき

$$-1 < -\frac{a}{2} < 0,\quad f(0)=b>0,\quad f(-1)=1-a+b>0$$

したがって　　$0<a<2,\ \ b>0,\ \ b>a-1,\ \ b \leqq \dfrac{a^2}{4}$

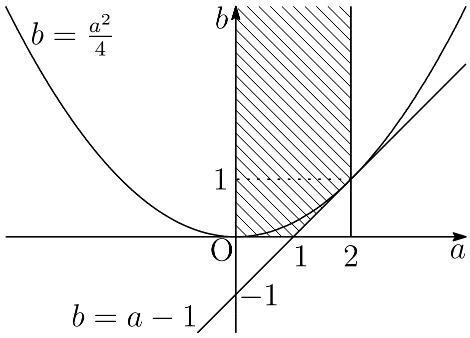
(ii) $f(x)=0$ が虚数解をもつ，すなわち，$a^2-4b<0$ のとき
$f(x)=0$ の虚数解 $\dfrac{-a \pm \sqrt{-a^2+4b}\,i}{2}$ の実部 $-\dfrac{a}{2}$ が -1 より大きく，0 より小さいから

$$-1 < -\frac{a}{2} < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0<a<2$$

したがって　　$0<a<2,\ \ b>\dfrac{a^2}{4}$

(i)，(ii) から　　$0<a<2,\ \ b>0,\ \ b>a-1$

よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，図の斜線部分で境界線を含まない．



■

1.18 (1) $2n$ 枚のカードのうち，偶数のカードおよび奇数のカードはともに n 枚ある．$2n$ 枚のカードから 2 枚取り出すとき，2 枚とも偶数のカードまたは 2 枚とも奇数のカードを取り出す確率であるから

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=\frac{2\cdot{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\Big/\frac{2n(2n-1)}{2}=\boldsymbol{\frac{n-1}{2n-1}}$$

(2) (i) $n \geqq 3$ のとき，$2n$ 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき，偶数のカード 3 枚または偶数のカード 1 枚と奇数のカード 2 枚を取り出す確率であるから

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{4(2n-1)}=\frac{1}{2}\qquad(*)$$

(ii) $n=2$ のとき，$2n$ 枚のカードから偶数のカード 1 枚と奇数のカード 2 枚を取り出す確率であるから，$(*)$ に $n=2$ を代入したものである．

(i)，(ii) より，求める確率は　$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) $2n$ 枚から 2 枚のカードを取り出すとき，1 番目に取り出すカードと 2 番目に取り出すカードの順番を区別すると，取り出す場合の総数は

$${}_{2n}\mathrm{P}_2=2n(2n-1)$$

1 番目に取り出したカードの数を k とする．

(i) $1\leqq k\leqq n$ のとき，2 枚目のカードは，$2n+1-k$ から $2n$ の数が書かれた k 通り．

(ii) $n+1\leqq k\leqq 2n$ のとき，2 枚の目のカードは，k を除く $2n+1-k$ から $2n$ の数が書かれた $k-1$ 通り．

したがって，(i)，(ii) の場合の総数は

$$\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=n+1}^{2n}(k-1)=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}n\{n+(2n-1)\}=2n^2$$

よって，求める確率は

$$\frac{2n^2}{2n(2n-1)}=\boldsymbol{\frac{n}{2n-1}}$$

■

1.19 (1) 2 点 Q，R は点 P$(\alpha,\ \beta)$ とそれぞれ，x 軸，直線 $y=x$ に関して対称より

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, -\boldsymbol{\beta}),\quad \mathbf{R}(\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\alpha})$$

(2) P$(\alpha,\ \beta)$ は直線 $y=x$ 上にないから　$\beta-\alpha \neq 0$

したがって，2 点 Q$(\alpha, -\beta)$，R$(\beta,\ \alpha)$ を通る直線の方程式は

$$y+\beta = \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}(x-\alpha) \quad ゆえに \quad y=\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}x - \frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta-\alpha} \quad \cdots ①$$

点 P$(\alpha,\ \beta)$ は x 軸上の点ではないから　$\beta \neq 0$　$\cdots$②

$-(\alpha^2+\beta^2) \neq 0$ となるから，$\alpha+\beta=0$ のとき，① は　$y=-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta-\alpha}$

このとき，$-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta-\alpha} \neq 0$ とない，直線 QR は x 軸と共有点をもたない．

直線 QR が x 軸と共有点をもつための条件は

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$$

このとき，① と直線 $y=0$ を連立して　$\mathbf{S}\left(\dfrac{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2}{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}},\ \mathbf{0}\right)$

(3) ② から，直線 OB と直線 QR が一致することはないから，直線 OB と直線 QR が交点を持つための条件は

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \neq 1 \quad すなわち \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$$

このとき，① と直線 $y=x$ を連立して　$\mathbf{T}\left(\dfrac{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2}{\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}},\ \dfrac{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2}{\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}}\right)$

(4) (2)，(3) で示した条件は

$$\alpha \neq 0,\quad \beta \neq 0,\quad \alpha \neq \beta,\quad \alpha \neq -\beta \qquad (*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{BS}}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1, -1\right)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BS}}$ より

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1=0 \quad ゆえに \quad \alpha^2+\beta^2=\alpha+\beta \quad \cdots ③$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3,\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AT}}$ より

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}-3=0 \quad ゆえに \quad \alpha^2+\beta^2=3\alpha \quad \cdots ④$$

$(*)$ に注意して，③，④ を解くと　$\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$，$\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$　■

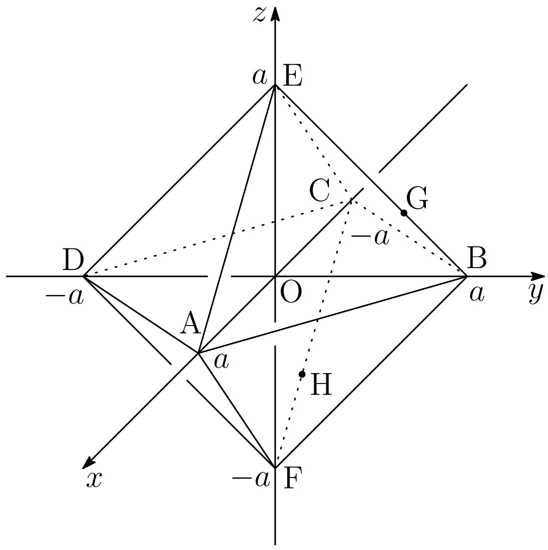
1.20 (1) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおく．

O を原点とする座標空間に 6 点

$$\begin{array}{ll} \mathrm{A}(a,\ 0,\ 0), & \mathrm{B}(0,\ a,\ 0), \\ \mathrm{C}(-a,\ 0,\ 0), & \mathrm{D}(0,-a,\ 0), \\ \mathrm{E}(0,\ 0,\ a), & \mathrm{F}(0,\ 0,-a) \end{array}$$

をとると

$$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,\ a,\ 0),$$
$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-a,-a,\ 0),$$
$$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(-a,\ 0,\ a)$$



したがって　$\vec{b}\cdot\vec{d}=\mathbf{0},\quad \vec{b}\cdot\vec{e}=a^2=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\quad \vec{d}\cdot\vec{e}=a^2=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(-a,\ 0,-a)$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$ より

$$\begin{aligned} (-a,\ 0,-a)&=p(-a,\ a,\ 0)+q(-a,-a,\ 0)+r(-a,\ 0,\ a) \\ a(-1,\ 0,-1)&=a(-p-q-r,\ p-q,\ r) \end{aligned}$$

したがって　$-p-q-r=-1,\quad p-q=0,\quad r=-1$

これを解いて　$\boldsymbol{p=1,\ q=1,\ r=-1}$

(3) G は辺 BE を $1:2$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{3}(0,\ a,\ 0)+\frac{1}{3}(0,\ 0,\ a)=\frac{a}{3}(0,\ 2,\ 1)$$

H は辺 CF を $t:1-t$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-t)(-a,\ 0,\ 0)+t(0,\ 0,-a) \\ &=a(t-1,\ 0,-t) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \frac{a}{3}(0,\ 2,\ 1) - a(1,\ 0,\ 0) = \frac{a}{3}(-3,\ 2,\ 1) \\
\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= a(t-1,\ 0, -t) - a(1,\ 0,\ 0) = a(t-2,\ 0, -t) \\
|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2 &= \frac{a^2}{9}(9+4+1) = \frac{7}{9} \\
|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 &= a^2\{(t-2)^2 + t^2\} = t^2 - 2t + 2 \\
\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \frac{a^2}{3}\{-3(t-2) + 2\cdot 0 + 1\cdot(-t)\} = \frac{1}{3}(3-2t)
\end{aligned}$$

$\triangle$AGH の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}})^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}(t^2-2t+2) - \frac{1}{9}(3-2t)^2} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{7(t^2-2t+2) - (3-2t)^2} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{3t^2-2t+5} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}}
\end{aligned}$$

$0 < t < 1$ より，$\boldsymbol{t = \frac{1}{3}}$ のとき，S は最小値 $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{14}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{42}}{18}}$ をとる． ■

1.21 (1) $\dfrac{7!}{3!}=\mathbf{840}$ (通り)

(2) 3 つの A と D が隣り合わない文字数の列を求める．

(i) <u>D が左端にあるとき</u>
D の右隣の文字は I，M，Y のいずれかで 3 通りあり，それぞれの文字に対して (A を 3 個含む) 残り 5 文字の並べ方は

$$\frac{5!}{3!}=20 \quad (\text{通り})$$

よって $3{\cdot}20=60$ (通り)

(ii) <u>D が右端にあるとき</u>
(i) と同様に，60 通りある．

(iii) <u>D が両端にないとき</u>
D の両隣の文字は I，M，Y のいずれかで，${}_3\mathrm{P}_2=6$ 通りある．さらに，この文字列をひとまとまりとみた 5 つの並べ方の総数であるから

$$6{\cdot}\frac{5!}{3!}=120 \quad (\text{通り})$$

(1) と (i)～(iii) から，求める総数は

$$840-(60+60+120)=\mathbf{600} \quad (\text{通り})$$

(3) A のどの 2 つも隣り合わない文字列は

$$|\bigcirc|\bigcirc|\bigcirc|\bigcirc|$$

の並びにおいて，4 つの ◯ に D，I，M，Y が 1 つずつ入り，5 つの (|) のうち 3 つに A が入る総数であるから

$$4!{\cdot}{}_5\mathrm{C}_3=24\times 10=240 \quad (\text{通り})$$

よって，求める総数は，これと (1) の結果から

$$840-240=\mathbf{600} \quad (\text{通り})$$

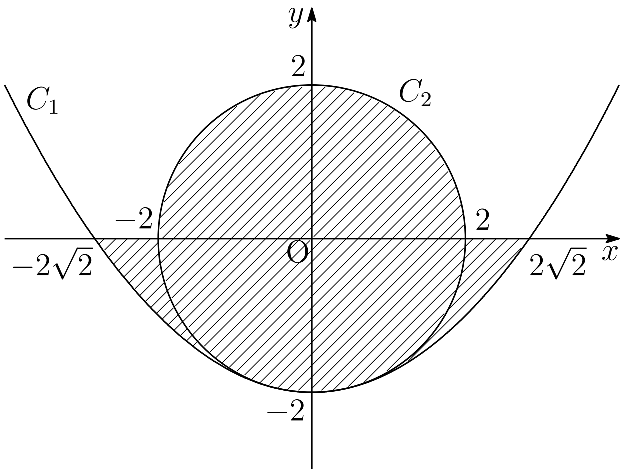
(4) 左端が Y である文字列は $\dfrac{6!}{3!}=120$ (通り)
したがって，左端が Y でない文字列は $840-120=720$ (通り)
左端が YAA である文字列は $4!=24$ (通り)
左端が YAD，YAI である文字列はそれぞれ ${}_4\mathrm{P}_2=12$ (通り)
左端が YAM である文字列を順に並べると

YAMAADI, YAMAAID, YAMADAI, $\cdots$

よって $720+24+12{\cdot}2+3=\mathbf{771}$ (番目) ■

1.22 (1) $C_1 : y = \dfrac{1}{4}x^2$，$C_2 : x^2 + y^2 = 4$ とする．

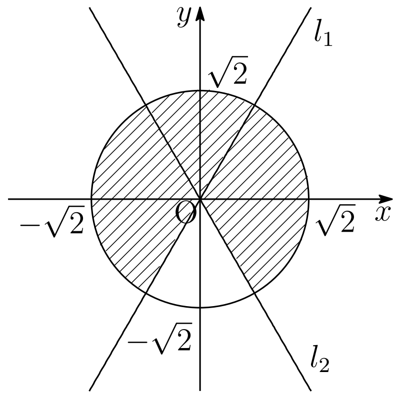
$\dfrac{1}{4}x^2 - 2 \leqq y \leqq 0$ の表す領域は，C_1 と x 軸で囲まれた部分 (境界線を含む) を表し，$x^2 + y^2 \leqq 4$ の表す領域は，C_2 の内部 (境界線を含む) を表す．よって，D_1 の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



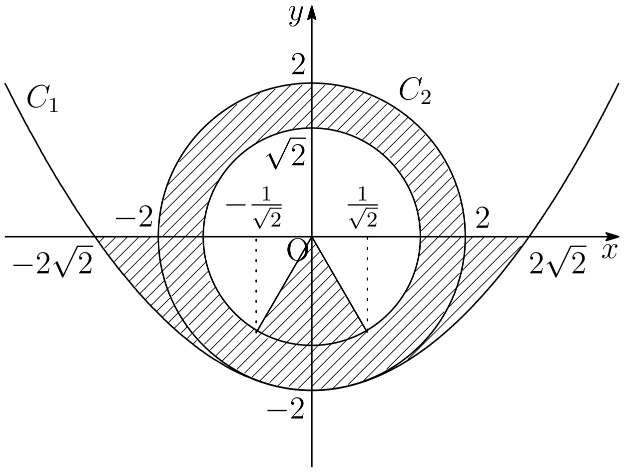
(2) (1) の結果から，領域 D_1 の面積を S_1 とすると

$$
\begin{aligned}
S_1 &= -\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4}x^2 - 2 \right) dx + \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 \\
&= -\frac{1}{4}\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})\, dx + 2\pi \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}(4\sqrt{2})^3 + 2\pi = \boldsymbol{\frac{16\sqrt{2}}{3} + 2\pi}
\end{aligned}
$$

(3) 領域 X は，次の図の斜線部分で境界線を含まない．



よって，領域 Y は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



(4) 半径 $\sqrt{2}$，中心角 $\dfrac{5\pi}{3}$ の扇形の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

よって，領域 Y の面積は

$$S_1 - S_2 = \frac{16\sqrt{2}}{3} + 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{16\sqrt{2}+\pi}{3}}$$

■

1.23 (1) $x^4-6x^2+25=(x^2+5)^2-16x^2$
$$=\boldsymbol{(x^2+4x+5)(x^2-4x+5)}$$

(2) (1) の結果から，一般性を失うことなく，$x^2+4x+5=0$ の解を $p,\ q$ とし，$x^2-4x+5=0$ の解を $r,\ s$ とすると，解と係数の関係から

$$p+q=-4,\quad pq=5,\quad r+s=4,\quad rs=5$$

したがって

$$p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)=(-4)^3-3\cdot5\cdot(-4)=-4$$
$$r^3+s^3=(r+s)^3-3rs(r+s)=4^3-3\cdot5\cdot4=4$$

よって　$p^3+q^3+r^3+s^3=-4+4=\mathbf{0}$

(3) (2) の結果を用いると

$$\begin{aligned}&p^3q^3+p^3r^3+p^3s^3+q^3r^3+q^3s^3+r^3s^3\\=&(pq)^3+(rs)^3+(p^3+q^3)(r^3+s^3)\\=&5^3+5^3+(-4)\cdot4=\mathbf{234}\end{aligned}$$

■

1.24 (1) $(*)\quad x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$

$x=0$ は方程式 $(*)$ の解ではないから，$(*)$ の両辺を x^2 で割ると

$$x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

したがって $\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2=0$ すなわち $(x^2-x+1)^2=0$

これを解いて $\boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

(2) $(**)\quad (\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$

$\alpha\neq\beta$ であるから，$(**)$ の両辺を $(\beta-\alpha)^4$ で割ると

$$1+\left\{\frac{(\beta-\alpha)-(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha}\right\}^4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^4=0$$

$z=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおくと $1+(1-z)^4+z^4=0$

整理すると $z^4-2z^3+3z^2-2z+1=0$

(1) の結果から，これを解くと $z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\imath}{2}$

したがって $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$ (複号同順)

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，$\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{\pi}{3}$ より **△ABC は正三角形** ■

1.25 (1) $f(x)=-x+2a\sqrt{x-3}$ より　$f'(x)=-1+\dfrac{a}{\sqrt{x-3}}$

ゆえに　　$f(7)=-7+4a,\ f'(7)=-1+\dfrac{a}{2}$

したがって，C 上の点 $(7,\ f(7))$ における接線の方程式は

$$y-(-7+4a)=\left(-1+\frac{a}{2}\right)(x-7)$$

よって　　$\boldsymbol{l: \left(\dfrac{a}{2}-1\right)x-y+\dfrac{a}{2}=0}$

(2) 点 A$(4,\ 0)$ を通り，l に垂直な直線は

$$1(x-4)+\left(\frac{a}{2}-1\right)y=0 \quad \text{ゆえに} \quad x+\left(\frac{a}{2}-1\right)y-4=0 \quad \cdots ①$$

直線 ① と直線 $y=x-2 \cdots$ ② の交点が P である．

①，② から y を消去すると

$$x+\left(\frac{a}{2}-1\right)(x-2)-4=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=2+\frac{4}{a}$$

これを ② に代入して　$y=\dfrac{4}{a}$　ゆえに　$\mathrm{P}\left(2+\dfrac{4}{a},\ \dfrac{4}{a}\right)$

A，P の中点 $\left(3+\dfrac{2}{a},\ \dfrac{2}{a}\right)$ は l 上の点であるから

$$3+\frac{2}{a}+\left(\frac{a}{2}-1\right)\cdot\frac{2}{a}-4=0 \quad \text{整理すると} \quad a^2-a-2=0$$

したがって　$(a+1)(a-2)=0$　これを解いて　$\boldsymbol{a=-1,\ 2}$

(3) l に平行で原点を通る直線 m の方程式は　　$y = \left(\dfrac{a}{2} - 1\right)x$

$g(x) = f(x) - \left(\dfrac{a}{2} - 1\right)x$ とすると

$$g(x) = -x + 2a\sqrt{x-3} - \left(\frac{a}{2} - 1\right)x = \frac{a}{2}\left(4\sqrt{x-3} - x\right)$$

$g(x) = 0$ とすると　$4\sqrt{x-3} = x$

$$16(x-3) = x^2 \quad \text{ゆえに} \quad (x-4)(x-12) = 0$$

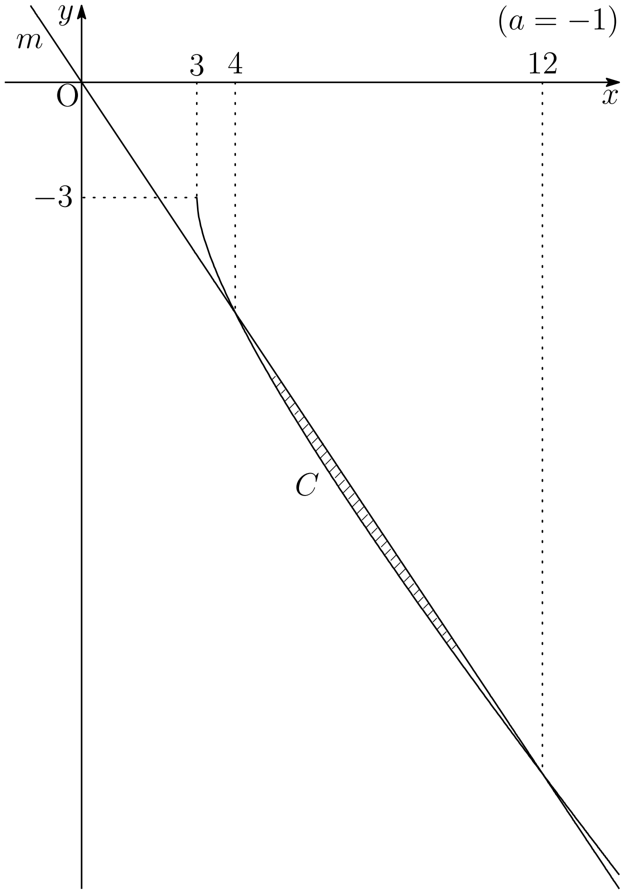
したがって，C と m の交点の x 座標は　$x = 4,\ 12$

$4 \leqq x \leqq 12$ において　$4\sqrt{x-3} - x \geqq 0$

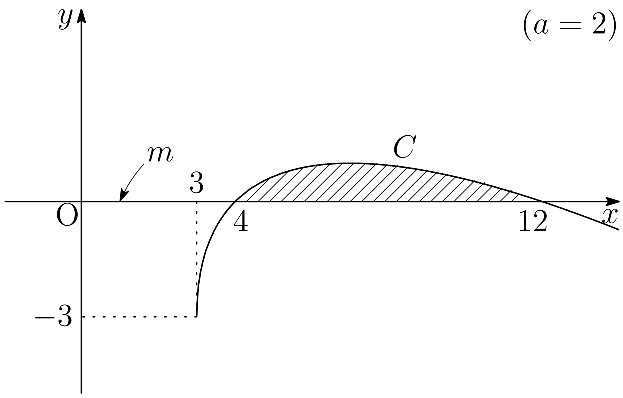
求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_4^{12} |g(x)|\,dx = \frac{|a|}{2}\int_4^{12}(4\sqrt{x-3} - x)\,dx \\ &= \frac{|a|}{2}\left[\,\frac{8}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\,\right]_4^{12} = \frac{8}{3}|a| \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a = -1}$ **のとき** $\boldsymbol{S = \dfrac{8}{3}}$**，**　$\boldsymbol{a = 2}$ **のとき** $\boldsymbol{S = \dfrac{16}{3}}$



$(a=-1)$
y
m
3
4
12
O
x
-3
C



$(a=2)$
y
m
C
3
O
4
12
x
-3

1.26 (1) 与えられた条件から

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = 1\cdot 2\cdot\cos\alpha = 2\cos\alpha$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\alpha = 2\sqrt{3}\sin\alpha$$
$$\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}|\cos\frac{5}{6}\pi = \sqrt{3}\cdot 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 1^2+2^2+(\sqrt{3})^2+2\cdot 2\cos\alpha+2\cdot 2\sqrt{3}\sin\alpha+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\\ &= 4(\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha)+5 = 8\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+5\end{aligned}$$

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ は

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}}\ \textbf{のとき 最大値}\ \boldsymbol{\sqrt{13}},\quad \boldsymbol{\alpha = 0}\ \textbf{のとき 最小値}\ \boldsymbol{3}$$

注意 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ のなす角は設定できないため，本題は全員正解.

(2) $x \neq 1$, $y \neq 1$ に注意して，与えられた 2 式をそれぞれ変形すると

$$2\log_2 x + \log_3 y = 5, \quad \frac{3}{\log_2 x} + \frac{2}{\log_3 y} = 3$$

$X = \log_2 x$, $Y = \log_3 y$ とおくと $(X \neq 0,\ Y \neq 0)$

$$(*)\quad 2X + Y = 5, \quad \frac{3}{X} + \frac{2}{Y} = 3$$

上の 2 式から Y を消去すると $\quad \dfrac{3}{X} + \dfrac{2}{5-2X} = 3$

$$6X^2 - 19X + 15 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2X-3)(3X-5) = 0$$

上式および $(*)$ の第 1 式から $\quad (X,\ Y) = \left(\dfrac{3}{2},\ 2\right),\ \left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

よって $\quad \boldsymbol{(x,\ y) = (2\sqrt{2},\ 9),\ (2^{\frac{5}{3}},\ 3^{\frac{5}{3}})}$

(3) $t = \sin x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = \cos x$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$
t	$0 \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin^2 x}\cdot \cos x\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt$$

$$= \left[\ \log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\ \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \mathbf{2\log(2+\sqrt{3})}$$

■

1.27 (1) 求める確率は

$$\frac{{}_w\mathrm{C}_1 \cdot {}_b\mathrm{C}_1}{{}_{w+b}\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{2wb}{(w+b)(w+b-1)}}$$

(2) 求める確率は

$$\frac{{}_w\mathrm{C}_2}{{}_{w+b}\mathrm{C}_2} \times \frac{w+2}{w+b+2} + \frac{{}_w\mathrm{C}_1 \cdot {}_b\mathrm{C}_1}{{}_{w+b}\mathrm{C}_2} \times \frac{w+1}{w+b+2} + \frac{{}_b\mathrm{C}_2}{{}_{w+b}\mathrm{C}_2} \times \frac{w}{w+b+2}$$

$$= \frac{w(w-1)\times(w+2) + 2wb\times(w+1) + b(b-1)\times w}{(w+b)(w+b-1)(w+b+2)}$$

$$= \frac{w(w+b-1)(w+b+2)}{(w+b)(w+b-1)(w+b+2)} = \boldsymbol{\frac{w}{w+b}}$$

■

1.28 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 2^2 - 2\cdot 0 + 2^2 = \mathbf{8}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = |\vec{c}-\vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{a}|^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\cdot\frac{1}{2} + 2^2 = \mathbf{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{a}|^2 = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} + 2^2 = \mathbf{4}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = s(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + t(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \boldsymbol{(1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = s|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \quad -\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

また　$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = -\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = -0 + 2^2 = 4$

$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = -\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{a}|^2 = -\frac{1}{2} + 2^2 = \frac{7}{2}$

上の諸式と (1) の結果から　$8s + 4t = 4, \quad 4s + 6t = \frac{7}{2}$

これを解いて　$\boldsymbol{s = \frac{5}{16},\ t = \frac{3}{8}}$

(4) $\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8\cdot 6 - 4^2} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 &= (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= |\vec{a}|^2 - s(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}) - t(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= 2^2 - \frac{5}{16}\cdot 4 - \frac{3}{8}\cdot\frac{7}{2} = \frac{23}{16}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{\sqrt{23}}{4}$ より，求める体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{23}}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{46}}{6}}$$

■

1.29 (1) $\sqrt{6}, -\sqrt{6}$ は，4 次方程式 $f(x)=0$ の解であるから，因数定理により，$f(x)$ は $x-\sqrt{6}$, $x+\sqrt{6}$ を因数に持つ．したがって，$f(x)$ は

$$(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) \quad \text{すなわち} \quad x^2-6$$

で割り切れる．

(2) $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ のとき，$f(x)=0$ が $\sqrt{6}, -\sqrt{6}, \alpha, \beta$ を解にもつから，因数定理および最高次の係数に注意して

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-6)(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= (x^2-6)\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \\ &= x^4-(\alpha+\beta)x^3+(\alpha\beta-6)x^2+6(\alpha+\beta)x-6\alpha\beta \end{aligned}$$

同じ次数の項の係数を比較すると

$$a=-(\alpha+\beta), \quad b=\alpha\beta-6, \quad c=6(\alpha+\beta), \quad d=-6\alpha\beta$$

したがって $\quad \boldsymbol{\alpha+\beta=-a, \quad \alpha\beta=b+6,}$
$\boldsymbol{c=-6a, \quad d=-6b-36}$

(3) (2) の結果から，α, β は，2 次方程式

$$x^2+ax+b+6=0 \quad (a,\ b \text{ は実数})$$

の虚数解であることに注意して解くと

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{4(b+6)-a^2}\,i}{2} \quad \cdots ①$$

これと $-\sqrt{6}$ が同一直線上にあるから

$$-\frac{a}{2}=-\sqrt{6} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=2\sqrt{6}}$$

(4) (3) の結果を ① に代入すると $\quad x=-\sqrt{6}\pm\sqrt{b}\,i$

A$(-\sqrt{6}+\sqrt{b}\,i)$，B$(-\sqrt{6}-\sqrt{b}\,i)$，D$(\sqrt{6})$ とすると

$$\mathrm{AB}^2=4b, \quad \mathrm{AD}^2=\mathrm{BD}^2=24+b$$

△ABD が正三角形のとき $\quad 4b=24+b \quad$ これを解いて $\quad \boldsymbol{b=8}$ ■

1.30 (1) $\boxed{\mathbf{3}}$ (2) を参照.

(2) $\boxed{\mathbf{3}}$ (3) を参照.

(3) $\boxed{\mathbf{3}}$ (4) を参照. ■

1.31 (1) $a_n = n,\ b_n = m+1-n$ より

$$\begin{aligned} c_n = a_n b_n = n(m+1-n) &= (m+1)n - n^2 \\ &= -\left(n - \frac{m+1}{2}\right)^2 + \frac{(m+1)^2}{4} \end{aligned}$$

c_n の最大値は

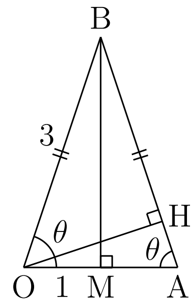
m が奇数のとき, $n = \dfrac{m+1}{2}$ で**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{(m+1)^2}{4}}$

m が偶数のとき, $n = \dfrac{n}{2},\ \dfrac{n}{2}+1$ で**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{m^2+2m}{4}}$

c_n の一般項より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m}\{(m+1)k - k^2\} &= (m+1)\cdot\frac{1}{2}m(m+1) - \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)} \end{aligned}$$

(2) BO $=$ BA より，$\angle$BOA $= \angle$BAO $= \theta$ とおく．
OA の中点を M とすると，OM $= 1$



$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OB}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{AH} = \mathrm{OA}\cos\theta = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{HB} = \mathrm{AB} - \mathrm{AH} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

$\mathrm{AH} : \mathrm{HB} = \dfrac{2}{3} : \dfrac{7}{3} = 2 : 7$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{7\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+7} = \frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

G は $\triangle$OAB の重心であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \left(\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) - \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta = 2\cdot3\cdot\dfrac{1}{3} = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}| = \dfrac{1}{9}|4\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ より

$$|4\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 16|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - 8\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 16\cdot2^2 - 8\cdot2 + 3^2 = 57$$

よって　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{GH}}| = \dfrac{\sqrt{57}}{9}}$

(3) $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \log(1+x)$ とすると

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x}$$

$f(0) = 0$，$x > 0$ で $f'(x) > 0$ であるから

$x > 0$ のとき　$f(x) > 0$　すなわち　$\log(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

別解 $t > 0$ のとき　$1 - t + t^2 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t^3}{1+t} > 0$
したがって，$x > 0$ のとき

$$\int_0^x \left(1 - t + t^2 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \left[\, t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \log(1+t) \,\right]_0^x$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log(1+x) > 0$$

よって，$x > 0$ のとき　$\log(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

(4) $t=a+b-x$ とすると $\dfrac{dt}{dx}=-1$，

x	$a \longrightarrow b$
t	$b \longrightarrow a$

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_b^a f(t)\,(-1)dt$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx \quad \cdots (*)$$

$(*)$ において，$a=1$，$b=2$ とし

$$I = \int_1^2 f(3-x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx$$

とおくと，$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+(3-x)^2}$ のとき

$$2I = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_1^2 f(3-x)\,dx$$
$$= \int_1^2 \frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx + \int_1^2 \frac{(3-x)^2}{(3-x)^2+x^2}\,dx$$
$$= \int_1^2 dx = 1$$

よって $\quad I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ ■

1.32 (1) $f(0) = \mathrm{OA} - \mathrm{OQ} = a + 1 - (a+1) = \mathbf{0}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{OA} - \mathrm{OQ} = \boldsymbol{a + 1 - \sqrt{a^2 - 1}}$

$f(\pi) = \mathrm{OA} - \mathrm{OQ} = a + 1 - (a-1) = \mathbf{2}$

(2) $\mathrm{PQ}^2 = a^2$ より　$(x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = a^2$

$x > \cos\theta$，$a > 1 \geqq \sin\theta$ に注意して

$$\boldsymbol{x = \cos\theta + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} f(\theta) &= a + 1 - x \\ &= \boldsymbol{a + 1 - \cos\theta - \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}} \end{aligned}$$

$$f'(\theta) = \sin\theta + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2 - \sin^2\theta}} = \boldsymbol{\frac{\left(\sqrt{a^2 - \sin^2\theta} + \cos\theta\right)\sin\theta}{\sqrt{a^2 - \sin^2\theta}}}$$

$a > 1$ であるから　$\sqrt{a^2 - \sin^2\theta} + \cos\theta > \sqrt{1 - \sin^2\theta} + \cos\theta$
$= |\cos\theta| + \cos\theta \geqq 0$

$f'(\theta)$ の符号は，$\sin\theta$ の符号と一致する．

θ	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

(4) $f(\theta) = a - \sqrt{a^2 - \sin^2\theta} + 1 - \cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{a^2 - (a^2 - \sin^2\theta)}{a + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}} + \frac{1 - \cos^2\theta}{1 + \cos\theta} \\ &= \left(\frac{1}{a + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}} + \frac{1}{1 + \cos\theta}\right)\sin^2\theta \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \to 0} \frac{f(\theta)}{\theta^2} &= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{1}{a + \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}} + \frac{1}{1 + \cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2}\right) \cdot 1^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2a} + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

1.33 (1) $(*)\quad (4n^2-1)(a_n-a_{n+1})=8(n^2-1)a_na_{n+1}$

$(*)$ に $n=1,\ 2$ を代入すると

$$3(a_1-a_2)=0,\quad 15(a_2-a_3)=24a_2a_3$$

$a_1=\dfrac{1}{8}$ を上の第 1 式に代入して $\quad \boldsymbol{a_2=\dfrac{1}{8}}$

これを第 2 式に代入すると

$$15\left(\frac{1}{8}-a_3\right)=24\cdot\frac{1}{8}a_3 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{a_3=\frac{5}{48}}$$

(2) (1) の結果に注意して，$k \geqq 3$ に対して，$a_n \neq 0\ (n=1,2,\cdots,k)$，$a_{k+1}=0$ と仮定し，$(*)$ に $n=k$ を代入すると

$$(4k^2-1)a_k=0$$

$4k^2-1\neq 0$ より，$a_k=0$ となり，矛盾．よって $\quad a_n\neq 0$

(3) $(*)$ の両辺を $(4n^2-1)a_na_{n+1}$ で割ると

$$\boldsymbol{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{8(n^2-1)}{4n^2-1}}$$

(4) (3) の結果から $\quad \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2-3\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{2-3\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=2(n-1)-3\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから，$a_1=\dfrac{1}{8}$ を代入して整理すると

$$\frac{1}{a_n}=2n+3+\frac{3}{2n-1}=\frac{(2n+3)(2n-1)+3}{2n-1}=\frac{4n(n+1)}{2n-1}$$

よって $\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{2n-1}{4n(n+1)}}$ ■

1.34 (1) $w = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{P}(z_p)$，$\mathrm{Q}(z_q)$，$\mathrm{R}(z_r)$ とおくと，条件から

$$\frac{z_p - 0}{\alpha - 0} = w, \quad \frac{z_q - \beta}{0 - \beta} = w, \quad \frac{z_r - \alpha}{\beta - \alpha} = w$$

ゆえに $\quad z_p = w\alpha, \quad z_q = (1-w)\beta, \quad z_r = (1-w)\alpha + w\beta$

$w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ より

$$\mathbf{P}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha\right),\ \mathbf{Q}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\beta\right),\ \mathbf{R}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\beta\right)$$

(2) $\mathrm{G}(z_1)$，$\mathrm{H}(z_2)$，$\mathrm{I}(z_3)$ とおくと，条件から

$$(*)\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{3}(w\alpha + 0 + \alpha) = \dfrac{1+w}{3}\alpha \\ z_2 = \dfrac{1}{3}\{(1-w)\beta + \beta + 0\} = \dfrac{2-w}{3}\beta \\ z_3 = \dfrac{1}{3}\{(1-w)\alpha + w\beta + \alpha + \beta\} = \dfrac{2-w}{3}\alpha + \dfrac{1+w}{3}\beta \end{cases}$$

$w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ より

$$\mathbf{G}\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{6}\alpha\right),\ \mathbf{H}\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{6}\beta\right),\ \mathbf{I}\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{6}\alpha + \frac{3+\sqrt{3}i}{6}\beta\right)$$

(3) $(*)$ より

$$z_2 - z_1 = \frac{1}{3}\{-(1+w)\alpha + (2-w)\beta\}$$
$$z_3 - z_1 = \frac{1}{3}\{(1-2w)\alpha + (1+w)\beta\}$$

ここで，$w^3 = -1$ より $(w \neq -1)$，$(w+1)(w^2-w+1) = 0$ であるから

$$w^2 - w + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad w^2 = w - 1 \quad \cdots ①$$

① に注意して

$$\begin{aligned} w(z_2 - z_1) &= \frac{1}{3}\{-(w+w^2)\alpha + (2w-w^2)\beta\} \\ &= \frac{1}{3}\{-(w+w-1)\alpha + (2w-w+1)\beta\} \qquad (**) \\ &= \frac{1}{3}\{(1-2w)\alpha + (1+w)\beta\} = z_3 - z_1 \end{aligned}$$

$(**)$ について，$z_2 - z_1 = 0$ のとき　$-(1+w)\alpha + (2-w)\beta = 0$

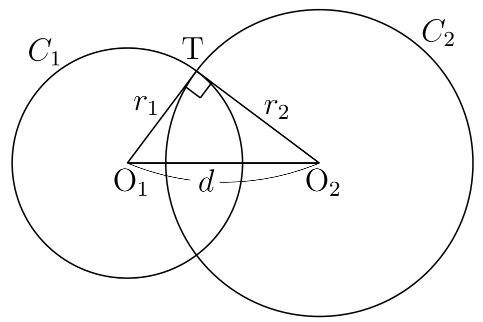
このとき，① により　$\beta = \dfrac{1+w}{2-w}\alpha = \dfrac{2w-w^2}{2-w}\alpha = w\alpha$

したがって，$\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha$ のとき，3 点 G，H，I は一致する．

よって　　$\boldsymbol{\beta \neq \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha}$ **のとき，△GHI は正三角形である．**

$\boldsymbol{\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha}$ **のとき，△GHI は正三角形でない．** ■

1.35 (1) C_1, C_2 の中心をそれぞれ $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ とし，C_1 と C_2 が直交する点を T とすると，右の図から



$$\mathrm{O_1T}^2+\mathrm{O_2T}^2=\mathrm{O_1O_2}^2$$

よって　　$\boldsymbol{r_1{}^2+r_2{}^2=d^2}$

(2) 点 $(p,\ 0)$ を P とし，C_1, C_2 の両方に直交する円の中心を X，半径を R とすると，(1) の結論から

$$r_1{}^2+R^2=|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2,\quad r_2{}^2+R^2=|\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2 \qquad (*)$$

上の 2 式から　　$r_1{}^2-r_2{}^2=|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2 \quad \cdots①$

① の右辺を計算すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}-p^2 \quad \cdots②\end{aligned}$$

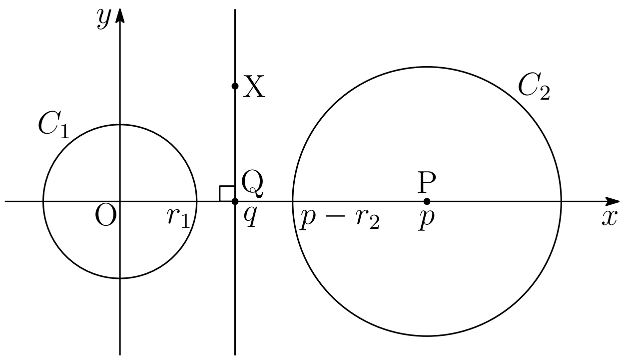
①，② より

$$2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}-p^2=r_1{}^2-r_2{}^2 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{p^2+r_1{}^2-r_2{}^2}{2}$$

$q=\dfrac{p^2+r_1{}^2-r_2{}^2}{2p}\cdots③$ とし，点 Q の座標を $(q,\ 0)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QX}}=0$$

よって，中心 X の軌跡は，点 Q を通り直線 OP に垂直な直線である．
また，$(*)$ より，半径 R は，X から C_1, C_2 に引いた接線の接点と X との距離である．



(3) 前ページの図において，③ および $p > r_1 + r_2$ から

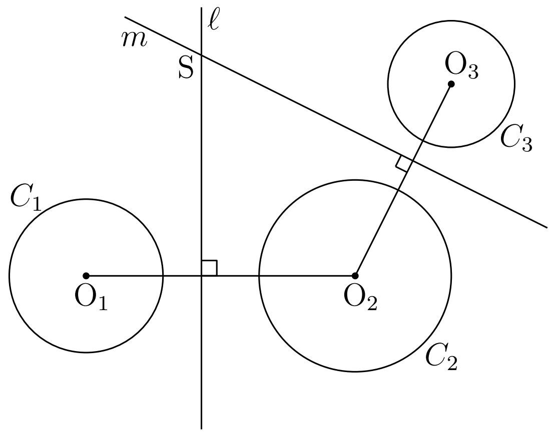
$$\begin{aligned} q - r_1 &= \frac{p^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2}{2p} - r_1 = \frac{(p - r_1)^2 - {r_2}^2}{2p} \\ &= \frac{(p - r_1 + r_2)(p - r_1 - r_2)}{2p} > 0, \\ (p - r_2) - q &= p - r_2 - \frac{p^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2}{2p} = \frac{(p - r_2)^2 - {r_1}^2}{2p} \\ &= \frac{(p + r_1 - r_2)(p - r_1 - r_2)}{2p} > 0 \end{aligned}$$

したがって，(2) で求めた点 Q は，C_1，C_2 の外部の点である．

互いに外部にある 3 つの円を C_1，C_2，C_3 とし，それらの円の中心を O_1，O_2，O_3 とすると，次が成立する．

- C_1，C_2 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を ℓ とすると，ℓ は線分 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ と垂直で，C_1 と C_2 の外部にある．
- C_2，C_3 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を m とすると，m は線分 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ と垂直で，C_2 と C_3 の外部にある．

3 点 O_1，O_2，O_3 は同一直線上にないから，ℓ と m は 1 点で交わり，この交点を S とすると，S から C_1，C_2，C_3 に引いた接線の接点で直交する．



別解 (2) 点 $(p,\ 0)$ を P とし，$C_1,\ C_2$ の両方に直交する円の中心を X，半径を R とすると，(1) の結論から

$$r_1{}^2 + R^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2, \quad r_2{}^2 + R^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2 \qquad (*)$$

上の 2 式から　　$r_1{}^2 - r_2{}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2$

ここで，直線 OP 上に点 $\mathrm{T}(t,\ 0)$ をとると，上式から

$$\begin{aligned} r_1{}^2 - r_2{}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OT}} + \overrightarrow{\mathrm{TX}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PT}} + \overrightarrow{\mathrm{TX}}|^2 \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OT}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PT}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{TX}} - 2\overrightarrow{\mathrm{PT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{TX}} \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OT}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + 2(\overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{PT}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{TX}} \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OT}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{TX}} \end{aligned}$$

ゆえに　　$$\begin{aligned} -2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{TX}} &= 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OT}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 - r_1{}^2 + r_2{}^2 \\ &= 2pt - p^2 - r_1{}^2 + r_2{}^2 \end{aligned}$$

$f(t) = 2pt - p^2 - r_1{}^2 + r_2{}^2$ とすると $(p > r_1 + r_2,\ r_1 > 0,\ r_2 > 0)$

$$\begin{aligned} f(r_1) &= 2pr_1 - p^2 - r_1{}^2 + r_2{}^2 \\ &= r_2{}^2 - (p - r_1)^2 = (r_2 + p - r_1)(r_2 - p + r_1) < 0 \\ f(p - r_2) &= 2p(p - r_2) - p^2 - r_1{}^2 + r_2{}^2 \\ &= p^2 - 2pr_2 + r_2{}^2 - r_1{}^2 = (p - r_2 + r_1)(p - r_2 - r_1) > 0 \end{aligned}$$

$f(t)$ は単調増加であるから，$f(t) = 0$ の解を q とすると　$r_1 < q < p - r_2$
したがって，$\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とすると　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QX}} = 0$
よって，中心 X の軌跡は，点 Q を通り直線 OP に垂直な直線である．このとき，Q は C_1 と C_2 の外部の点である．また，$(*)$ より，半径 R は，X から $C_1,\ C_2$ に引いた接線の接点と X との距離である．

(3) 互いに外部にある 3 つの円を $C_1,\ C_2,\ C_3$ とし，それらの円の中心を O_1，O_2，O_3 とすると，(2) の結論から次が成立する．

- C_1，C_2 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を ℓ とすると，ℓ は線分 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ と垂直で，C_1 と C_2 の外部にある．
- C_2，C_3 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を m とすると，m は線分 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ と垂直で，C_2 と C_3 の外部にある．

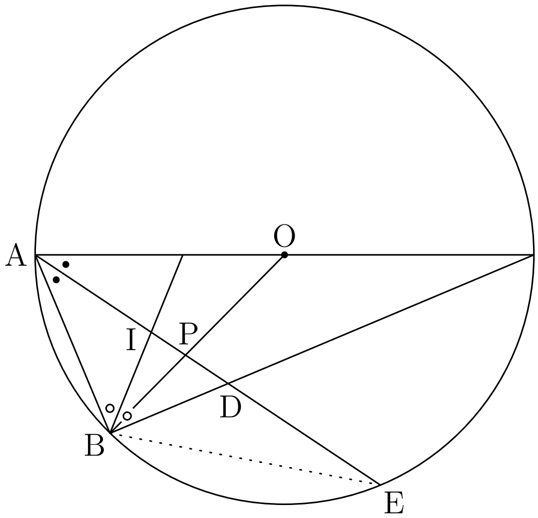
3 点 $\mathrm{O}_1,\ \mathrm{O}_2,\ \mathrm{O}_3$ は同一直線上にないから，ℓ と m は 1 点で交わり，この交点を S とすると，S から $C_1,\ C_2,\ C_3$ に引いた接線の接点で直交する．■

1.36 (1) AD は∠A の二等分線であるから　BD : DC = AB : AC = 5 : 13

したがって　$\mathrm{BD} = \dfrac{5}{5+13}\mathrm{BC} = \dfrac{5}{18}\cdot 12 = \dfrac{10}{3}$

$\angle\mathrm{ABC} = 90^\circ$ であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{5}{3}\sqrt{13}}$$



別解 $\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} - \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} - \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}\mathrm{BC}\cdot\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}\mathrm{BC}$

$$= \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\left\{1 - \left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}\right)^2\right\}$$

$$= 5\cdot 13\left\{1 - \left(\frac{12}{5+13}\right)^2\right\} = \left(\frac{5}{3}\right)^2\cdot 13$$

補足 $\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{ADC}$ より　AB : AE = AD : AC

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE} = \mathrm{AD}(\mathrm{AD}+\mathrm{DE}) = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}$$

方べきの定理により，$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE} = \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$ であるから

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC} \quad \text{よって} \quad \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} - \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$$

(2) 方べきの定理により，AD·DE = BD·DC であるから

$$\frac{5\sqrt{13}}{3}\mathrm{DE} = \frac{10}{3}\left(12 - \frac{10}{3}\right) \quad \text{よって} \quad \mathbf{DE = \frac{4\sqrt{13}}{3}}$$

(3) △ADC と直線 BO について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OA}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{1} = 1$$

よって　　**AP : PD = 18 : 5**

(4) BI は ∠B の二等分線であるから

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{BA} : \mathrm{BD} = 5 : \frac{10}{3} = \mathbf{3 : 2}$$

■

1.37 (1) 5個の赤玉と n 個の白玉を一列に並べ，1番目から6番目をそれぞれ1回目から6回目に取り出した玉と考えると，6番目が赤玉，7番目から $n+5$ 番目はすべて白玉で，1番目から5番目までに赤玉4個と白玉1個が並ぶ．よって，求める確率 $p(n)$ は

$$p(n) = \frac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_5} = \boldsymbol{\frac{5}{{}_{n+5}\mathrm{C}_5}}$$

(2) 次式を計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_4} - \frac{1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_4} &= \frac{4!}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \\
&\qquad - \frac{4!}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)} \\
&= \frac{4!}{(n+4)(n+3)(n+2)}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+5}\right) \\
&= \frac{4!}{(n+4)(n+3)(n+2)} \times \frac{4}{(n+1)(n+5)} \\
&= \frac{4}{25} \times \frac{5 \cdot 5!}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{4}{25} \times \frac{5}{{}_{n+5}\mathrm{C}_5} = \frac{4}{25}p(n)
\end{aligned}$$

したがって　$p(n) = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_4} - \dfrac{1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_4}\right)$

よって　$\boldsymbol{A = \dfrac{25}{4}}$

(3) (2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} p(k) &= \frac{25}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{{}_{k+4}\mathrm{C}_4} - \frac{1}{{}_{k+5}\mathrm{C}_4}\right) \\
&= \frac{25}{4}\left(\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_4} - \frac{1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_4}\right)
\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{25}{4}\cdot\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_4} = \boldsymbol{\frac{5}{4}}$ ■

1.38 (1) $f(x) = \cos\sqrt{x+1}$ を微分すると

$$f'(x) = -(\sqrt{x+1})' \sin\sqrt{x+1} = -\frac{\sin\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$$

(あ) $\boldsymbol{-\dfrac{\sin\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2}{\log x}$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{(x^2)'\log x - x^2(\log x)'}{(\log x)^2} = \frac{2x\log x - x^2 \cdot \dfrac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{x(2\log x - 1)}{(\log x)^2}$$

(い) $\boldsymbol{\dfrac{x(2\log x - 1)}{(\log x)^2}}$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2x+1} - \dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}}$ より

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(x-1)\sqrt{2x+1} + C$$

(う) $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}(x-1)\sqrt{2x+1}}$

(4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x} + \dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ より

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\{\log(1-\cos x) - \log(1+\cos x)\} + C = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

(え) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \log(x+3)\,dx = \Big[\,(x+3)\log(x+3) - x\,\Big]_{-2}^{0} = 3\log 3 - 2$

(お) $\boldsymbol{3\log 3 - 2}$ ■

1.39 (1) $\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$

(2) 直線 AP，BP の偏角をそれぞれ α，β とすると $\left(0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\tan\alpha=\frac{y-0}{x-(-1)}=\frac{y}{x+1},\quad \tan\beta=\frac{y-0}{x-1}=\frac{y}{x-1},$$

$$\begin{aligned}\tan\angle\mathrm{APB}=\tan(\beta-\alpha)&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\\&=\frac{\dfrac{y}{x-1}-\dfrac{y}{x+1}}{1+\dfrac{y}{x-1}\cdot\dfrac{y}{x+1}}=\boldsymbol{\frac{2y}{x^2+y^2-1}}\end{aligned}$$

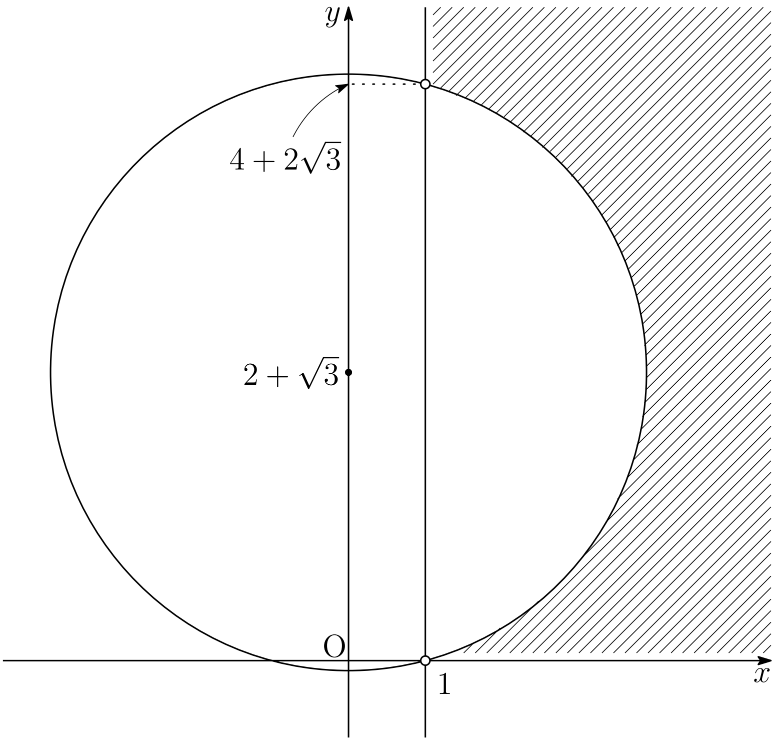
(3) $0<\angle\mathrm{APB}\leqq\dfrac{\pi}{12}$ であるから，$\tan\angle\mathrm{APB}\leqq\tan\dfrac{\pi}{12}$ より

$$0<\frac{2y}{x^2+y^2-1}\leqq 2-\sqrt{3}$$

$x>1$, $y>0$ より　$x^2+y^2-1\geqq 2(2+\sqrt{3})y$

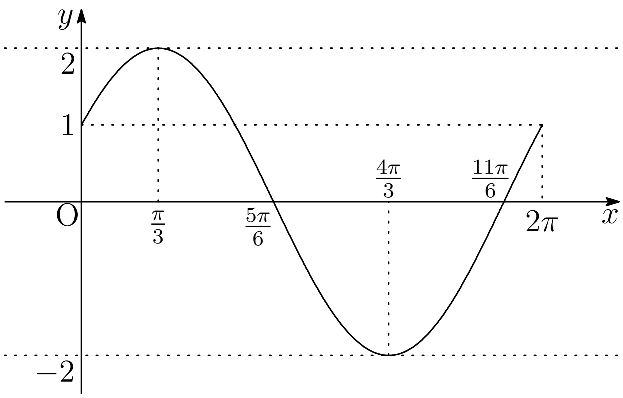
$$x>1,\quad y>0,\quad x^2+(y-2-\sqrt{3})^2\geqq(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$$

求める領域は，下の図の斜線部分で，境界は円周上は含むが，直線 $x=1$，x 軸，○は含まない．



1.40 (1) $a=1$ のとき　$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって　最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\mathbf{2}$，最小値 $f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=\mathbf{-2}$



(2) $a=\pi$ のとき　$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos\pi x$

$f(x)$ の周期を T とすると，$f(T)=f(-T)=f(0)$ より

$$\sqrt{3}\sin T+\cos\pi T=-\sqrt{3}\sin T+\cos\pi T=1$$

したがって　　$\sin T=0,\quad \cos\pi T=1$

上の第1式から，T は π の整数倍，第2式から，πT は 2π の整数倍，すなわち，T は2の倍数．π は無理数であるから，これらを同時に満たす T は存在しない． ■

1.41 (1) $2^2+4^2=(2\sqrt{5})^2$ より直角三角形である．直角を挟む 2 辺の長さが 2，4 であるから，三角形の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4=4$$

$s=\frac{1}{2}(2+4+2\sqrt{5})=3+\sqrt{5}$，内接円の半径を r とすると，$S=rs$ より

$$4=r(3+\sqrt{5})\quad ゆえに\quad r=\frac{4}{3+\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$$

よって，求める内接円の面積は

$$\pi r^2=\pi(3-\sqrt{5})^2=\boldsymbol{2(7-3\sqrt{5})\pi}$$

(2) $\theta=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ の両辺を平方すると

$$\theta^2=12+2\sqrt{35}\quad ゆえに\quad \theta^2-12=2\sqrt{35}$$

上の第 2 式をさらに平方すると

$$(\theta^2-12)^2=(2\sqrt{35})^2\quad 整理すると\quad \theta^4-24\theta^2+4=0$$

よって，条件を満たす 4 次式 $f(x)$ は　$\boldsymbol{f(x)=x^4-24x^2+4}$

(3) 起こりうる場合の総数は　6^3 (通り)

出た目の和が 6 以下の場合の数は　${}_6\mathrm{C}_3=20$ (通り)

これは，下の図のように ◯ と | が交互に 6 個並んだ 6 個のしきり (|) から，3 個のしきりを選び，それらのしきりによって区切られた ◯ の個数を左から順に，1 回目から 3 回目に出た目の数と考える．

◯|◯|◯|◯|◯|◯|

したがって，出た目の和が 6 以下である確率は　$\frac{20}{6^3}=\frac{5}{54}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\frac{5}{54}=\boldsymbol{\frac{49}{54}}$

補足 出た目の和が 6 となる場合の数は　${}_5\mathrm{C}_2=10$ (通り)

6 個の ◯ とその間の 5 個のしきり (|) から，2 個のしきりを選び，それらのしきりによって区切られた ◯ の個数を左から順に，1 回目から 3 回目に出た目の数と考える．■

1.42　(1)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．P に関する条件は　$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 3 : 2$

これより　$2\mathrm{AP} = 3\mathrm{BP}$　すなわち　$4\mathrm{AP}^2 = 9\mathrm{BP}^2$

$$\mathrm{AP}^2 = x^2 + y^2,\quad \mathrm{BP}^2 = x^2 + (y - 5k)^2$$

を代入すると　$4(x^2 + y^2) = 9\{x^2 + (y - 5k)^2\}$

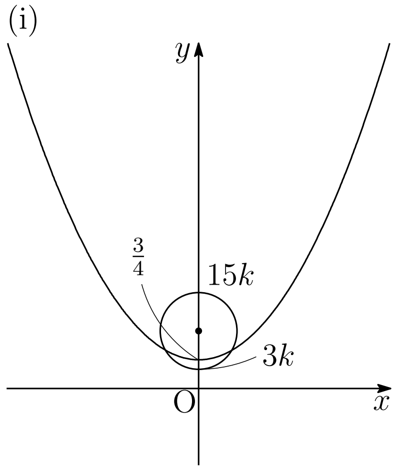
整理すると　$x^2 + y^2 - 18ky + 45k^2 = 0$

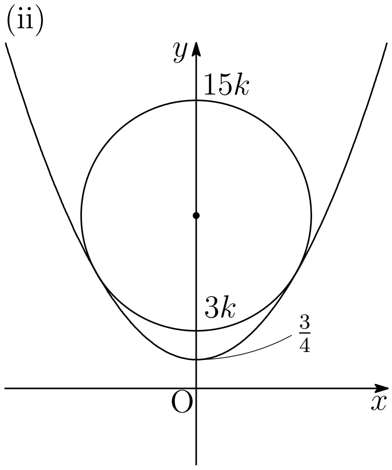
すなわち　$x^2 + (y - 9k)^2 = 36k^2$

よって，点 P の軌跡は　**中心 $(\mathbf{0},\ 9\boldsymbol{k})$，半径 $6\boldsymbol{k}$ の円**

補足　点 P の軌跡は，$\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 5k)$ を $3 : 2$ にそれぞれ内分および外分する 2 点 $(0,\ 3k)$，$(0,\ 15k)$ を直径の両端とする円である．

(2)　(1) の軌跡と放物線 $C : y = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$ の共有点がちょうど 2 となるのは，下の図のように (i)，(ii) の場合がある．





(i)　$3k < \dfrac{3}{4} < 15k$，すなわち，$\dfrac{1}{20} < k < \dfrac{1}{4}$

(ii)　(1) の軌跡と C が接するとき，(1) と C の方程式から x を消去すると

$$3y - \frac{9}{4} + (y - 9k)^2 = 36k^2$$

整理すると　$y^2 - 3(6k - 1)y + 45k^2 - \dfrac{9}{4} = 0 \quad \cdots (*)$

$(*)$ の判別式 D は　$D = 9(6k - 1)^2 - 4\left(45k^2 - \dfrac{9}{4}\right)$
$= 18(8k^2 - 6k + 1) = 18(2k - 1)(4k - 1)$

このとき，$3k > \dfrac{3}{4}$ に注意して，$D = 0$ を解くと　$k = \dfrac{1}{2}$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{20} < k < \dfrac{1}{4},\ k = \dfrac{1}{2}}$　■

1.43 (1) $f(x)=\dfrac{1}{x^a}=x^{-a}$ を微分すると $(a>0)$ $\quad f'(x)=-ax^{-a-1}$

$f'(1)=-a$ より，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式は

$$y-1=-a(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=-ax+a+1$$

この直線と x 軸との交点 A の x 座標は $x=\dfrac{a+1}{a}$，y 軸との交点 B の y 座標は $y=a+1$ であるから

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{a}\cdot(a+1)=\boldsymbol{\frac{(a+1)^2}{2a}}$$

(2) (1) の結果から

$$S(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$

相加平均・相乗平均の大小関係により $\quad \sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\geqq 2 \quad \cdots①$

① において，等号が成立するとき

$$\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{すなわち} \quad a=1$$

よって，$a=1$ のとき，最小値 $\boldsymbol{S(1)=2}$ ■

1.44 (1) 時刻 t における 3 点 P，Q，R の座標は $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{t}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{R}(0,\ 0,\ f(t))$$

ただし $f(t) = 1 - |1-2t| = \begin{cases} 2t & (0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}) \\ 2-2t & (\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1) \end{cases}$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(-t,\ \frac{t}{2},\ 0\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = (-t,\ 0,\ f(t))$$

$$\begin{aligned} 4S(t)^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2 \\ &= \frac{5}{4}t^2\{t^2 + f(t)^2\} - (t^2)^2 = \frac{t^2}{4}\{t^2 + 5f(t)^2\} \\ &= \begin{cases} \dfrac{21}{4}t^4 & \left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\right) \\ \dfrac{1}{4}t^2(21t^2 - 40t + 20) & \left(\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases} \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{S(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{21}}{4}t^2 & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{t}{4}\sqrt{21t^2 - 40t + 20} & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases}}$

(2) $f(t) = 16S(t)^2$ とおくと

$$f'(t) = \begin{cases} 84t^3 & \left(0 < t < \frac{1}{2}\right) \\ 84t^3 - 120t^2 + 40t & \left(\frac{1}{2} < t < 1\right) \end{cases}$$

$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{15-\sqrt{15}}{21}$	$\cdots$	$\frac{15+\sqrt{15}}{21}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ で $f(t)$ は単調増加であるから，上の増減表および

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{16},\quad f(1) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad f(1) < f\left(\frac{1}{2}\right)$$

の大小関係から，$f(t)$ は $t = \dfrac{15-\sqrt{15}}{21}$ で最大となる．

よって，$S(t)$ は $\boldsymbol{t = \dfrac{15-\sqrt{15}}{21}}$ で最大となる． ■

2.1 (1) $|z+2|=2|z-1|$ より $|z+2|^2=4|z-1|^2$

$$(z+2)(\overline{z}+2)=4(z-1)(\overline{z}-1) \quad \text{整理すると} \quad z\overline{z}-2(z+\overline{z})=0$$

したがって $(z-2)(\overline{z}-2)=4$ すなわち $|z-2|=2$ $\cdots$ ①

よって，点 z の表す領域は，中心は点 **2**，半径 **2** の円．

(2) 与えらた等式から

$$\{|z+2|-2|z-1|\}\{|z+6i|-3|z-2i|\}=0$$

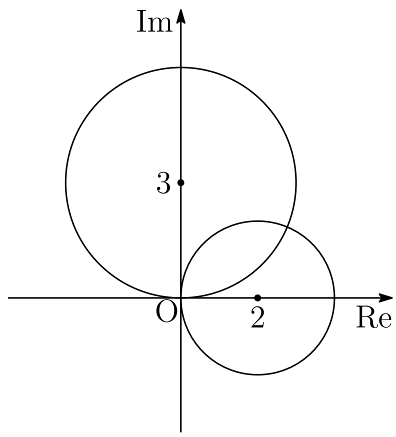
したがって $|z+2|=2|z-1|$ または $|z+6i|=3|z-2i|$ $(*)$

$(*)$ の第 1 式は，(1) で求めた円．$(*)$ の第 2 式から

$$(z+6i)(\overline{z}-6i)=9(z-2i)(\overline{z}+2i) \quad \text{ゆえに} \quad z\overline{z}+3iz-3i\overline{z}=0$$

したがって $(z-3i)(\overline{z}+3i)=9$ すなわち $|z-3i|=3$ $\cdots$ ②

よって，S の表す図形の方程式は，① または ② である．



(3) ① に $z=\dfrac{1}{w}$ を代入すると　$\left|\dfrac{1}{w}-2\right|=2$

$$|2w-1|=2|w| \quad ゆえに \quad (2w-1)(2\overline{w}-1)=4w\overline{w}$$

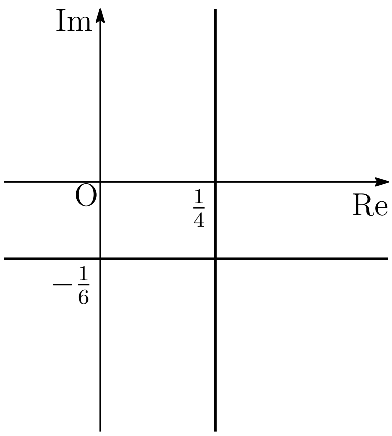
整理すると　$2(w+\overline{w})=1$　ゆえに　$\mathrm{Re}(w)=\dfrac{w+\overline{w}}{2}=\dfrac{1}{4}$　$\cdots$③

② に $z=\dfrac{1}{w}$ を代入すると　$\left|\dfrac{1}{w}-3i\right|=3$

$$|3w+i|=3|w| \quad ゆえに \quad (3w+i)(3\overline{w}-i)=9w\overline{w}$$

整理すると　$i(w-\overline{w})=\dfrac{1}{3}$　ゆえに　$\mathrm{Im}(w)=\dfrac{w-\overline{w}}{2i}=-\dfrac{1}{6}$　$\cdots$④

よって，w の表す図形は，③，④ より，次のようになる．



補足 S 上の点 0 を除く点 z を反転[2] した点が w である．

①から，$z = 2 + 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと $(-\pi < \theta < \pi)$

$$\begin{aligned} z &= 2 + 2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ w &= \frac{1}{z} = \frac{1}{4\cos\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}\tan\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

②から，$z = 3i+3\left\{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ とおくと $(-\pi < \theta < \pi)$

$$\begin{aligned} z &= 3i + 3\left(-\sin\theta + i\cos\theta\right) \\ &= 3i + 3\left(-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2i\cos^2\frac{\theta}{2} - i\right) \\ &= 6i\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ w &= \frac{1}{z} = -\frac{i}{6\cos\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{i}{6} - \frac{1}{6}\tan\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2019.pdf の $\boxed{5}$ を参照．

2.2 (1) $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$

$z_2 = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2} = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}$

$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$，$z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$ のとき

$$z_3 = \frac{z_1+z_2}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

したがって　$z_3 = \dfrac{z_1+z_2}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$

$w_1 = \dfrac{1}{z_1}$，$w_2 = \dfrac{1}{z_2}$，$w_3 = \dfrac{1}{z_3}$ より

$$\begin{aligned} w_1 &= \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ w_2 &= \cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} \\ w_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i} \end{aligned}$$

(2) $\angle \mathrm{P_1OP_2}$ が直角であるから，$\dfrac{z_2}{z_1}$ は純虚数

$\mathrm{P_3}$ が線分 $\mathrm{P_1P_2}$ 上にあるから，$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ は実数

$$\frac{w_1-w_3}{w_2-w_3} = \frac{\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_2} - \dfrac{1}{z_3}} = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{z_2}{z_1}$$

したがって，$\dfrac{w_1-w_3}{w_2-w_3}$ は純虚数．よって，$\angle \mathrm{Q_1Q_3Q_2}$ は直角である．

別解 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ の中点を $\mathrm{M}(c)$ とし $(|c| = \frac{1}{\sqrt{2}})$，$\mathrm{P_1}(c+ci)$，$\mathrm{P_2}(c-ci)$ とする．線分 $\mathrm{P_1P_2}$ 上の点 $\mathrm{P_3}$ を $z(\theta) = c + ci\tan\theta$ とし $(-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4})$，$w(\theta) = \dfrac{1}{z(\theta)}$ と対応する点を $\mathrm{Q_3}$ とする．

$$\begin{aligned} w(\theta) &= \frac{1}{c + ci\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{c(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= \frac{1}{c}\cos\theta(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2c}(\cos 2\theta - \sin 2\theta) \end{aligned}$$

$\mathrm{Q_3}$ は $\mathrm{Q_1}(w(\frac{\pi}{4}))$，$\mathrm{Q_2}(w(-\frac{\pi}{4}))$ を直径の両端とする半円上にある．
よって，$\angle \mathrm{Q_1Q_3Q_2}$ は直角である． ■

2.3 (1) $z_1 \neq z_2$, $z_1 \neq -i$, $z_2 \neq -i$ のとき

$$\frac{1+iz_1}{z_1+i} - \frac{1+iz_2}{z_2+i} = \frac{2(z_1-z_2)}{(z_1+i)(z_2+i)} \neq 0$$

このとき，$\dfrac{1+iz_1}{z_1+i} \neq \dfrac{1+iz_2}{z_2+i}$ となる．

(2) $\dfrac{1+iz}{z+i} = w \ (w \neq -i)$ より　$1+iz = w(z+i)$

$$(w-i)z = 1-iw \quad \text{ゆえに} \quad z = \frac{1-iw}{w-i}$$

よって，与えられた条件を満たす z が存在する．

(3) $w = \dfrac{1+iz}{z+i}$ が $\left|w - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき　$\left|\dfrac{1+iz}{z+i} - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

$$\left|\frac{iz+3}{2(z+i)}\right| = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |z-3i| = |z+i|$$

z は 2 点 $3i, -i$ を結ぶ垂直に二等分線，すなわち，z は虚部が 1 の複素数である．よって　$\boldsymbol{b=1}$

解説 $f_1(z) = z+i$，$f_2(z) = \dfrac{1}{z}$，$f_3(z) = 2z$ とおくと，これは順に，平行移動，反転，拡縮 (回転) を表す (拡縮・回転は，c を複素数として cz で表される)．これらの合成変換をメビウス変換という[3]．

本題の $w = \dfrac{1+iz}{z+i} = \dfrac{2}{z+i} + i$ は，$w = f_1 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ で与えられる．

z の虚部が b であるとき，$z = (b+1)\tan\theta + bi$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{(b+1)(\tan\theta + i)} + i = \frac{2\cos\theta}{(b+1)(\sin\theta + i\cos\theta)} + i \\ &= \frac{2}{b+1}\cos\theta(\sin\theta - i\cos\theta) + i = \frac{1}{b+1}(\sin 2\theta - i\cos 2\theta) + \frac{b}{b+1}i \end{aligned}$$

$2\theta = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$ とおくと $\left(-\dfrac{3}{2}\pi < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$w = \frac{1}{b+1}(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{b}{b+1}i$$

$w \ (w \neq i)$ は中心 $\dfrac{i}{2}$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円であるから　$\boldsymbol{b=1}$ ■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2019.pdf $\boxed{5}$ の解説を参照．

2.4 (1) $x=\sin t,\quad y=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t$ より $(0 \leqq t \leqq \pi)$

$$\frac{dx}{dt}=\cos t$$
$$\frac{dy}{dt}=-\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t+\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t=\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$$

$\frac{dx}{dt}=0$ とすると　$t=\frac{\pi}{2}$

$\frac{dy}{dt}=0$ とすると，$-\frac{\pi}{6} \leqq 2t-\frac{\pi}{6} \leqq \frac{11\pi}{6}$ より

$$2t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\quad すなわち\quad t=\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}$$

よって，求める t の値は　$\boldsymbol{t=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6}}$

(2) (1) の結果から

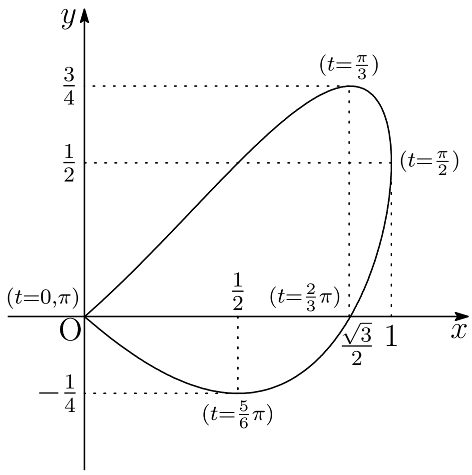
t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
(x,y)	$(0,0)$		$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right)$		$\left(1,\frac{1}{2}\right)$		$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$		$(0,0)$

$0<t<\pi$ において，$y=0$ とすると，$\sin t>0$，$-\frac{\pi}{6}<t-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$ より

$$t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\quad ゆえに\quad t=\frac{2\pi}{3}$$

C の原点以外の x 軸との交点は　$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$

よって，C の概形は次のようになる [4].



[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2019.pdf $\boxed{5}$

(3) 求める面積を S とし，$f(t)=\sin t$ とおくと　$f'(t)=\cos t$

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{f(\pi)}^{f(\frac{2\pi}{3})} (-y)\,dx = \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} (-y)f'(t)\,dt \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t\cos t\,dt \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right)\sin t\cos t\,dt \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t\cos t\right)dt \\
&= \left[-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos^3 t+\frac{1}{6}\sin^3 t\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}}
\end{aligned}
$$

別解　$x=\sin t,\quad y=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t$ より

$$
\begin{aligned}
x\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}y &= \sin t\left\{-\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t+\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\cos t\right\} \\
&\qquad -\cos t\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t \\
&= -\sin^2 t\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= -\sin^2 t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 t\sin t+\frac{1}{2}\sin^2 t\cos t
\end{aligned}
$$

ガウス・グリーンの定理により (積分区間は，正の回転角の向きにとる)[5]

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}}\left(x\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}y\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 t\sin t+\frac{1}{2}\sin^2 t\cos t\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos^3 t+\frac{1}{6}\sin^3 t\right]_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}}
\end{aligned}
$$

■

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Odai/Odai_ri_2022.pdf $\boxed{5}$

2.5 (1) $C:(x,\ y)=(f(t),\ g(t))=(t+2\sin^2 t,\ t+\sin t)$ とおくと $(0<t<\pi)$

$f'(t)=0$ とすると　$1+4\sin t\cos t=0$

$$1+2\sin 2t=0\ (0<t<\pi)\quad ゆえに\quad t=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$$

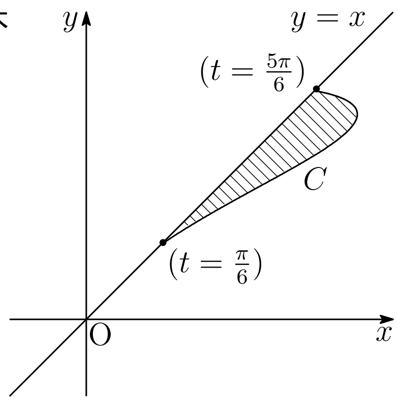
このとき
$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{7\pi}{12}+1-\cos\frac{7\pi}{6}=\frac{7\pi}{12}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{11\pi}{12}+1-\cos\frac{11\pi}{6}=\frac{11\pi}{12}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，C の $t=\frac{7\pi}{12},\ \frac{11\pi}{12}$ における 2 接線

$$x=f\left(\frac{7\pi}{12}\right),\quad x=f\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

が異なるから，求める接線の本数は　**2 本**

(2) 求める面積を右の図の斜線部分である．この面積を S とすると，ガウス・グリーンの定理により



$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\,dt$$

このとき

$$\begin{aligned}f(t)g'(t)-f'(t)g(t)&=(t+2\sin^2 t)(1+\cos t)-(1+4\sin t\cos t)(t+\sin t)\\&=t(\cos t-4\sin t\cos t)+2\sin^2 t-\sin t-2\sin^2 t\cos t\\&=t(\sin t-2\sin^2 t)'+2\sin^2 t-\sin t-2\sin^2 t\cos t\\&=\{t(\sin t-2\sin^2 t)\}'+2(2\sin^2 t-\sin t)-\frac{2}{3}(\sin^3 t)'\end{aligned}$$

よって[6]

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\Big[\,t(\sin t-2\sin^2 t)\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(2\sin^2 t-\sin t)\,dt-\frac{1}{3}\Big[\,\sin^3 t\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\\&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(1-\cos 2t-\sin t)\,dt=\Big[\,t-\frac{1}{2}\sin 2t+\cos t\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf $\boxed{5}$

別解 $\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{5\pi}{6}$ で $y=g(t)$ は単調増加であることに注意して

$$\begin{aligned} S &= \int_{g(\frac{\pi}{6})}^{g(\frac{5\pi}{6})} (x-y)\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)g'(t)\,dt - \left[\ \frac{y^2}{2}\ \right]_{g(\frac{\pi}{6})}^{g(\frac{5\pi}{6})} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)g'(t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\} \quad \cdots① \end{aligned}$$

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = g\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)$ に注意して変形すると

$$\begin{aligned} S &= \left[\ f(t)g(t)\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(t)g(t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\} \\ &= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(t)g(t)\,dt + \frac{1}{2}\left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\} \quad \cdots② \end{aligned}$$

①，② の辺々を加えることにより，次式を得る．

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt$$

$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}$，$g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{1}{2}$ であるから，① より

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (t + 2\sin^2 t)(1+\cos t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (t + t\cos t + 2\sin^2 t + 2\sin^2 t\cos t)\,dt - \frac{\pi}{3}(\pi+1) \\ &= \left[\ \frac{t^2}{2} + t\sin t + \cos t + t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\sin^3 t\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{\pi}{3}(\pi+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

■

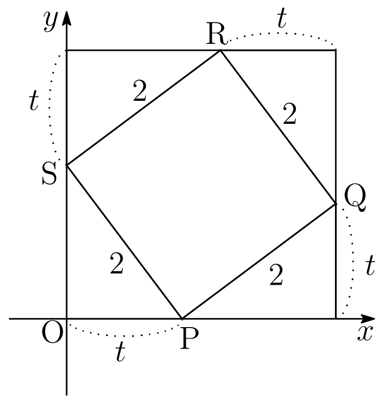
2.6 (1) $0 \leqq t \leqq 2$ のとき

$\mathbf{P}(\boldsymbol{t},\ \mathbf{0})$

$\mathbf{Q}(\boldsymbol{t}+\sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}},\ \boldsymbol{t})$

$\mathbf{R}(\sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}, \boldsymbol{t}+\sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}})$

$\mathbf{S}(\mathbf{0},\ \sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}})$



(2) $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると　$x = t+\sqrt{4-t^2}$,　$y = t$　$(0 \leqq t \leqq 2)$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{t}{\sqrt{4-t^2}},\quad \frac{dy}{dt} = 1$$

よって　$\boldsymbol{\vec{v}} = \left(\boldsymbol{\frac{dx}{dt}},\ \boldsymbol{\frac{dy}{dt}}\right) = \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{t}}{\sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}},\ \mathbf{1}\right)$

したがって　$t=\sqrt{2}$ のとき，$\vec{v} = (0,\ 1)$ より　$|\boldsymbol{\vec{v}}| = \mathbf{1}$

(3) $\mathrm{Q}(t+\sqrt{4-t^2},\ t)$ より $(0 \leqq t \leqq 2)$

$$f(t) = t+\sqrt{4-t^2},\quad f'(t) = 1-\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$$

t	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

よって，$f(t)$ の最大値は　　$f(\sqrt{2}) = \mathbf{2\sqrt{2}}$

このとき，$t=\sqrt{2}$ より　$\mathbf{Q(2\sqrt{2},\ \sqrt{2})}$，　$\mathbf{R(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})}$

(4) 線分 PR と QS の中点はともに $\left(\dfrac{t+\sqrt{4-t^2}}{2},\ \dfrac{t+\sqrt{4-t^2}}{2}\right)$

これが D であり，(3) の結果から $\mathrm{D}\left(\dfrac{f(t)}{2},\ \dfrac{f(t)}{2}\right)$ より

直線 $\boldsymbol{y = x}$　$\mathbf{(1 \leqq \boldsymbol{x} \leqq \sqrt{2})}$

上を動く.

(5) $0 \leqq t \leqq 2$ における点 Q の軌跡 C_1 と x 軸，y 軸，直線 $y=2$ で囲まれた図形の面積を S とすると

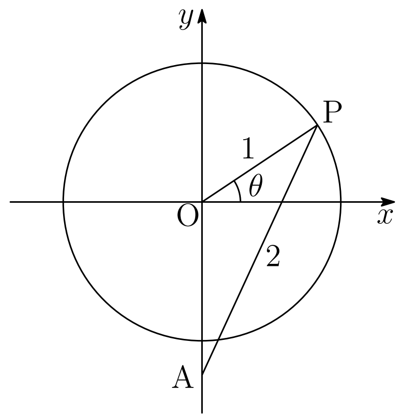
$$S = \int_0^2 x\,dy = \int_0^2 (t + \sqrt{4-t^2})\,dt$$
$$= \int_0^2 t\,dt + \int_0^2 \sqrt{4-t^2}\,dt$$
$$= \left[\ \frac{t^2}{2}\ \right]_0^2 + \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 = 2 + \pi$$

$0 \leqq t \leqq 2$ における点 R の軌跡 C_2 と x 軸，y 軸，直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積も S である．求める面積 T は，C_1，C_2，x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積であるから

$$T = 2S - 2^2 = 2(\pi+2) - 4 = \boldsymbol{2\pi}$$

■

2.7 (1) $\triangle$OAP に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OA}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\mathrm{OP} = 1$，$\mathrm{AP} = 2$ であるから

$$2^2 = 1^2 + \mathrm{OA}^2 + 2\cdot 1\cdot \mathrm{OA}\sin\theta$$

整理すると

$$\mathrm{OA}^2 + 2\mathrm{OA}\sin\theta - 3 = 0$$

$\mathrm{OA} > 0$ に注意してこれを解くと　$\mathrm{OA} = -\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 3}$

点 A の y 座標は負であるから　$\mathrm{A}(0,\ \sin\theta - \sqrt{\sin^2\theta + 3})$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 4\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 4(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= -3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= -3(0,\ \sin\theta - \sqrt{\sin^2\theta + 3}) + 4(\cos\theta,\ \sin\theta) \\ &= (4\cos\theta,\ \sin\theta + 3\sqrt{\sin^2\theta + 3})\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{Q}(4\cos\theta,\ \sin\theta + 3\sqrt{\sin^2\theta + 3})}$

(2) 点 Q の座標を $(f(\theta),\ g(\theta))$ とすると $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$，(1) の結果から

$$f(\theta) = 4\cos\theta, \quad g(\theta) = \sin\theta + 3\sqrt{\sin^2\theta + 3}$$

Q の x 座標は，$\theta = 0$ のとき**最大値 4**，$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ のとき**最小値 0**

$g(\theta)$ を微分すると

$$\begin{aligned}g'(\theta) &= \cos\theta + \frac{3\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + 3}} \\ &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + 3}}(\sqrt{\sin^2\theta + 3} + 3\sin\theta)\end{aligned}$$

$g'(\theta) = 0$ とすると $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$$3\sin\theta = -\sqrt{\sin^2\theta + 3}$$

$\sin\theta < 0$ に注意して　$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$，$g(\theta)$ の増減表は

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$g(\theta)$	5	$\searrow$	$2\sqrt{6}$	$\nearrow$	7

Q の y 座標は，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき**最大値 $\boldsymbol{7}$**，$\theta = \alpha$ のとき**最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{6}}$**

(3) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0$ および $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における Q の軌跡をそれぞれ C_1，C_2 とする．$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$x_1 = f(\theta),\ y_1 = g(\theta),\ x_2 = f(-\theta),\ y_2 = g(-\theta)$$

とおくと

$$x_1 = x_2,\quad y_1 - y_2 = 2\sin\theta \geqq 0$$

C_1 は C_2 の上側にあるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{f(\frac{\pi}{2})}^{f(0)} (y_1 - y_2)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\sin\theta(4\cos\theta)'\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^2\theta\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= 4\left[\,\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{2\pi} \end{aligned}$$

別解 ガウス・グリーンの定理により [7]

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(\theta)g'(\theta) - f'(\theta)g(\theta)\}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{4\cos\theta\left(\cos\theta + \frac{3\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+3}}\right) + 4\sin\theta\left(\sin\theta + 3\sqrt{\sin^2\theta+3}\right)\right\}d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4 + \frac{48\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+3}}\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\,d\theta = \boldsymbol{2\pi} \end{aligned}$$

■

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf $\boxed{5}$

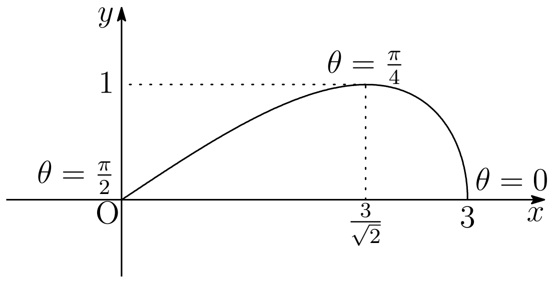
2.8 (1) C 上の点 $(x,\ y)$ が

$$x = 3\cos\theta, \quad y = \sin 2\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で与えられるから　　$0 \leqq y \leqq 1$

y が最大となるとき　$\theta = \frac{\pi}{4}$　すなわち　$\left(\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{2}},\ 1}\right)$

y が最小となるとき　$\theta = 0,\ \frac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{(3,\ 0),\ (0,\ 0)}$



(2) $x = f(\theta) = 3\cos\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta} = f'(\theta) = -3\sin\theta$

$$\begin{aligned} S &= \int_{f(\frac{\pi}{2})}^{f(0)} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin 2\theta\,(-3\sin\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = 2\Big[\ \sin^3\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{2} \end{aligned}$$

(3) 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{f(\frac{\pi}{2})}^{f(0)} y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 2\theta\,(-3\sin\theta)\,d\theta \\ &= 12\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta \\ &= 12\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - \cos^4\theta)\sin\theta\,d\theta \\ &= 12\pi\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{1}{5}\cos^5\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{8}{5}\pi} \end{aligned}$$

■

2.9 (1) ユークリッドの互除法により

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 5 & 1 & 3 & 1 \\ \cline{2-5}
119\,) & 595\,) & 714\,) & 2737\,) & 3451 \\
 & 595 & 595 & 2142 & 2737 \\ \cline{2-5}
 & 0 & 119 & 595 & 714
\end{array}$$

よって　$\boldsymbol{d = 119}$

(2) (1) の結果から　$3451 = 29d$，$2737 = 23d$
したがって，与えられた 1 次不定方程式は

$$29x - 23y = 6 \quad \text{ゆえに} \quad 29(x-1) = 23(y-1)$$

29 と 23 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$x - 1 = 23k, \quad y - 1 = 29k$$

よって　$\boldsymbol{x = 23k + 1,\ \ y = 29k + 1}$ **(k は整数)**

(3) $3451a - 2737b = 2023 \cdots (*)$ を満たす整数 a，b を 1 つ求める．これから

$$29a - 23b = 17 \quad \cdots ①$$

法 23 について，$29 \equiv 6$，$17 \equiv -6$ より

$$6a \equiv -6 \quad \text{ゆえに} \quad 6(a+1) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 23)$$

6 は 23 と互いに素であるから　$a + 1 = 23j$　(j は整数)
$a = 23j - 1$ を ① に代入すると

$$29(23j - 1) - 23b = 17 \quad \text{ゆえに} \quad b = 29j - 2$$

N を整数とすると，$(*)$ より，$3451x - 2737y = 2023N$ に対して

$$3451Na - 2737Nb = 2023N$$

であるから，$x = Na$，$y = Nb$ とすればよい．

$$x = N(23j - 1), \quad y = N(29j - 2) \quad (j \text{ は整数})$$

2.10 (1) ユークリッドの互除法により

$$\begin{array}{r|r|r|r} & 5 & 6 & 1 \\ \hline 56\,) & 281\,) & 1742\,) & 2023 \\ & 280 & 1686 & 1742 \\ \hline & 1 & 56 & 281 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|r|r} & 5 & 6 & 1 \\ \hline d\,) & c\,) & b\,) & a \\ & & & \\ \hline & 1 & d & c \end{array}$$

$c=281$，$d=56$ とおくと

$$\begin{cases} a=b+c \\ b=6c+d \\ c=5d+1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*)\begin{cases} c=a-b \\ d=b-6c \\ 1=c-5d \end{cases}$$

$(*)$ の 3 式から c, d を消去すると

$$1=c-5(b-6c)=-5b+31c=-5b+31(a-b)=31a-36b$$

したがって $\quad \dfrac{1}{ab}=\dfrac{31a-36b}{ab}=\dfrac{-36}{a}+\dfrac{31}{b}=\dfrac{m}{a}+\dfrac{n}{b}$

$$\frac{m+36}{a}=\frac{31-n}{b} \quad \text{ゆえに} \quad b(m+36)=a(31-n)$$

a, b は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$\begin{cases} m+36=ak \\ 31-n=bk \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} m=-36+2023k \\ n=31-1742k \end{cases}$$

$1 \leqq n \leqq 2000$ を満たす整数 k は $\quad k=0,-1$

よって，求める整数の組 $(m,\ n)$ は

$$\boldsymbol{(m,\ n)=(-36,\ 31),\ (-2059,\ 1773)}$$

(2) p は 3 以上の素数 (奇素数) であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は整数より

$$(p-1)!\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right) \qquad (*)$$

$$=(p-1)!\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{p-k}\right)=p\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(p-1)!}{k(p-k)}$$

$(p-1)!$ は k, $p-k$ を因数にもつから，$\dfrac{(p-1)!}{k(p-k)}$ は整数である．

よって，$(*)$ は p の倍数である． ■

2.11 (1) $\overrightarrow{m}=(a,\ c)$，$\overrightarrow{n}=(b,\ d)$ より $(\overrightarrow{m}\neq\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{n}\neq\overrightarrow{0})$

$$(*)\begin{cases} d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n}=(ad-bc,\ 0)=(D,\ 0) \\ -b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n}=(0,\ ad-bc)=(0,\ D) \end{cases}$$

$D=0$ のとき　$d\overrightarrow{m}=c\overrightarrow{n}$，$b\overrightarrow{m}=a\overrightarrow{n}$　ゆえに　$\overrightarrow{m}/\!/\overrightarrow{n}$

このとき，$\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ は1次従属であるから，$\overrightarrow{q}$ がこれらのベクトルと平行でないならば，条件 I

$$r\overrightarrow{m}+s\overrightarrow{n}=\overrightarrow{q}$$

を満たす実数 r, s は存在しない．

$D\neq 0$ のとき，基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$ は，$(*)$ より

$$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)=\frac{d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n}}{D},\quad \overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)=\frac{-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n}}{D} \qquad (**)$$

のように，これらの基本ベクトルは $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ の線形結合で表される．

したがって，任意のベクトル $\overrightarrow{q}=(x,\ y)$ を

$$(x,\ y)=x(1,\ 0)+y(0,\ 1)=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2} \qquad (***)$$

とすると，$\overrightarrow{q}$ は $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ の線形結合で表される．

よって，$D\neq 0$ のとき，条件 I を満たす実数 r, s が存在する．　［証終］

(2) $(**)$ の基本ベクトルと $\overrightarrow{v}$ の内積をとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{(d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{d\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v}-c\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{d}{D}\\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{(-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{-b\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v}+a\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}}{D}=-\frac{b}{D}\end{aligned}$$

よって　$\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}=\boldsymbol{\frac{1}{D}(d,\ -b)}$

同様に，$(**)$ の基本ベクトルと $\overrightarrow{w}$ の内積をとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{w}&=\frac{(d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{d\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w}-c\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}}{D}=-\frac{c}{D}\\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{w}&=\frac{(-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{-b\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w}+a\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{a}{D}\end{aligned}$$

よって　$\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}+(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}=\boldsymbol{\frac{1}{D}(-c,\ a)}$

(3) $(**)$ を $(***)$ に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{q} &= x\left(\frac{d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n}}{D}\right)+y\left(\frac{-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n}}{D}\right)\\ &= \frac{dx-by}{D}\overrightarrow{m}+\frac{-cx+ay}{D}\overrightarrow{n} \qquad \text{(A)}\end{aligned}$$

条件 II を満たすとき，$\dfrac{dx-by}{D}$, $\dfrac{-cx+ay}{D}$ が整数である．とくに

$\overrightarrow{q}=(1,\ 0)$ のとき　　$\overrightarrow{q}=\dfrac{d}{D}\overrightarrow{m}-\dfrac{c}{D}\overrightarrow{n}$

$\overrightarrow{q}=(0,\ 1)$ のとき　　$\overrightarrow{q}=-\dfrac{b}{D}\overrightarrow{m}+\dfrac{a}{D}\overrightarrow{n}$

上の 2 式から，$\dfrac{a}{D}$, $\dfrac{b}{D}$, $\dfrac{c}{D}$, $\dfrac{d}{D}$ は整数である．

$$\frac{a}{D}\cdot\frac{d}{D}-\frac{b}{D}\cdot\frac{c}{D}=\frac{ad-bc}{D^2}=\frac{1}{D}$$

は整数であるから　$D=\pm 1$

逆に，$D=\pm 1$ のとき，(A) より，条件 II を満たす．

したがって　　$\boldsymbol{D=\pm 1}$ ■

2.12 (1) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ は基本ベクトルであるから

$$\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2, \quad \vec{w} = (\vec{w}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{w}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 \tag{$*$}$$

したがって

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}\cdot\vec{e}_1)^2 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_2)^2, \quad |\vec{w}|^2 = (\vec{w}\cdot\vec{e}_1)^2 + (\vec{w}\cdot\vec{e}_2)^2$$

$\vec{v}\cdot\vec{e}_1 = 4,\ |\vec{v}| = 2\sqrt{5},\ \vec{w}\cdot\vec{e}_1 = 8,\ |\vec{w}| = 8\sqrt{2}$ を上の 2 式に代入すると

$$20 = 16 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_2)^2, \quad 128 = 64 + (\vec{w}\cdot\vec{e}_2)^2$$

$\vec{v}\cdot\vec{e}_2 < 0,\ \vec{w}\cdot\vec{e}_2 > 0$ に注意して解くと $\quad \vec{v}\cdot\vec{e}_2 = -2,\ \vec{w}\cdot\vec{e}_2 = 8$
条件およびこれらの結果を $(*)$ に代入すると

$$\vec{v} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 = (4, -2), \quad \vec{w} = 8\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 = (8,\ 8)$$

$\vec{u} = -\vec{e}_1 = (-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{w}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4, -2), \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (8,\ 8)$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 0) + (4, -2) = (3, -2),\\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (3, -2) + (8,\ 8) = (11,\ 6)\end{aligned}$$

以上の結果から $\quad$ **A(−1, 0)，B(3, −2)，C(11, 6)**

(2) 3 点 A$(-1,\ 0)$，B$(3, -2)$，C$(11,\ 6)$ を通る円の方程式を

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$$

とおくと

$$\begin{cases} (-1)^2 + 0^2 + p\cdot(-1) + q\cdot 0 + r = 0 \\ 3^2 + (-2)^2 + p\cdot 3 + q\cdot(-2) + r = 0 \\ 11^2 + 6^2 + p\cdot 11 + q\cdot 6 + r = 0 \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} -p + r + 1 = 0 \\ 3p - 2q + r + 13 = 0 \\ 11p + 6q + r + 157 = 0 \end{cases}$$

これを解いて　$p = -8,\ q = -10,\ r = -9$

したがって，求める円の方程式は

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y - 9 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(x-4)^2 + (y-5)^2 = 50}$$

(3) (2) の結果から　P$(4,\ 5)$

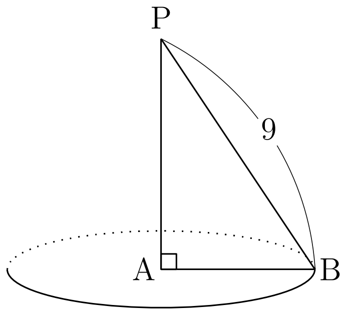
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4, -2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (12,\ 6),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (5,\ 5)$$

したがって

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}|4\cdot 6 - (-2)\cdot 12| = 24,\quad \triangle\mathrm{ABP} = \frac{1}{2}|4\cdot 5 - (-2)\cdot 5| = 15$$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ABP} = 24 : 15 = \boldsymbol{8 : 5}$ ■

2.13 (1) A(4, 2, 1)，B(1, −4, 1) より



$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= (1-4)^2+(-4-2)^2+(1-1)^2\\ &= 45\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{AP} = \sqrt{\mathrm{PB}^2-\mathrm{AB}^2} = \sqrt{81-45} = \mathbf{6}$$

(2) A(4, 2, 1)，B(1, −4, 1)，C(2, 2, −1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3, -6,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2,\ 0, -2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

とすると，AP が平面 α に垂直で，AP $= 6$ であるとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} \pm 6\vec{n} = (4,\ 2,\ 1) \pm 6\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\\ &= (4\pm 4,\ 2\mp 2,\ 1\mp 4)\end{aligned}$$

P の z 座標が正であるから　　**P(0, 4, 5)**

(3) 点 P から直線 OC に垂線 PH を引くと

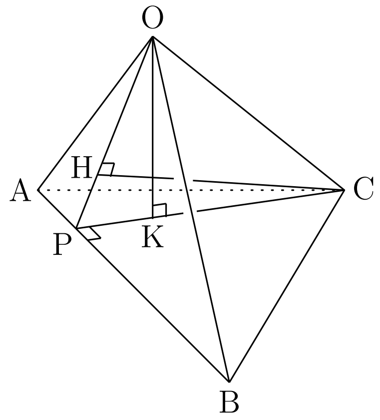
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{3}{9}(2,\ 2, -1) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\\ \overrightarrow{\mathrm{HP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = (0,\ 4,\ 5) - \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(-1,\ 5,\ 8)\\ |\overrightarrow{\mathrm{HP}}| &= \frac{2}{3}\sqrt{(-1)^2+5^2+8^2} = 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

よって，求める 2 点間の距離は　$2\sqrt{9^2-|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|^2} = \mathbf{2\sqrt{41}}$ ■

2.14 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = \mathbf{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0$ ゆえに $\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}$ $\vec{b}\cdot\vec{c} = 3$ より $\vec{c}\cdot\vec{a} = \mathbf{3}$

(2) $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{3}$, $\vec{v} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{b}}{3}$ とおくと



$$|\vec{u}|^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{4} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{3} + \frac{|\vec{b}|^2}{9} = \frac{4}{4} + \frac{3}{3} + \frac{9}{9} = 3$$
$$|\vec{v}|^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{4} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{3} + \frac{|\vec{b}|^2}{9} = \frac{4}{4} - \frac{3}{3} + \frac{9}{9} = 1$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{|\vec{a}|^2}{4} - \frac{|\vec{b}|^2}{9} = \frac{4}{4} - \frac{9}{9} = 0$$
$$\vec{c}\cdot\vec{u} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{3} = \frac{3}{2} + \frac{3}{3} = \frac{5}{2}$$
$$\vec{c}\cdot\vec{v} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{3} = \frac{3}{2} - \frac{3}{3} = \frac{1}{2}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{(\vec{c}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{c}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{5}{6}\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b}}$$

(3) OH と AB の交点を P とすると，$\mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$ より $\mathrm{OP}\perp\mathrm{AB}$

(2) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{6\vec{a}+\vec{b}}{7}$ ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{6\vec{a}+\vec{b}}{7}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \frac{6\vec{a}+\vec{b}}{7} - \vec{c} = \frac{1}{7}(6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c})$$

$\vec{d} = 6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}$ とおくと

$$\begin{aligned}|\vec{d}|^2 &= |6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}|^2 = 36|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 49|\vec{c}|^2 + 12\vec{a}\cdot\vec{b} - 14\vec{b}\cdot\vec{c} - 84\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= 36\cdot 4 + 9 + 49\cdot 6 + 12\cdot 3 - 14\cdot 3 - 84\cdot 3 = 189\end{aligned}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\vec{d} = -\vec{c}\cdot(6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}) = -6\vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{c} + 7|\vec{c}|^2 = -6\cdot 3 - 3 + 7\cdot 6 = 21$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\vec{d})}{|\vec{d}|^2}\vec{d} = \dfrac{21}{189}(6\vec{a}+\vec{b}-7\vec{c}) = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \dfrac{7}{9}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OK}} - \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \dfrac{7}{9}\vec{c}$ ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{HK}} = \dfrac{2}{9}\vec{c}$ よって $\mathrm{HK}/\!/\vec{c}$ ■

2.15　(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から 2 直線 AB，BC にそれぞれ垂線 $\mathrm{PH_1}$，$\mathrm{PH_2}$ を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(1,\ \frac{y+z}{2},\ \frac{y+z}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left(\frac{x+z}{2},\ 1,\ \frac{x+z}{2}\right)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{H_1P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_1}} = \left(x-1,\ \frac{y-z}{2}, -\frac{y-z}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{H_2P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_2}} = \left(\frac{x-z}{2},\ y-1, -\frac{x-z}{2}\right)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_2P}}|^2$ であるから

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 &= (y-1)^2 + \frac{1}{2}(x-z)^2 \\
2\{(x-1)^2 - (y-1)^2\} + (y-z)^2 - (x-z)^2 &= 0 \\
2(x-y)(x+y-2) - (x-y)(x+y-2z) &= 0 \\
(x-y)(x+y+2z-4) &= 0 \qquad \cdots ①
\end{aligned}$$

よって　　**2 平面 $\boldsymbol{x-y=0,\ x+y+2z-4=0}$**

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から 2 直線 CD，DA にそれぞれ垂線 $\mathrm{PH_3}$，$\mathrm{PH_4}$ を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_3}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \left(-1,\ \frac{y-z}{2}, -\frac{y-z}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_4}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DA}} = (x,\ 0,\ 0)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{H_3P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_3}} = \left(x+1,\ \frac{y+z}{2},\ \frac{y+z}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{H_4P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_4}} = (0,\ y,\ z)$$

球面の中心を P，半径を R とすると，次を満たせばよい．

$$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_2P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_4P}}|^2 = R^2 \qquad (*)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_4P}}|^2$ より　$(x+1)^2 + \dfrac{1}{2}(y+z)^2 = y^2 + z^2$

$$(\sqrt{2}x + y - z + \sqrt{2})(\sqrt{2}x - y + z + \sqrt{2}) = 0 \quad \cdots ②$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2$ より　$(x-1)^2 + \dfrac{1}{2}(y-z)^2 = (x+1)^2 + \dfrac{1}{2}(y+z)^2$

$$x = -\frac{1}{2}yz \quad \cdots ③$$

③ を ①，② にそれぞれ代入することにより

$$y(y-4)(z+2)(z-2) = 0$$
$$(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2}) = 0$$

$(*)$ を満たすとき，次を解けばよい．

$$\begin{cases} y(y-4)(z+2)(z-2) = 0 \\ (y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2}) = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2}yz \\ R^2 = y^2 + z^2 \end{cases}$$

上の第 1 式と第 2 式から

$$y = 0,\ 4 \text{ のとき } z = \pm\sqrt{2},\quad y = \pm\sqrt{2} \text{ のとき } z = \pm 2$$

これらを第 3 式と第 4 式に代入して

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{(0,\ 0, \pm\sqrt{2}),\quad R = \sqrt{2}} & \\ \boldsymbol{(\mp 2\sqrt{2},\ 4, \pm\sqrt{2}),\quad R = 3\sqrt{2}} & \\ \boldsymbol{(\mp\sqrt{2}, \pm\sqrt{2},\ 2),\quad R = \sqrt{6}} & \text{(複号同順)} \\ \boldsymbol{(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, -2),\quad R = \sqrt{6}} & \end{array}$$

■

2.16 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$|\vec{a}|=\sqrt{13},\quad |\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=-11$$

したがって
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2\\&=5^2-2\cdot1+(\sqrt{13})^2=36\end{aligned}$$

よって $\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\mathbf{6}$

(2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2\\&=-11-1-1+(\sqrt{13})^2=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\qquad(*)$$

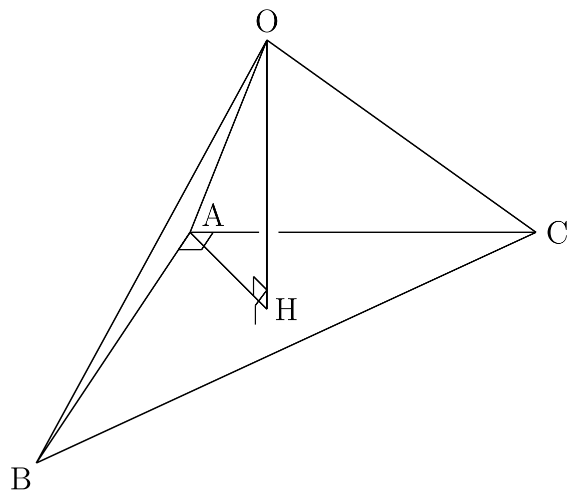
このとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2&=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=5^2-2\cdot1+(\sqrt{13})^2=36\\\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=-\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=-1+(\sqrt{13})^2=12\\\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=-\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=-1+(\sqrt{13})^2=12\end{aligned}$$

以上の結果を $(*)$ に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{12}{36}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{12}{36}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\qquad(**)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ よって $\boldsymbol{s=t=\dfrac{1}{3}}$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ により，$(**)$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = \frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + \frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = \frac{1}{9}\cdot 36 + \frac{1}{9}\cdot 36 = 8$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = 13 - 8 = 5$　　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \sqrt{5}$

よって，求める四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 6\cdot\sqrt{5} = \mathbf{6\sqrt{5}}$$

発展 行列 M を $M = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とすると，四面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{6}|\det M|$$

したがって

$$ {}^tMM = \begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 1 \\ 1 & 25 & -11 \\ 1 & -11 & 25 \end{pmatrix}$$

$\det M = \det {}^tM$ より，$\det({}^tMM) = \det {}^tM \det M = (\det M)^2$ に注意して

$$(\det M)^2 = 36^2\cdot 5 \quad \text{ゆえに} \quad |\det M| = 36\sqrt{5}$$

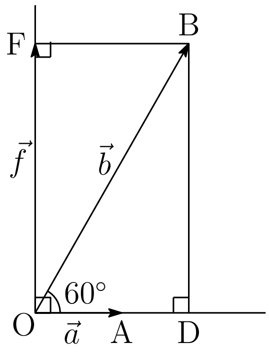
よって　　$V = \dfrac{1}{6}|\det M| = \dfrac{1}{6}\cdot 36\sqrt{5} = \mathbf{6\sqrt{5}}$　■

2.17 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 45^\circ = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{2}$

$\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}|\cos 45^\circ = \sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(2) $|\vec{a}| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\vec{b}\cdot\vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{(\vec{b}\cdot\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \sqrt{3}\,\vec{a},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \boldsymbol{\vec{b} - \sqrt{3}\,\vec{a}}$$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{DB}}| = \mathrm{OB}\sin 60^\circ = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

(3) $\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{DB}} = \vec{b} - \sqrt{3}\,\vec{a}$,　$|\vec{f}| = |\overrightarrow{\mathrm{DB}}| = \sqrt{3}$

$\vec{c}\cdot\vec{f} = \vec{c}\cdot(\vec{b} - \sqrt{3}\,\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{c} - \sqrt{3}\,\vec{c}\cdot\vec{a} = 2 - \sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{(\vec{c}\cdot\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} + \frac{(\vec{c}\cdot\vec{f})}{|\vec{f}|^2}\vec{f} = \sqrt{3}\,\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{f}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{\sqrt{3}\,\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{f} - \vec{c}}$

(4) $\vec{a}\perp\vec{f}$ および $\angle\mathrm{OEC} = 90^\circ$ に注意すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2 = 3|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{f}|^2 = 3\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\cdot 3 = \frac{4}{3},$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3},$$
$$\triangle\mathrm{OAF} = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{2},\quad |\overrightarrow{\mathrm{CE}}| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

求める体積を V とすると　$V = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAF}|\overrightarrow{\mathrm{CE}}| = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{18}}$ ■

3.1 $y = x^3 + 2ax^2$ より　　$y' = 3x^2 + 4ax$

C_1 上の点 $(t,\ t^3 + 2at^2)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 + 2at^2) = (3t^2 + 4at)(x - t)$$

すなわち　　$y = (3t^2 + 4at)x - 2t^3 - 2at^2$

この接線と C_2 の方程式から y を消去して整理すると

$$3ax^2 - (3t^2 + 4at)x + 2t^3 + 2at^2 - \frac{3}{a} = 0$$

このとき，係数について　$(3t^2 + 4at)^2 - 4{\cdot}3a\left(2t^3 + 2at^2 - \frac{3}{a}\right) = 0$

$$8a^2t^2 = 9t^4 + 36$$

上式おいて，$t \neq 0$ であるから　　$a^2 = \frac{1}{8}\left(9t^2 + \frac{36}{t^2}\right)$

相加平均・相乗平均の大小関係より　$9t^2 + \frac{36}{t^2} \geqq 2\sqrt{9t^2{\cdot}\frac{36}{t^2}} = 36$

したがって　$a^2 \geqq \frac{1}{8}{\cdot}36$　$a > 0$ に注意して　$\boldsymbol{a \geqq \frac{3}{\sqrt{2}}}$ ■

3.2 (1) $f(x)=0$ より　$|x+1||x-2|=x+1$

$x+1 \geqq 0$ であるから，$|x+1|=x+1$ とすると

$$(x+1)|x-2|=x+1 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(|x-2|-1)=0$$

$x+1 \geqq 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{x=-1,\ 1,\ 3}$

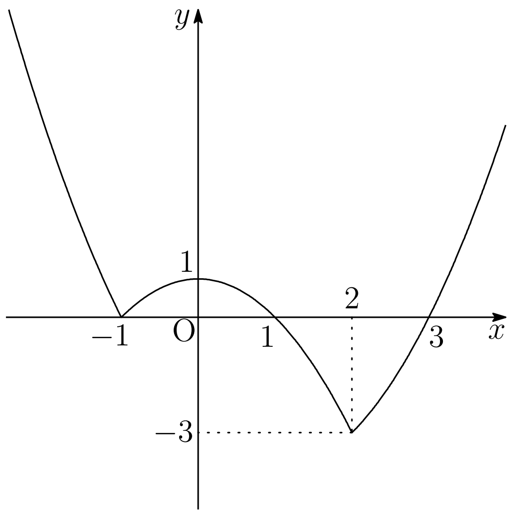
(2) $f(x)=|(x+1)(x-2)|-x-2$

$x \leqq -1,\ 2 \leqq x$ のとき

$$f(x)=(x^2-x-2)-x-1=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$$

$-1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$f(x)=-(x^2-x-2)-x-1=-x^2+1$$



(3) $-1 \leqq x \leqq 2$ において　$f(x)=-x^2+1$ であるから

$$f'(x)=-2x \quad (-1<x<2)$$

$f(1)=0$，$f'(1)=-2$ より，l は点 $(1,\ 0)$ を通り，傾き -2 の直線

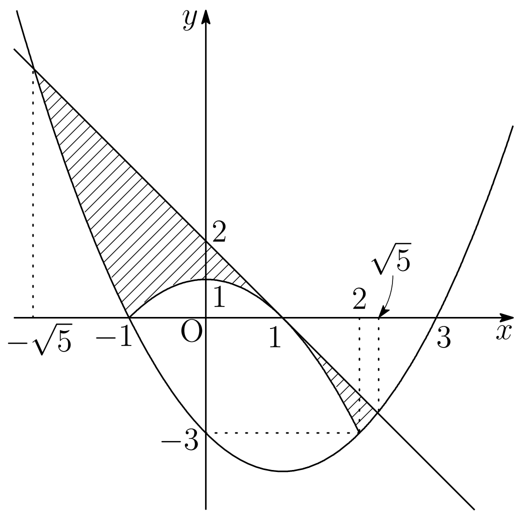
$$y=-2(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-2x+2}$$

(4) l と $y=f(x)$ の接点以外の共有点の x 座標は，

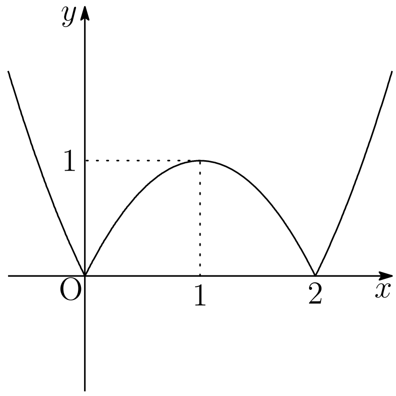
$$x^2-2x-3=-2x+2 \quad \text{これを解いて} \quad x=\pm\sqrt{5}$$

曲線 $y=f(x)$ と l で囲まれた部分は，下の図の斜線部分でその面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\{(-2x+2)-(x^2-2x-3)\}\,dx \\ &\qquad\qquad -\int_{-1}^{2}\{(-x^2+1)-(x^2-2x-3)\}\,dx \\ &= -\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})\,dx+2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{5}+\sqrt{5})^3-2\cdot\frac{1}{6}(2+1)^3=\boldsymbol{\frac{20\sqrt{5}}{3}-9} \end{aligned}$$



3.3 (1) $y = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \leqq 0,\ 2 \leqq x) \\ -x^2 + 2x & (0 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$



(2) $0 \leqq k \leqq 1$ のとき，(1) のグラフから

$$S(k) = \int_k^{k+1} |x^2 - 2x|\,dx = \int_k^{k+1} (-x^2 + 2x)\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_k^{k+1} = \boldsymbol{-k^2 + k + \frac{2}{3}}$$

(3) (2) の結果から，$0 \leqq k \leqq 1$ のとき　$S(k) = -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{12}$

よって，$S(k)$ は，$\boldsymbol{k = \frac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\frac{11}{12}}$ をとる．

(4) $1 \leqq k \leqq 2$ のとき，(1) のグラフから

$$S(k) = \int_k^{k+1} |x^2 - 2x|\,dx = \int_k^{2} (-x^2 + 2x)\,dx + \int_2^{k+1} (x^2 - 2x)\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_k^{2} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^{k+1} = \boldsymbol{\frac{2}{3}k^3 - k^2 - k + 2}$$

(5) (4) の結果から　$S'(k) = 2k^2 - 2k - 1$

k	1	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	2
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

よって，求める k の値は　　$\boldsymbol{k = \frac{1+\sqrt{3}}{2}}$ ■

3.4 (1) $C_1 : y = x^2 - 6x + 2,\ C_2 : y = -x^2 + 10x - 22$ から y を消去すると

$$x^2 - 6x + 2 = -x^2 + 10x - 22 \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)(x-6) = 0$$

$x = 2$ のとき $y = -6$，$x = 6$ のとき $y = 2$ よって $\mathbf{(2, -6),\ (6,\ 2)}$

(2) $f(x) = x^2 - 6x + 2$ とおくと $f'(x) = 2x - 6$

$C_1 : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y - (t^2 - 6t + 2) = (2t - 6)(x - t)$$

よって $\boldsymbol{\ell : y = (2t - 6)x - t^2 + 2}$

(3) (1) で求めた 2 点を通る直線が ℓ と平行であるから

$$f'(t) = \frac{2 - (-6)}{6 - 2} \quad \text{ゆえに} \quad 2t - 6 = 2 \quad \text{すなわち} \quad t = 4$$

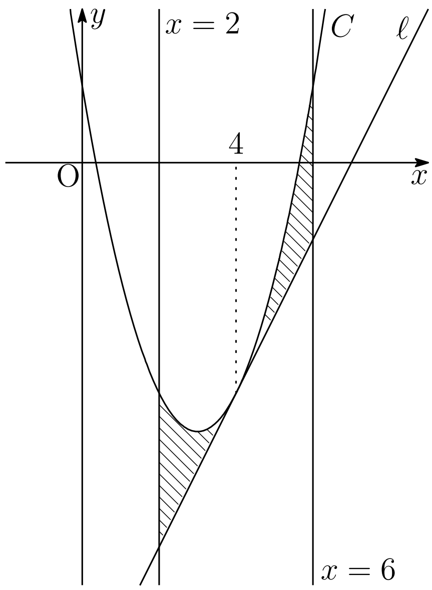
このとき，ℓ の方程式は $\ell : y = 2x - 14$

ℓ と C_2 の方程式から y を消去すると

$$2x - 14 = -x^2 + 10x - 22 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = 4 \pm 2\sqrt{2}}$$

(4) 求める面積を S とすると

$$S = \int_2^6 \{(x^2 - 6x + 2) - (2x - 14)\}\, dx$$
$$= \int_2^6 (x - 4)^2\, dx = \left[\, \frac{1}{3}(x - 4)^3 \,\right]_2^6 = \mathbf{\frac{16}{3}}$$



■

3.5 (1) $2w = z + 1 + i$ より　$w - 1 - i = \dfrac{1}{2}(z - 1 - i)$

C_n の点 z_n は上の変換によって，C_{n+1} の点 z_{n+1} は次式で導かれる．

$$z_{n+1} - 1 - i = \frac{1}{2}(z_n - 1 - i)$$

したがって　$z_n - 1 - i = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(z_1 - 1 - i)$

$$z_n - (1 - 2^{1-n})(1 + i) = 2^{1-n} z_1$$

$|z_1| = 2$ であるから　$|z_n - (1 - 2^{1-n})(1 + i)| = 2^{2-n}$

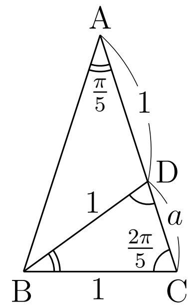
よって　$\boldsymbol{\alpha_n = (1 - 2^{1-n})(1 + i),\ \ r_n = 2^{2-n}}$

(2) $|\alpha_n| = (1 - 2^{1-n})|1 + i| = (1 - 2^{1-n})\sqrt{2}$，$r_n = 2^{2-n}$ より

$$\begin{aligned} d_n &= \big||\alpha_n| - r_n\big| = |(1 - 2^{1-n})\sqrt{2} - 2^{2-n}| \\ &= |\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}\,)2^{1-n}| \\ &= \begin{cases} \boldsymbol{(2 + \sqrt{2}\,)2^{1-n} - \sqrt{2}} & \boldsymbol{(n = 1, 2)} \\ \boldsymbol{\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}\,)2^{1-n}} & \boldsymbol{(n \geqq 3)} \end{cases} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} d_n = \sqrt{2}}$ ■

3.6 (1) $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{BCD}$ より　$1:1+a=a:1$



したがって　$a^2+a-1=0$　$\cdots$①

$a>0$ に注意して　$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=2\cos\dfrac{2\pi}{5}$

$w=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおくと

$$w^5=1,\quad \overline{w}^5=1$$

$g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1=\dfrac{x^5-1}{x-1}$ とおくと

$$g(w)=0,\quad g(\overline{w})=0$$

$f(x)=x^2-ax+1=(x-w)(x-\overline{w})$ より，$g(x)$ は $f(x)$ で割り切れる．

(2) $\alpha=w$ であるから　$\boldsymbol{\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}}$

(3) $\alpha+\alpha^{-1}=a,\ \alpha^5=1,\ \alpha^{-5}=1$ であるから，① を利用して

$$\begin{aligned}\alpha^{2023}+\alpha^{-2023}&=\alpha^3+\alpha^{-3}=\alpha^{-2}+\alpha^2\\&=(\alpha+\alpha^{-1})^2-2=a^2-2\\&=(1-a)-2=-(a+1)=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\end{aligned}$$

■

3.7 (1) $1+\sqrt{3}i = 2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$

$1+i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= \cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

よって　$\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{\alpha}}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{1+\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{2}}$$

上式および (1) の結果から

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{2}} \qquad \cdots ②$$

① より　$\alpha^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 2+2i$

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{2}\alpha^3 = \sqrt{2}(2+2i) = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i\\ \beta-\gamma &= (2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)-2\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

点 β を点 γ を中心として $-\dfrac{\pi}{12}$ だけ回転した点を β' すると，② より

$$\frac{\beta'-\gamma}{\beta-\gamma} = \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{2}}$$

したがって

$$\begin{aligned}\beta' &= \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{2}}(\beta-\gamma)+\gamma\\ &= \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i\\ &= \boldsymbol{1+\sqrt{3}+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})i}\end{aligned}$$

(4) $\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ より　$\alpha^4=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$z=\frac{\alpha^4}{2}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}S_n&=1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\\&=\frac{2^{n+1}\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi+i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)-1}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)-1}\\&=\frac{\left(2^{n+1}\cos\frac{n+1}{3}\pi-1\right)+2^{n+1}i\sin\frac{n+1}{3}\pi}{\sqrt{3}i}\\&=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3}}\sin\frac{n+1}{3}\pi-\frac{i}{\sqrt{3}}\left(2^{n+1}\cos\frac{n+1}{3}\pi-1\right)\end{aligned}$$

S_n が純虚数のとき，$\dfrac{n+1}{3}$ が整数である．このとき

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\{-2^{n+1}(-1)^{\frac{n+1}{3}}+1\}i=\frac{1}{\sqrt{3}}\{2^{n+1}(-1)^{\frac{n-2}{3}}+1\}i$$

S_n の虚部が正であるから，求める最小の自然数 n は $n>2$ に注意して

$\dfrac{n-2}{3}=2$　これを解いて　$\boldsymbol{n=8}$**，**　$\boldsymbol{S_8=171\sqrt{3}i}$

■

3.8 (1) $f(x) = \sin 3x + \sin x$ より

$$f(x) = 2\sin 2x \cos x = 4\sin x \cos^2 x$$
$$= -4\sin x(\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

したがって，$f(x) = 0$ の解は　$x = \dfrac{k\pi}{2}$ (k は整数) $\qquad (*)$

よって，求める最小の正の実数 x は　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2}}$

(2) $(*)$ より，正の整数 m に対して

$$\frac{k\pi}{2} \leqq m < \frac{(k+1)\pi}{2}$$

を満たす $k = p(m)$ がただ 1 つ存在する．

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m} < \frac{k}{m} \leqq \frac{2}{\pi} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{\pi} - \frac{1}{m} < \frac{p(m)}{m} \leqq \frac{2}{\pi}$$

上の第 2 式から，はさみうちの原理により　$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} \dfrac{p(m)}{m} = \dfrac{2}{\pi}}$ ■

3.9 (1) $f(x)=\dfrac{1}{b}(e^{-(a-b)x}-e^{-ax})$ を微分すると $(0<b<a)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{b}\{-(a-b)e^{-(a-b)x}+ae^{-ax}\} \\ &= \frac{(a-b)e^{-ax}}{b}\left(\frac{a}{a-b}-e^{bx}\right) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ となる x を X とすると

$$\frac{a}{a-b}-e^{bX}=0 \quad \text{ゆえに} \quad X=\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}$$

$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	X	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

したがって，$f(x)$ の最大値を与える $X(a,\ b)$ は

$$\boldsymbol{X(a,\ b)=\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}}$$

(2) $g(x)=\log\dfrac{a}{a-x}$ とおくと　$g(0)=0$

$$g'(x)=\frac{1}{a-x} \quad \text{ゆえに} \quad g'(0)=\frac{1}{a}$$

したがって

$$\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}=\lim_{b\to+0}\frac{g(b)-g(0)}{b}=g'(0)=\boldsymbol{\frac{1}{a}}$$

(3) $M(a,\ b)=f(X)=\dfrac{1}{b}(e^{-(a-b)X}-e^{-aX})$ より

$$M(a,\ b)=e^{-aX}\cdot\frac{e^{bX}-1}{b}=e^{-aX}\cdot\frac{e^{bX}-1}{bX}\cdot X$$

$\varphi(t)=e^t$，$h=bX$ とおくと，$\displaystyle\lim_{b\to0}X=\frac{1}{a}$ であるから，$\displaystyle\lim_{b\to0}h=0$

$\varphi(0)=1$，$\varphi'(t)=e^t$ より $\varphi'(0)=1$ であるから

$$\lim_{b\to+0}M(a,\ b)=\lim_{b\to+0}e^{-aX}\cdot\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}\cdot X=e^{-a\cdot\frac{1}{a}}\varphi'(0)\cdot\frac{1}{a}=\boldsymbol{\frac{1}{ae}} \quad ■$$

3.10 (1) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ より

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \boldsymbol{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot(1+x^2)^2 - (1-x^2)\cdot 2\cdot 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \boldsymbol{\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}}$$

(2) $a = f'(0)$ より　$\boldsymbol{a = 1}$

$x > 0$ のとき　$ax - f(x) = x - \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{x^3}{1+x^2} > 0$

よって，$x > 0$ において　$ax > f(x)$

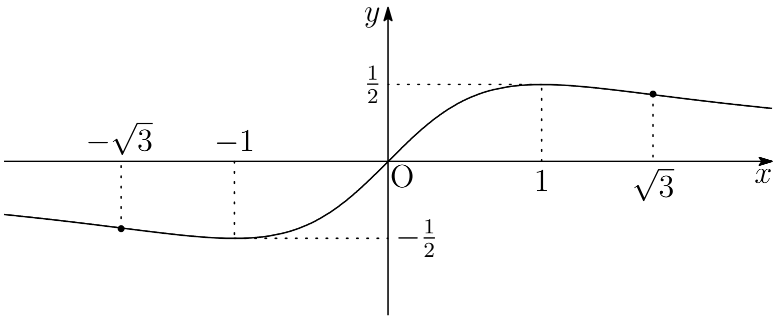
(3) $f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	変曲点	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$　ゆえに　**漸近線は $\boldsymbol{x}$ 軸**

極大値 $\boldsymbol{f(1) = \dfrac{1}{2}}$，極小値 $\boldsymbol{f(-1) = -\dfrac{1}{2}}$

変曲点は　$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\pm\sqrt{3},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}$　**(複号同順)**



(4) 求める面積 S は

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \left[\, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x^2) \,\right]_0^{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{2} - \log 2}$$

■

3.11 (1) $f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ より，$f(x)$ の定義域は

$$\frac{3x+3}{x^2+3}>0 \quad \text{すなわち} \quad x>-1$$

$f(x)$ を微分すると

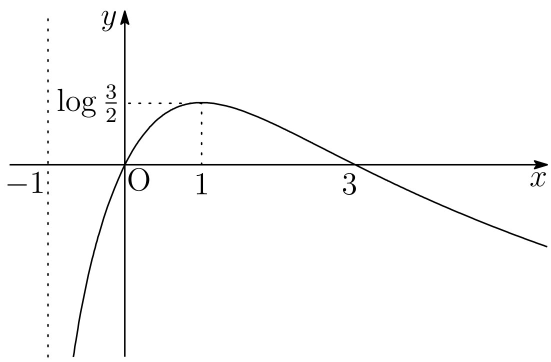
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2+3}{3x+3}\cdot\frac{3(x^2+3)-(3x+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+3)} \qquad \cdots① \\ &= -\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x^2+3)} \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\log\frac{3}{2}$	$\searrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0} f(x)=-\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=-\infty$

よって，$y=f(x)$ の概形は，次のようになる．



(2) $f(x)=s$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=s$ の共有点の個数である．したがって，(1) のグラフから

$$\begin{cases} \boldsymbol{s>\log\frac{3}{2}} \text{ **のとき　0 個**} \\ \boldsymbol{s=\log\frac{3}{2}} \text{ **のとき　1 個**} \\ \boldsymbol{s<\log\frac{3}{2}} \text{ **のとき　2 個**} \end{cases}$$

(3) $$\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx = \int_0^3 \left(2 - \frac{6}{x^2+3}\right) dx = 6 - 6\int_0^3 \frac{1}{x^2+3}\,dx \qquad (*)$$

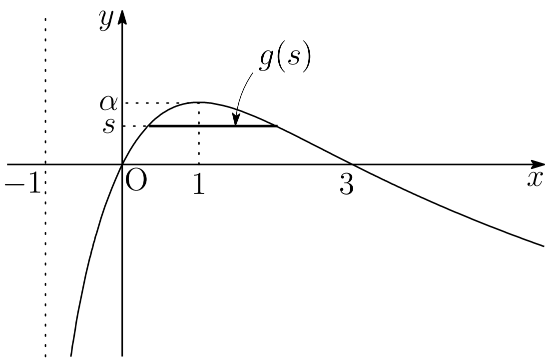
$x = \sqrt{3}\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$

x	$0 \longrightarrow 3$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$$J = \int_0^3 \frac{1}{x^2+3}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{dx}{d\theta}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$(*)$ より $$\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx = \boldsymbol{6 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

(4) 下の図から $$\int_0^\alpha g(s)\,ds = \int_0^3 f(x)\,dx$$



$f(0)=0$，$f(3)=0$ および ① に注意して

$$\int_0^\alpha g(s)\,ds = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (x+1)'f(x)\,dx$$
$$= \Big[\,(x+1)f(x)\,\Big]_0^3 - \int_0^3 (x+1)f'(x)\,dx$$
$$= \int_0^3 \frac{x^2+2x-3}{x^2+3}\,dx$$
$$= \int_0^3 \left(1 + \frac{2x}{x^2+3} - \frac{6}{x^2+3}\right) dx$$
$$= \Big[\,x + \log(x^2+3)\,\Big]_0^3 - 6J$$
$$= 3 + 2\log 2 - 6\cdot\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \boldsymbol{3 + 2\log 2 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

3.12 (1) $(\sin\theta)' = \cos\theta$，$(\cos\theta)' = -\sin\theta$ より

$$(\tan\theta)' = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' = \frac{(\sin\theta)'\cos\theta - \sin\theta(\cos\theta)'}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

したがって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \Big[\ \tan\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathbf{1}$

(2) $$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$
$$= \frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$$

したがって $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 3}$$

(3) $$(\sin\theta\cos^n\theta)' = \cos\theta\cos^n\theta + \sin\theta{\cdot}n\cos^{n-1}\theta(-\sin\theta)$$
$$= (n+1)\cos^{n+1}\theta - n\cos^{n-1}\theta$$

上式より，次式が成立する (C は積分定数).

$$(n+1)\int\cos^{n+1}\theta\,d\theta - n\int\cos^{n-1}\theta\,d\theta = \sin\theta\cos^n\theta + C$$

$n=-2$ とし，(2) の結果を利用する.

$$-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \left[\ \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\ \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$-\frac{1}{2}\log 3 + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \frac{2}{3}$$

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \boldsymbol{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\log 3}$ ■

3.13 (1) $(\sin\theta)' = \cos\theta$，$(\cos\theta)' = -\sin\theta$ より

$$(\tan\theta)' = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' = \frac{(\sin\theta)'\cos\theta - \sin\theta(\cos\theta)'}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

また $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta = \Big[\ -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{1}$

(2) $\boxed{4}$ (2) を参照．

(3) $\boxed{4}$ (3) を参照． ■

3.14 (1) $f(x) = 2tx^2e^{-tx^2}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2t\{2xe^{-tx^2} + x^2\cdot(-2tx)e^{-tx^2}\} \\ &= 4tx(1-tx^2)e^{-tx^2} \end{aligned} \qquad (*)$$

$f'(x) = 0$ とすると，$t > 0$ より　$x = 0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\cdots$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ のとき，極大値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{e}}$，$x = 0$ のとき，極小値 $\mathbf{0}$

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned} 与式 &= \int_1^{\sqrt{t}} f'(x)\log x\,dx = \Big[\ f(x)\log x\ \Big]_1^{\sqrt{t}} - \int_1^{\sqrt{t}} f(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= f(\sqrt{t})\log\sqrt{t} - \int_1^{\sqrt{t}} 2txe^{-tx^2}\,dx = 2t^2e^{-t^2}\log\sqrt{t} + \Big[\ e^{-tx^2}\ \Big]_1^{\sqrt{t}} \\ &= \boldsymbol{(t^2\log t + 1)e^{-t^2} - e^{-t}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$g(t) = (t^2\log t + 1)e^{-t^2} - e^{-t}$

$h(t) = (t^{\frac{5}{2}} - t^2 + 1)e^{-t^2} - e^{-t}$ とおくと

$$\begin{aligned} g(t) - h(t) &= (t^2\log t - t^{\frac{5}{2}} + t^2)e^{-t^2} \\ &= t^2(\log t - \sqrt{t} + 1)e^{-t^2} \end{aligned}$$

$\varphi(t) = \log t - \sqrt{t} + 1$ とおくと $(1 \leqq t \leqq 4)$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{2-\sqrt{t}}{2t}$$

$\varphi(1) = 0$，$1 < t < 4$ において，$\varphi'(t) > 0$ であるから

$$1 < t < 4 \text{ において}\quad \varphi(t) > 0$$

$1 < t < 4$ において，$g(t) - h(t) = t^2e^{-t^2}\varphi(t) > 0$ であるから

$$1 < t < 4 \text{ において}\quad g(t) > (t^{\frac{5}{2}} - t^2 + 1)e^{-t^2} - e^{-t}$$ ■

3.15 (1) $f(x) = x + a\sin x,\ g(x) = b\cos x$ より ($a,\ b$ は実数)，$f(x)$ は奇関数，$g(x)$ は偶関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \mathbf{0}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)+g(x)\}^2\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx + b^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx \\ &\geqq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx \qquad (*)\end{aligned}$$

次式から，$(*)$ において等号が成立するのは，$b=0$ のときである．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2x)\,dx = \pi$$

よって $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)+g(x)\}^2\,dx \geqq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx$

(3) (2) の結論から

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)+g(x)\}^2\,dx \\ &\geqq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (x + a\sin x)^2\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + 2ax\sin x + a^2\sin^2 x)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2ax\cos x + 2a\sin x + \frac{a^2}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2}{3}\pi^3 + 4a\pi + a^2\pi = \pi(a+2)^2 + \frac{2}{3}\pi(\pi^2-6) \\ &\geqq \frac{2}{3}\pi(\pi^2-6) \qquad (\text{等号が成立のは } a=-2 \text{ のとき}) \qquad (**)\end{aligned}$$

よって $V \geqq \dfrac{2}{3}\pi^2(\pi^2-6)$

上式において，等号が成立するのは，$(*)$，$(**)$ から

$$\boldsymbol{a = -2,\ b = 0}$$

■

3.16 (1) $f(x)=|x-1|e^x$ より，$f(1)=0$ に注意して

$$\begin{aligned}\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}&=\lim_{h\to+0}\frac{|(1+h)-1|e^{1+h}}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{he^{1+h}}{h}=e,\\\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}&=\lim_{h\to-0}\frac{|(1+h)-1|e^{1+h}}{h}\\&=\lim_{h\to-0}\frac{-he^{1+h}}{h}=-e\end{aligned}$$

よって，$x=1$ で微分可能ではない．

(2) $\varphi(x)=(x-1)e^x$ とおくと　$\varphi(1)=0$,　$\varphi'(x)=xe^x$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$$

$f(x)=|\varphi(x)|$ であるから，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

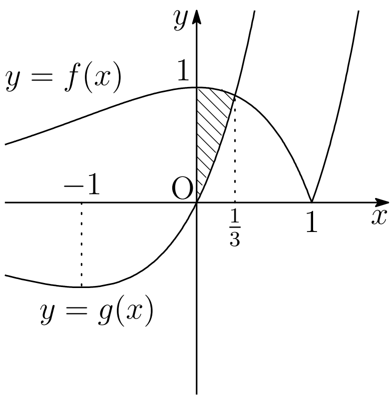
よって　極大値 $f(0)=\mathbf{1}$，極小値 $f(1)=\mathbf{0}$

(3) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ から y を消去すると

$$(|x-1|-2x)e^x=0$$

これを解くと

$$x=\frac{1}{3}$$



求める面積は右の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{1}{3}}\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^{\frac{1}{3}}(1-3x)e^x\,dx\\&=\Big[(4-3x)e^x\Big]_0^{\frac{1}{3}}=\mathbf{3e^{\frac{1}{3}}-4}\end{aligned}$$

■

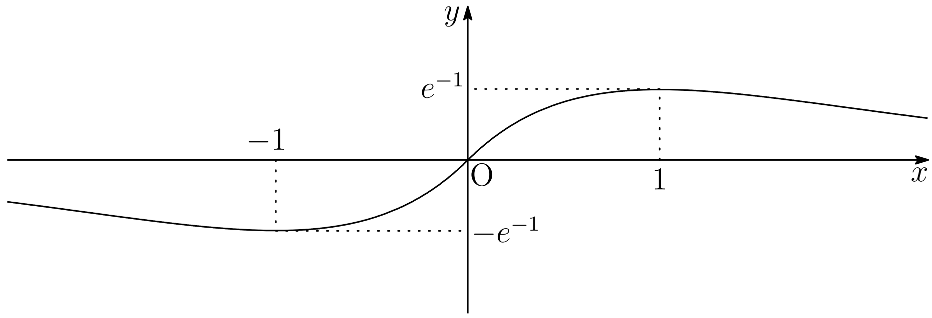
3.17 (1) $f(x)=x^{-|x|}=\begin{cases} xe^{-x} & (x \geqq 0) \\ xe^{x} & (x \leqq 0) \end{cases}$

$x \geqq 0$ のとき　$f'(x)=(xe^{-x})'=(1-x)e^{-x}$

$x \leqq 0$ のとき　$f'(x)=(xe^{x})'=(1+x)e^{x}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 $-e^{-1}$	$\nearrow$	極大 e^{-1}	$\searrow$

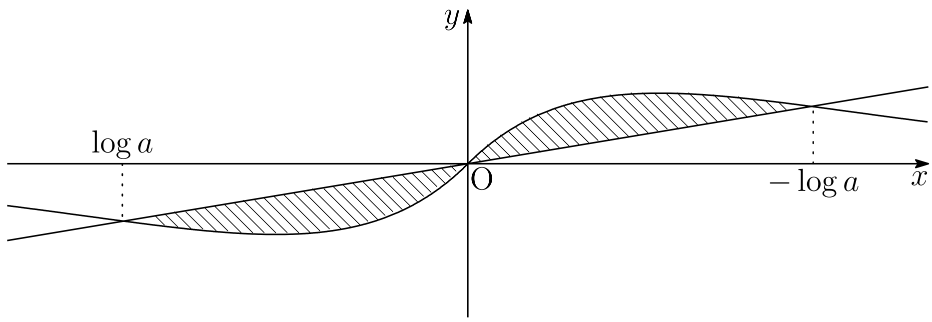
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$



補足 $f(-x)=-f(x)$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは，原点対称．

(2) $f(x)=ax$，すなわち，$xe^{-|x|}=ax$ を解くと　$x=0,\ \pm\log a$

$0<a<1$ に注意すると，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ で囲まれた部分は下の図の斜線部分である．



求める面積を S とすると，原点に関する対称性に注意して

$$\frac{S}{2}=\int_0^{-\log a}(xe^{-x}-ax)\,dx=\left[-(x+1)e^{-x}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^{-\log a}$$
$$=a(\log a-1)-\frac{a}{2}(\log a)^2+1$$

よって　$S=\boldsymbol{2a(\log a-1)-a(\log a)^2+2}$ ■

3.18 (1) Y が 5 で割り切れる事象を A とすると $P(\overline{A}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

求める確率は $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \mathbf{1} - \left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right)^{\boldsymbol{n}}$

(2) Y が 3 で割り切れる事象を B とすると

$$P(\overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad P(\overline{A \cup B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= 1 - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\} \\ &= 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A \cup B}) \\ &= \mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right)^{\boldsymbol{n}} - \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}} \end{aligned}$$

■

3.19 (1) 2 回投げて出た目の数の積が 12 となるのは，出た目が $\{2,\ 6\}$, $\{3,\ 4\}$ であるから

$$p_2 = \frac{2!}{1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$$

3 回投げて出た目の数の積が 12 となるのは，出た目が $\{1,\ 2,\ 6\}$，$\{1,\ 3,\ 4\}$，$\{2,\ 2,\ 3\}$ であるから

$$p_3 = \frac{3!}{1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 2 + \frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{72}}$$

(2) n 回の目の出方で，1 以外の目の出方は $\{2,\ 6\}$, $\{3,\ 4\}$, $\{2,\ 2,\ 3\}$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{n!}{1!1!(n-2)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n \times 2 + \frac{n!}{2!1!(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{2n(n-1)}{6^n} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2{\cdot}6^n} = \boldsymbol{\frac{n(n-1)(n+2)}{2{\cdot}6^n}} \end{aligned}$$

(3) $n-1$ 回目までの目の積が 12 で，n 回目で 1 の目が出る確率は

$$p_{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}p_{n-1}$$

これと (2) の結果から，求める確率は

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{6}p_{n-1} &= \frac{n(n-1)(n+2)}{2{\cdot}6^n} - \frac{1}{6}{\cdot}\frac{(n-1)(n-2)(n+1)}{2{\cdot}6^{n-1}} \\ &= \boldsymbol{\frac{(n-1)(3n+2)}{2{\cdot}6^n}} \end{aligned}$$

■

3.20 (1) 3 回の目の出方が $\{2,\ 5,\ 6\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$ であるから

$$p_3 = \frac{3!}{1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{18}}$$

(2) n 回の目の出方で，1 以外の目の出方は $\{2,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 5,\ 6\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{n!}{2!1!1!(n-4)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{n!}{1!1!1!(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n \times 2 \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2{\cdot}6^n} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6^n} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\{(n-3)+4\}}{2{\cdot}6^n} \\ &= \boldsymbol{\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2{\cdot}6^n}} \end{aligned}$$

(3) $n-1$ 回目までの目の積が 60 で，n 回目で 1 の目が出る確率は

$$p_{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}p_{n-1}$$

これと (2) の結果から，求める確率は

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{6}p_{n-1} &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2{\cdot}6^n} - \frac{1}{6}{\cdot}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2{\cdot}6^{n-1}} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\{(n+1)-(n-3)\}}{2{\cdot}6^n} \\ &= \boldsymbol{\frac{2n(n-1)(n-2)}{6^n}} \end{aligned}$$

■

3.21 (1) 3回のうち，Aが2回または3回出る確率であるから

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{2}} $$

(2) 3回のうち，Aが3回またはBが3回出る確率は

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4} $$

求める確率はこの余事象の確率であるから

$$ 1-\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{4}} $$

(3) (i) Aが連続して丁度3回出る場合の数は ($*$ はAまたはBを表す)

$$ 2^2+2+2+2^2=12\ (\text{通り}) $$

3	B	$*$	$*$
B	3	B	$*$
$*$	B	3	B
$*$	$*$	B	3

(ii) Aが連続して丁度4回出る場合の数は

$$ 2+1+2=5\ (\text{通り}) $$

4	B	$*$
B	4	B
$*$	B	4

(iii) Aが連続して丁度5回出る場合の数は

$$ 1+1=2\ (\text{通り}) $$

5	B
B	5

(i)〜(iii) より，求める確率は $\dfrac{12+5+2}{2^6}=\boldsymbol{\dfrac{19}{64}}$ ■

3.22 (1) $a^2-b^2=15$ であるから　$(a+b)(a-b)=15$

$a,\ b$ は自然数より　$a+b>a-b>0$

$$(a+b,\ a-b)=(15,\ 1),\ (5,\ 3)$$

よって　　$\boldsymbol{(a,\ b)=(8,\ 7),\ (4,\ 1)}$

(2) $(*)$ の 2 式の辺々の差をとると　$x^2-y^2+2x-4y-18=0$

$$(x+1)^2-(y+2)^2=15$$

$x,\ y$ は自然数であるから，$y+2\geqq 3$ および (1) の結果に注意して

$$(x+1,\ y+2)=(8,\ 7)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{(x_0,\ y_0)=(7,\ 5)}$$

これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$7^2-4{\cdot}5+k=0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{k=-29}$$

(3) $k=-29$ を $(*)$ に代入すると

$$(**)\begin{cases} x^2-4y-29=0 \\ y^2-2x-11=0 \end{cases}$$

$(**)$ の第 2 式から　$x=\dfrac{1}{2}(y^2-11)\quad\cdots$①

① を $(**)$ の第 1 式に代入すると

$$\frac{1}{4}(y^2-11)^2-4y-29=0\quad \text{整理すると}\quad y^4-22y^2-16y+5=0$$

(2) の結果から，上式は $y-5$ を因数にもつことに注意して

$$(y-5)(y^3+5y^2+3y-1)=0$$
$$(y-5)(y+1)(y^2+4y-1)=0$$

これを解いて　$y=5,\ -1,\ -2\pm\sqrt{5}$

それぞれ ① に代入すると　$x=7,-5,-1\mp 2\sqrt{5}$

よって，$(x_0,\ y_0)$ 以外の解は

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(-5,-1),\ (-1\mp 2\sqrt{5},-2\pm\sqrt{5})}\quad \text{(複号同順)}$$

■

3.23 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とする．
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3$ より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{2}} \neq \pm 1$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる実数 k は存在しない．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$

(3) PR//HB であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = s\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ とおくと (s は実数)

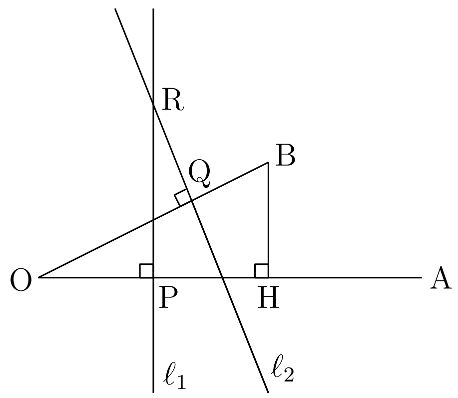
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{HB}} \\
&= t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \left(t - \frac{3}{5}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad (*) \\
\overrightarrow{\mathrm{QR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(t - \frac{3}{5}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} - (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= \left(t - \frac{3}{5}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (s+t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}
\end{aligned}$$

OB⊥QR であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}} = 0$ より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}} &= \left(t - \frac{3}{5}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (s+t-1)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\
&= 3\left(t - \frac{3}{5}s\right) + 2(s+t-1) = \frac{1}{5}s + 5t - 2 = 0
\end{aligned}$$

ゆえに　$s = 10 - 25t$　これを $(*)$ に代入すると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (16t-6)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (10-25t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$



(4) OA と OB の垂直二等分線の交点であるから，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\mathbf{2\overrightarrow{OA}-\frac{5}{2}\overrightarrow{OB}}$$ ■

3.24 (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\\ \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用すると，$\vec{a}$ の成分について

$$\vec{a}=4(-\sin 15^\circ,\ \cos 15^\circ)=4(\cos 105^\circ,\ \sin 105^\circ) \qquad (*)$$

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$ より，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ とすると，$f(t)=|\vec{a}+t\vec{b}|$ が最小となるとき

$$\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0} \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{a}|=|t||\vec{b}|$$

このとき，$4=|t|\sqrt{2}$，すなわち，$|t|=2\sqrt{2}$ となり，条件に反するから，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立である．したがって，$f(t)=|\vec{a}+t\vec{b}|\neq 0$ に注意して

$$\frac{1}{2}f(t)^2=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\right)$$

これを t について微分すると

$$f(t)f'(t)=\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2$$

$f'(-\sqrt{2})=0$ であるから，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+(-\sqrt{2})(\sqrt{2})^2=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{2}}$$

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \theta=60^\circ$$

$|\vec{b}|=\sqrt{2}$ および $(*)$ により

$$\vec{b}=\sqrt{2}(\cos(105^\circ\pm 60^\circ),\ \sin(105^\circ\pm 60^\circ)) \quad (\text{複号同順})$$

よって　$$\boldsymbol{\vec{b}=\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right),\ (1,\ 1)}$$ ■

3.25 (1) 点 G は，△ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

これを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}\cdots(*)$ に代入すると

$$3\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OG}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}}$$

(2) $(*)$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

したがって $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=r^2$ であるから

$$3r^2+2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})=r^2$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{-r^2}$

(3) $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおき，

$$I=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

とおくと

$$\begin{aligned}I&=(\vec{a}-\vec{p})\cdot(\vec{b}-\vec{p})+(\vec{b}-\vec{p})\cdot(\vec{c}-\vec{p})+(\vec{c}-\vec{p})\cdot(\vec{a}-\vec{p})\\&=3|\vec{p}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{d}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-r^2$，$|\vec{p}|=r$ であるから

$$I=3|\vec{p}|^2+2\vec{d}\cdot\vec{p}-r^2=2r^2+2\vec{d}\cdot\vec{p}\leqq 2r^2+2|\vec{d}||\vec{p}|=4r^2$$

上式において，等号が成立するのは，$\vec{p}=\vec{d}$ のときである．

このとき $\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

よって $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|=\frac{4}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\boldsymbol{\frac{4}{3}r}$ ■

3.26 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right| \leqq 36$ より $\qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6}\right| \leqq 6$

A$(-3,\ 2,\ 0)$，B$(1,\ 5,\ 0)$，C$(4,\ 5,\ 1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6}$ とおくと

$$\mathrm{D}\left(\frac{4}{3},\ \frac{9}{2},\ \frac{1}{3}\right), \quad |\overrightarrow{\mathrm{DP}}| \leqq 6$$

D から平面 OAB，すなわち，xy 平面まで距離は $\dfrac{1}{3}$

P は D を中心とする半径 6 の球面上とその内部であるから，P から xy 平面までの距離の最大値は

$$6+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$$

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}|-3{\cdot}5-2{\cdot}1|=\dfrac{17}{2}$ より，求める四面体 OABP の最大値は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\frac{19}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{19}{3}=\boldsymbol{\frac{323}{18}}$$

■

3.27 R は直線 OD 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

直線 QR 上の点の位置ベクトルは，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= (1-t)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + tk(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}) \\ &= 3tk\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left\{\frac{1}{2}(1-t) + 2tk\right\}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3tk\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

これが直線 PC 上の点で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が 1 次独立および $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から

$$3tk + 3tk = 1, \quad \frac{1}{2}(1-t) + 2tk = 0$$

これを解いて　$t = \dfrac{5}{3}$, $k = \dfrac{1}{10}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

よって　$\mathbf{OR : RD = 1 : 9}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{10}\end{aligned}$$

$(*)$ $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とすると，R は平面 PQC 上の点である．

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3}{10}(\overrightarrow{\mathrm{QP}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{QP}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}}}{2}$$

確かに，直線 QR は線分 PC の中点を通る．$(*)$ より　$\mathbf{OR : RD = 1 : 9}$

■

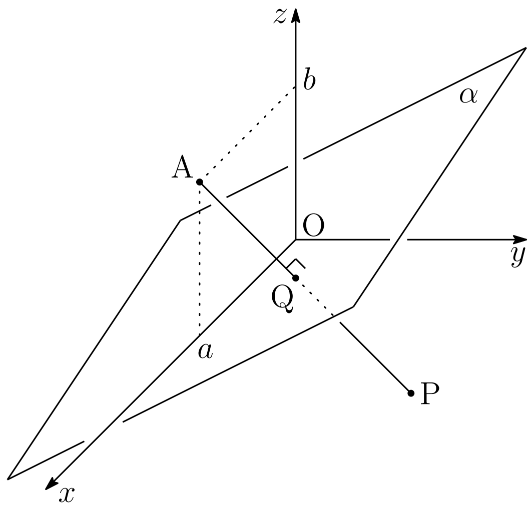
3.28 (1) AP$\perp\alpha$ で，直線 AP と平面 α との交点が Q であるから

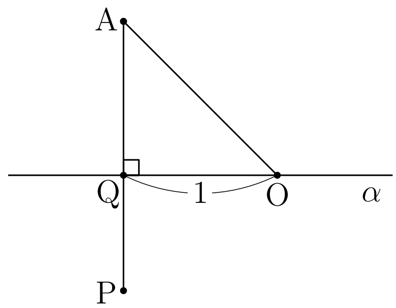
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}} \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\pm|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| \quad \cdots②$

①，② より　$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}})^2=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$

よって　$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$





(2) A$(a,\ 0,\ b)$，P$(x,\ y,\ 0)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=a^2+b^2-1$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(x-a)^2+y^2+b^2$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2=(ax-a^2-b^2)^2$$

これらを (1) の結果に代入すると

$$(ax-a^2-b^2)^2=\{(x-a)^2+y^2+b^2\}(a^2+b^2-1)$$

よって，求める軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{(b^2-1)x^2+(a^2+b^2-1)y^2+2ax-a^2-b^2=0}$$

補足 $a^2+b^2-1>0$ であるから，$0<|b|<1$ のとき双曲線．$|b|=1$ のとき放物線，$|b|>1$ のとき楕円． ■

3.29 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB} = 1\cdot\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \mathbf{1}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = (\sqrt{2})^2 - 2\cdot 1 + 1^2 = 1$$

よって　$\mathrm{AB} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \mathbf{1}$

補足 $\mathrm{OA} = 1,\ \mathrm{OB} = \sqrt{2},\ \angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{4}$ より　$\mathrm{OA} = \mathrm{AB} = 1$，$\angle\mathrm{OAB} = \frac{\pi}{2}$

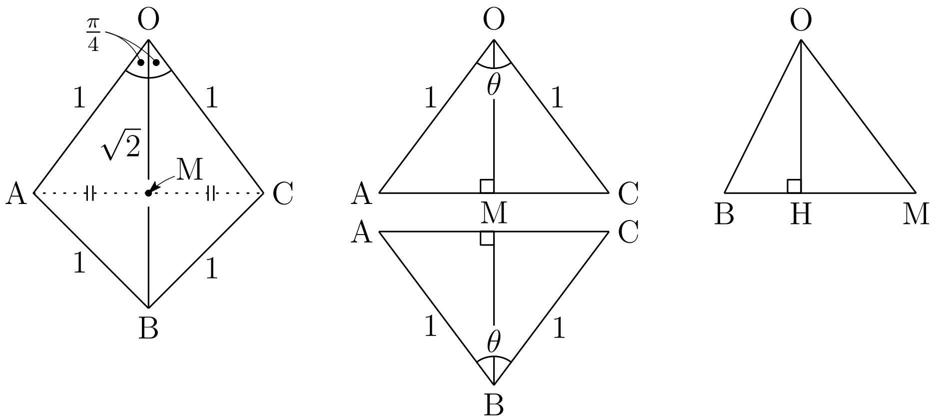
(2) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ は，(1) と同様に

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= 1^2 - 2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{BOC} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 3 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cos\frac{\pi}{4} = 1\end{aligned}$$

$\mathrm{OA} = \mathrm{OC} = 1$，$\mathrm{BA} = \mathrm{BC} = 1$ より　$\triangle\mathrm{OAC} \equiv \triangle\mathrm{BAC}$

$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{COA} = \theta$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= |\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\angle\mathrm{ABC} = 1\cdot 1\cos\theta = \boldsymbol{\cos\theta} \\ S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin\theta = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sin\theta}\end{aligned}$$



(3) M を AC の中点とする．平面 OBM⊥AC であるから，H は平面 OBM 上の点で，OH は BM に引いた垂線である．

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}})}{|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{BM}} \qquad (*)$$

このとき

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BM}} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}),\\
|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2 &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})\\
&= \frac{1}{4}(1^2+1^2+2\cos\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2},\\
\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}} &= \overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}) = -\vec{b}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})\\
&= \frac{1}{2}(-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+2|\vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(-1-1+2\cdot2) = 1
\end{aligned}$$

これらを $(*)$ に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{1+\cos\theta}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{1+\cos\theta}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に注意して

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{1+\cos\theta}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{1+\cos\theta}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left(\vec{b}+\frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{1+\cos\theta}\right)\cdot\vec{b}\\
&= |\vec{b}|^2+\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-2|\vec{b}|^2}{1+\cos\theta} = 2+\frac{1+1-2\cdot2}{1+\cos\theta} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}
\end{aligned}$$

よって　$\mathrm{OH} = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}}}$

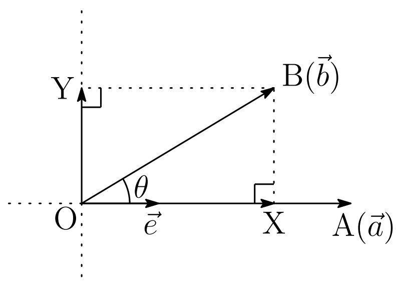
(5) (2),(4) の結果から

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\sqrt{\frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}}\\
&= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2\cos\theta\sin^2\theta}{1+\cos\theta}} = \boldsymbol{\frac{1}{6}\sqrt{2\cos\theta(1-\cos\theta)}}
\end{aligned}$$

ゆえに　$V = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{-\cos^2\theta+\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{-\left(\cos\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}}$

よって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{12}}$

補足 3点O，A，Bについて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．Bから直線OAに垂線BXを下ろし，Bから直線OAに垂直な直線に垂線BYを下ろす．このとき，次の2式が成立する．



$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}}$$

証明 第1式は自明．

$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると　$\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\vec{b}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると $(|\vec{e}|=1)$

$$\vec{b}\cdot\vec{e}=|\vec{b}||\vec{e}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta)\vec{e}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(\vec{b}\cdot\vec{e})\vec{e}=\left(\vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

証終

発展 四面体OABCにおいて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，行列 M を $M=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とすると，四面体OABCの体積 V は

$$V=\frac{1}{6}|\det M|$$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{b}=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\cos\theta$ であるから

$$^tMM=\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cos\theta\\ 1 & 2 & 1\\ \cos\theta & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$\det M=\det{}^tM$ より，$\det({}^tMM)=\det{}^tM\det M=(\det M)^2$ に注意して

$$(\det M)^2=2\cos\theta(1-\cos\theta)\quad ゆえに\quad |\det M|=\sqrt{2\cos\theta(1-\cos\theta)}$$

よって　　$V=\dfrac{1}{6}|\det M|=\dfrac{1}{6}\sqrt{2\cos\theta(1-\cos\theta)}$ ■

3.30 (1) P$(-1,\ 1,-4)$，Q$(1,\ 2,-2)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2,\ 1,\ 2)$

したがって，直線 l の方程式は

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{2}=t \qquad (t\text{ は媒介変数}) \qquad (*)$$

原点を通り，直線 l に垂直な平面 S の方程式は

$$S: 2x+y+2z=0$$

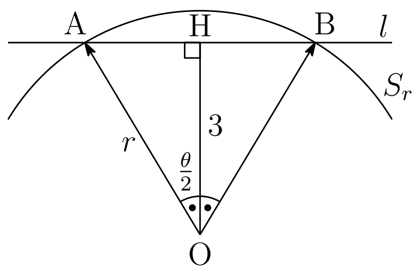
$(*)$ より　$x=2t-1,\ y=t+1,\ z=2t-4$

これらを S の方程式に代入すると

$$2(2t-1)+t+1+2(2t-4)=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=1$$

したがって，S と直線 l の交点を H とすると　H$(1,\ 2,-2)$

よって，r の条件は，$r>\mathrm{OH}$ より　$\boldsymbol{r>3}$



(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{r} \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{18}{r^2}-1$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta=r\cdot r\left(\frac{18}{r^2}-1\right)=\boldsymbol{18-r^2}$

(3) $\mathrm{AB}=2\mathrm{AH}=2\sqrt{r^2-3^2}=2\sqrt{r^2-9}$

よって　$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{r^2-9}\cdot 3=\boldsymbol{3\sqrt{r^2-9}}$ ■

3.31 (1) 与えられた条件から

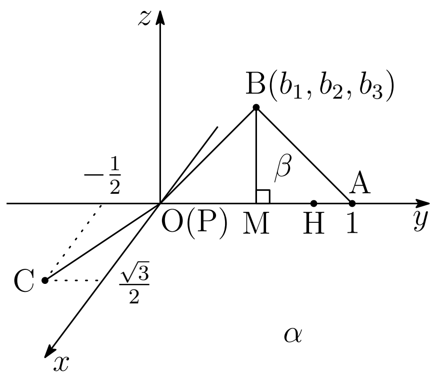
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cos\frac{\pi}{3} = 1\cdot1\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}} = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cos\frac{2}{3}\pi = 1\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}} = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cos\frac{2}{3}\pi = 1\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

(2) 点Pを座標空間の原点Oとし，平面αをxy平面とし，$\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\mathrm{C}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2},\ 0\right)$とおき$(b_3>0)$，(1)の結果の第1・第3式および$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=1$に適用すると

$$b_2=\frac{1}{2},\quad \frac{\sqrt{3}}{2}b_1-\frac{1}{2}b_2=-\frac{1}{2},\quad {b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2=1$$

ゆえに　$b_1=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ b_3=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　すなわち　$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{2},\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

Bからy軸に垂線BMを下ろすと，$\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$は$\overrightarrow{\mathrm{MB}}$と同じ向きの単位ベクトルであるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HQ}} &= \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|}\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PM}})\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{PA}}}\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1,\ 0,\ 0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\mathrm{HR}}$より　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{HR}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{PC}}}$

(3) $\mathrm{M}\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{HQ}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ 0,\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=\left(-\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{HR}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{HQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HR}}=|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}||\overrightarrow{\mathrm{HR}}|\cos\theta$より

$$\boldsymbol{\cos\theta=-\frac{1}{3}}$$

■

3.32 (1) $(n+2)a_{n+1} = na_n + 2$ より

$$(n+1)(n+2)a_{n+1} = n(n+1)a_n + 2(n+1)$$

$n > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+1)(k+2)a_{k+1} - k(k+1)a_k\} = \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1)$

$$n(n+1)a_n - 2a_1 = (n-1)(n+2)$$

したがって $\qquad a_n = \dfrac{(n-1)(n+2)+2s}{n(n+1)}$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{a_n = 1 + \frac{2(s-1)}{n(n+1)}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} a_n &= m + 2(s-1)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= m + 2(s-1)\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \\ &= m\left\{1 + \frac{2(s-1)}{m+1}\right\}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = 0$ が成り立つとき，$m \neq 0$ であるから

$$1 + \frac{2(s-1)}{m+1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{s = \frac{1-m}{2}}$$

■

3.33 補足 0 をスタート，7 をゴールとするすごろくをモデルとした問題である．7 を通過すると，多すぎた分だけ折り返し，次の回からは再び 7 を目指す．ただし，2 に止まると 1 に戻る．一度 7 に到着するとその後の移動はない．

(1) $a_0 = 0$ より，1 回目に出た m とそのときの P の移動先 a_1 は次のとおりである．

m	1	2	3	4	5	6
a_1	1	1	3	4	5	6

$a_1 = 1, 3, 4, 5, 6$ に対して，2 回目に出た目 m とそのときの P の移動先 a_2 を表にすると，次のとおりである．

	$\boldsymbol{a_1}$				
$\boldsymbol{m}$	**1**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	4	5	6	7
2	3	5	6	7	6
3	4	6	7	6	5
4	5	7	6	5	4
5	6	6	5	4	3
6	7	5	4	3	1

よって，求める確率は

$$P(a_1 = 1)\cdot\frac{1}{6} + P(a_1 = 6)\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

(2) $a_{n-1} = 1, 3, 4, 5, 6, 7$ に対して $(n \geqq 3)$，n 回目に出る目 m とそのときの P の移動先 a_n を表にすると，次のとおりである．

	$\boldsymbol{a_{n-1}}$					
$\boldsymbol{m}$	**1**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	4	5	6	7	7
2	3	5	6	7	6	7
3	4	6	7	6	5	7
4	5	7	6	5	4	7
5	6	6	5	4	3	7
6	7	5	4	3	1	7

(1) の表と上の表から，$n \geqq 2$ のとき

- $a_{n-1} = 7$ のとき，$a_n = 7$
- $a_{n-1} \neq 7$ のとき，$\dfrac{1}{6}$ の確率で $a_n = 7$

$a_n=7$ となる確率を p_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$p_n=p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1}) \quad \text{ゆえに} \quad p_n-1=\frac{5}{6}(p_{n-1}-1)$$

$p_1=0$ であるから

$$p_n-1=(p_1-1)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \qquad \text{よって} \quad p_n=\boldsymbol{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$

別解 $a_1\neq 7$ である．2〜n 回において 7 にならない確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ である．
求める確率は，この余事象の確率であるから

$$\boldsymbol{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$

(3) (2) の表から，$a_n=1$ となる確率を x_n，$2\leqq a_n\leqq 5$ となる確率を y_n，$a_n=6$ となる確率を z_n とすると $(n\geqq 3)$，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned} x_n&=\frac{1}{6}x_{n-1}+\frac{1}{6}z_{n-1}\\ y_n&=\frac{1}{2}x_{n-1}+\frac{1}{2}y_{n-1}+\frac{1}{2}z_{n-1}\\ z_n&=\frac{1}{6}x_{n-1}+\frac{1}{3}y_{n-1}+\frac{1}{6}z_{n-1}\end{aligned} \qquad (*)$$

$x_n+y_n+z_n+p_n=1$ であるから，(2) の結果から

$$x_n+y_n+z_n=1-p_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ から

$$\begin{aligned} y_n&=\frac{1}{2}(x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1})=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\\ x_n+z_n&=\frac{1}{3}(x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1})=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\\ -x_n+z_n&=\frac{1}{3}y_{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}=\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\end{aligned}$$

上の第 2 式から第 3 式の辺々を引くと

$$2x_n=\frac{2}{15}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \qquad \text{求める確率は} \quad x_n=\boldsymbol{\frac{1}{15}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}} \quad \boldsymbol{(n\geqq 3)}$$ ■

3.34 (1) S_n を 3 で割ると 2 余る確率を r_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2}{4},\ q_1 = \frac{1}{4},\ r_1 = \frac{1}{4} \\ p_{n+1} &= \frac{2}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ q_{n+1} &= \frac{1}{4}p_n + \frac{2}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{2}{4}r_n \end{aligned}$$

$p_n + q_n + r_n = 1$ に注意すると

$$(*) \begin{cases} p_{n+1} + q_{n+1} = \dfrac{1}{4}(p_n + q_n) + \dfrac{1}{2} \\ p_{n+1} - q_{n+1} = \dfrac{1}{4}(p_n - q_n) \end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式から $\quad p_{n+1} + q_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}\left(p_n + q_n - \dfrac{2}{3}\right)$

$$\begin{aligned} p_n + q_n - \frac{2}{3} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(p_1 + q_1 - \frac{2}{3}\right) \\ p_n + q_n &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$(*)$ の第 2 式から $\quad p_n - q_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(p_1 - q_1) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \quad \cdots ②$

①，② から $\quad p_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n, \quad q_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \qquad (**)$

よって $\quad p_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}},\ q_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{5}{16}}$

(2) $(*)$ より $\quad \boldsymbol{p_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{4}}, \quad \boldsymbol{q_{n+1} = \dfrac{1}{4}q_n + \dfrac{1}{4}}$

(3) $(**)$ より $\quad \boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}, \quad \boldsymbol{q_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$

よって $\quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{3}}, \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} q_n = \dfrac{1}{3}}$ ■

3.35 (1) $C : y=(x-3)^2$，$l : y=2x+9$ の共有点の x 座標は

$$(x-3)^2=2x+9 \quad ゆえに \quad x(x-8)=0$$

これを解いて　$x=0,\ 8$　よって　$\boldsymbol{p=0,\ q=8}$

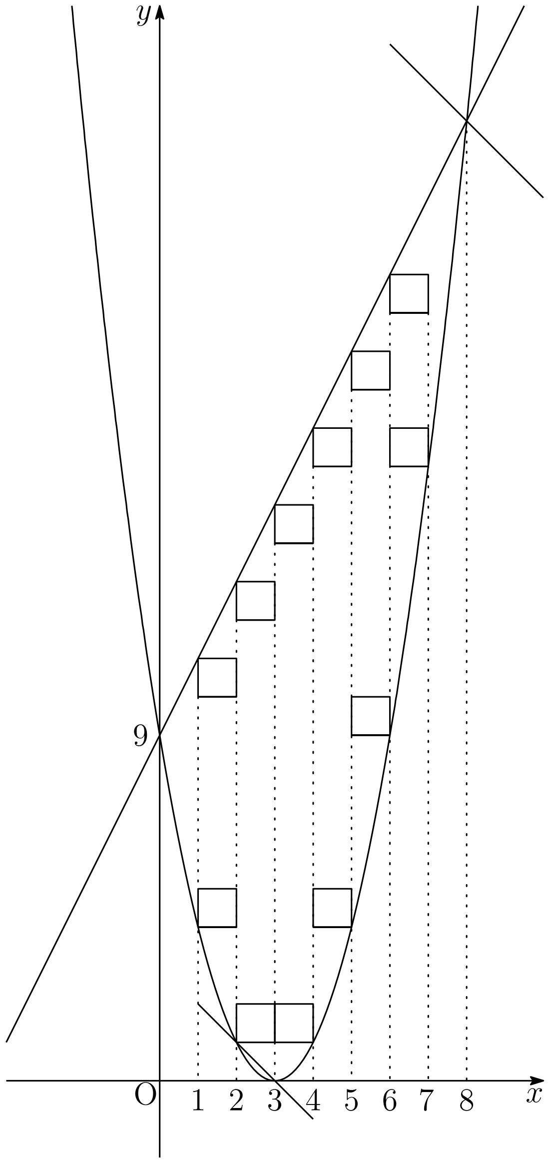
また　$a_k=2k+9-(x-3)^2+1=\boldsymbol{-k^2+8k+1}$

よって，図形 F に含まれる格子点の総数 N は

$$N=\sum_{k=0}^{8}(-k^2+8k+1)=-\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17+8\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9+9=\mathbf{93}$$

(2) $x,\ y$ は整数であるから

$\boldsymbol{(x,\ y)=(8,\ 25)}$ で最大値 **33**，$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 1),\ (3,\ 0)}$ で最小値 **3**



(3) 前ページの図から，頂点の x 座標が k および $k+1$ (k は整数) である正方形が存在するとき，k の値は

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$k = 1, 2$ のとき　$b_k = (2k+9) - (k-3)^2 = \boldsymbol{-k^2 + 8k}$

$k = 3, 4, 5, 6$ のとき　$b_k = (2k+9) - (k-2)^2 = \boldsymbol{-k^2 + 6k + 5}$

(4) (3) の結果から，面積の総和と正方形の個数が等しいことに注意して

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{k=1}^{2}(-k^2+8k) + \sum_{k=3}^{6}(-k^2+6k+5) \\
&= \sum_{k=1}^{6}(-k^2+6k+5) + \sum_{k=1}^{2}(2k-5) \\
&= -\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13 + 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7 + 5\cdot 6 + \{-3+(-1)\} = \mathbf{61}
\end{aligned}$$

また，図形 F の面積 S は

$$S = \int_0^8 \{2x+9-(x-3)^2\}\,dx = \int_0^8 x(8-x)\,dx = \frac{1}{6}\cdot 8^3 = \frac{256}{3}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{T}{S} = \dfrac{183}{256}}$ ■

3.36 (1) 等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とすると

$$a_2 = ar = 3, \quad a_5 = ar^4 = 24 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{3}{2},\ r = 2$$

よって $\quad \boldsymbol{a_n = \frac{3}{2}\cdot 2^{n-1}}, \quad S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \boldsymbol{\frac{3}{2}(2^n - 1)}$

(2) $(*)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{3}{2}b_n + S_n$

$(*)$ に $n = 1$ を代入すると，$S_1 = a_1 = \dfrac{3}{2}$ より

$$b_1 = \frac{3}{2}b_1 + \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{b_1 = -3}$$

(3) $(*)$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \frac{3}{2}b_{n+1} + S_{n+1}$

これと $(*)$ の辺々の差をとると，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = \dfrac{3}{2}\cdot 2^n$ に注意して

$$b_{n+1} = \frac{3}{2}(b_{n+1} - b_n) + \frac{3}{2}\cdot 2^n \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_{n+1} = 3b_n - 3\cdot 2^n}$$

(4) (3) の結果から $\quad \dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}} - \dfrac{b_n}{3^n} = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$n > 1$ のとき $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{b_{k+1}}{3^{k+1}} - \frac{b_k}{3^k}\right) = -\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$

$$\frac{b_n}{3^n} - \frac{b_1}{3} = -2\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立し，これに $b_1 = -3$ を代入すると

$$\frac{b_n}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3 \qquad \text{よって} \qquad b_n = 3(2^n - 3^n)$$

■

3.37 (1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=2+\sqrt{5}$ であるから，与えられた漸化式により

$$\begin{aligned}a_{n+3}+b_{n+3}\sqrt{5}&=(2+\sqrt{5})(a_n+b_n\sqrt{5})\\&=(2a_n+5b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{5}\end{aligned}$$

ゆえに　$a_3=2,\ \ b_3=1,\ \ a_{n+3}=2a_n+5b_n,\ \ b_{n+3}=a_n+2b_n$　　$(*)$

$(*)$ より，題意は成立する．

(2) $(*)$ より　　$a_{n+3}+b_{n+3}=2(a_n+3b_n)+a_n+b_n$

n が 3 の倍数のとき，a_{n+3}，b_{n+3}，a_n，b_n は整数であるから，$a_{n+3}+b_{n+3}$ と a_n+b_n の偶奇が一致する．a_3+b_3 は奇数であるから，題意は成立する．

(3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\sqrt{5}$，$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$ より

$$a_1=\frac{1}{2},\ b_1=\frac{5}{2},\ a_2=\frac{3}{2},\ b_2=\frac{1}{2} \qquad (\#)$$

$(*)$ より　　$a_n=-2a_{n+3}+5b_{n+3},\ b_n=a_{n+3}-2b_{n+3}$　　$(**)$

a_N, b_N がともに整数となる $N\not\equiv 0 \pmod 3$ が存在すると仮定すると，$(*)$ および $(**)$ から，$k\equiv N \pmod 3$ について，a_k，b_k は整数となる．

これは $(\#)$ に反する．

よって，$k\not\equiv 0 \pmod 3$ のとき，a_k, b_k がともに整数となることはない．

したがって，このことと (1) の結論から，a_n, b_n がともに整数となるのは n が 3 の倍数のときに限る．■

3.38 (1) k 回目までに 6 が 1 回，それ以外が $k-1$ 回出た後，$k+1$ 回目に 6 が出る確率であるから

$$p_k = {}_k\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{k}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k+1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\Bigg/\frac{k}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{5(k+1)}{6k}$$

上式から　$\dfrac{p_{k+1}}{p_k} - 1 = \dfrac{5-k}{6k}$

したがって　$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 = p_6 > p_7 > \cdots$

p_k が最大となるとき　$\boldsymbol{k = 5，6}$

(3) (1) の結果から

$$S_n = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\left(\frac{5}{6}\right)^{k}$$

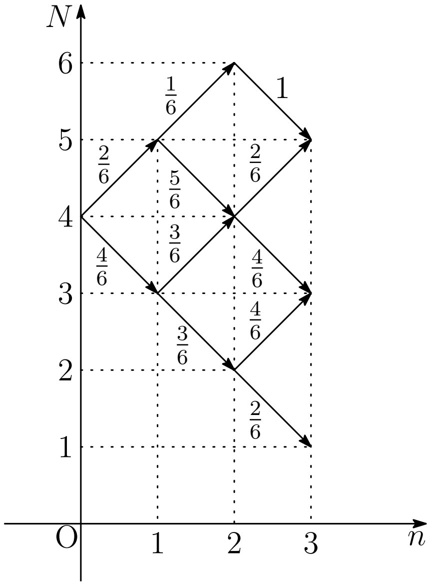
$$\frac{5}{6}S_n = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k} + \frac{n}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}S_n &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} - \frac{n}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\\ &= \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \frac{n}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\\ &= \frac{1}{36}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}{1-\frac{5}{6}} - \frac{n}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n} - \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}$ ■

3.39 (1) n 回繰り返した後の袋の中にある赤玉の個数が N である確率を $p_n(N)$ とすると



$$p_1(3) = \frac{4}{6},\ p_1(5) = \frac{2}{6}$$
$$p_2(2) = p_1(3)\cdot\frac{3}{6} = \frac{12}{36}$$
$$p_2(4) = p_1(3)\cdot\frac{3}{6} + p_1(5)\cdot\frac{5}{6} = \frac{22}{36}$$
$$p_2(6) = p_1(5)\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$
$$p_3(1) = p_2(2)\cdot\frac{2}{6} = \frac{24}{216}$$
$$p_3(3) = p_2(2)\cdot\frac{4}{6} + p_2(4)\cdot\frac{4}{6} = \frac{136}{216}$$
$$p_3(5) = p_2(4)\cdot\frac{2}{6} + p_2(6)\cdot 1 = \frac{56}{216}$$

$P(X = 4) = p_2(4)$ であるから　$P(X = 4) = \frac{22}{36} = \mathbf{\frac{11}{18}}$

(2) $P(X = N) = p_2(N)$ であるから $(N = 2, 4, 6)$

X	2	4	6	計
P	$\frac{6}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{18}$	1

したがって　$E(X) = 2\cdot\frac{6}{18} + 4\cdot\frac{11}{18} + 6\cdot\frac{1}{18} = \mathbf{\frac{31}{9}}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= 2^2\cdot\frac{6}{18} + 4^2\cdot\frac{11}{18} + 6^2\cdot\frac{1}{18} - \left(\frac{31}{9}\right)^2 = \mathbf{\frac{101}{81}}$$

(3) $E(Y = N) = p_3(6 - N)$ であるから $(N = 1, 3, 5)$

Y	1	3	5	計
P	$\frac{7}{27}$	$\frac{17}{27}$	$\frac{3}{27}$	1

したがって　$E(Y) = 1\cdot\frac{7}{27} + 3\cdot\frac{17}{27} + 5\cdot\frac{3}{27} = \mathbf{\frac{73}{27}}$ ■

4.1 (1) $g(x)-r(x)$ は $f(x)$ を因数に持たない．

$$g(x)^7-r(x)^7=\{g(x)-r(x)\}\sum_{k=1}^{7}g(x)^{7-k}r(x)^{k-1}$$

したがって，題意は成立する．

別解 $g(x)\equiv r(x) \pmod{f(x)}$ のとき　$g(x)^7\equiv r(x)^7 \pmod{f(x)}$
したがって，題意は成立する．

(2) $h(x)^7\equiv h_1(x),\ h_1(x)^7\equiv h(x) \pmod{f(x)}$ より

$$h(x)^{49}\equiv h_1(x)^7\equiv h(x)\quad \text{ゆえに}\quad h(x)\{h(x)^{48}-1\}\equiv 0 \pmod{f(x)}$$

$A=h(x)$ とすると

$$\begin{aligned}A(A^{48}-1)&=A(A^{24}+1)(A^{12}+1)(A^6+1)(A^3+1)(A^3-1)\\&=A(A+1)(A-1)(A^{24}+1)(A^{12}+1)(A^6+1)\\&\qquad\qquad\times(A^2+A+1)(A^2-A+1)\end{aligned}$$

次の因数

$$A^{24}+1>0,\quad A^{12}+1>0,\quad A^2\pm A+1=\left(A\pm\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

は $x-1,\ x-2$ を因数に持たない (複号同順)．
したがって，$h(x)\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}$ は $(x-1)^2(x-2)$ を因数にもつ．
$h(x),\ h(x)+1,\ h(x)-1$ のいずれかが $(x-1)(x-2)$ を因数にもつとき，x^2-3x+C (C は定数) は $x-1$ を因数に持たないので不適．
$h(x),\ h(x)+1,\ h(x)-1$ 中で $x-1,\ x-2$ を因数にもつものを次の 6 つの場合について調べる．

	$h(x)$	$h(x)+1$	$h(x)-1$	
①	$x-1$	$x-2$		$h(1)=0,\ h(2)=-1$
②	$x-1$		$x-2$	$h(1)=0,\ h(2)=1$
③	$x-2$	$x-1$		$h(2)=0,\ h(1)=-1$
④		$x-1$	$x-2$	$h(1)=-1,\ h(2)=1$
⑤	$x-2$		$x-1$	$h(2)=0,\ h(1)=1$
⑥		$x-2$	$x-1$	$h(2)=-1,\ h(1)=1$

$h(x)=x^2+ax+b$ であるから，①〜⑥ は次のようになる．

		$h(x)$	$h(x)+1$	$h(x)-1$
①	$a=-4,\ b=3$	$(x-1)(x-3)$	$(x-2)^2$	x^2-4x+2
②	$a=-2,\ b=1$	$(x-1)^2$	x^2-2x+2	$x(x-2)$
③	$a=-2,\ b=0$	$x(x-2)$	$(x-1)^2$	x^2-2x-1
④	$a=-1,\ b=-1$	x^2-x-1	$x(x-1)$	$(x+1)(x-2)$
⑤	$a=-4,\ b=4$	$(x-2)^2$	x^2-4x+5	$(x-1)(x-3)$
⑥	$a=-5,\ b=-5$	x^2-5x+5	$(x-2)(x-3)$	$(x-1)(x-4)$

$h(x)\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}$ が $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ で割り切れるものは，② と ③ の場合であるから

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(-2,\ 1),\ (-2,\ 0)}$$

別解 $h(x)^{49}-h(x)$ は $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を因数にもつから

$$h(1)\{h(1)^{48}-1\}=0,\quad h'(1)\{49h(1)^{48}-1\}=0,\quad h(2)\{h(2)^{48}-1\}=0$$

上の第 1 式から $h(1)=0,\ \pm1$ であるから，第 2 式より　$h'(1)=0$

$h(x)=x^2+ax+b$ より，$h'(x)=2x+a$

$$h'(1)=2+a=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=-2$$

$h(x)=x^2-2x+b$ であるから，$h(x),\ h(x)+1,\ h(x)-1$ が $x-1$ を因数にもつのは

$$b=0,\ 1,\ 2$$

(i) $b=0$ のとき

$$h(x)=x(x-2),\quad h(x)+1=(x-1)^2,\quad h(x)-1=x^2-2x-1$$

(ii) $b=1$ のとき

$$h(x)=(x-1)^2,\quad h(x)+1=x^2-2x+2,\quad h(x)-1=x(x-2)$$

(iii) $b=2$ のとき

$$h(x)=x^2-2x+2,\quad h(x)+1=x^2-2x+3,\quad h(x)-1=(x-1)^2$$

$h(x)\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}$ が $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を因数に持つのは，(i) と (ii) の場合であるから

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(-2,\ 0),\ (-2,\ 1)}$$

■

4.2 (1) z の極形式を　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　$\cdots$ ①

とすると　$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

また，i を極形式で表すと　$i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって，方程式は

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3 = 1, \quad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから　$r = 1$　$\cdots$ ②

また　$\theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$k = 0,\ 1,\ 2$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi \quad \cdots ③$$

②，③ を ① に代入して，求める解は

$$\boldsymbol{z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -i}$$

(2) z の極形式を　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

とすると　　$z^{100} = r^{100}(\cos 100\theta + i\sin 100\theta)$

また，i を極形式で表すと　　$i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって，方程式は

$$r^{100}(\cos 100\theta + i\sin 100\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^{100} = 1, \quad 100\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから　　$r = 1$

また　　$\theta = \dfrac{\pi}{200} + \dfrac{k}{50}\pi$

$\mathrm{Re}(z) \leqq \dfrac{1}{2}$，$\mathrm{Im}(z) \geqq 0$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi$ であるから

$$\frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi}{200} + \frac{k}{50}\pi \leqq \pi \quad \text{ゆえに} \quad \frac{197}{12} \leqq k \leqq \frac{199}{4}$$

これを満たす k は，$k = 17,\ 18,\ \cdots,\ 49$ であるから　**33 個**

(3) z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると $(-\pi \leqq \theta < \pi)$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

また，i を極形式で表すと　$i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって，方程式は

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^n = 1, \quad n\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから　$r = 1$　また　$\theta = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{2k}{n}\pi$

$\mathrm{Re}(z) \geqq \dfrac{1}{2}$ より，$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi}{2n} + \frac{2k}{n}\pi \leqq \frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{n}{6} - \frac{1}{4} \leqq k \leqq \frac{n}{6} - \frac{1}{4}$$

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}$ は整数ではないから

$$A=\left[-\frac{n}{6}-\frac{1}{4}\right],\quad B=\left[\frac{n}{6}-\frac{1}{4}\right]$$

とすると　$N=B-A$

- $n\equiv 0 \pmod 6$ のとき，

$$A=-\frac{n}{6}-1,\quad B=\frac{n}{6}-1 \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n}{3}$$

- $n\equiv 1 \pmod 6$ のとき，

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{n-1}{6}-\dfrac{5}{12}$,　$\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{n-1}{6}-\dfrac{1}{12}$ より

$$A=-\frac{n-1}{6}-1,\quad B=\frac{n-1}{6}-1 \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n-1}{3}<\frac{n}{3}$$

- $n\equiv 2 \pmod 6$ のとき，

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{n-2}{6}-\dfrac{7}{12}$,　$\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{n-2}{6}+\dfrac{1}{12}$ より

$$A=-\frac{n-2}{6}-1,\quad B=\frac{n-2}{6} \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n+1}{3}>\frac{n}{3}$$

- $n\equiv 3 \pmod 6$ のとき，

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{n-3}{6}-\dfrac{3}{4}$,　$\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{n-3}{6}+\dfrac{1}{4}$ より

$$A=-\frac{n-3}{6}-1,\quad B=\frac{n-3}{6} \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n}{3}$$

- $n\equiv 4 \pmod 6$ のとき，

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{n+2}{6}+\dfrac{1}{12}$,　$\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{n+2}{6}-\dfrac{7}{12}$ より

$$A=-\frac{n+2}{6},\quad B=\frac{n+2}{6}-1 \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n-1}{3}<\frac{n}{3}$$

- $n\equiv 5 \pmod 6$ のとき，

$-\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{n+1}{6}-\dfrac{1}{12}$,　$\dfrac{n}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{n+1}{6}-\dfrac{5}{12}$ より

$$A=-\frac{n+1}{6}-1,\quad B=\frac{n+1}{6}-1 \quad \text{ゆえに}\quad N=\frac{n+1}{3}>\frac{n}{3}$$

したがって　$n\equiv 2,\ 5 \pmod 6$　すなわち　$\boldsymbol{n\equiv 2 \pmod 3}$ ■

4.3 (1) $2z^4+(1-\sqrt{5})z^2+2=0$ より，$2z^4+z^2+2=\sqrt{5}z^2$ の両辺を平方すると

$$4z^8+z^4+4+4z^6+4z^2+8z^4=5z^4$$

整理すると　$z^8+z^6+z^4+z^2+1=0 \quad \cdots(*)$

したがって　$z^{10}-1=(z^2-1)(z^8+z^6+z^4+z^2+1)=0 \quad \cdots(**)$

よって　$z^{10}=1$

別解 $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ とおくと，$3\theta=\pi-2\theta$ より

$$\sin 3\theta=\sin(\pi-2\theta)=\sin 2\theta$$

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を上式に代入すると

$$3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad 3-4\sin^2\theta=2\cos\theta$$

整理すると　$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

$0<\cos\theta<1$ であることに注意して　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

$2z^4+(1-\sqrt{5})z^2+2=0$ より　$z^2+\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{\sqrt{5}+3}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=4\cos^2\theta$$

$z+\dfrac{1}{z}=\pm 2\cos\theta$ より　$z^2\mp 2z\cos\theta+1=0$

これを解いて　$z=\pm\cos\theta\pm i\sin\theta$　(複号任意)　よって　$z^{10}=1$

(2) $(*)$ より　$z+z^3+z^5+z^7+z^9=z(1+z^2+z^4+z^6+z^8)=\mathbf{0}$

(3) $z=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$ とすると，$z^{10}=1$，$(**)$ より，$(*)$ が成立するから

$$z^4+\frac{1}{z^4}+z^2+\frac{1}{z^2}+1=0 \quad \text{ゆえに} \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-1=0$$

したがって　$2\cos\dfrac{2\pi}{5}=z^2+\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

さらに　$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$

ゆえに　$2\cos\dfrac{\pi}{5}=z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　よって　$\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}$

参考 $\theta=\dfrac{\pi}{n}\ (n \geqq 2)$，$\alpha=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ とおくと

$$z^n-1=(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)$$

また　$z^n-1=(z-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)=\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　$\cdots(*)$

$(*)$ は，z に関する恒等式であるから，$z=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \prod_{k=1}^{n-1}(1-\cos 2k\theta-i\sin 2k\theta)=\prod_{k=1}^{n-1}(2\sin^2 k\theta-2i\sin k\theta\cos k\theta)\\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}(\sin k\theta-i\cos k\theta)\\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)\right\}\\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\times(\cos 0-i\sin 0)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\\
(\text{右辺}) &= n
\end{aligned}$$

よって，次式が成立する．

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

たとえば，$n=5,\ 10$ のとき

$$\prod_{k=1}^{4}\sin\frac{k\pi}{5}=\frac{5}{2^4},\quad \prod_{k=1}^{9}\sin\frac{k\pi}{10}=\frac{10}{2^9}$$

上の 2 式から

$$\prod_{k=1}^{5}\sin\frac{2k-1}{10}\pi=\frac{1}{16}\quad\text{ゆえに}\quad \sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}$$

$\sin\dfrac{\pi}{10}=\cos\dfrac{2\pi}{5}$，$\sin\dfrac{3\pi}{10}=\cos\dfrac{\pi}{5}$ であるから　$\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}$　■

4.4 (1) $\dfrac{z-1}{z}=z$ より $\qquad z^2-z+1=0$

$z\neq 0$ に注意して，これを解くと $\quad \boldsymbol{z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

(2) $\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2}=\dfrac{ac|z|^2+adz+bc\overline{z}+bd}{|cz+d|^2}$ より

$$\frac{az+b}{cz+d}-\overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}=\frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2}=\frac{z-\overline{z}}{|cz+d|^2}$$

したがって $\quad \mathrm{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)=\dfrac{1}{2i}\left\{\dfrac{az+b}{cz+d}-\overline{\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)}\right\}$

$$=\frac{1}{|cz+d|^2}\cdot\frac{z-\overline{z}}{2i}=\frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

(3) 条件 P を満たすとき，$|\mathrm{Im}(z)|=\sqrt{|z|^2-\mathrm{Re}(z)^2}$ より

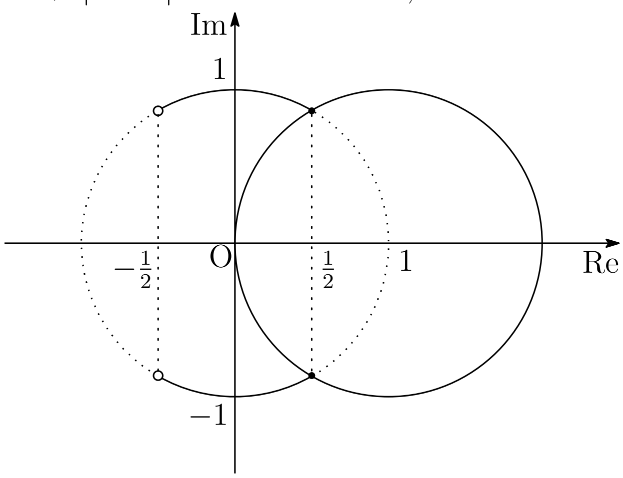
$|z|=1,\ -\dfrac{1}{2}<\mathrm{Re}(z)\leqq\dfrac{1}{2}$ であるから $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq|\mathrm{Im}(z)|\leqq 1$

$|mz+n|=1$ について ($m,\ n$ は整数)

(i) $m=0$ のとき，$|n|=1$ ゆえに $n=\pm 1$

(ii) $m=1$ のとき，$|z-(-n)|=1$ より $-n=0,\ 1$ ゆえに $n=0,-1$

(iii) $m=-1$ のとき，$|z-n|=1$ より $n=0,\ 1$



(iv) $|m|\geqq 2$ のとき $\quad \left|z+\dfrac{n}{m}\right|=\dfrac{1}{|m|}\leqq\dfrac{1}{2}$

$$\left|z+\frac{n}{m}\right|\geqq\left|\mathrm{Im}\left(z+\frac{n}{m}\right)\right|=|\mathrm{Im}(z)|\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

このとき，条件を満たす z は存在しない．

(i)〜(iv) から $\quad \boldsymbol{(m,\ n)=(0,\pm 1),\ (\pm 1,\ 0),\ (\pm 1,\mp 1)}$，**(複号同順)**

(4) $\dfrac{az+b}{cz+d}=z$ に (2) を適用すると　$\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}=\mathrm{Im}(z)$

$\mathrm{Im}(z)\neq 0$ であるから　　$|cz+d|^2=1$　$\cdots$①

さらに，$\dfrac{|az+b|^2}{|cz+d|^2}=|z|^2$ より　$|az+b|^2=1$　$\cdots$②

$b<0$ および (3) の結果から　$(a,\ b)=(0,-1),\ (1,-1)$

このとき，$\dfrac{az+b}{cz+d}$ は実数でないことに注意して，① および (3) の結果から，次の (i)〜(iv) の場合について確認する．

(i) $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,-1,\ 1,\ 0)$ のとき　$\dfrac{-1}{z}=z$
ゆえに　$z^2=-1$　すなわち　$z=\pm i$　これは条件 P を満たす．

(ii) $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,-1,-1,\ 0)$ のとき　$\dfrac{-1}{-z}=z$
ゆえに　$z^2=1$　すなわち　$z=\pm 1$　これは条件 P を満たさない．

(iii) $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,-1,\ 1,-1)$ のとき　$\dfrac{-1}{z-1}=z$
ゆえに　$z^2-z+1=0$　これは，(1) の結果から，条件 P を満たす．

(iv) $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,-1,-1,\ 1)$ のとき　$\dfrac{-1}{-z+1}=z$
ゆえに　$z^2-z-1=0$　すなわち　$z=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
これは条件 P を満たさない．

(v) $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,-1,\ 1,\ 0)$ のとき　$\dfrac{z-1}{z}=z$
ゆえに　$z^2-z+1=0$　これは，(1) の結果から，条件 P を満たす．

(vi) $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,-1,-1,\ 0)$ のとき　$\dfrac{z-1}{-z}=z$
ゆえに　$z^2+z-1=0$　すなわち　$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
これは条件 P を満たさない．

(vii) $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,-1,\ 0,\ 1)$ のとき　$\dfrac{z-1}{1}=z$
解なしとなり，条件 P を満たさない．

(viii) $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,-1,\ 0,-1)$ のとき　$\dfrac{z-1}{-1}=z$
$z=\dfrac{1}{2}$ となり，条件 P を満たさない．

(i)〜(viii) より，求める $a,\ b,\ c,\ d$ は，次の 3 組である．

$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d)=(0,-1,\ 1,\ 0),\ (0,-1,\ 1,-1),\ (1,-1,\ 1,\ 0)}$　■

4.5 (1) $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$ より

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)\\
&= \boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)}\\
z_1 + z_2 &= (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\beta + i\sin\beta)\\
&= (\cos\alpha + \cos\beta) + i(\sin\alpha + \sin\beta)\\
&= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
&= 2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より　$0 < \dfrac{\beta-\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2} > 0$

よって　$$\boldsymbol{z_1 + z_2 = 2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
w = \frac{2z_1z_2}{z_1+z_2} &= \frac{2\{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\}}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

したがって　$$z_1 + z_2 = \left(2\cos^2\frac{\beta-\alpha}{2}\right)w$$

$2\cos^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ は実数より，3 点 O，P(w)，D(z_1+z_2) は同一直線上にある．

(3) $$\frac{w-z_1}{z_1} = \frac{2z_2}{z_1+z_2} - 1 = \frac{z_2-z_1}{z_1+z_2}$$

$|z_1| = |z_2|$ より，O(0)，A(z_1)，B(z_2)，D(z_1+z_2) は菱形の頂点である．

OD⊥AB　ゆえに　$\dfrac{z_2-z_1}{z_1+z_2}$ は純虚数

したがって，直線 AP は円 C 上の点 A における接線である．

補足 $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$ より

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= (\cos\beta + i\sin\beta) - (\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ &= (\cos\beta - \cos\alpha) + i(\sin\beta - \sin\alpha) \\ &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \\ &= 2i\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\frac{w - z_1}{z_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} = 2i\tan\frac{\beta-\alpha}{2}$$

(4) 2 点 A，B の中点を $\mathrm{M}\left(\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$ とすると，(1) の結果から

$$z_1 + z_2 = \cos\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

(2) の結果から，$\mathrm{P}(w)$ は

$$w = \frac{1}{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

直線 PM は直線 AB に垂直であるから，C 上の点 $\mathrm{Q}(v)$ は

$$v = -\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

M は 2 点 P，Q の中点より　$\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}} + (-1)\right\}$

$$\begin{aligned} 2\cos^2\frac{\beta-\alpha}{2} + \cos\frac{\beta-\alpha}{2} - 1 &= 0 \\ \left(2\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - 1\right)\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2} + 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

$0 < \dfrac{\beta-\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より　$\dfrac{\beta-\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{3}$　よって　$\boldsymbol{\beta = \alpha + \dfrac{2}{3}\pi}$ ■

4.6 (1) $f(x) = x^{-2}e^x\ (x > 0)$ とする曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = t,\ x = t+h\ (h > 0)$ および x 軸で囲まれた図形の面積が $g(t)$ であるから

$$g(t) = \int_t^{t+h} f(x)\,dx$$

上式を t について微分すると

$$g'(t) = f(t+h) - f(t) = \boldsymbol{\frac{e^{t+h}}{(t+h)^2} - \frac{e^t}{t^2}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{e^t\{e^h t^2 - (t+h)^2\}}{t^2(t+h^2)} \\ &= \frac{(e^{\frac{h}{2}}t + t + h)(e^{\frac{h}{2}}t - t - h)}{t^2(t+h)^2} \\ &= \frac{\{(e^{\frac{h}{2}}+1)t + h\}\{(e^{\frac{h}{2}}-1)t - h\}}{t^2(t+h)^2} \end{aligned}$$

$h > 0$ より，$t_0 = \dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}} - 1}$ とおくと $(t_0 > 0)$，$g(t)$ の増減は

t	(0)	$\cdots$	t_0	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$g(t)$ を最小にする t は t_0 ただ 1 つである．

求める t は　　$\boldsymbol{t = \dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}} - 1}}$

(3) (2) の結果から　　$t(h) = \dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}} - 1}$

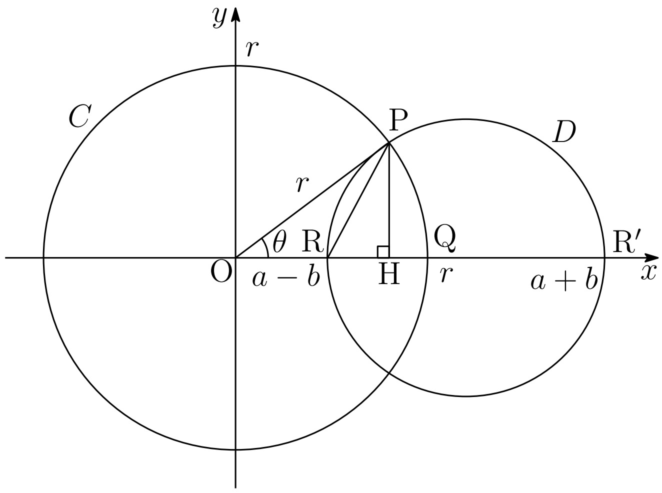
$\varphi(x) = e^{\frac{x}{2}}$ とすると，$\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ より　$\varphi'(0) = \dfrac{1}{2}$

$$\varphi'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{\frac{h}{2}} - 1}{h}$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^{\frac{h}{2}} - 1} = \frac{1}{\varphi'(0)} = 2$ より　$\displaystyle\lim_{h\to +0} t(h) = \lim_{h\to +0}\frac{h}{e^{\frac{h}{2}} - 1} = \boldsymbol{2}$ ■

4.7 (1) D の x 軸の 2 交点を $\mathrm{R}(a-b,\ 0)$，$\mathrm{R}'(a+b,\ 0)$ とすると，C 上の点 $\mathrm{Q}(r,\ 0)$ は線分 RR' の両端を除く線分上にあるから

$$\boldsymbol{a-b<r<a+b}$$



(2) $C: x^2+y^2=r^2$，$D:(x-a)^2+y^2=b^2$ の辺々の差をとると

$$2ax-a^2=r^2-b^2 \quad ゆえに \quad x=\frac{r^2+a^2-b^2}{2a}$$

よって $\quad \boldsymbol{h(r)=\dfrac{r^2+a^2-b^2}{2a}}$

(3) $h(r)=h$ とし，$\mathrm{H}(h,\ 0)$ とおくと

$$\begin{aligned}
V(r)&=\frac{1}{3}\pi\mathrm{PH}^2\cdot\mathrm{RH}+\pi\int_h^r(r^2-x^2)\,dx\\
&=\frac{\pi}{3}(r^2-h^2)\{h-(a-b)\}+\pi\left[\,r^2x-\frac{x^3}{3}\,\right]_h^r\\
&=\frac{2\pi}{3}r^2(r-h)-\frac{\pi}{3}(a-b)(r^2-h^2)\\
&=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}r^2\{r-h(r)\}-\frac{\pi}{3}(a-b)\{r^2-h(r)^2\}}
\end{aligned}$$

別解 $\theta=\angle\mathrm{POQ}$ とすると，$\triangle\mathrm{POR}$ の面積は

$$\triangle\mathrm{POR}=\frac{1}{2}(a-b)r\sin\theta$$

$\triangle\mathrm{POR}$ の重心の y 座標は $\frac{1}{3}r\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned}V(r)&=\frac{2\pi}{3}\int_0^\theta r^3\sin\varphi\,d\varphi-\frac{1}{2}(a-b)r\sin\theta\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}r\sin\theta\\&=\frac{2\pi}{3}r^3(1-\cos\theta)-\frac{\pi}{3}r^2(a-b)(1-\cos^2\theta)\\&=\frac{2\pi}{3}r^2(r-r\cos\theta)-\frac{\pi}{3}(a-b)(r^2-r^2\cos^2\theta)\\&=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}r^2\{r-h(r)\}-\frac{\pi}{3}(a-b)\{r^2-h(r)^2\}}\end{aligned}$$

(4) (2) の結果から $\dfrac{dh}{dr}=\dfrac{r}{a}$

$$\begin{aligned}\left\{\frac{3}{\pi}V(r)\right\}'&=2\left(3r^2-2rh-r^2\cdot\frac{r}{a}\right)-(a-b)\left(2r-2h\cdot\frac{r}{a}\right)\\&=6r^2-\frac{2(a+b)}{a}rh-\frac{2}{a}r^3-2(a-b)r\\&=6r^2-\frac{2(a+b)}{a}r\cdot\frac{r^2+a^2-b^2}{2a}-\frac{2}{a}r^3-2(a-b)r\\&=-\frac{3a+b}{a^2}r^3+6r^2-\frac{(a-b)(3a^2+2ab+b^2)}{a^2}r\\&=-\frac{r}{a^2}\{r-(a-b)\}\{(3a+b)r-(3a^2+2ab+b^2)\}\end{aligned}$$

$p=\dfrac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$ とおくと　$r-(a-b)>0$

$$(a+b)-p=\frac{2ab}{3a+b}>0,\quad p-(a-b)=\frac{4ab+2b^2}{3a+b}>0$$

r	$a-b$	$\cdots$	p	$\cdots$	$a+b$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	極大	↘	

よって　$\boldsymbol{r=\dfrac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}}$

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\{r(a)-a\}&=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}-a\right)\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{ab+b^2}{3a+b}=\lim_{a\to\infty}\frac{b+\frac{b^2}{a}}{3+\frac{b}{a}}=\boldsymbol{\frac{b}{3}}\end{aligned}$$

■

4.8 (1) $-x \neq 1$ に注意して

$$1+\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}=\frac{1}{x+1}-\frac{(-x)^n}{1+x}$$

したがって
$$\frac{1}{1+x}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{(-x)^n}{x+1}$$

$$(-1)^n\left\{\frac{1}{1+x}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}=\frac{x^n}{x+1} \qquad \cdots ①$$

ここで，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}=\frac{1-x}{2(x+1)} \geqq 0$$

$$1-\frac{x}{2}-\frac{1}{x+1}=\frac{x(1-x)}{2(x+1)} \geqq 0$$

上の 2 式から
$$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{x+1} \leqq 1-\frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{2}x^n \leqq \frac{x^n}{x+1} \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1} \qquad \cdots ②$$

①，② から，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成立する．

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-1-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}$ とおくと，(1) の結果から

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n f(x) \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^n\,dx \leqq (-1)^n\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqq (-1)^n\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)} \qquad (*)$$

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n} (-x)^{k-1} \right) dx \\ &= \Big[\ \log(x+1) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\ \Big]_0^1 \\ &= \log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 - a_n \qquad (**)\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(n+1)} \leqq (-1)^n(\log 2 - a_n) \leqq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} \\ -\frac{n}{2(n+1)} \geqq (-1)^n n(a_n - \log 2) \geqq -\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \qquad \text{(A)}\end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{n}{2(n+1)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{1}{2+\frac{2}{n}} \right\} = -\frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2+\frac{4}{n}} \right\} = -\frac{1}{2}$$

(A) および上の 2 式から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n(a_n - \log 2) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

■

4.9 $a_1 = \alpha,\quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1$ より $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \max(a_n - 1, -a_n + 1) + a_n - 1 \\ &= \max(2(a_n - 1),\ 0) \end{aligned}$$

k を自然数とすると，上の漸化式から

(i) $a_k \leqq 1$ のとき，$2(a_k - 1) \leqq 0$ より，$a_{k+1} = 0$

(ii) $a_k > 2$ のとき，$2(a_k - 1) > 2$ より，$a_{k+1} = 2(a_k - 1) > 2$

(iii) $1 < a_k < \dfrac{3}{2}$ のとき，$0 < 2(a_k - 1) < 1$ より，$0 < a_{k+1} < 1$

(iv) $\dfrac{3}{2} \leqq a_k < 2$ のとき，$1 < 2(a_k - 1) < 2$ より，$a_{k+1} = 2(a_k - 1)$
このとき，$a_{k+1} - a_k = a_k - 2 < 0$ より　$a_{k+1} < a_k$

が成立する．

(1) $\alpha \leqq 1$ のとき，(i) より　$a_2 = 0$
順次，(i) を適用すると　$a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ \cdots$
よって　**$\{a_n\}$ は収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$**

(2) $\alpha > 2$ のとき，(ii) より　$a_{n+1} = 2(a_n - 1)$
ゆえに　$a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$　すなわち　$a_n = 2 + (\alpha - 2)\cdot 2^{n-1}$
よって　**$\{a_n\}$ は発散し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$**

(3) $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$ のとき，(iii) より　$0 < a_2 < 1$
さらに，(i) を順次適用すると　$a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ \cdots$
よって　**$\{a_n\}$ は収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$**

(4) $\dfrac{3}{2} \leqq \alpha < 2$ のとき，すべての自然数 n について

$$\frac{3}{2} \leqq a_n < 2$$

であると仮定すると，(iv) より　$a_{n+1} = 2(a_n - 1)$

$$a_n = 2 + (\alpha - 2)\cdot 2^{n-1}$$

このとき，十分大きな k に対して，$a_k < \dfrac{3}{2}$ となり，仮定に反する．

よって，$a_k < \dfrac{3}{2}$ となる整数 k が存在するので，(i)，(iii) より

$\{a_n\}$ は収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ■

4.10 (1) $a,\ b$ は，$a^2+b^2<1$ をみたす正の実数であるから

$$0<a<1,\quad 0<b<1$$

これから　$f(0)=b(a-1)<0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a(1-b)>0$

したがって，中間値の定理により，$f(\theta)=0$ の解が $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する．

(2) $C: x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線の方程式は

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1\quad\cdots①$$

点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ を通り，直線 ① に垂直な直線の方程式は

$$x\sin\theta-y\cos\theta=-b\cos\theta\quad\cdots②$$

2 直線 ①，② の交点を M とすると，その座標は

$$\mathrm{M}(-b\sin\theta\cos\theta+\cos\theta,\ b\cos^2\theta+\sin\theta)$$

(3) M は 2 点 B，D の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=2(-b\sin\theta\cos\theta+\cos\theta,\ b\cos^2\theta+\sin\theta)-(0,\ b)\\&=(-b\sin 2\theta+2\cos\theta,\ b\cos 2\theta+2\sin\theta)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{D}(-b\sin 2\theta+2\cos\theta,\ b\cos 2\theta+2\sin\theta)}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos\theta-a,\ \sin\theta)/\!/\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-b\sin 2\theta+2\cos\theta-a,\ b\cos 2\theta+2\sin\theta)$ より

$$-(\cos\theta-a)(b\cos 2\theta+2\sin\theta)+\sin\theta(-b\sin 2\theta+2\cos\theta-a)=0$$

整理すると　$ab\cos 2\theta+a\sin\theta-b(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)=0$

また，$\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta=\cos\theta$ であるから

$$ab\cos 2\theta+a\sin\theta-b\cos\theta=0\quad \text{すなわち}\quad f(\theta)=0$$

(1) の結果から，上式をみたす $\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ が少なくとも 1 つ存在する．

$f(\theta)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -2ab\sin 2\theta + a\cos\theta + b\sin\theta \\ &= -4ab\sin\theta\cos\theta + a\cos\theta + b\sin\theta \end{aligned}$$

$x = a\cos\theta$，$y = b\sin\theta$ とおくと $\left(a > 0,\ b > 0,\ a^2 + b^2 < 1,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$xy = ab\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}ab\sin 2\theta = \frac{1}{4}\{a^2 + b^2 - (a-b)^2\}\sin 2\theta < \frac{1}{4}$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -4xy + x + y = -4xy + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 2\sqrt{xy} \\ &= 2\sqrt{xy}(1 - 2\sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0 \end{aligned}$$

$f(\theta)$ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，単調増加であるから，

$$f(\theta) = 0$$

をみたす θ はただ 1 つである． ■

4.11 (1) $\phi(x) = tx - x^4$ とすると　$\phi'(x) = t - 4x^3$

$\phi'(x) = 0$ の解を c とすると　$c = \left(\dfrac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\phi(x)$ の増減は，次のようになる．

x	$\cdots$	c	$\cdots$
$\phi'(x)$	$+$	0	$-$
$\phi(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$\phi(x)$ の最大値 $g(t)$ は

$$\begin{aligned} g(t) = \phi(c) = tc - c^4 &= t\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}} \\ &= 4\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}} = \mathbf{3}\left(\boldsymbol{\frac{t}{4}}\right)^{\boldsymbol{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

(2) $\varphi(x) = tx - f(x)$ とすると　$\varphi'(x) = t - f'(x)$

条件 (i) から，$\varphi'(x)$ は単調減少

条件 (ii) から，$\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi'(x) = \infty$，$\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x) = -\infty$

したがって，$\varphi'(d) = 0$ を満たす d がただ一つ存在する．

$\varphi(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	d	$\cdots$
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，x の関数 $tx - f(x)$ は最大値 $g(t)$ をもつ．

(3) 条件から，s の関数 $ts - f(s)$ は，最大値 $g(t)$ をもつから

$$ts - f(s) \leqq g(t) \quad \text{ゆえに} \quad st - g(t) \leqq f(s)$$

上の第 2 式から，t の関数 $st - g(t)$ の最大値は $f(s)$ である．

■

4.12 (1) C 上の点 $(0,\ a-1)$ が $y > x^2$ を含まれるから，$a-1>0$ は必要条件．
放物線 $y=x^2$ 上の点 $(u,\ u^2)$ と点 $(0,\ a)$ の距離を d とすると

$$d^2 = u^2 + (u^2-a)^2 = \left(u^2 - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + \frac{4a-1}{4}$$

d^2 は $u = \pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}$ のとき，最小値 $\dfrac{4a-1}{4}$ をとる．
条件をみたすとき，$d>1$，すなわち，$d^2>1$ であるから

$$\frac{4a-1}{4} > 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a > \frac{5}{4}}$$

(2) $\mathrm{A}(0,\ a)$ とし，S 上の点 P における接線の偏角を θ とすると $(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2})$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = (\sin\theta, -\cos\theta),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (\sin\theta,\ a-\cos\theta)$$

$C : x^2 + (y-a)^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(\sin\theta,\ a-\cos\theta)$ における接線の方程式は

$$x\sin\theta - (y-a)\cos\theta = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = x\tan\theta - \frac{1}{\cos\theta} + a$$

この直線と放物線 $y=x^2$ の方程式から y を消去し，整理すると

$$x^2 - x\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta} - a = 0$$

この方程式の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta = \tan\theta, \quad \alpha\beta = \frac{1}{\cos\theta} - a$$

2 点 $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ を結ぶ線分の長さを L とすると

$$\begin{aligned}
L^2 &= (\beta-\alpha)^2 + (\beta^2-\alpha^2)^2 = (\beta-\alpha)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\} \\
&= \{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}\{1+(\alpha+\beta)^2\} \\
&= \left(\tan^2\theta - \frac{4}{\cos\theta} + 4a\right)(1+\tan^2\theta) \\
&= \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 - \frac{4}{\cos\theta} + 4a\right)\frac{1}{\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

$t = \dfrac{1}{\cos\theta}$，$f(t) = L^2$ とおくと

$$f(t) = t^4 - 4t^3 + (4a-1)t^2 \qquad (t \geqq 1)$$

$f(t)$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めると

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4t^3 - 12t^2 + 2(4a-1)t \\ f''(t) &= 12t^2 - 24t + 2(4a-1) \end{aligned}$$

$t \geqq 1$ に注意して，$f''(t) = 0$ を解くと　$t = 1 + \sqrt{\dfrac{7-4a}{6}}$

$f'(t)$ を $f''(t)$ で割って，$k = \sqrt{\dfrac{7-4a}{6}}$ とおくと

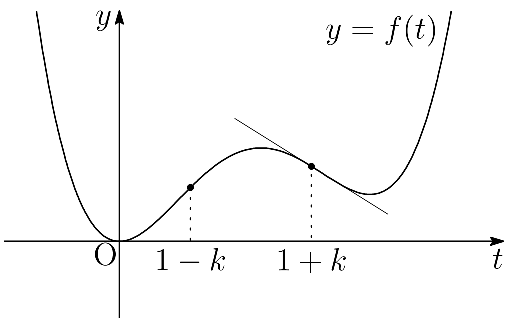
$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{3}(t-1)f''(t) + \frac{4}{3}(4a-7)t + \frac{2}{3}(4a-1) \\ &= \frac{1}{3}(t-1)f''(t) - 8k^2t - 4k^2 + 4 \end{aligned}$$

$f'(1+k) < 0$ を満たせばよい．$f''(1+k) = 0$ より

$$-8k^2(1+k) - 4k^2 + 4 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (k+1)^2(2k-1) > 0$$

これを解いて　$k > \dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\sqrt{\dfrac{7-4a}{6}} > \dfrac{1}{2}$　すなわち　$a < \dfrac{11}{8}$

これと (1) の結果により　$\boldsymbol{\dfrac{5}{4} < a < \dfrac{11}{8}}$



参考 3 次関数 $y = f(x)$ の変曲点の x 座標を c とする．$f'(c)$ の符号と $f(x)$ の x^3 の係数の符号が異なることは $f(x)$ が極値をもつための必要十分条件．

■

4.13 $f(x)$ の最大値と最小値は，関数

$$F(t)=e^{-t}+\frac{1}{4}t+1+\frac{1}{e^{-t}+\frac{1}{4}t+1} \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

の最大値と最小値に等しい．$p(u)=u+\dfrac{1}{u}$，$q(t)=e^{-t}+\dfrac{1}{4}t+1$ とおくと

$$F(t)=p(u), \quad u=q(t) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

$q(t)$ を微分すると　$q'(t)=-e^{-t}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{-4+e^t}{4e^t}<0 \quad (0<t<1)$

$q(t)$ は単調減少であるから

$$q(1) \leqq q(t) \leqq q(0) \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{e}+\frac{5}{4} \leqq u \leqq 2 \quad \cdots①$$

$p(u)$ を微分すると　$p'(u)=1-\dfrac{1}{u^2}$

① において，$p(u)$ は単調増加である．

よって　最大値　$p(2)=2+\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

最小値　$p\left(\dfrac{1}{e}+\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{5e+4}{4e}+\dfrac{4e}{5e+4}=\boldsymbol{\dfrac{41e^2+40e+16}{4e(5e+4)}}$ ■

4.14 (1) $\sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}},\ \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とおくと

$$f(x) = \left|\cos x - \sqrt{5}\sin x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{6}\left|\sin(x+\varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin(x+\varphi) - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$0 \leqq f(x) \leqq \sqrt{6}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，$f(x)$ の最大値は $\boldsymbol{\sqrt{6} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$

(2) $t = x + p$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = 1$

x	$0 \longrightarrow \quad 2\pi$
t	$p \longrightarrow 2\pi + p$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= \int_p^{2\pi+p} f(t-p)\,dt \\
&= \int_p^{2\pi} f(t-p)\,dt + \int_{2\pi}^{2\pi+p} f(t-p)\,dt \\
&= \int_p^{2\pi} f(t-p)\,dt + \int_0^{p} f(t-p+2\pi)\,dt \\
&= \int_p^{2\pi} f(t-p)\,dt + \int_0^{p} f(t-p)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} f(t-p)\,dt = \int_0^{2\pi} f(x-p)\,dx \qquad (*)
\end{aligned}$$

これから次式も成立する．

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x+p)\,dx = \int_p^{p+2\pi} f(x)\,dx \qquad (**)$$

$(*)$ において，$p=\varphi$ とし，$(**)$ を利用すると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{2\pi}\left|\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}\left|\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|dx\\
&=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\right)dx\\
&=-\Big[\ \cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x\ \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}+\Big[\ \cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x\ \Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}\\
&=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi
\end{aligned}
$$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 2\sqrt{6}+2\sqrt{2}\pi}$

(3) $S(t)=\displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ に対して

$$T(t)=\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x-\varphi)\,dx$$

とおくと，$S(t)$ の最大値は $T(t)$ の最大値と一致する．

$$T(t)=\sqrt{6}\int_t^{t+\frac{\pi}{3}}\left|\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|dx$$

t と $t+\dfrac{\pi}{3}$ の中央 $t+\dfrac{\pi}{6}$ が $\dfrac{3\pi}{2}$，すなわち，$t=\dfrac{4\pi}{3}$ のときであるから，
求める最大値は

$$
\begin{aligned}
T\left(\frac{4\pi}{3}\right)&=\sqrt{6}\int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\right)dx\\
&=\sqrt{6}\Big[\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x\ \Big]_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+\sqrt{6}}
\end{aligned}
$$

■

4.15 (1) $x>0$ のとき，$1-e^{-x}>0$ より

$$\int_0^x (1-e^{-t})\,dt=\Big[\,t+e^{-t}\,\Big]_0^x=x-1+e^{-x}>0$$

$x>0$ のとき，$x-1+e^{-x}>0$ より

$$\int_0^x (t-1+e^{-t})\,dt=\left[\,\frac{t^2}{2}-t-e^{-t}\,\right]_0^x=\frac{x^2}{2}-x+1-e^{-x}>0$$

$x>0$ のとき，$\dfrac{x^2}{2}-x+1-e^{-x}>0$ より

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\frac{t^2}{2}-t+1-e^{-t}\right)dt&=\left[\,\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+t+e^{-t}\,\right]_0^x\\&=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+x-1+e^{-x}>0\end{aligned}$$

したがって $\quad 1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}<e^{-x}$

よって $\quad e^x\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\right)<1$

(2) $x>0$ において

$$\int_0^x (1-\cos t)\,dt=\Big[\,t-\sin t\,\Big]_0^x=x-\sin x>0$$

これから，$x>0$ において

$$\int_0^t (t-\sin t)\,dt=\left[\,\frac{t^2}{2}+\cos t\,\right]_0^x=\frac{x^2}{2}-1+\cos x>0$$

さらに，$x>0$ において

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\frac{t^2}{2}-1+\cos t\right)dx&=\left[\,\frac{t^3}{6}-t+\sin t\,\right]_0^x\\&=\frac{x^3}{6}-x+\sin x>0\end{aligned}$$

よって，$x>0$ において $\quad \sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$

(3) $f(x)=e^{-x}+\sin x-1$ より　$f'(x)=-e^{-x}+\cos x$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-e^{-\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2e^{\frac{\pi}{3}}}(e^{\frac{\pi}{3}}-2)>\frac{1}{2e^{\frac{\pi}{3}}}(e-2)>0$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}<0$$

$f'(x)$ は連続であるから，区間 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$ において極大値をもつ．

(4) (3) の結果から，$x=\alpha$ で極大値をとるとすると，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(0)=0$，$f(\pi)=e^{-\pi}-1<0$ より，$f(x)=0$ は $(0,\ \pi)$ においてただ 1 つの実数解をもつ．■

4.16 (1) $x = \dfrac{1}{t}$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{t^2}$

x	$\frac{1}{a}$	$\longrightarrow$	a
t	a	$\longrightarrow$	$\frac{1}{a}$

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx = \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$= -\int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t^2}\,dt = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx$$

(2) $f(x) = \dfrac{1+x}{x}$ とすると，$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1+x$ であるから，(1) の結論より

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{x(1+x^2)}\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

ここで，$x = \tan\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{1+x^2} = d\theta$

x	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
t	$\frac{\pi}{6}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx$$
$$= \Big[\ \theta\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}\Big[\ \log(1+x^2)\ \Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\log 3}$$

(3) $g(x) = \dfrac{\log x}{1+x^2}$ を微分すると

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(1+x^2) - (\log x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x\left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2\log x\right)}{(1+x^2)^2}$$

$h(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1 - 2\log x$ とすると $g'(x) = \dfrac{xh(x)}{(1+x^2)^2}$

$$h'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x} < 0, \quad h(\sqrt{e}\,) = \frac{1}{e}$$

$h(x)$ は単調減少であるから，区間 $0 < x \leqq \sqrt{e}$ において

$$h(x) \geqq h(\sqrt{e}\,) = \frac{1}{e} > 0 \quad \text{すなわち} \quad g'(x) > 0$$

よって，区間 $0 < x \leqq \sqrt{e}$ において，$g(x)$ はつねに増加する．

(4) $a=\sqrt{e}$, $f(x)=\log x$ とおくと

$$S_1=-\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx,\quad S_2=\int_1^a\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx,$$

$$-S_1+S_2=\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx+\int_1^a\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx \qquad (*)$$

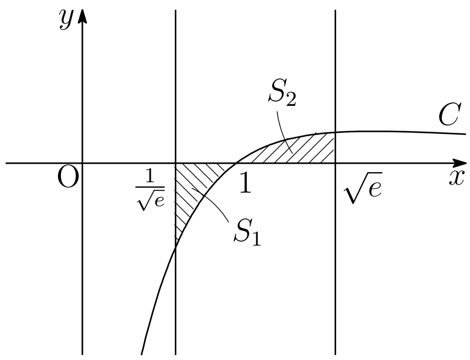
$f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$ であるから　$\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=-\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(\frac{1}{x})}{1+x^2}\,dx$

(1) の結論から　$\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(\frac{1}{x})}{1+x^2}\,dx$

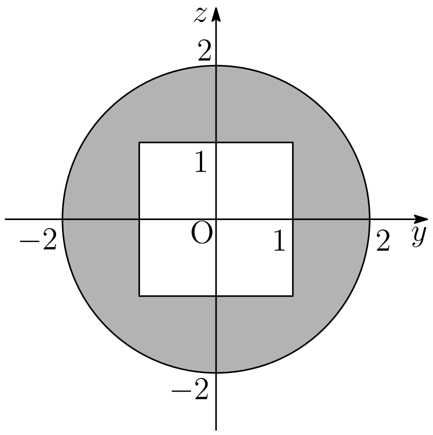
上の 2 式の辺々を加えると

$$2\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=0 \quad ゆえに \quad \int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=0$$

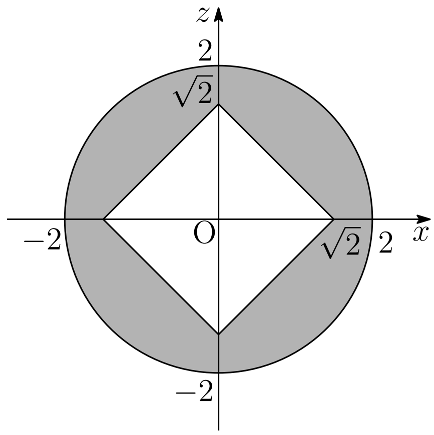
$(*)$ より　$-S_1+S_2=0$　よって　$S_1=S_2$



4.17 A の yz 平面への正射影および B の zx 平面への正射影は次のようになる．



A の yz 平面への正射影



B の zx 平面への正射影

A の表す領域は	$\lvert z\rvert \leqq 1$ のとき	$1 \leqq \lvert y\rvert \leqq \sqrt{4-z^2}$
	$1 \leqq \lvert z\rvert \leqq 2$ のとき	$\lvert y\rvert \leqq \sqrt{4-z^2}$
B の表す領域は	$\lvert z\rvert \leqq \sqrt{2}$ のとき	$\sqrt{2}-\lvert z\rvert \leqq \lvert x\rvert \leqq \sqrt{4-z^2}$
	$\sqrt{2} \leqq \lvert z\rvert \leqq 2$ のとき	$\lvert x\rvert \leqq \sqrt{4-z^2}$

これから，関数 $f(z)$，$g(z)$ を

$$f(z) = \begin{cases} 2(\sqrt{4-z^2}-1) & (|z| \leqq 1) \\ 2\sqrt{4-z^2} & (1 \leqq |z| \leqq 2) \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} 2(\sqrt{4-z^2}-\sqrt{2}+|z|) & (|z| \leqq \sqrt{2}) \\ 2\sqrt{4-z^2} & (\sqrt{2} \leqq |z| \leqq 2) \end{cases}$$

求める立体の体積を V とすると，$f(z)$，$g(z)$ が偶関数であることに注意して

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2} f(z)g(z)\,dz = 2\int_0^2 f(z)g(z)\,dz \\ &= 8\int_0^1 (\sqrt{4-z^2}-1)(\sqrt{4-z^2}-\sqrt{2}+z)\,dz \\ &\qquad + 8\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{4-z^2}(\sqrt{4-z^2}-\sqrt{2}+z)\,dz + 8\int_{\sqrt{2}}^2 (4-z^2)\,dz \\ &= 8\int_0^2 (4-z^2)\,dz + 8\int_0^1 (-\sqrt{4-z^2}+\sqrt{2}-z)\,dz \\ &\qquad + 8\int_0^{\sqrt{2}} (-\sqrt{2}\sqrt{4-z^2}+z\sqrt{4-z^2})\,dz \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^2 (4-z^2)\,dz = \Big[\ 4z - \frac{z^3}{3}\ \Big]_0^2 = \frac{16}{3}$$

$$\int_0^1 (\sqrt{2}-z)\,dz = \Big[\ \sqrt{2}z - \frac{z^2}{2}\ \Big]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} z\sqrt{4-z^2}\,dz = \Big[\ -\frac{1}{3}(4-z^2)^{\frac{3}{2}}\ \Big]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，$z = \sin\theta$ とすると

$$\int_0^{2\sin\alpha} \sqrt{4-z^2}\,dz = \int_0^{\alpha} 4\cos^2\theta\,d\theta = \Big[\ 2\theta + \sin 2\theta\ \Big]_0^{\alpha}$$
$$= 2\alpha + \sin 2\alpha$$

$\alpha = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{4}$ とすると

$$\int_0^1 \sqrt{4-z^2}\,dz = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-z^2}\,dz = \frac{\pi}{2} + 1$$

よって

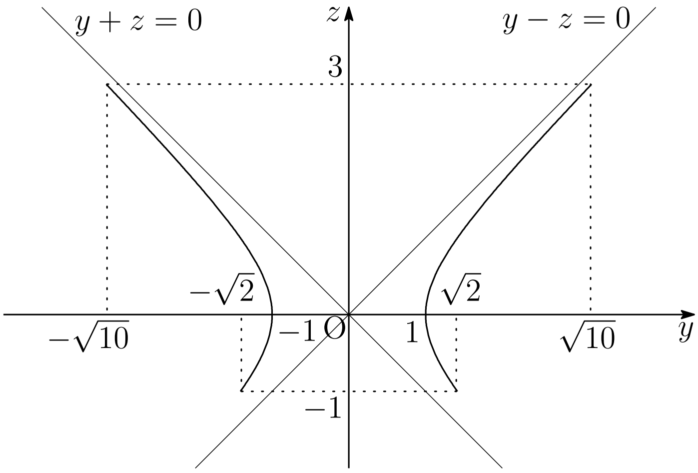
$$\begin{aligned} V &= 8\int_0^2 (4-z^2)\,dz - 8\int_0^1 \sqrt{4-z^2}\,dz + 8\int_0^1 (\sqrt{2}-z)\,dz \\ &\qquad - 8\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-z^2}\,dz + 8\int_0^{\sqrt{2}} z\sqrt{4-z^2}\,dz \\ &= 8\cdot\frac{16}{3} - 8\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 8\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) - 8\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) + 8\left(\frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \\ &= \boldsymbol{60 - \frac{8\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\pi} \end{aligned}$$

■

4.18 (1) A$(1,\ 1, -1)$，B$(-3,\ 1,\ 3)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 4(-1,\ 0,\ 1)$
直線 AB の方程式は

$$x = 1 - t, \quad y = 1, \quad z = -1 + t \qquad (t \text{ は媒介変数})$$

S の方程式は　$x^2 + y^2 = (1-t)^2 + 1^2, \quad z = -1 + t$
ゆえに　$x^2 + y^2 = z^2 + 1$　すなわち　$S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$
これに $x = 0$ を代入すると　$y^2 - z^2 = 1$
よって，S の yz-平面との交わりは，次のようになる．



補足 S は一葉双曲面 (線織面) である．神戸のポートタワーは一葉双曲面で真っ直ぐな鉄筋の柱で支えられていることで有名である．

(2) S の方程式から，求めるから回転体の体積 V は

$$\frac{V}{\pi} = \int_{-1}^{3} (x^2 + y^2)\, dz = \int_{-1}^{3} (z^2 + 1)\, dz$$
$$= \left[\frac{z^3}{3} + z \right]_{-1}^{3} = \frac{40}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{40}{3}\pi}$ ■

4.19 (1) $C : y = (\log x)^2$ より　$y' = \dfrac{2\log x}{x}$

C 上の点 $(a,\ (\log a)^2)$ における接線の方程式は

$$y - (\log a)^2 = \frac{2\log a}{a}(x - a)$$

よって　$\boldsymbol{L : y = \dfrac{2x\log a}{a} - 2\log a + (\log a)^2}$

(2) L と x 軸の交点の x 座標は，(1) の結果に $y = 0$ を代入すると $(a > 1)$

$$x = -\frac{1}{2}a\log a + a \quad \text{ゆえに} \quad \frac{dx}{da} = \frac{1}{2}(1 - \log a)$$

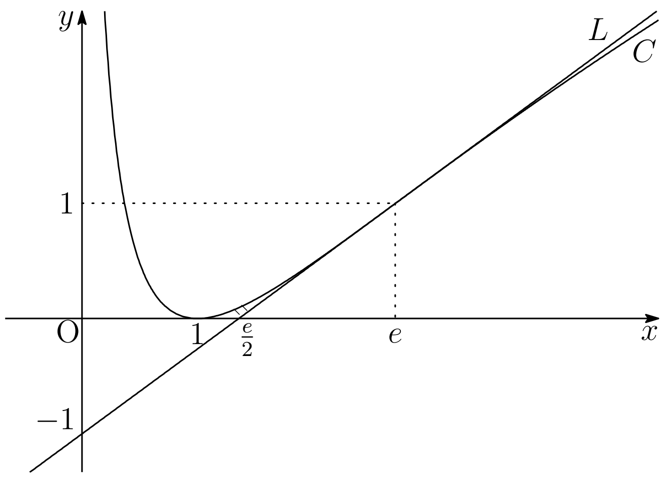
a	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$
$\frac{dx}{da}$		$+$	0	$-$
x		$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$

よって，x 座標が最大となる a の値 a_0 は　$\boldsymbol{a_0 = e}$

(3) $a_0 = e$ のとき　$L : y = \dfrac{2x}{e} - 1$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_1^e \{(\log x)^2\}^2\,dx - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\left(e - \frac{e}{2}\right) \\ &= \pi\int_1^e (\log x)^4\,dx - \frac{\pi e}{6} \end{aligned}$$



補足 C 上の点 $(e,\ 1)$ は変曲点.

$t=\log x$ とおくと，$x=e^t$ より $\quad \dfrac{dx}{dt}=e^t$

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\int_1^e (\log x)^4\,dx = \int_0^1 t^4 e^t\,dt = \Big[\,(t^4-4t^3+12t^2-24t+24)e^t\,\Big]_0^1$$
$$= 9e-24$$

よって $\qquad V=\pi(9e-24)-\dfrac{\pi e}{6}=\boldsymbol{\pi\left(\dfrac{53}{6}e-24\right)}$

解説 $f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{k}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\varphi_k'(x)&=\frac{1}{k}\left\{f'(x)-\frac{f''(x)}{k}+\frac{f'''(x)}{k^2}-\cdots\right\}\\&=-\left\{-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}\\&=f(x)-\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}\\&=f(x)-k\varphi_k(x)\end{aligned}$$

よって $\quad$ $$\begin{aligned}\{\varphi_k(x)e^{kx}\}'&=\varphi_k'(x)e^{kx}+k\varphi_k(x)e^{kx}\\&=\{f(x)-k\varphi_k(x)\}e^{kx}+k\varphi_k(x)e^{kx}\\&=f(x)e^{kx}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\int f(x)e^{kx}\,dx&=\varphi_k(x)e^{kx}+C \qquad (C\text{ は積分定数})\\&=\frac{1}{k}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}e^{kx}+C\end{aligned}$$

とくに，$k=\pm1$ のとき

$$\int f(x)e^x\,dx=\{f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+\cdots\}e^x+C$$
$$\int f(x)e^{-x}\,dx=-\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\}e^{-x}+C$$

発展 前ページの結論から，$f(x)$ が何回でも微分可能であるとき

$$\int f(x)e^{kx}\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{(-k)^{n+1}}e^{kx} + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

k を ki に置き換えると

$$\int f(x)e^{kxi}\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{(-ki)^{n+1}}e^{kxi} + C \qquad (*)$$

このとき $e^{kxi} = \cos kx + i\sin kx,$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(-ki)^{n+1}} &= \frac{i^{n+1}}{k^{n+1}} = \frac{1}{k^{n+1}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\\ &= \frac{1}{k^{n+1}}\left(\cos\frac{n+1}{2}\pi + i\sin\frac{n+1}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

$(*)$ の実部を比較すると

$$\begin{aligned}\int f(x)\cos kx\,dx &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n+1}}\cos\left(kx + \frac{n+1}{2}\pi\right) + C\\ &= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n}}\sin\left(kx + \frac{n}{2}\pi\right) + C\end{aligned}$$

同様に，$(*)$ の虚部を比較すると

$$\begin{aligned}\int f(x)\sin kx\,dx &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n+1}}\sin\left(kx + \frac{n+1}{2}\pi\right) + C\\ &= -\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n}}\cos\left(kx + \frac{n}{2}\pi\right) + C\end{aligned}$$

注意 $\sin\left(\theta + \dfrac{n}{2}\pi\right)$，$\cos\left(\theta + \dfrac{n}{2}\pi\right)$ は，$\sin\theta \to \cos\theta \to -\sin\theta \to -\cos\theta \to \sin\theta$ の順に巡回するから，例えば次のように計算する．

$$\begin{aligned}\int x^4\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}\left\{x^4\sin 2x + \frac{4x^3}{2}\cos 2x + \frac{12x^2}{2^2}(-\sin 2x)\right.\\ &\qquad\left. + \frac{24x}{2^3}(-\cos 2x) + \frac{24}{2^4}\sin 2x\right\} + C\\ &= \left(\frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}\right)\sin 2x + \left(x^3 - \frac{3}{2}x\right)\cos 2x + C\end{aligned}$$

■

4.20 (1) 黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個の 12 個の玉の並べ方の総数を N とすると

$$N = \frac{12!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

黒玉 3 個と，白玉 5 個の 8 個を並べ，その 8 個の玉の両側と間の 9 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を A とすると

$$A = \frac{8!}{3!5!} \times \frac{9!}{4!5!} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率 p は

$$p = \frac{A}{N} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \bigg/ \frac{12!}{3!4!5!} = \frac{8!}{5!}\cdot\frac{9!}{12!} = \frac{8\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10} = \mathbf{\frac{14}{55}}$$

(2) 黒玉 3 個のうち 2 個をひとまとめにして，$\boxed{\text{黒黒}}$，黒玉 1 個，白玉 5 個を並べ，その 7 個の両側と間の 8 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を B とすると

$$B = \frac{7!}{1!1!5!} \times \frac{8!}{4!4!} = \frac{7!8!}{4!4!5!} \quad (\text{通り})$$

この中には，$\boxed{\text{黒黒}}$黒，または，黒$\boxed{\text{黒黒}}$のように，連続して並ぶ黒玉 3 個が重複する場合がある．黒玉 3 個をひとまとめにして，$\boxed{\text{黒黒黒}}$，白玉 5 個を並べ，その 6 個の両側と間の 7 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を C とすると

$$C = \frac{6!}{1!5!} \times \frac{7!}{4!3!} = \frac{6!7!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

どの赤玉も隣り合わないとき，隣り合う黒玉が存在する条件付き確率は

$$\begin{aligned}
\frac{B-C}{A} &= \left(\frac{7!8!}{4!4!5!} - \frac{6!7!}{3!4!5!}\right)\cdot\frac{3!4!5!5!}{8!9!} \\
&= \left(\frac{7!8!}{4!} - \frac{6!7!}{3!}\right)\cdot\frac{3!5!}{8!9!} \\
&= (8\cdot7 - 4)\frac{6!7!}{4!}\cdot\frac{3!5!}{8!9!} \\
&= 52\cdot\frac{6!}{8!}\cdot\frac{7!}{9!}\cdot\frac{5!}{4!}\cdot3! = \frac{65}{168}
\end{aligned}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{65}{168} = \mathbf{\dfrac{103}{168}}$ ■

4.21 (1) 1 回の操作で得られる複素数は，次の 6 通りで同様に確からしい．

$$w_1 = 1,\ w_2 = \sqrt{3},\ w_3 = i,\ w_4 = \sqrt{3}i,\ w_5 = \sqrt{3} + i,\ w_6 = 1 + \sqrt{3}i$$

このとき $|w_1|^2 = |w_3|^2 = 1$，$|w_2|^2 = |w_4|^2 = 3$，$|w_5|^2 = |w_6|^2 = 4$

また，$3^2 < 3{\cdot}4 < 4^2 < 25 < 3^3$ であるから，$|z_n| < 5$，すなわち，$|z_n|^2 < 25$ となる確率 P_n は，n 回の操作のうち，w_1 または w_3 が $n-2$ 回以上出る確率であるから

$$\begin{aligned}
P_n &= \sum_{k=n-2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \boldsymbol{\frac{2n^2+1}{3^n}}
\end{aligned}$$

(2) ${w_1}^2$〜${w_6}^2$ の偏角について

$$\begin{aligned}
&\arg {w_1}^2 = \arg {w_2}^2 = 0, \quad \arg {w_3}^2 = \arg {w_4}^2 = \pi, \\
&\arg {w_5}^2 = \frac{\pi}{3}, \quad \arg {w_6}^2 = \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

$\arg {z_n}^2 = \frac{\pi}{3} + l\pi$，$\arg {z_n}^2 = \frac{3\pi}{3} + m\pi$ となる確率をそれぞれ R_n，S_n とすると (l，m は整数)，次の確率漸化式が成立する (n は正の整数)．

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{4}{6},\ R_1 = S_1 = \frac{1}{6} \\
Q_{n+1} &= \frac{4}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{1}{6}S_n \\
R_{n+1} &= \frac{1}{6}Q_n + \frac{4}{6}R_n + \frac{1}{6}S_n \\
S_{n+1} &= \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{4}{6}S_n
\end{aligned}$$

これから $Q_{n+1} - R_{n+1} = \frac{1}{2}(Q_n - R_n)$，$R_{n+1} - S_{n+1} = \frac{1}{2}(R_n - S_n)$

ゆえに $Q_n - R_n = (Q_1 - R_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$

$$R_n - S_n = (R_1 - S_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

上の 2 式と $Q_n + R_n + S_n = 1$ より $\boldsymbol{Q_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)}$ ■

4.22 (1) 1 種類の数だけが取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_1}{N^4} = \boldsymbol{\frac{1}{N^3}}$$

(2) 4 種類の数が取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_4 \cdot 4!}{N^4} = \boldsymbol{\frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}}$$

(3) $\{A,\ A,\ A,\ B\}$ のとなる $A,\ B$ の選び方は ${}_N\mathrm{P}_2$ 通りあり，これらが取り出される順序は 4 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_N\mathrm{P}_2 \cdot 4}{N^4} = \boldsymbol{\frac{4(N-1)}{N^3}}$$

(4) 3 種類の数が取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_3\{3^4 - {}_3\mathrm{C}_2(2^4-2) - {}_3\mathrm{C}_1\}}{N^4} = \boldsymbol{\frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}}$$

補足 2 種類の数が取り出される確率は[8]

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_2(2^4-2)}{N^4} = \boldsymbol{\frac{7(N-1)}{N^3}}$$

■

[8] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2013.pdf $\boxed{1}$ (2)

4.23 (1) $f_1(x) = x$ より $f_1'(x) = 1$

$$f_1'(0) = \mathbf{1}, \quad \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\ \frac{x^2}{2}\ \right]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right) \text{ より}$$

$$f_2'(x) = \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right\} \quad \text{ゆえに} \quad f_2'(0) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_2(x)\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\ \log\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\ \right]_0^1 = \boldsymbol{-\frac{2}{3}\log 2}\end{aligned}$$

$f_3(x) = \cos(\pi x)$ より $f_3'(x) = -\pi\sin(\pi x)$

$$f_3'(0) = \mathbf{0}, \quad \int_0^1 f_3(x)\,dx = \int_0^1 \cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\ \sin(\pi x)\ \right]_0^1 = \mathbf{0}$$

$f_4(x) = xe^x$ より $f_4'(x) = (x+1)e^x$

$$f_4'(0) = \mathbf{1}, \quad \int_0^1 f_4(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx = \left[\ (x-1)e^x\ \right]_0^1 = \mathbf{1}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \text{ より} \quad f_5'(x) = \frac{x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{ゆえに} \quad f_5'(0) = \mathbf{0}$$

$x = 2\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$$\int_0^1 f_5(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2\cos\theta}\cdot(2\cos\theta)\,d\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

$f_6(x) = \sin(\pi x)$ より $f_6'(x) = \pi\cos(\pi x)$

$$f_6'(0) = \boldsymbol{\pi}, \quad \int_0^1 f_6(x)\,dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\ -\cos(\pi x)\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

(2) (1) の結果から，0 でないカードが 9 枚あるから，$ab \neq 0$ となる確率は

$$\left(\frac{9}{12}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$ab = 0$ となる確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{9}{16} = \mathbf{\frac{7}{16}}$$

(3) $ab = c = 0$ となる確率は，(1) の結果から

$$\frac{7}{16} \cdot \frac{3}{12} = \frac{7}{64}$$

$ab = c \neq 0$ となる確率は，次の (i)〜(iv) である．

(i) $a = b = 1$ のとき，$a = b = c = 1$ となる確率であるから

$$\left(\frac{3}{12}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

(ii) $a = 1$，$b \neq 1$ のとき，$1 \cdot b = b \neq 0$ となる確率であるから

$$\frac{3}{12} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 \times 6 = \frac{1}{96}$$

(iii) $a \neq 1$，$b = 1$ のとき，$a \cdot 1 = a \neq 0$ となる確率であるから

$$\frac{3}{12} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 \times 6 = \frac{1}{96}$$

(iv) $a \neq 1$，$b \neq 1$ のとき，$ab = c \neq 0$，すなわち，$a = b = \frac{1}{2}$，$c = \frac{1}{4}$ となる確率は

$$\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}$$

以上の結果から，求める確率は

$$\frac{7}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{96} + \frac{1}{96} + \frac{1}{1728} = \mathbf{\frac{253}{1728}}$$

■

4.24 方程式 $(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$ より $\quad (|x|^3-|x|)^2(y^3-y)=2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2$

$f(n)=n^3-n$ とおくと $\qquad f(|x|)^2f(y)=2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2 \quad \cdots(*)$

$f(n)=n^3-n=(n-1)n(n+1)$ であるから，$f(y)\geqq 2{\cdot}3$ より

$$f(|x|)^2\leqq\frac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{2{\cdot}3} \quad \text{ゆえに} \quad f(|x|)\leqq 2^3{\cdot}3{\cdot}5$$

$f(n)\leqq 2^3{\cdot}3{\cdot}5$ を満たす自然数 n で，$f(n)$ が 2，3，5 の因数からなるものは

$$n\geqq 9 \text{ のとき} \quad f(n)\geqq f(9)=8{\cdot}9{\cdot}10=2^4{\cdot}3^2{\cdot}5>2^3{\cdot}3{\cdot}5$$

に注意すると，次の 4 つである．$f(6)$，$f(7)$，$f(8)$ は 7 を因数にもつから不適．

n	2	3	4	5
$f(n)$	$2{\cdot}3$	$2^3{\cdot}3$	$2^2{\cdot}3{\cdot}5$	$2^3{\cdot}3{\cdot}5$
$\dfrac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{f(n)^2}$	$2^5{\cdot}3{\cdot}5^2$	$2{\cdot}3{\cdot}5^2$	$2^3{\cdot}3$	$2{\cdot}3$

上の表から $\qquad \dfrac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{f(4)^2}=f(3)，\quad \dfrac{2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2}{f(5)^2}=f(2)$

したがって $\qquad f(4)^2f(3)=f(5)^2f(2)=2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2$

$(*)$ を満たす整数 $(x,\ y)$ の組は，$f(y)>0$ であるから，$y\geqq 2$ により

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(\pm 4,\ 3),\ (\pm 5,\ 2)}$$

■

4.25 (1) 加法定理により

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta$$
$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

したがって $\qquad \cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta \quad \cdots(*)$

$(*)$ に $n=1,\ 2,\ 3$ をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 & \cdots ① \\ \cos 3\theta &= 2\cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta & \cdots ② \\ \cos 4\theta &= 2\cos\theta\cos 3\theta - \cos 2\theta & \cdots ③ \end{aligned}$$

① を ② に代入すると

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= 2\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta \\ &= \boldsymbol{4\cos^3\theta - 3\cos\theta} \end{aligned}$$

上式と ① を ③ に代入すると

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= 2\cos\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - (2\cos^2\theta - 1) \\ &= \boldsymbol{8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1} \end{aligned}$$

(2) $(*)$ から，$x=\cos\theta$，$f_n(x)=\cos n\theta$ とおける．$f_n(x)$ は x の n 次式で最高次の係数は 2^{n-1} である．したがって

$$f_n(x)=2^{n-1}x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0 \qquad (**)$$

とおける．なお，$a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_0$ は整数．

$\cos\theta=\dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta=\dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 $m,\ n$ が存在すると仮定すると，$n\theta=m\pi$ より

$$\cos n\theta=(-1)^m$$

このとき，$x=\dfrac{1}{p}$，$f_n(x)=(-1)^n$ を $(**)$ に代入すると

$$(-1)^m=\frac{2^{n-1}}{p^n}+\frac{a_{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{a_{n-2}}{p^{n-2}}+\cdots+a_0$$

両辺に p^{n-1} を掛けて整理すると

$$-\frac{2^{n-1}}{p}=a_{n-1}+a_{n-2}p+\cdots+\{a_0-(-1)^m\}p^{n-1}$$

上式の右辺は整数であるが，p が 3 以上の素数であるから，左辺は整数ではない．よって，与えられた条件を満たす整数 $m,\ n$ は存在しない．

補足 $f_n(x)$ は，n が奇数のときは奇関数，n が偶数のときは偶関数である．■

4.26 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 0,\ 0)$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 1,\ 1)$ と垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{v}=(0,-1,\ 1)$$

とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{v}$ であるから (k は定数)，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$ より

$$k\{0\cdot1+(-1)\cdot2+1\cdot3\}=1 \quad \text{ゆえに} \quad k=1$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{v}=(0,-1,\ 1)$　よって　$\mathbf{P(0,-1,\ 1)}$

(2) H は直線 AB 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}) &&(*)\\&=\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=(2-t,\ t,\ t)\cdot(-1,\ 1,\ 1)=3t-2=0\end{aligned}$$

これを解いて　$t=\dfrac{2}{3}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

(3) 空間の点 X を平面 OAB に垂線を下ろした点を $f(X)$ とすると

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\vec{0},\quad f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

f は線形変換であるから，f による Q の像を R とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=f(\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\frac{3}{4}f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})+f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$(*)$ により，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，R から線分 OH に垂線 RT を引くと

$$\mathrm{RT}=\frac{3}{4}\mathrm{AH}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\frac{1}{2}|(-1,\ 1,\ 1)|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\dfrac{3}{2},\ 0,\ 0\right)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\dfrac{3}{2}$

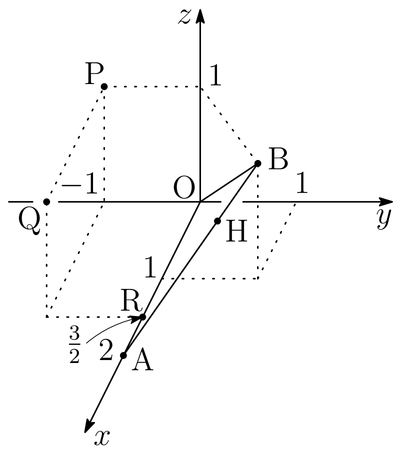
$$\overrightarrow{\mathrm{RB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1,\ 1,\ 1)-\left(\frac{3}{2},\ 0,\ 0\right),=\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$$

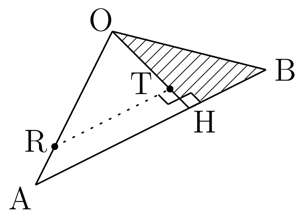
$$|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|=\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}=\frac{3}{2}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|(0,-1,\ 1)|=\sqrt{2}$ であるから，求める r の値の範囲は

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\leqq r\leqq\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{11}}{2}\leqq r\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}}$





4.27 (1) $f(1,\ j)=\dfrac{1}{2}j(j+1)$ より，$0 \leqq k \leqq j-1$ に対して

$$f(1+k,\ j-k)=f(1,\ j)-k=\frac{1}{2}j(j+1)-k$$

$1+k=m$，$j-k=n$ とすると，$k=m-1,\ j=m+n-1$ より

$$f(m,\ n)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)-m+1$$

したがって

$$\begin{aligned}f(m,\ n)+f(m+1,\ n+1)&=\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)-m+1\\&\quad+\frac{1}{2}(m+n+2)(m+n+1)-m\\&=(m+n)^2+(m+n)-2m+2\\&=2\left\{\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)-m+1\right\}\\&=2f(m,\ n+1)\end{aligned}$$

(2) 与えらた等式に (1) の結論を適用すると

$$\begin{aligned}f(m+1,\ n)+3f(m,\ n+1)&=2023\\2(m+n)(m+n+1)-4m+3&=2023\\(m+n)^2-m+n&=1010 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

したがって　$\{2(m+n)-1\}^2=4041-8n<4041$
$\{2(m+n)+1\}^2=4041+8m>4041$

$63^2=3869,\ 65^2=4225$ より

$$2(m+n)-1 \leqq 63, \quad 2(m+n)+1 \geqq 65 \quad \text{ゆえに} \quad m+n=32$$

これを ① に代入すると　$-m+n=-14$　よって　$\boldsymbol{m=23,\ n=9}$ ■

4.28 (1) $b_1 = a_1$ より　$\boldsymbol{p_1 = 0}$

$b_2 = {a_1}^2 + a_2$，${a_1}^2 \not\equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$ {a_1}^2 + a_2 \equiv 0 \pmod 7 $$

を満たす a_2 がただ 1 つ存在する．よって　$\boldsymbol{p_2 = \dfrac{1}{6}}$

(2) $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n-k} a_k$ より

$$ \begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} {a_1}^{n+1-k} a_k = \sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\ &= a_1 \sum_{k=1}^{n} {a_1}^{n-k} a_k + a_{n+1} = a_1 b_n + a_{n+1} \end{aligned} $$

(i) $b_n \not\equiv 0 \pmod 7$ のとき，$a_1 b_n \not\equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$ a_1 b_n + a_{n+1} \equiv 0 \pmod 7 $$

となる a_{n+1} がただ一つ定まる．

(ii) $b_n \equiv 0 \pmod 7$ のとき，$a_1 b_n \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$ a_1 b_n + a_{n+1} \not\equiv 0 \pmod 7 $$

(i)，(ii) および (1) の結果から，$\{p_n\}$ について，次の確率漸化式が成立する．

$$ p_1 = 0, \quad p_{n+1} = \frac{1}{6}(1 - p_n) $$

上の第 2 式から

$$ p_{n+1} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}\left(p_n - \frac{1}{7}\right) \quad \text{ゆえに} \quad p_n - \frac{1}{7} = \left(p_1 - \frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} $$

$p_1 = 0$ より　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{7}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$ ■

4.29 (1) $x \leqq 1$ のとき　$f(x)-x=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-x=\frac{1}{2}(1-x)\geqq 0$

$x>1$ のとき　$f(x)-x=(2x-1)-x=x-1>0$

よって，すべての実数 x について，次が成立する．

$$f(x)-x\geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x)\geqq x$$

(2)　　　　　　(∗)　$a_n \leqq 1$

［1］$n=1$ のとき，$a_1=a\leqq 1$ より，(∗) が成立する．

［2］$n=k$ のとき，(∗) が成立すると仮定すると　$a_k\leqq 1$

$$a_{k+1}=f(a_k)=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}=1$$

したがって，$n=k+1$ のとき，(∗) が成立する．

［1］,［2］より，すべての正の整数 n について，(∗) が成立する．

(3) (i) $a\leqq 1$ のとき，(2) の結果から　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1) \quad \text{よって} \quad a_n=(a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$$

(ii) $a>1$ のとき，(1) の結果から　$a_{n+1}=f(a_n)\geqq a_n$

$\{a_n\}$ は単調増加列であるから

$$a_n\geqq a>1 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}=2a_n-1$$

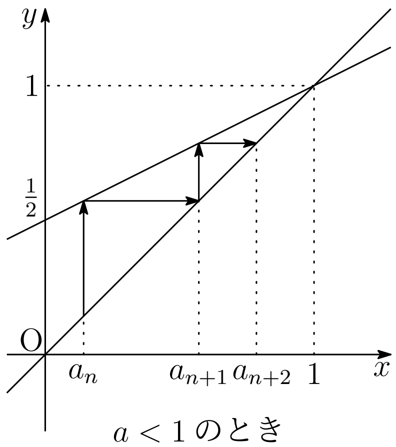
上の第 2 式を変形すると

$$a_{n+1}-1=2(a_n-1) \quad \text{よって} \quad a_n=(a-1)\cdot 2^{n-1}+1$$

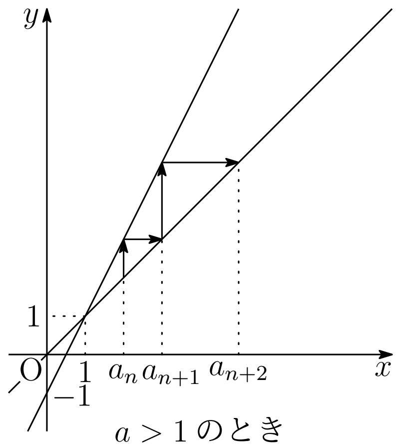
(i)，(ii) から　$\boldsymbol{a_n=\begin{cases}(a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1 & (a\leqq 1)\\ (a-1)\cdot 2^{n-1}+1 & (a>1)\end{cases}}$

補足　$f(1)=1$ より，$a=1$ のとき　$a_n=1$

$\{a_n\}$ は $a<1$ のとき，1 に収束し，$a>1$ のとき正の無限大に発散する．



$a<1$ のとき



$a>1$ のとき

4.30 (1) $a_{n+1}=\left(\dfrac{n^6(n+1)}{{a_n}^3}\right)^2$ より

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\left(\frac{n^2}{a_n}\right)^6 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=-6\log_2\frac{a_n}{n^2}$$

$a_1=2$，$b_n=\log_2\dfrac{a_n}{n^2}$ より　$b_1=\log_2\dfrac{2}{1^2}=\mathbf{1}$，$b_{n+1}=-6b_n$　$\cdots(*)$

また　$b_2=-6b_1=-6\cdot1=\mathbf{-6}$

(2) $(*)$ より，$\{b_n\}$ は公比 -6 の等比数列である．

(3) $0<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=\log_2 n!<\log_2 n^n=n\log_2 n$ より

$$0<\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k<\frac{n\log n}{6^{2n}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log n}{6^{2n}}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=0$$

(4) $\log_2 a_{2k}=\log_2\dfrac{a_{2k}}{(2k)^2}+\log_2(2k)^2=b_{2k}+2+2\log_2 k$

$(*)$ より　$b_n=1\cdot(-6)^{n-1}$　ゆえに　$b_{2k}=(-6)^{2k-1}=-6\cdot6^{2(k-1)}$

求める極限値を I とすると

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}(b_{2k}+2+2\log_2 k)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\{-6\cdot6^{2(k-1)}+2+2\log_2 k\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-6(6^{2n}-1)}{6^{2n}(6^2-1)}+\frac{2n}{6^{2n}}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\log_2 k}{6^{2n}}\right\}\\
&=-\frac{6}{35}+0+0=\mathbf{-\frac{6}{35}}
\end{aligned}$$

■

4.31 (1) 等式 $\{x\sin\theta_k(n)-y\cos\theta_k(n)\}^2+\{x\cos\theta_k(n)+y\sin\theta_k(n)\}^2=x^2+y^2$ に C_n および $L_{k,n}$ の方程式を代入すると

$$x\cos\theta_k(n)+y\sin\theta_k(n)=\pm\frac{1}{n}$$

上式と $L_{k,n}: x\sin\theta_k(n)-y\cos\theta_k(n)=0$ から

$$x=\pm\frac{1}{n}\cos\theta_k(n)=\pm\frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2n}\right)=\pm\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

$1\leqq k\leqq n$ より $\quad \boldsymbol{x_k(n)=\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{2n}}$

(2) $A_t(m)=\sum_{k=1}^{m}x_k(k+t)$ に (1) の結果を適用すると

$$A_t(1)=x_1(1+t)=\frac{1}{1+t}\sin\frac{\pi}{2(1+t)}$$

よって $\quad A_1(1)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}},\quad A_2(1)=\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

$$\begin{aligned}B_N&=\sum_{t=0}^{N-1}A_t(N-k)=\sum_{t=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-t}x_k(k+t)\\&=\sum_{t=0}^{N-2}\sum_{k=1}^{N-t}x_k(k+t)+x_1(N)\\&=\sum_{t=0}^{N-2}\left\{\sum_{k=1}^{N-1-t}x_k(k+t)+x_{N-t}(N)\right\}+x_1(N)\\&=\sum_{t=0}^{N-2}\sum_{k=1}^{N-1-t}x_k(k+t)+\sum_{t=0}^{N-2}x_{N-t}(N)+x_1(N)\\&=B_{N-1}+\sum_{t=1}^{N}x_t(N)\end{aligned}$$

$N=2,3,4,\cdots$ に対して $\quad B_N-B_{N-1}=\sum_{k=1}^{N}x_k(N)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\sin\frac{k\pi}{2N}}$

$$B_2-B_1=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{2}}{4}},\quad B_3-B_2=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\sin\frac{k\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}$$

(3) $\lim_{N\to\infty}(B_N-B_{N-1})=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin\frac{k\pi}{2N}=\int_0^1\sin\frac{\pi x}{2}\,dx=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$ ■

5.1 (1) α は点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるから

$$|\alpha - 1|^2 = 1 \qquad \text{ゆえに} \qquad \alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$$

(2) $t = \alpha + \overline{\alpha}$，$u = \beta + \overline{\beta}$ より，(1) の結果から

$$\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha} = t, \quad \beta + \overline{\beta} = \beta\overline{\beta} = u$$

したがって，α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ を解とする 4 次方程式は

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta}) &= 0\\ \{x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}\}\{x^2 - (\beta+\overline{\beta})x + \beta\overline{\beta}\} &= 0\\ (x^2 - tx + t)(x^2 - ux + u) &= 0 \qquad \text{(A)}\\ x^4 - (t+u)x^3 + (t+u+tu)x^2 - 2tux + tu &= 0\end{aligned}$$

これが 4 次方程式 $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ と一致するから，同じ次数の項の係数を比較すると

$$\boldsymbol{p = t + u, \quad q = t + u + tu, \quad r = 2tu, \quad s = tu}$$

(3) α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ は，異なる 4 つの虚数であるから，(A) より　$t \neq u$

$$t^2 - 4t < 0, \quad u^2 - 4u < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < u < 4,\ 0 < t < 4\ (t \neq u)$$

(2) の結果から，t, u を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - (t+u)x + tu = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - px + s = 0$$

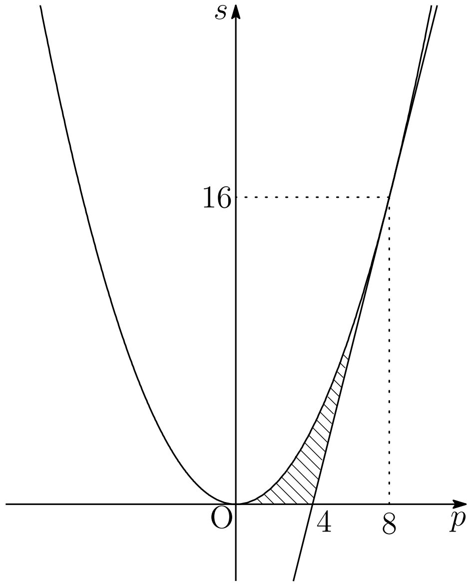
$f(x) = x^2 - px + s$ とすると　$f(x) = \left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 - \dfrac{p^2 - 4s}{4}$

2 次方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < 4$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つから

$$0 < \frac{p}{2} < 4, \quad f\left(\frac{p}{2}\right) < 0, \quad f(0) > 0, \quad f(4) > 0$$

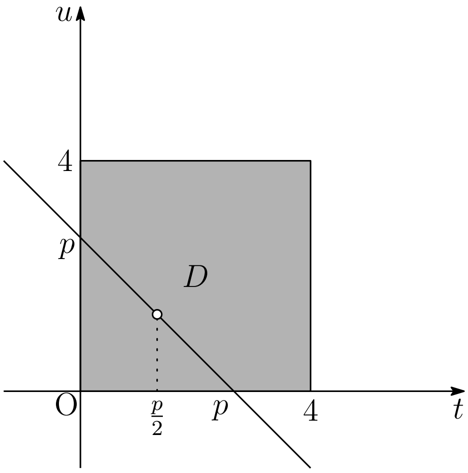
したがって　$0 < p < 8,\quad p^2 - 4s > 0,\quad s > 0,\quad -4p + s + 16 > 0$

点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．

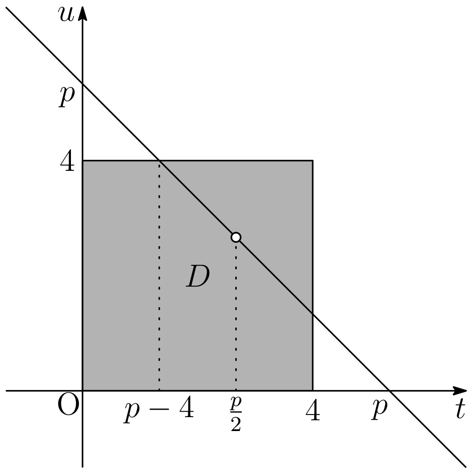


別解 $D=\{(t,\ u)\,|\,0<t<4,\ 0<u<4\}$ とし，直線 $t+u=p$ 上の点 $(t,\ u)\in D$ における $s=tu$ のとる値の範囲を求める．$t=2\mathrm{Re}(\alpha)$，$u=2\mathrm{Re}(\beta)$，$\mathrm{Re}(\alpha)\neq\mathrm{Re}(\beta)$ であるから，$t\neq u$ より，$t\neq\dfrac{p}{2}$

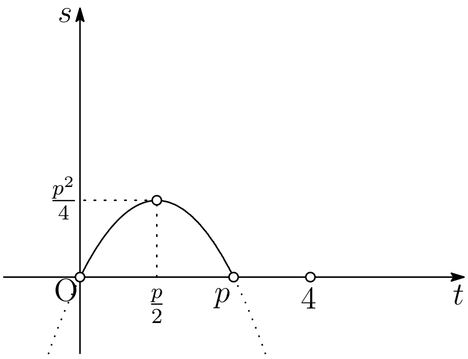
$$s=t(p-t)=-\left(t-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{4}$$

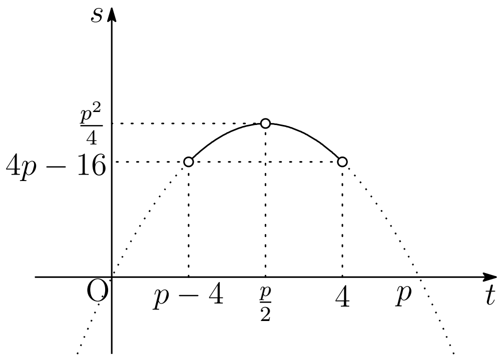


(i) $0<p\leqq 4$



(ii) $4\leqq p<8$





したがって

(i) $0<p\leqq 4$ のとき　$0<s<\dfrac{s^2}{4}$

(ii) $4\leqq p<8$ のとき　$4p-16<s<\dfrac{s^2}{4}$

(i)，(ii) より，前ページと同じ領域を得る．

類題 広島大学 2018 年文系 1 番を参照[9]．

[9] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai_bun_2018.pdf $\boxed{1}$ (4)

東大 1954 年理科文科

点 $(x,\ y)$ が原点を中心とする半径 1 の円の内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲を図示せよ．

解答　$s=x+y$，$t=xy$ とすると

$$s^2-2t=(x+y)^2-2xy=x^2+y^2<1 \quad \text{ゆえに} \quad t>\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

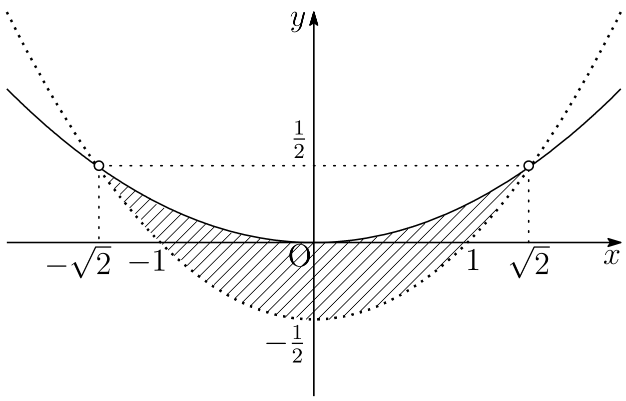
$x,\ y$ を解とする 2 次方程式は　$X^2-sX+t=0$

この方程式は，実数解をもつから，係数について

$$s^2-4t \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t \leqq \frac{s^2}{4} \quad \cdots ②$$

①，② より　　$y>\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}$，$y \leqq \dfrac{x^2}{4}$

求める領域は，下の図の斜線部分で，点線および ◦ を含まない．

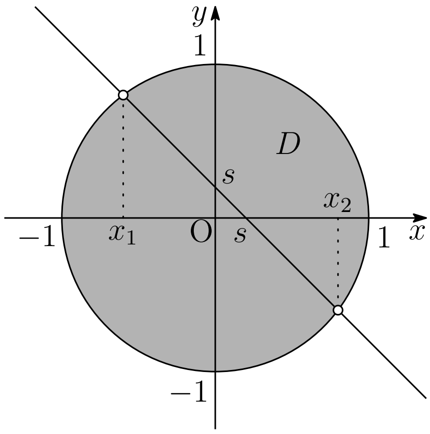


別解 $D = \{(x,\ y) \mid x^2+y^2<1\}$ とし，直線 $x+y=s$ 上の点 $(x,\ y) \in D$ における $t=xy$ のとる値の範囲を求める．

$$s^2 = (x+y)^2 \leqq (1^2+1^2)(x^2+y^2) < 2$$

直線 $x+y=s$ $(-\sqrt{2}<s<\sqrt{2})$ と円 $x^2+y^2=1$ の共有点の x 座標を $x_1,\ x_2$ とすると $(x_1<x_2)$

$$x_1 = \frac{s-\sqrt{s^2-2}}{2}, \quad x_2 = \frac{s+\sqrt{s^2-2}}{2}$$



$t = xy = x(s-x)$ より，$f(x) = x(s-x)$ $(x_1<x<x_2)$ とおくと

$$f(x) = -\left(x-\frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s^2}{4}$$

$f(x_1) = f(x_2) = \dfrac{s^2}{2} - \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{s}{2}\right) = \dfrac{s^2}{4}$ であるから，t の範囲について

$$\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2} < t \leqq \frac{s^2}{4} \quad (-\sqrt{2}<s<\sqrt{2})$$

この不等式の表す領域は，前ページの図のとおりである．

■

5.2 (1) $y=\cos x$ を微分すると　$y'=-\sin x$

$y=\cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線の方程式は $(-\pi \leqq t \leqq \pi)$

$$y=(-\sin t)(x-t)+\cos t$$

この直線が点 $(a,\ b)$ を通るから

$$b=(-\sin t)(a-t)+\cos t$$

これを満たす実数 t は，平面 tu における曲線 $u=(-\sin t)(a-t)+\cos t$ と直線 $u=b$ の共有点の t 座標に一致する．$f(t)=(-\sin t)(a-t)+\cos t$ とおくと

$$f'(t)=(t-a)\cos t$$

(i) $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(t)$ の増減表は

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\searrow$	$\cos a$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-a$	$\searrow$	-1

$N(\mathrm{P})=4$ となる条件は，増減表から　$f(a)<b<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\cos a<b<\frac{\pi}{2}-a$$

(ii) $a=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(t)$ の増減表は

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	π	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

増減表から，$N(\mathrm{P})=4$ を満たす点 $(a,\ b)$ は存在しない．

(iii) $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$ のとき，$f(t)$ の増減表は

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}-a$	$\nearrow$	$\cos a$	$\searrow$	-1

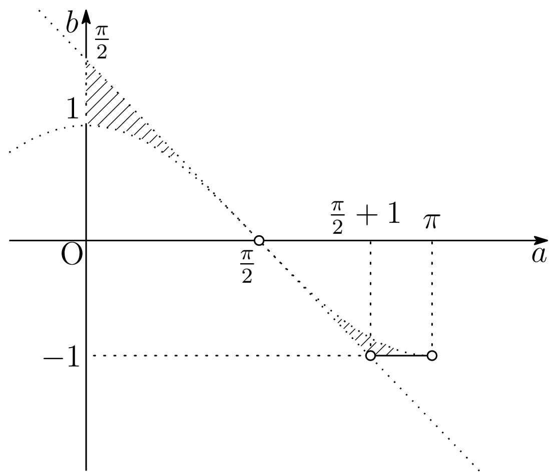
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \geqq f(\pi)$ のとき，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < b < f(a)$ より

$$\frac{\pi}{2} - a < b < \cos a$$

- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < f(\pi)$ のとき，$f(\pi) \leqq b < f(a)$ より

$$-1 \leqq b < \cos a$$

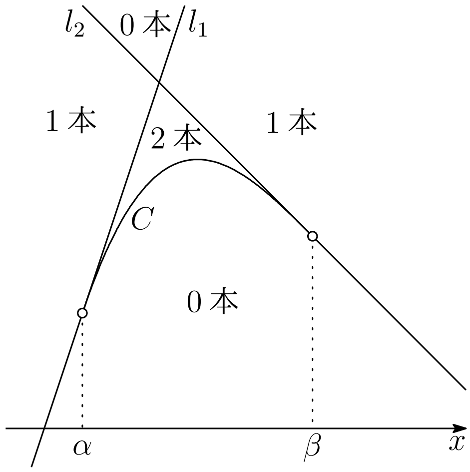
(i)〜(iii) から，点 $(a,\ b)$ の表す領域は，下の図の実線部分を含む斜線部分で，○および点線部分を含まない．



補足 $y = \cos x$ の変曲点 $\left(\pm\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ により，次の 3 つの領域に分けて考える．

- 曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(-\pi, -1)$ と変曲点 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ における 2 接線によってできる領域
- 曲線 $y = \cos x$ 上の変曲点 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ における 2 接線によってできる領域
- 曲線 $y = \cos x$ 上の変曲点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ と点 $(\pi, -1)$ における 2 接線によってできる領域

解説 区間 $\alpha < x < \beta$ において，$f''(x)$ が常に定符号である曲線 $C : y = f(x)$ に引ける接線の本数は $(\alpha < x < \beta)$，C および $x = \alpha,\ \beta$ における 2 本の接線 l_1，l_2 によって，下の図のようになる (l_1，l_2 上の点から引ける接線の本数は 0 本)．



$y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は $(\alpha < t < \beta)$

$$f'(t)(x - t) + f(t) - y = 0$$

この接線が点 $(p,\ q)$ を通るとき

$$f'(t)(p - t) + f(t) - q = 0$$

これから

$$\varphi(t) = f'(t)(p - t) + f(t) - q \qquad (*)$$

とおくと，方程式 $\varphi(t) = 0$ の解 $(\alpha < t < \beta)$ の個数は，点 $(p,\ q)$ から曲線 C に引ける接線の本数と一致する．

$$\varphi'(t) = f''(t)(p - t)$$

$f''(t) < 0$ のとき，$\varphi(t)$ の増減表は

t	α	$\cdots$	p	$\cdots$	β
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	$\varphi(\alpha)$	$\searrow$	$\varphi(p)$	$\nearrow$	$\varphi(\beta)$

たとえば，$\varphi(t) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき

$$\varphi(\alpha) > 0, \quad \varphi(p) < 0, \quad \varphi(\beta) > 0$$

$(*)$ より，このとき，l_1 の下側，C の上側，l_2 の下側となる [10]． ■

[10] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf $\boxed{6}$ を参照

5.3 (1) △ABC の面積 S をヘロンの公式で求める．
$2s=7+9+8$ とすると，$s=12$ より

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-9)(12-8)}=12\sqrt{5}$$

△ABC の内接円の半径を r とすると

$$r=\frac{S}{s}=\frac{12\sqrt{5}}{12}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$$

(2) △ABC の内心 I から AB，BC，CA にそれぞれ垂線 IL，IM，IN を引く．
$\alpha=\mathrm{AN}=\mathrm{AL}$，$\beta=\mathrm{BL}=\mathrm{BM}$，$\gamma=\mathrm{CM}=\mathrm{CN}$ とすると

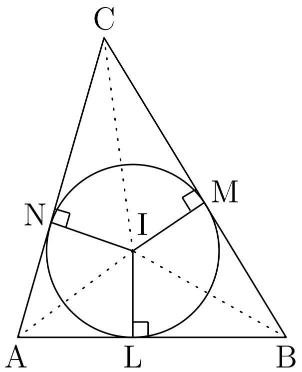
$$\alpha+\beta=7,\quad \beta+\gamma=9,\quad \gamma+\alpha=8$$

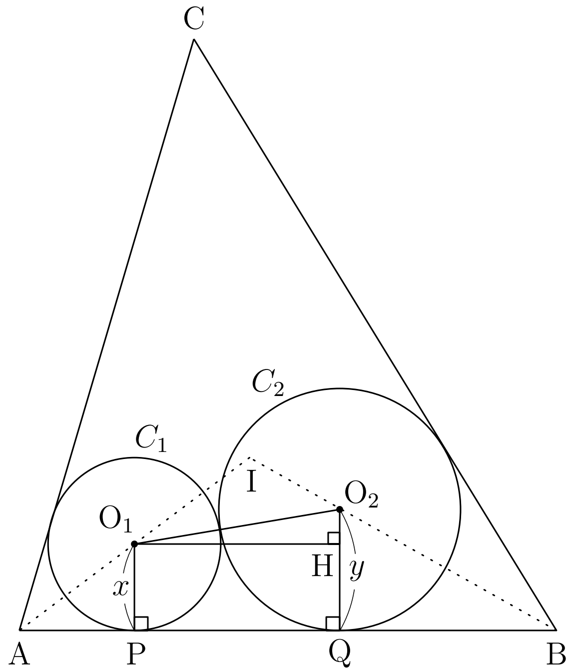
これを解いて　　$\alpha=3,\ \beta=4,\ \gamma=5$
C_1，C_2 の中心をそれぞれ $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ とし，その半径をそれぞれ $x,\ y$ とする．
$\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ は，それぞれ線分 AI，BI 上の点である．$\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ から線分 AB にそれぞれ垂線 $\mathrm{O_1P}$，$\mathrm{O_2Q}$ を引くと

$$\frac{\mathrm{AP}}{x}=\frac{3}{\sqrt{5}},\quad \frac{\mathrm{BQ}}{y}=\frac{4}{\sqrt{5}}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{AP}=\frac{3x}{\sqrt{5}},\ \mathrm{BQ}=\frac{4y}{\sqrt{5}}$$

右下の図の直角三角形 $\mathrm{O_1O_2H}$ により

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{O_1O_2}=\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}=2\sqrt{xy}$$





$\mathrm{AP}+\mathrm{BQ}+\mathrm{PQ}=7$ より

$$\frac{3x+4y}{\sqrt{5}}+2\sqrt{xy}=7 \tag{$*$}$$

条件から，$y=x$ を上式に代入すると

$$\frac{7x}{\sqrt{5}}+2x=7 \quad ゆえに \quad (7+2\sqrt{5})x=7\sqrt{5}$$

よって，C_1 の半径は　　$x=\dfrac{7\sqrt{5}}{7+2\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{49\sqrt{5}-70}{29}}$

(3) $(*)$ より，y は x の関数 (陰関数) であるから，$(*)$ を x で微分すると

$$\frac{3+4y'}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{y}{x}}+y'\sqrt{\frac{x}{y}}=0 \tag{A}$$

両辺に $\sqrt{5xy}$ を掛けると

$$(3+4y')\sqrt{xy}+\sqrt{5}(y+xy')=0 \tag{B}$$

これをさらに x で微分すると

$$4y''\sqrt{xy}+\frac{1}{2}(3+4y')\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+y'\sqrt{\frac{x}{y}}\right)+\sqrt{5}(2y'+xy'')=0 \tag{C}$$

C_1 と C_2 の周の長さの和が最小であるとき，$x+y$ が最小となる．$x+y$ は x の関数であるから，$f(x)=x+y$ とおくと

$$f'(x)=1+y', \quad f''(x)=y''$$

$f'(x)=0$ とすると，$y'=-1$ より，これを (C) に代入し，整理すると

$$(4\sqrt{xy}+\sqrt{5}x)y''=2\sqrt{5}$$

これから，$y''>0$ となり，$f'(x)=0$ となるとき，$f''(x)>0$ であるから，このときの極値は極小値である．

$y'=-1$ を (A) に代入し，$t=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ とすると $(t>0)$

$$t-\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad ゆえに \quad \sqrt{5}t^2-t-\sqrt{5}=0 \tag{D}$$

$t>0$ に注意して，これを解くと　$t=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2\sqrt{5}}$　$\cdots$①

$(*)$ の両辺に $\dfrac{5}{x}$ をかけると

$$3\sqrt{5}+4\sqrt{5}t^2+10t=\frac{35}{x}$$

(D) の第 2 式から，$\sqrt{5}t^2=t+\sqrt{5}$ を上式に代入すると

$$3\sqrt{5}+4(t+\sqrt{5})+10t=\frac{35}{x} \quad \text{ゆえに} \quad 2t+\sqrt{5}=\frac{5}{x}$$

① を上の第 2 式に代入すると

$$2\cdot\frac{1+\sqrt{21}}{2\sqrt{5}}+\sqrt{5}=\frac{5}{x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{6+\sqrt{21}}{\sqrt{5}}=\frac{5}{x}$$

したがって　　$x=\dfrac{5\sqrt{5}}{6+\sqrt{21}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}(6-\sqrt{21})}{3}}$

① より　　$\dfrac{y}{x}=t^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{11+\sqrt{21}}{10}$

よって　　$y=x\cdot\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sqrt{5}(6-\sqrt{21})}{3}\cdot\dfrac{11+\sqrt{21}}{10}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}(9-\sqrt{21})}{6}}$ ■

5.4 (1) 条件式 (A)，(B) に $x=y=0$ を代入すると

$$f(0)=f(0)^2-g(0)^2,\quad g(0)=2f(0)g(0) \tag{$*$}$$

上の第 2 式から　$\{2f(0)-1\}g(0)=0$

したがって　$f(0)=\dfrac{1}{2}$ または $g(0)=0$

- $f(0)=\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ の第 1 式に代入して整理すると　$g(0)^2=-\dfrac{1}{4}$
  $g(0)$ は実数値であるから，$f(0)=\dfrac{1}{2}$ は不適．
- $g(0)=0$ のとき，これを $(*)$ の第 1 式に代入して整理すると

$$f(0)\{f(0)-1\}=0\quad f(0)\neq 0 \text{ に注意して}\quad f(0)=1$$

よって，題意は成立する．

(2) (1) の結論および条件 (A)，(D) より

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-g(x)g(h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}-g(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}\right\}\\
&=f(x)f'(0)-g(x)g'(0) \qquad (**)\\
&=f(x)\cdot 0-g(x)\cdot 1=-g(x)
\end{aligned}$$

(3) (2) と同様に，(1) の結論および条件 (B)，(D) より

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+g(x)f(h)-g(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\}\\
&=f(x)g'(0)+g(x)f'(0) \qquad (***)\\
&=f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 0=f(x)
\end{aligned}$$

$\pi(x)=\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)$ とおくと，(2) および上式から

$$\begin{aligned}
\pi'(x)&=\{f(x)+ig(x)\}'(\cos x-i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)'\\
&=\{f'(x)+ig'(x)\}(\cos x-i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(-\sin x-i\cos x)\\
&=\{-g(x)+if(x)\}(\cos x-i\sin x)-i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)\\
&=i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)-i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=0
\end{aligned}$$

$\pi(x)$ は定数関数であるから　$\pi(x)=\pi(0)=\{f(0)+ig(0)\}\cdot 1=1$

よって　$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$

(4) (3) の結論から　$f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$
$f(x),\ g(x)$ は実関数 (実数値関数) であるから

$$f(x)=\cos x,\quad g(x)=\sin x$$

ここで，$\varphi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\varphi'(x)=f'(x)+ig'(x)=-g(x)+if(x)=i\{f(x)+ig(x)\}=i\varphi(x)$$

$\varphi(0)=\cos 0+i\sin 0=1$ および上式を満たす $\varphi(x)$ を求める．

$$\varphi'(x)e^{-ix}-i\varphi(x)e^{-ix}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \{\varphi(x)e^{-ix}\}'=0$$

したがって　$\varphi(x)e^{-ix}=C$　(C は積分定数)　ゆえに　$\varphi(x)=Ce^{ix}$
$\varphi(0)=1$ より　$C=1$　すなわち　$\varphi(x)=e^{ix}$
$\varphi(x)=f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$ であるから

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{\#}$$

(#) により，条件 (A)，(B)，(C)，(D$'$) を満たす関数 $f(x),\ g(x)$ を求める．
(D$'$) を $(**)$，$(***)$ に代入すると

$$f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)$$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}\phi'(x)&=f'(x)+ig'(x)=\{af(x)-bg(x)\}+i\{bf(x)+ag(x)\}\\&=(a+bi)\{f(x)+ig(x)\}=(a+bi)\phi(x)\end{aligned}$$

$\phi(0)=f(0)+ig(0)=1+i\cdot 0=1$ および上式を満たす $\phi(x)$ を求める．

$$\phi'(x)e^{-(a+bi)x}-(a+bi)e^{-(a+bi)x}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \{\phi(x)e^{-(a+bi)x}\}'=0$$

したがって

$$\phi(x)e^{-(a+bi)x}=C_0 \ \ (C_0\text{は積分定数}) \quad \text{ゆえに} \quad \phi(x)=C_0e^{(a+bi)x}$$

$\phi(0)=1$ より　$C_0=1$　すなわち　$\phi(x)=e^{(a+bi)x}$

(#) より　　$\phi(x)=e^{ax}e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ であるから ($f(x),\ g(x)$ は実関数)

$$\boldsymbol{f(x)=e^{ax}\cos bx,\quad g(x)=e^{ax}\sin bx}$$

これから　$f\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\cos x,\quad g\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\sin x$

これらを $p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\dfrac{x}{b}\right),\quad q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\dfrac{x}{b}\right)$ に代入すると

$$p(x)=\cos x,\quad q(x)=\sin x$$

［**B** の証明］　このとき，加法定理を用いて

$$\begin{aligned} q(x+y)&=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\ &=q(x)p(y)+p(x)q(y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)\end{aligned}$$

［**D** の証明］　$p'(x)=-\sin x,\quad q'(x)=\cos x$ より

$$p'(0)=0,\quad q'(0)=1$$

［証終］

補足　本題の線形の連立微分方程式

$$\begin{aligned} &f(0)=1,\ g(0)=0,\ f'(0)=a,\ g'(0)=b,\\ &f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)\end{aligned}$$

から $g(x),\ g'(x)$ を消去して，2 階の微分方程式

$$f(0)=1,\ f'(0)=a,\ f''(x)-2af'(x)+(a^2+b^2)f(x)=0$$

を解いてもよい．特性方程式 $X^2-2aX+a^2+b^2=0$ の解を

$$\alpha=a+bi,\quad \beta=a-bi$$

とおくと　$f(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$　($C_1,\ C_2$ は積分定数)[11]

このとき，$f(0)=1,\ f'(0)=a$ より

$$C_1+C_2=1,\quad \alpha C_1+\beta C_2=a$$

上の第 2 式について　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}(C_1+C_2)+\dfrac{\alpha-\beta}{2}(C_1-C_2)=a$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=a,\ \dfrac{\alpha-\beta}{2}=bi$ を代入すると　$a(C_1+C_2)+bi(C_1-C_2)=a$

$C_1+C_2=1,\ b\neq 0$ より　$C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$　よって　$f(x)=e^{ax}\cos bx$

同様に，2 階の微分方程式

$$g(0)=0,\ g'(0)=b,\ g''(x)-2ag'(x)+(a^2+b^2)g(x)=0$$

を解くと，$g(x)=e^{ax}\sin bx$ を得る．■

[11] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2010.pdf (p.17 例 2)

5.5 (1) Pが $z \leqq 1$ にあるとき，線分 OP の通過領域は　2^3

Pが $z \geqq 1$ にあるとき，線分 OP の通過領域は　$\dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 - 2^3\right\}$

求める体積を V_1 とすると　$V_1 = 2^3 + \dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 - 2^3\right\} = \boldsymbol{\dfrac{20}{3} + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

(2) $\mathrm{G}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{H}(-1, -1,\ 1)$ とし，$x^2+y^2+z^2 \leqq 3,\ z \geqq 1$ の平面 OGH による断面積を S とすると，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ より

$$S = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^2(2\alpha - \sin 2\alpha) = 3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = 3\alpha - \sqrt{2}$$

右下の図の斜線部分を y 軸の周りに回転させた立体の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \pi\int_{-1}^{1}\{t^2 - (\sqrt{2})^2\}\,dy = \pi\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy = \frac{4}{3}\pi$$

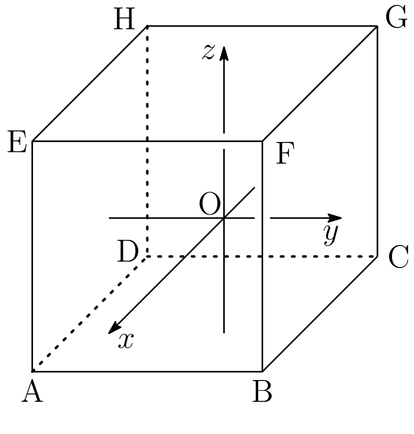
図の斜線部分の重心の y 軸からの距離を d とすると，パップス・ギュルダンの定理により

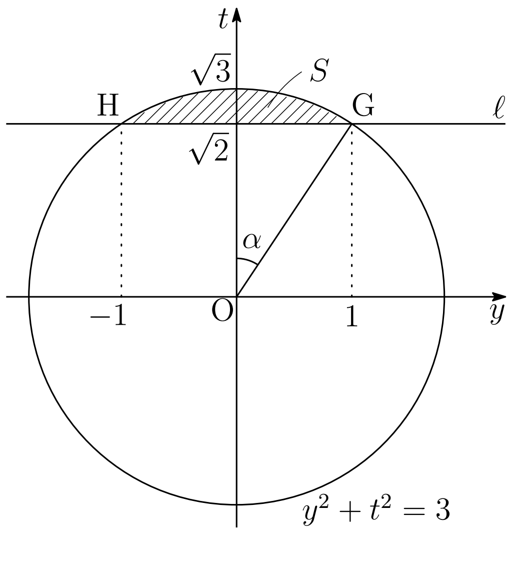
$$d = \frac{V_2}{2\pi S} = \frac{2}{3S}$$

斜線部分を $t = \sqrt{2}$ の周りに $\dfrac{3}{4}\pi$ だけ回転させた立体の体積を V_3 とすると

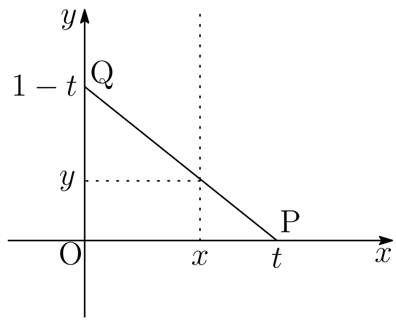
$$V_3 = \frac{3}{4}\pi(d-\sqrt{2})S = \frac{3}{4}\pi\left(\frac{2}{3S} - \sqrt{2}\right)S = \frac{\pi}{4}(2 - 3\sqrt{2}S)$$
$$= \frac{\pi}{4}\{2 - 3\sqrt{2}(3\alpha - \sqrt{2})\} = \frac{\pi}{4}(8 - 9\sqrt{2}\alpha)$$

よって，求める体積は　$V_1 + 4V_3 = \boldsymbol{\dfrac{20}{3} + \pi\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 8 - 9\sqrt{2}\alpha\right)}$ ■





5.6 (1) $\mathrm{P}(t,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 1-t)$ とするとき $(0 \leqq t \leqq 1)$,
PQ の包絡線 (PQ の通過する領域と通過しない領域の境界線) を求める.
PQ 上の点 $(x,\ y)$ について



$$y = \left(1 - \frac{1}{t}\right)x + 1 - t \quad \cdots (*)$$

が成立する. ここで, x を固定し, y を t の関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{t^2} - 1$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき, $\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから $\quad t = \sqrt{x}$
これを $(*)$ に代入すると

$$y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)x + 1 - \sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2$$

求める回転体の体積を V とすると, y 軸に関する対称性に注意して

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^1 y^2\,dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x}\,)^4\,dx$$

$u = 1 - \sqrt{x}$ とおくと $\quad x = (1-u)^2 \quad$ ゆえに $\quad \dfrac{dx}{du} = -2(1-u)$

x	$0 \longrightarrow 1$
u	$1 \longrightarrow 0$

したがって $\quad \displaystyle \frac{V}{2\pi} = \int_1^0 u^4 \cdot \{-2(1-u)\}\,du = 2\int_0^1 u^4(1-u)\,du$

$$= 2\int_0^1 (u^4 - u^5)\,du = 2\left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

よって $\quad V = \boldsymbol{\dfrac{2}{15}\pi}$

別解 [12] $\quad \displaystyle \frac{V}{2\pi} = \int_1^0 u^4 \cdot \{-2(1-u)\}\,du = 2\int_0^1 u^4(1-u)\,du = 2 \cdot \frac{4!1!}{6!}(1-0)^6 = \frac{1}{15}$

■

[12] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照.

5.7 (1) $P_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1) = \displaystyle\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m x^m \quad \cdots(*)$

$(*)$ に $x=1$ を代入すると $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m = n!$

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned}
P_n(x+1) &= \sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m (1+x)^m \\
&= \sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m ({}_m\mathrm{C}_0 + {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_m\mathrm{C}_m x^m) \\
&= \sum_{m=1}^{n} ({}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_m x^m)
\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $P_n(x+1) = \displaystyle\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k x^k$

$P_{n+1}(x) = xP_n(x+1)$ であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{B}_m x^m &= x\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{m}\sum_{m=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k x^{k+1}
\end{aligned}$$

上式の x^{k+1} の項の係数を比較すると

$${}_{n+1}B_{k+1} = \sum_{m=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k \quad \text{よって} \quad \sum_{j=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_j \cdot {}_j\mathrm{C}_k = {}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$$

第 1 種スターリング数

${}_n\mathrm{B}_m$ は第 1 種スターリング数 (Stirling numbers of the first kind) である．

$0 \leqq m \leqq n$ について

$$P_n(x) = (x+n-1)P_{n-1}(x) = (x+n-1)\sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{B}_m x^m$$
$$= \sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{B}_m x^{m+1} + (n-1)\sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{B}_m x^m$$

上式の x^m の項の係数を比較すると，次式を得る．

$${}_n\mathrm{B}_m = {}_{n-1}\mathrm{B}_{m-1} + (n-1)_{n-1}\mathrm{B}_m \qquad (*)$$

また，便宜上，${}_0\mathrm{B}_0 = 1$ と定義する．正の整数 n について次が成り立つ．

$${}_n\mathrm{B}_0 = 0, \quad {}_n\mathrm{B}_n = 1 \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ から ${}_n\mathrm{B}_m$ は順次求めることもできる．

$n \backslash m$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

例えば，$p_1(k)=k$，$p_2(k)=k(k+1)$，$p_3(k)=k(k+1)(k+2)$ について

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} p_1(k) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-(k-1)k\} = \frac{1}{2}n(n+1) \\
\sum_{k=1}^{n} p_2(k) &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\} \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\
\sum_{k=1}^{n} p_3(k) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\} \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-k\} = \sum_{k=1}^{n}\{p_2(k)-p_1(k)\} \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-3k(k+1)+k\} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{p_3(k)-3p_2(k)+p_1(k)\} \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3\cdot\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3)-4(n+2)+2\} \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

補足 k^m は $p_j(k)$ $(1 \leqq j \leqq m)$ の線形結合で表されるから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m$ は $n(n+1)$ を因数にもつ．

参考 第 2 種スターリング数および数列のべき乗和については，大分大学 2014 年 8 番を参照[13]．

■

[13] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2014.pdf $\boxed{8}$

6　索引