

令和4年度 山口大学2次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医(医)・農・教育・経済・国際総合科・共同獣医
令和4年2月25日

- 理(理数科以外)・工・教育理系 1 2 3 4 数I・II・III・A・B (120分)
- 理(理数科)・医(医)学部 4 5 6 7 数I・II・III・A・B (120分)
- 教育文系 3 8 9 10 数I・II・II・A・B (120分)

1 関数 $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} - e$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $f(x)$ の導関数および不定積分を求めなさい。
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|$ を求め、 $y = |f(x)|$ のグラフを概形をかきなさい。
- (3) 定積分 $\int_{-4}^4 |f(x)| dx$ の値を求めなさい。

2 次の問いに答えなさい。

- (1) $x > 0$ のとき、関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ の最大値を求めなさい。ただし、対数は自然対数とする。
- (2) 正の整数の組 (a, b) で、 $a^b = b^a$ かつ $a \neq b$ を満たすものをすべて求めなさい。

3 1辺の長さが1である正四面体OABCにおいて $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 線分OAを1:2に内分する点をPとする。 \overrightarrow{OP} を \vec{a} を用いて表しなさい。
- (2) 3点A, B, Cで定まる平面 α に対して点Oと対称な位置にある点を O' とすると、 $\overrightarrow{OO'}$ を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表しなさい。ただし、2点O, O' が平面 α に関して対称であるとは、直線 OO' が α と垂直であり、線分 OO' の中点が α 上にあるときをいう。
- (3) 点Xが $\triangle ABC$ 上を動く。 $OX + XP$ の値が最小となるとき、 \overrightarrow{OX} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表しなさい。

4 xy 平面上の原点を O とし, 2 点 $P_1(1, 0)$, $Q_1(1, \sqrt{3})$ をとる. 自然数 n に対して, x 座標が OP_n の長さを $\frac{3}{2}$ 倍して $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ を加えた値となる x 軸上の点を P_{n+1} とおく. P_n を通り直線 OQ_1 と平行な直線と, P_{n+1} を通り x 軸に垂直な直線との交点を Q_{n+1} とする. $\triangle Q_{n+1}P_nP_{n+1}$ を T_n とおく. 次の問いに答えなさい.

- (1) P_2 および P_4 の x 座標の値を求めなさい.
- (2) P_n の x 座標の値を α_n とするとき, α_n を n を用いて表しなさい.
- (3) $\angle P_1OQ_1$ の二等分線を l とする. 自然数 n に対して, T_n の辺 P_nQ_{n+1} と l の交点の座標を求めなさい.
- (4) 自然数 n に対して, T_n から l によって切り取られる三角形の面積を s_n としたとき, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ の和を求めなさい.

5 曲線 $y = f(x) = \log(x^2 + 1)$ ($x \geq 0$) を C とし, C 上の点 $P(1, f(1))$ における接線を l とする. ただし, 対数は自然対数とする.

- (1) C の変曲点を求め, C と l の共有点は P のみであることを示しなさい.
- (2) C と l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい.

6 平面上の 3 点 A, B, C を頂点とする三角形を T とし, T の重心を G とする. G に関して, 3 点 A, B, C と対称な点をそれぞれ A', B', C' とし, A', B', C' を頂点とする三角形を T' とする. $\vec{GA} = \vec{a}$, $\vec{GB} = \vec{b}$, $\vec{GC} = \vec{c}$ とおくとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) T の辺 BC と T' の辺 $B'C'$ は平行であることを示しなさい.
- (2) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ であることを示しなさい.
- (3) T' の辺 $B'C'$ は T の辺 AB および AC と交わることを示しなさい.
- (4) T と T' の共通部分の面積を, T の面積 S を用いて表しなさい.

- 7 整数全体を定義域とし、整数を値にとる関数 $f(n)$ が、次の条件 1, 2 を満たしているとする。

条件 1 $f(0) = 0$

条件 2 任意の整数 n に対し、 $f(3+n) = f(3-n)$ かつ $f(7+n) = f(7-n)$ が成り立つ

整数全体を定義域とする関数 $g(n)$, $h(n)$ をそれぞれ、 $g(n) = 6 - n$, $h(n) = 14 - n$ とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 合成関数 $(h \circ g)(n)$ と $(g \circ h)(n)$ を求めなさい。
- (2) 任意の整数 n に対し、2つの等式 $(f \circ g)(n) = f(n)$ と $(f \circ h)(n) = f(n)$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) $f(2022) = 0$ であることを示しなさい。
- (4) 集合 A を、関数 $f(n)$ のとりうる値全体の集合、すなわち、 $A = \{f(n) \mid n \text{ は整数}\}$ とする。このとき、集合 A の要素の個数は 5 以下であることを示しなさい。

- 8 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $f(x)$ の増減を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかきなさい。
- (2) 点 (p, q) から曲線 $y = f(x)$ に異なる接線が 3 本引けるとき、 p と q についての条件を求め、その条件を満たす点 (p, q) 全体の領域を pq 平面に図示しなさい。

- 9 次の問いに答えなさい。

- (1) 等式 $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ を証明しなさい。
- (2) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ を因数分解しなさい。
- (3) $a > 0, b > 0, c > 0$ のとき、不等式 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ を証明しなさい。さらに、等号が成り立つのは $a = b = c$ のときであることを証明しなさい。

10 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えなさい.

- (1) 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と変形したとき, 定数 α と β の値を求めなさい. ただし, $\alpha < \beta$ とする.
- (2) $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく. 数列 $\{b_n\}$ の初項 b_1 と一般項 b_n を求めなさい.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい.

解答例

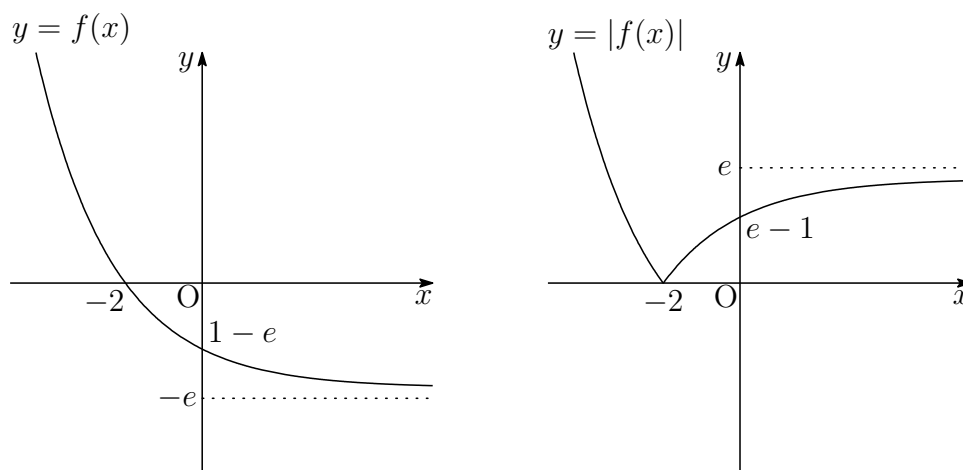
1 (1) $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} - e$ より

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, \quad \int f(x) dx = -2e^{-\frac{x}{2}} - ex + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2) (1) の結果から, $f(x)$ は単調減少. $f(-2) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -e \text{ より } \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = e$$

したがって, 左下の $y = f(x)$ のグラフの概形から, 右下の $y = |f(x)|$ のグラフの概形を得る.



(3) (1) の結果から, $F(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} - ex$ とおくと

$$F(-4) = -2e^2 + 4e, \quad F(-2) = 0, \quad F(4) = -2e^{-2} - 4e$$

(2) の $y = |f(x)|$ のグラフにより

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 |f(x)| dx &= \int_{-4}^{-2} f(x) dx - \int_{-2}^4 f(x) dx \\ &= \left[F(x) \right]_{-4}^{-2} - \left[F(x) \right]_{-2}^4 \\ &= 2F(-2) - F(-4) - F(4) \\ &= 2 \cdot 0 - (-2e^2 + 4e) - (-2e^{-2} - 4e) \\ &= 2(e^2 + e^{-2}) \end{aligned}$$



$$\boxed{2} \quad (1) \quad f(x) = \frac{\log x}{x} \text{ より } f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

x	(0)	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	極大	↘

増減表より 最大値 $f(e) = \frac{1}{e}$

$$(2) \quad a^b = b^a \text{ の両辺の自然対数をとると } b \log a = a \log b$$

$$\frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b} \text{ ゆえに } f(a) = f(b) \quad (*)$$

$$f(1) = 0. \quad e < x \text{ のとき } f(x) > 0.$$

増減表から, (*) を満たす a, b の一方は 2 であるから, $a = 2$ とすると

$$\frac{\log 2}{2} = \frac{\log b}{b} \text{ ゆえに } 2^b = b^2$$

$b = 4$ はこれを満たす. よって, 求める (a, b) の組は

$$(a, b) = (2, 4), (4, 2)$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$(2) \quad \triangle ABC \text{ の重心を } G \text{ とすると } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

α に関して, P と対称な点を P' とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} &= \frac{2\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OA}}{3} = \frac{7\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c}}{9} \\ &= \frac{15}{9} \cdot \frac{7\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c}}{15} \end{aligned}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OX} = \frac{7\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c}}{15}$$

4 (1) P_n の x 座標を α_n とすると、条件から

$$\alpha_{n+1} = \frac{3}{2}\alpha_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \alpha_{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$n \geq 2$ のとき, $\alpha_1 = 1$ より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \alpha_{k+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^k \alpha_k \right\} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n - \frac{2}{3} \alpha_1 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \alpha_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3^n - 1}{2^n} \end{aligned}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから $\alpha_n = \frac{3^n - 1}{2^n} \quad \dots (*)$

よって P_2 の x 座標は $\alpha_2 = \frac{3^2 - 1}{2^2} = 2$

P_4 の x 座標は $\alpha_4 = \frac{3^4 - 1}{2^4} = 5$

別解 順次, 漸化式に $n = 1, 2, 3$ を代入すると

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{3}{2}\alpha_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = 2, \\ \alpha_3 &= \frac{3}{2}\alpha_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}, \\ \alpha_4 &= \frac{3}{2}\alpha_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{13}{4} + \frac{1}{8} = 5 \end{aligned}$$

(2) (*) より $\alpha_n = \frac{3^n - 1}{2^n}$

(3) 直線 P_nQ_{n+1} は点 $P_n(\alpha_n, 0)$ を通り、傾き $\sqrt{3}$ の直線であるから

$$y = \sqrt{3}(x - \alpha_n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

直線 OQ_1 の偏角が $\frac{\pi}{3}$ であるから、 l の偏角は $\frac{\pi}{6}$

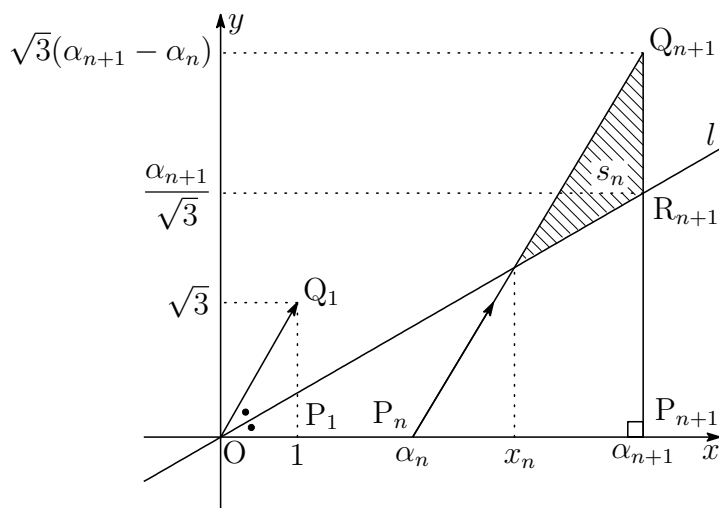
直線 l の方程式は $y = x \tan \frac{\pi}{6}$ すなわち $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ $\cdots \textcircled{2}$

直線 P_nQ_{n+1} と直線 l の交点の x 座標を x_n とすると

$$\sqrt{3}(x_n - \alpha_n) = \frac{x_n}{\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに} \quad x_n = \frac{3}{2}\alpha_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

よって、直線 P_nQ_{n+1} と直線 l の交点は

$$\left(\frac{3}{2}\alpha_n, \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_n \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{3^{n+1} - 3}{2^{n+1}}, \frac{\sqrt{3}(3^n - 1)}{2^{n+1}} \right)$$



(4) ①より、点 Q_{n+1} の y 座標は $\sqrt{3}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$

直線 $P_{n+1}Q_{n+1}$ と直線 l の交点を R_{n+1} とおくと、

②より、 R_{n+1} の y 座標は $\frac{\alpha_{n+1}}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2} Q_{n+1} R_{n+1} (\alpha_{n+1} - x_n) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{3}(\alpha_{n+1} - \alpha_n) - \frac{\alpha_{n+1}}{\sqrt{3}} \right\} \left(\alpha_{n+1} - \frac{3}{2}\alpha_n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\alpha_{n+1} - \frac{3}{2}\alpha_n \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4} \right)^n \end{aligned}$$

よって
$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

■

5 (1) $f(x) = \log(x^2 + 1)$ ($x \geq 0$) より

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	+	+
$f''(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	↗	$\log 2$	↖

よって、曲線 C の変曲点は $\mathbf{P(1, \log 2)}$

$$g(x) = f(x) - f'(1)(x - 1) - f(1) \text{ とおくと } g(1) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - f'(1) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 1 = -\frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} \leq 0$$

$g(x)$ は単調減少で、 $g(x) = 0$ を満たす x は $x = 1$ に限る。

方程式 $f(x) - f'(1)(x - 1) - f(1) = 0$ の解が 1 個、すなわち、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ の共有点は $P(1, f(1))$ の 1 つだけである。

(2) (1) の結果から、 $0 \leq x \leq 1$ において、 $g(x) \geq 0$ であるから、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 g(x) dx = \left[xg(x) \right]_0^1 - \int_0^1 xg'(x) dx \\ &= g(1) - \int_0^1 x\{f'(x) - f'(1)\} dx \\ &= 0 - \int_0^1 x \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - 1 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2 + 1} + x - 2 \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^1 = 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

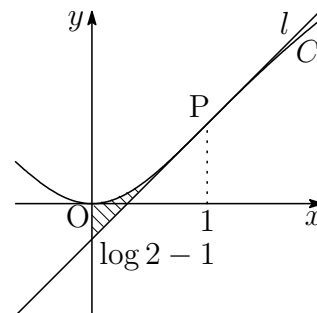
ここで、 $x = \tan \theta$ とおくと $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

よって、求める面積は

$$S = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} = \frac{\pi - 3}{2}$$



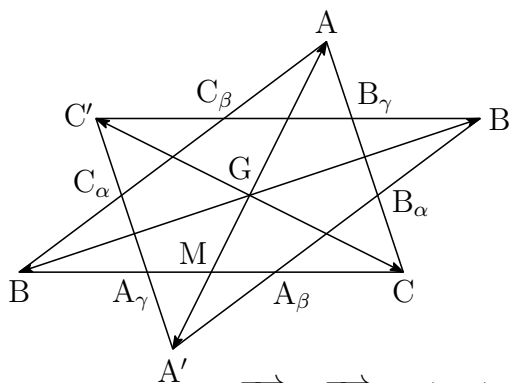
■

- 6 (1) $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{GC} = \vec{c}$ から, 条件により

$$\overrightarrow{GA'} = -\vec{a}, \quad \overrightarrow{GB'} = -\vec{b}, \quad \overrightarrow{GC'} = -\vec{c}$$

したがって $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{GC'} - \overrightarrow{GB'} = -\vec{c} - (-\vec{b}) = -(\vec{c} - \vec{b}) = -\overrightarrow{BC}$

よって $\overrightarrow{B'C'} // \overrightarrow{BC}$



- (2) 辺 BC の中点を M とすると $\overrightarrow{GM} = \frac{\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$
 $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$ であるから

$$\vec{a} = -2 \cdot \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \quad \text{よって} \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

- (3) $B'C'$ と AB および AC との交点をそれぞれ C_β , B_γ とする. C_β , B_γ は $B'C'$ 上の点であるから, 実数 β , γ を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GC_\beta} &= (1 - \beta)\overrightarrow{GB'} + \beta\overrightarrow{GC'} = (1 - \beta)(-\vec{b}) + \beta(-\vec{c}) \\ &= (\beta - 1)\vec{b} + \beta(\vec{a} + \vec{b}) = \beta\vec{a} + (2\beta - 1)\vec{b}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GB_\gamma} &= \gamma\overrightarrow{GB'} + (1 - \gamma)\overrightarrow{GC'} = \gamma(-\vec{b}) + (1 - \gamma)(-\vec{c}) \\ &= \gamma(\vec{c} + \vec{a}) + (\gamma - 1)\vec{c} = \gamma\vec{a} + (2\gamma - 1)\vec{c} \end{aligned}$$

C_β , B_γ はそれぞれ AB , AC 上にあるから, 係数について

$$\beta + (2\beta - 1) = 1, \quad \gamma + (2\gamma - 1) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \gamma = \frac{2}{3}$$

したがって, C_β は辺 AB を $1:2$ に内分し, C_γ は辺 AC を $1:2$ に内分する点である. よって, T' の辺 $B'C'$ は T の辺 AB および AC と交わる.

- (4) A_γ , C_α は, BC , BA をそれぞれ $1:2$ に内分し, B_α , A_β は, CA , CB をそれぞれ $1:2$ に内分する. よって $S - S \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 = \frac{2}{3}S$ ■

7 (1) $g(n) = 6 - n$, $h(n) = 14 - n$ より

$$(h \circ g)(n) = h(6 - n) = 14 - (6 - n) = n + 8,$$

$$(g \circ h)(n) = g(14 - n) = 6 - (14 - n) = n - 8$$

(2) $f(3 + n) = f(3 - n)$ において, $m = 3 + n$ とおくと ($n = m - 3$)

$$f(m) = f(3 - (m - 3)) = f(6 - m)$$

したがって $f(n) = f(6 - n) = (f \circ g)(n)$

$f(7 + n) = f(7 - n)$ において, $m = 7 + n$ とおくと ($n = m - 7$)

$$f(m) = f(7 - (m - 7)) = f(14 - m)$$

したがって $f(n) = f(14 - n) = (f \circ h)(n)$

(3) (2) の結果から $f(6 - n) = f(14 - n)$

上式において, $m = 6 - n$ とおくと ($n = 6 - m$)

$$f(m) = f(14 - (6 - m)) = f(m + 8) \quad (*)$$

2022 = 6 + 8 \cdot 252 であるから $f(2022) = f(6)$

(**) $f(3 + n) = f(3 - n)$ に $n = 3$ を代入すると

$$f(6) = f(0) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

よって $f(2022) = 0$

(4) (*) より $A = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7)\}$

(**) に $n = 1, 2$ に代入すると

$$f(4) = f(2), \quad f(5) = f(1)$$

上の 2 式と \textcircled{1} より

$$A = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(7)\}$$

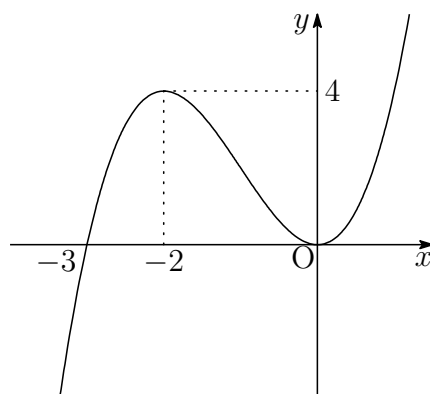
よって, A の要素の個数は 5 個以下である. ■

8 (1) $f(x) = x^3 + 3x^2$ より

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

極大値 $f(-2) = 4$, 極小値 $f(0) = 0$



(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

これが点 (p, q) を通るから¹

$$q = f'(t)(p - t) + f(t) \quad \text{ゆえに} \quad f(t) + f'(t)(p - t) - q = 0$$

$$\varphi(t) = f(t) + f'(t)(p - t) - q \quad \text{とおくと} \quad \varphi(t) = -2t^3 - 3t^2 + 3pt(t + 2) - q$$

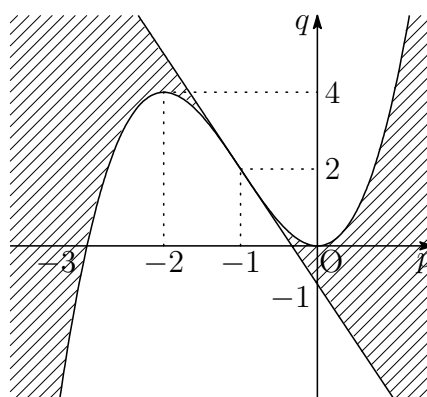
$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + f''(t)(p - t) + f'(t) \cdot (-1) \\ &= f''(t)(p - t) = 6(t + 1)(p - t) \end{aligned}$$

$$\varphi'(t) = 0 \quad \text{を解くと} \quad t = -1, p$$

3次方程式 $\varphi(t) = 0$ の解の個数が点 $A(p, q)$ から曲線 $y = x^3 + 3x^2$ に引ける接線の本数であるから

$$\varphi(-1)\varphi(p) = (-3p - q - 1)(p^3 + 3p^2 - q) < 0$$

よって、求める領域は、下の図の斜線部分で境界線は含まない。



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf (p.12 を参照)

$$\boxed{9} \quad (1) \quad a^3 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$(2) \quad (1) \text{の結果について, } X = a+b \text{ とおくと } a^3 + b^3 = X^3 - 3abX$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= X^3 - 3abX + c^2 - 3abc \\ &= (X+c)(X^2 - cX + c^2) - 3ab(X+c) \\ &= (X+c)\{(X^2 - cX + c^2) - 3ab\} \\ &= \{(a+b) + c\}\{(a+b)^2 - c(a+b) + c^2 - 2ab\} \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

$$(3) \quad 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \text{ であるから}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

$a > 0, b > 0, c > 0$ のとき, $a+b+c > 0$ であるから

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geq 0$$

上式において, 等号が成立するのは

$$a-b=0, b-c=0, c-a=0 \quad \text{すなわち} \quad a=b=c$$

のときである. よって

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

が成立し, 等号が成立するのは, $a=b=c=0$ のときである. ■

10 (1) (*) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ より

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

これが $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ と一致するから、係数を比較して

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

α, β ($\alpha < \beta$) を解とする 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ を解いて

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(2) $\alpha + \beta = 1$ より $b_1 = a_2 - \alpha a_1 = 1 - \alpha = \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ を (*) に適用すると

$$b_{n+1} = \beta b_n \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \beta^{n-1} b_1 = \beta^n$$

したがって $a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^n \quad \dots \textcircled{1}$

上式の α と β を交換すると $a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ から a_{n+1} を消去すると

$$a_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

