令和４年度　山口大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医 (医)・農・教育・経済・国際総合科・共同獣医
令和４年２月25日

- 理 (理数科以外)・工・教育理系　1 2 3 4　数 I・II・III・A・B (120 分)
- 理 (理数科)・医 (医) 学部　4 5 6 7　数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文系　3 8 9 10　数 I・II・II・A・B (120 分)

1 関数 $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} - e$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の導関数および不定積分を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(x)|$ を求め，$y = |f(x)|$ のグラフの概形をかきなさい．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-4}^{4} |f(x)|\,dx$ の値を求めなさい．

2 次の問いに答えなさい．

(1) $x > 0$ のとき，関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の最大値を求めなさい．ただし，対数は自然対数とする．

(2) 正の整数の組 $(a,\ b)$ で，$a^b = b^a$ かつ $a \neq b$ を満たすものをすべて求めなさい．

3 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC において $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えなさい．

(1) 線分 OA を $1:2$ に内分する点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ を用いて表しなさい．

(2) 3 点 A，B，C で定まる平面 α に対して点 O と対称な位置にある点を O$'$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いて表しなさい．ただし，2 点 O，O$'$ が平面 α に関して対称であるとは，直線 OO$'$ が α と垂直であり，線分 OO$'$ の中点が α 上にあるときをいう．

(3) 点 X が △ABC 上を動く．OX + XP の値が最小となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いて表しなさい．

4 xy 平面上の原点を O とし，2 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}_1(1,\ \sqrt{3})$ をとる．自然数 n に対して，x 座標が OP_n の長さを $\dfrac{3}{2}$ 倍して $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ を加えた値となる x 軸上の点を P_{n+1} とおく．P_n を通り直線 OQ_1 と平行な直線と，P_{n+1} を通り x 軸に垂直な直線との交点を Q_{n+1} とする．$\triangle \mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ を T_n とおく．次の問いに答えなさい．

(1) P_2 および P_4 の x 座標の値を求めなさい．

(2) P_n の x 座標の値を α_n とするとき，α_n を n を用いて表しなさい．

(3) $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OQ}_1$ の二等分線を l とする．自然数 n に対して，T_n の辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ と l の交点の座標を求めなさい．

(4) 自然数 n に対して，T_n から l によって切り取られる三角形の面積を s_n としたとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ の和を求めなさい．

5 曲線 $y = f(x) = \log(x^2+1)\ (x \geqq 0)$ を C とし，C 上の点 $\mathrm{P}(1,\ f(1))$ における接線を l とする．ただし，対数は自然対数とする．

(1) C の変曲点を求め，C と l の共有点は P のみであることを示しなさい．

(2) C と l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい．

6 平面上の 3 点 A，B，C を頂点とする三角形を T とし，T の重心を G とする．G に関して，3 点 A，B，C と対称な点をそれぞれ A′，B′，C′ とし，A′，B′，C′ を頂点とする三角形を T' とする．$\overrightarrow{\mathrm{GA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えなさい．

(1) T の辺 BC と T' の辺 B′C′ は平行であることを示しなさい．

(2) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ であることを示しなさい．

(3) T' の辺 B′C′ は T の辺 AB および AC と交わることを示しなさい．

(4) T と T' の共通部分の面積を，T の面積 S を用いて表しなさい．

7 整数全体を定義域とし，整数を値にとる関数 $f(n)$ が，次の条件 1，2 を満たしているとする．

条件 1 $f(0)=0$

条件 2 任意の整数 n に対し，$f(3+n)=f(3-n)$ かつ $f(7+n)=f(7-n)$ が成り立つ

整数全体を定義域とする関数 $g(n)$，$h(n)$ をそれぞれ，$g(n)=6-n$，$h(n)=14-n$ とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) 合成関数 $(h \circ g)(n)$ と $(g \circ h)(n)$ を求めなさい．

(2) 任意の整数 n に対し，2 つの等式 $(f \circ g)(n)=f(n)$ と $(f \circ h)(n)=f(n)$ が成り立つことを示しなさい．

(3) $f(2022)=0$ であることを示しなさい．

(4) 集合 A を，関数 $f(n)$ のとりうる値全体の集合，すなわち，$A=\{f(n)\,|\,n$ は整数$\}$ とする．このとき，集合 A の要素の個数は 5 以下であることを示しなさい．

8 関数 $f(x)=x^3+3x^2$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかきなさい．

(2) 点 $(p,\ q)$ から曲線 $y=f(x)$ に異なる接線が 3 本引けるとき，p と q についての条件を求め，その条件を満たす点 $(p,\ q)$ 全体の領域を pq 平面に図示しなさい．

9 次の問いに答えなさい．

(1) 等式 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を証明しなさい．

(2) $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解しなさい．

(3) $a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき，不等式 $a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc$ を証明しなさい．さらに，等号が成り立つのは $a=b=c$ のときであることを証明しなさい．

10 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 1,\quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えなさい.

(1) 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と変形したとき，定数 α と β の値を求めなさい．ただし，$\alpha < \beta$ とする.

(2) $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく．数列 $\{b_n\}$ の初項 b_1 と一般項 b_n を求めなさい.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい.

解答例

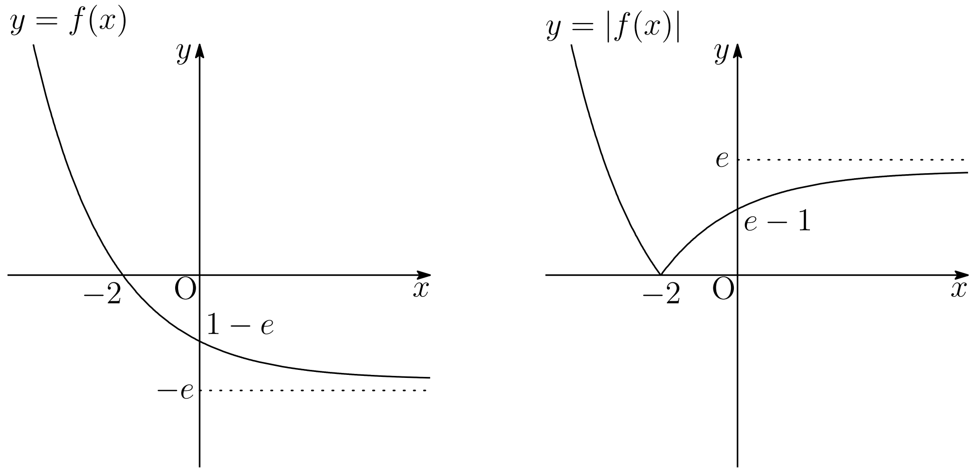
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} - e$ より

$$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, \quad \int f(x)\,dx = -2e^{-\frac{x}{2}} - ex + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\,\textbf{は積分定数)}$$

(2) (1) の結果から，$f(x)$ は単調減少．$f(-2) = 0$．

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -e$ より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \boldsymbol{e}$

したがって，左下の $y = f(x)$ のグラフの概形から，右下の $y = |f(x)|$ のグラフのグラフの概形を得る．



(3) (1) の結果から，$F(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} - ex$ とおくと

$$F(-4) = -2e^2 + 4e, \quad F(-2) = 0, \quad F(4) = -2e^{-2} - 4e$$

(2) の $y = |f(x)|$ のグラフにより

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{4} |f(x)|\,dx &= \int_{-4}^{-2} f(x)\,dx - \int_{-2}^{4} f(x)\,dx \\
&= \Big[\,F(x)\,\Big]_{-4}^{-2} - \Big[\,F(x)\,\Big]_{-2}^{4} \\
&= 2F(-2) - F(-4) - F(4) \\
&= 2\cdot 0 - (-2e^2 + 4e) - (-2e^{-2} - 4e) \\
&= \boldsymbol{2(e^2 + e^{-2})}
\end{aligned}$$

■

2 (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ より　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表より　最大値 $f(e)=\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$

(2) $a^b=b^a$ の両辺の自然対数をとると　$b\log a=a\log b$

$$\frac{\log a}{a}=\frac{\log b}{b}\quad ゆえに\quad f(a)=f(b) \qquad (*)$$

(3) $f(1)=0$．$e<x$ のとき $f(x)>0$．

増減表から，$(*)$ を満たす a，b の一方は 2 であるから，$a=2$ とすると

$$\frac{\log 2}{2}=\frac{\log b}{b}\quad ゆえに\quad 2^b=b^2$$

$b=4$ はこれを満たす．よって，求める $(a,\ b)$ の組は

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(2,\ 4),\ (4,\ 2)}$$

■

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{a}}$

(2) $\triangle$ABC の重心を G とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$

α に関して，P と対称な点を P$'$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3}=\frac{7\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}}{9}$$
$$=\frac{15}{9}\cdot\frac{7\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}}{15}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{7\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}}{15}}$

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) P_n の x 座標を α_n とすると，条件から

$$\alpha_{n+1} = \frac{3}{2}\alpha_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ゆえに \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\alpha_{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$n \geqq 2$ のとき，$\alpha_1 = 1$ より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\alpha_{k+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^k \alpha_k\right\} &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k \\
\left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n - \frac{2}{3}\alpha_1 &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
\alpha_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3^n - 1}{2^n}
\end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから $\quad \alpha_n = \dfrac{3^n - 1}{2^n} \quad \cdots(*)$

よって $\quad \mathrm{P}_2$ の x 座標は $\quad \alpha_2 = \dfrac{3^2 - 1}{2^2} = \mathbf{2}$

P_4 の x 座標は $\quad \alpha_4 = \dfrac{3^4 - 1}{2^4} = \mathbf{5}$

別解 順次，漸化式に $n = 1,\ 2,\ 3$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{3}{2}\alpha_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2} = \mathbf{2}, \\
\alpha_3 &= \frac{3}{2}\alpha_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}, \\
\alpha_4 &= \frac{3}{2}\alpha_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{13}{4} + \frac{1}{8} = \mathbf{5}
\end{aligned}$$

(2) $(*)$ より $\quad \boldsymbol{\alpha_n = \dfrac{3^n - 1}{2^n}}$

(3) 直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ は点 $\mathrm{P}_n(\alpha_n,\ 0)$ を通り，傾き $\sqrt{3}$ の直線であるから

$$y=\sqrt{3}(x-\alpha_n) \quad \cdots ①$$

直線 OQ_1 の偏角が $\dfrac{\pi}{3}$ であるから，l の偏角は $\dfrac{\pi}{6}$

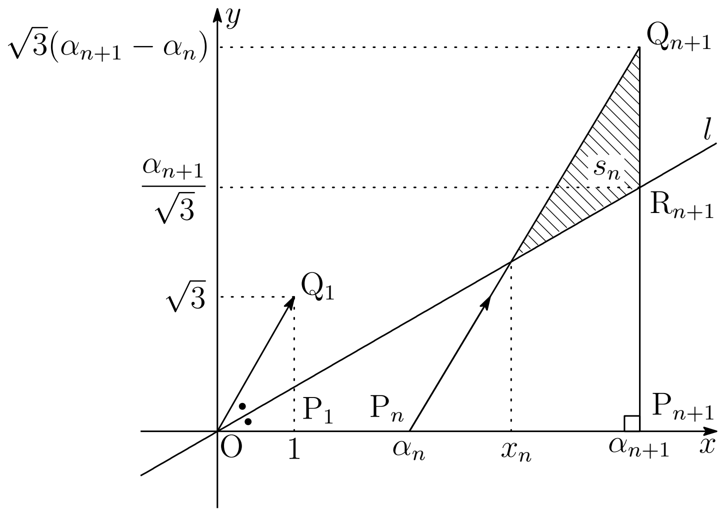
直線 l の方程式は　$y=x\tan\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$　$\cdots ②$

直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ と直線 l の交点の x 座標を x_n とすると

$$\sqrt{3}(x_n-\alpha_n)=\frac{x_n}{\sqrt{3}} \quad ゆえに \quad x_n=\frac{3}{2}\alpha_n \quad \cdots ③$$

よって，直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ と直線 l の交点は

$$\left(\frac{3}{2}\alpha_n,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_n\right) \quad すなわち \quad \left(\boldsymbol{\frac{3^{n+1}-3}{2^{n+1}},\ \frac{\sqrt{3}(3^n-1)}{2^{n+1}}}\right)$$



(4) ① より，点 Q_{n+1} の y 座標は　$\sqrt{3}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$

直線 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$ と直線 l の交点を R_{n+1} とおくと，

② より，R_{n+1} の y 座標は　$\dfrac{\alpha_{n+1}}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}(\alpha_{n+1}-x_n)\\
&= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{3}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)-\frac{\alpha_{n+1}}{\sqrt{3}}\right\}\left(\alpha_{n+1}-\frac{3}{2}\alpha_n\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\alpha_{n+1}-\frac{3}{2}\alpha_n\right)^2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$ ■

5 (1) $f(x)=\log(x^2+1)\ (x \geqq 0)$ より

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1},$$
$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	⤴	$\log 2$	⤵

よって，曲線 C の変曲点は　$\mathbf{P(1,\ \log 2)}$

$g(x)=f(x)-f'(1)(x-1)-f(1)$ とおくと　$g(1)=0$

$$g'(x)=f'(x)-f'(1)=\frac{2x}{x^2+1}-1=-\frac{(x-1)^2}{x^2+1} \leqq 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(x)=0$ を満たす x は $x=1$ に限る．

方程式 $f(x)-f'(1)(x-1)-f(1)=0$ の解が 1 個，すなわち，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ の共有点は $\mathrm{P}(1,\ f(1))$ の 1 つだけである．

(2) (1) の結果から，$0 \leqq x \leqq 1$ において，$g(x) \geqq 0$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 g(x)\,dx = \Big[\,xg(x)\,\Big]_0^1 - \int_0^1 xg'(x)\,dx \\
&= g(1) - \int_0^1 x\{f'(x)-f'(1)\}\,dx \\
&= 0 - \int_0^1 x\left(\frac{2x}{x^2+1}-1\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2+1}+x-2\right)dx \\
&= 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \left[\,\frac{x^2}{2}-2x\,\right]_0^1 = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

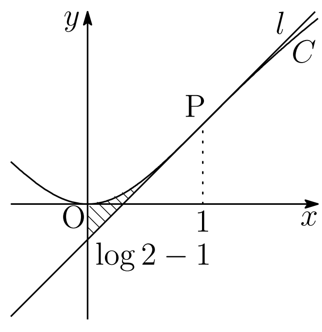
ここで，$x=\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

よって，求める面積は

$$S = 2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi-3}{2}}$$



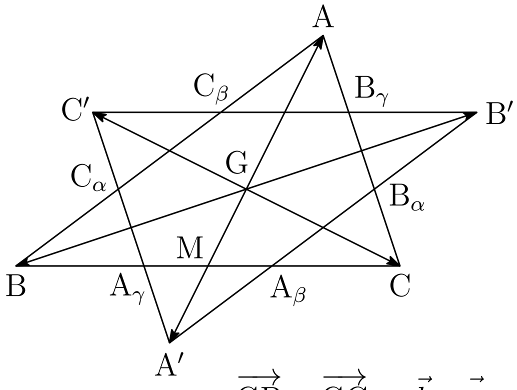
■

$\boxed{6}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{c}$ から，条件により

$$\overrightarrow{\mathrm{GA'}}=-\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{GB'}}=-\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{GC'}}=-\vec{c}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}=\overrightarrow{\mathrm{GC'}}-\overrightarrow{\mathrm{GB'}}=-\vec{c}-(-\vec{b})=-(\vec{c}-\vec{b})=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{BC}}$



(2) 辺 BC の中点を M とすると　$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}}{2}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{GA}}=-2\overrightarrow{\mathrm{GM}}$ であるから

$$\vec{a}=-2\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\quad \text{よって}\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

(3) $\mathrm{B'C'}$ と AB および AC との交点をそれぞれ C_β，B_γ とする．C_β，B_γ は $\mathrm{B'C'}$ 上の点であるから，実数 β，γ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GC}_\beta}&=(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{GB'}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{GC'}}=(1-\beta)(-\vec{b})+\beta(-\vec{c})\\&=(\beta-1)\vec{b}+\beta(\vec{a}+\vec{b})=\beta\vec{a}+(2\beta-1)\vec{b},\\ \overrightarrow{\mathrm{GB}_\gamma}&=\gamma\overrightarrow{\mathrm{GB'}}+(1-\gamma)\overrightarrow{\mathrm{GC'}}=\gamma(-\vec{b})+(1-\gamma)(-\vec{c})\\&=\gamma(\vec{c}+\vec{a})+(\gamma-1)\vec{c}=\gamma\vec{a}+(2\gamma-1)\vec{c}\end{aligned}$$

C_β，B_γ はそれぞれ AB，AC 上にあるから，係数について

$$\beta+(2\beta-1)=1,\quad \gamma+(2\gamma-1)=1\quad \text{ゆえに}\quad \beta=\gamma=\frac{2}{3}$$

したがって，C_β は辺 AB を $1:2$ に内分し，C_γ は辺 AC を $1:2$ に内分する点である．よって，T' の辺 $\mathrm{B'C'}$ は T の辺 AB および AC と交わる．

(4) A_γ，C_α は，BC，BA をそれぞれ $1:2$ に内分し，B_α，A_β は，CA，CB をそれぞれ $1:2$ に内分する．よって　$S-S\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times 3=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}S}$ ■

$\boxed{7}$ (1) $g(n)=6-n$，$h(n)=14-n$ より

$$(h\circ g)(n)=h(6-n)=14-(6-n)=\boldsymbol{n+8},$$
$$(g\circ h)(n)=g(14-n)=6-(14-n)=\boldsymbol{n-8}$$

(2) $f(3+n)=f(3-n)$ において，$m=3+n$ とおくと $(n=m-3)$

$$f(m)=f(3-(m-3))=f(6-m)$$

したがって　$f(n)=f(6-n)=(f\circ g)(n)$

$f(7+n)=f(7-n)$ において，$m=7+n$ とおくと $(n=m-7)$

$$f(m)=f(7-(m-7))=f(14-m)$$

したがって　$f(n)=f(14-n)=(f\circ h)(n)$

(3) (2) の結果から　$f(6-n)=f(14-n)$
上式において，$m=6-n$ とおくと $(n=6-m)$

$$f(m)=f(14-(6-m))=f(m+8) \qquad (*)$$

$2022=6+8\cdot252$ であるから　$f(2022)=f(6)$

$(**)$　$f(3+n)=f(3-n)$ に $n=3$ を代入すると

$$f(6)=f(0)=0 \quad \cdots ①$$

よって　$f(2022)=0$

(4) $(*)$ より　$A=\{f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5),\ f(6),\ f(7)\}$

$(**)$ に $n=1,\ 2$ に代入すると

$$f(4)=f(2),\quad f(5)=f(1)$$

上の 2 式と ① より

$$A=\{f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(7)\}$$

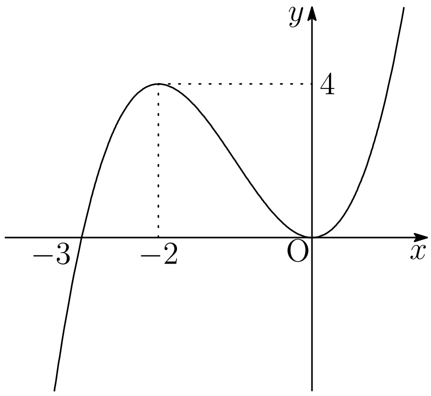
よって，A の要素の個数は 5 個以下である． ■

8 (1) $f(x) = x^3 + 3x^2$ より

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

極大値 $f(-2) = 4$，極小値 $f(0) = 0$



(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

これが点 $(p,\ q)$ を通るから [1]

$$q = f'(t)(p - t) + f(t) \quad \text{ゆえに} \quad f(t) + f'(t)(p - t) - q = 0$$

$\varphi(t) = f(t) + f'(t)(p - t) - q$ とおくと　$\varphi(t) = -2t^3 - 3t^2 + 3pt(t+2) - q$

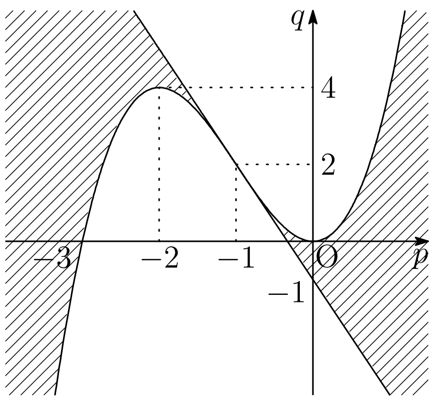
$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + f''(t)(p - t) + f'(t)\cdot(-1) \\ &= f''(t)(p - t) = 6(t+1)(p - t) \end{aligned}$$

$\varphi'(t) = 0$ を解くと　$t = -1,\ p$

3 次方程式 $\varphi(t) = 0$ の解の個数が点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から曲線 $y = x^3 + 3x^2$ に引ける接線の本数であるから

$$\varphi(-1)\varphi(p) = (-3p - q - 1)(p^3 + 3p^2 - q) < 0$$

よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線は含まない．



■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf (p.12 を参照)

9 (1) $a^3+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2$
$=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(2) (1) の結果について，$X=a+b$ とおくと　$a^3+b^3=X^3-3abX$

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc &= X^3-3abX+c^3-3abc\\ &= (X+c)(X^2-cX+c^2)-3ab(X+c)\\ &= (X+c)\{(X^2-cX+c^2)-3ab\}\\ &= \{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-c(a+b)+c^2-3ab\}\\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

(3) $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ であるから

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき，$a+b+c>0$ であるから

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0$$

上式において，等号が成立するのは

$$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0 \quad すなわち \quad a=b=c$$

のときである．よって

$$a^3+b^3+c^3-3abc\geqq 0 \quad ゆえに \quad a^3+b^3+c^3\geqq 3abc$$

が成立し，等号が成立するのは，$a=b=c$ のときである．■

10 (1) $(*)$ $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ より

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$$

これが $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$ と一致するから，係数を比較して

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-1$$

$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ を解とする 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ を解いて

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2) $\alpha+\beta=1$ より　$b_1=a_2-\alpha a_1=1-\alpha=\beta=\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ を $(*)$ に適用すると

$$b_{n+1}=\beta b_n\quad \text{ゆえに}\quad b_n=\beta^{n-1}b_1=\beta^n=\boldsymbol{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

(3) したがって　$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^n$　$\cdots$①

上式の α と β を交換すると　$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^n$　$\cdots$②

①，② から a_{n+1} を消去すると

$$a_n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

■