令和４年度　鳥取大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和４年２月25日

- 医 (生命・保健)，工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医 (医学) 学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 地域 (地域人間)，農 (生命環境) 学部　$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 数 I・II・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ n は自然数とする．$a_1 = 1,\ b_1 = 3,\ a_{n+1} = 5a_n + b_n,\ b_{n+1} = a_n + 5b_n$ によって定められている数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) $a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3$ を求めよ．

(2) $a_n + b_n,\ a_n - b_n$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(3) $a_n,\ b_n$ の一般項をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ i を虚数単位とし，k を実数とする．$\alpha = -1 + i$ であり，点 z は複素数平面上で原点を中心とする単位円上を動く．以下の問いに答えよ．

(1) $w_1 = \dfrac{\alpha + z}{i}$ とする．w_1 が描く図形を図示せよ．

(2) w_2 は等式 $w_2\overline{\alpha} - \overline{w_2}\alpha + ki = 0$ を満たす．w_2 の軌跡が，(1) で求めた w_1 の軌跡と共有点を持つ場合の k の最大値を求めよ．ただし，$\overline{\alpha}$, $\overline{w_2}$ はそれぞれ α, w_2 の共役複素数である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 曲線 $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ をとる．ただし，$0 < a < b$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $a < t < b$ を満たす実数 t に対して点 $\mathrm{T}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ をとり，三角形 ATB の面積を $f(t)$ で表す．関数 $f(t)\ (a < t < b)$ の最大値を M とするとき，$f(t) = M$ を満たす t を a, b を用いて表せ．

(2) $a = 1,\ b = 2$ のとき，(1) で求めた $f(t)$ の最大値 M を求めよ．

4 xy 平面上の曲線

$$C : x = f(t),\ y = g(t) \ \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える．ただし，$f(t)$, $g(t)$ は

$$\begin{cases} f(t) = 2\sin t + \cos 2t - 1 \\ g(t) = 1 - \cos 2t \end{cases}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(t)$ の最大値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ において，$y = 1$ のときの接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C と y 軸で囲まれる領域の面積 S を求めよ．

5 各項が正整数である数列 $\{a_n\}$ が，条件

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての正の整数 n に対し，$a_n \geqq n$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right)^2 < 2$ であることを示せ．

6 正四面体 ABCD において，辺 AB の中点を E，辺 AC を 3 : 1 に内分する点を F，辺 AD を 1 : 3 に内分する点を G とする．以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 AEF の面積と三角形 AFG の面積の比を求めよ．

(2) 三角形 AEF の面積と三角形 EFG の面積の比を求めよ．

7 座標空間に 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 1)，B(2, 2, 1)，C(1, 3, −3) がある．以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(2) 原点 O から 3 点 A，B，C を通る平面に下ろした垂線を OD とする．点 D の座標を求めよ．

(3) (2) で求めた点 D について，線分 OD の長さを求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積を求めよ．

8 直線 $y=x$ と曲線 $y=x|x-1|$ によって囲まれる図形の面積を求めよ．

9 正しく作られたさいころがある．さいころをふって 6 の目が出たらもう 1 回ふることとする．以下の問いに答えよ．

(1) さいころをちょうど 2 回ふる確率を求めよ．

(2) さいころをちょうど k 回ふる確率を求めよ．ただし，k は自然数とする．

(3) さいころをふる回数が n 以下となる確率を求めよ．ただし，n は自然数とする．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 与えらた漸化式および $a_1=1,\ b_1=3$ より

$$\begin{aligned} a_2 &= 5a_1+b_1=5\cdot1+3=\mathbf{8}, \\ b_2 &= a_1+5b_1=1+5\cdot3=\mathbf{16}, \\ a_3 &= 5a_2+b_2=5\cdot8+16=\mathbf{56}, \\ b_3 &= a_2+5b_2=8+5\cdot16=\mathbf{88} \end{aligned}$$

(2) $a_{n+1}=5a_n+b_n,\ b_{n+1}=a_n+5b_n$ より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=6(a_n+b_n), \quad a_{n+1}-b_{n+1}=4(a_n-b_n)$$

$\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=4$，公比 6 の等比数列，$\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=-2$，公比 4 の等比数列であるから

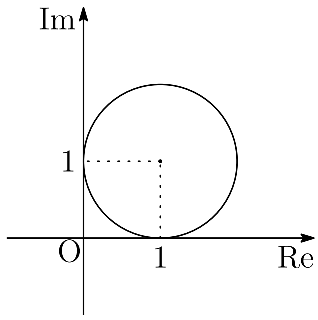
$$\boldsymbol{a_n+b_n=4\cdot6^{n-1}}, \quad \boldsymbol{a_n-b_n=-2\cdot4^{n-1}}$$

(3) (2) の結果の辺々の和および差をとると

$$2a_n=4\cdot6^{n-1}-2\cdot4^{n-1}, \quad 2b_n=4\cdot6^{n-1}+2\cdot4^{n-1}$$

よって　$\boldsymbol{a_n=2\cdot6^{n-1}-4^{n-1}}, \quad \boldsymbol{b_n=2\cdot6^{n-1}+4^{n-1}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $w_1 = \dfrac{\alpha + z}{i}$ より　$z = iw_1 - \alpha$



これを $|z| = 1$ に代入すると　$|iw_1 - \alpha| = 1$

$$|i|\left|w_1 - \frac{\alpha}{i}\right| = 1$$

$\dfrac{\alpha}{i} = \dfrac{-1+i}{i} = 1 + i$ より　$|w_1 - (1+i)| = 1$

よって，w_1 は点 $1+i$ を中心とする半径 1 の円である (上図).

(2) $w_2 = x + yi$ とおいて ($x,\ y$ は実数)，$w_2\overline{\alpha} - \overline{w_2}\alpha + ki = 0$ に代入すると

$$(x+yi)(-1-i) - (x-yi)(-1+i) + ki = 0$$

整理すると　$(-2x - 2y + k)i = 0$　ゆえに　$2x + 2y - k = 0$　$\cdots$①

(1) で求めた w_1 について，同様に，$w_1 = x + yi$ とおくと

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \cdots ②$$

直線 ① が円 ② と共有点をもつ k の値の範囲を求めればよいから

$$\frac{|2\cdot1 + 2\cdot1 - k|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad |k - 4| \leqq 2\sqrt{2}$$

これを解いて　$4 - 2\sqrt{2} \leqq k \leqq 4 + 2\sqrt{2}$

よって，求める k の最大値は　$\mathbf{4 + 2\sqrt{2}}$ ■

$\boxed{3}$ (1) 直線 AB の傾きは $\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}{b-a}=-\dfrac{1}{ab}$

$y=\dfrac{1}{x}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

$f(t)$ を最大にする点 $\mathrm{T}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ について

$$-\frac{1}{t^2}=-\frac{1}{ab}\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{t=\sqrt{ab}}$$

(2) 直線 AB の方程式は

$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{ab}(x-a)\quad \text{整理すると}\quad x+aby-a-b=0$$

(1) で求めた曲線上の点 $\left(\sqrt{ab},\ \dfrac{1}{\sqrt{ab}}\right)$ と直線 AB の距離を d とすると，

相加平均・相乗平均の大小関係 $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ に注意して

$$d=\frac{\left|\sqrt{ab}+ab\cdot\dfrac{1}{\sqrt{ab}}-a-b\right|}{\sqrt{1+a^2b^2}}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{1+a^2b^2}}$$

また　$\mathrm{AB}=\sqrt{(b-a)^2+\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)^2}=\dfrac{b-a}{ab}\sqrt{1+a^2b^2}$

したがって　$M=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d=\dfrac{(b-a)(a+b-2\sqrt{ab})}{2ab}$

$a=1,\ b=2$ であるから　$\boldsymbol{M=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $f(t)=2\sin t+\cos 2t-1$ より $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}f(t)&=2\sin t+(1-2\sin^2 t)-1=-2\sin^2 t+2\sin t\\&=-2\left(\sin t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

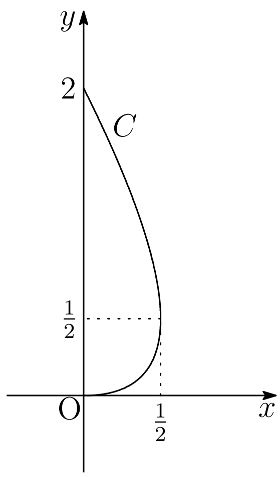
よって，$\sin t=\dfrac{1}{2}$，すなわち，$t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}}$ をとる．

(2) $g(t)=1-\cos 2t$ より　$g(t)=1-(1-2\sin^2 t)=2\sin^2 t$

$s=\sin t$ とおくと $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$C: x=-2s^2+2s,\quad y=2s^2\quad(0\leqq s\leqq 1)$$

$2s^2=1$ とすると　$s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



$$x=-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2}$$

$\dfrac{dx}{ds}=-4s+2$，$\dfrac{dy}{ds}=4s$ より

$$\frac{dx}{ds}=-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2=-2\sqrt{2}+2$$
$$\frac{dy}{ds}=4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\Big/\frac{dx}{ds}=\frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}+2}=-2-\sqrt{2}$$

求める接線は，点 $(-1+\sqrt{2},\ 1)$ を通り，傾き $-2-\sqrt{2}$ の直線であるから

$$y-1=(-2-\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$$

よって　$\boldsymbol{y=-(2+\sqrt{2})x+\sqrt{2}+1}$

(3) (2) で求めた $\dfrac{dx}{ds}$，$\dfrac{dy}{ds}$ より

s	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{ds}$		$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{ds}$		$+$	$+$	$+$	
$\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds}\right)$		$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$(0,\ 2)$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^2 x\,dy=\int_0^1(-2s^2+2s)\cdot 4s\,ds$$
$$=\int_0^1(-8s^3+8s^2)\,ds=\left[-2s^4+\frac{8}{3}s^3\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $(*)$ $a_n \geqq n$

［1］ $n=1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］ $n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると　$a_k \geqq k$

$$a_{k+1} \geqq a_k + 1 \geqq k+1$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}\right)^2$ とおくと，$(*)$ から，$n \geqq 3$ とすると

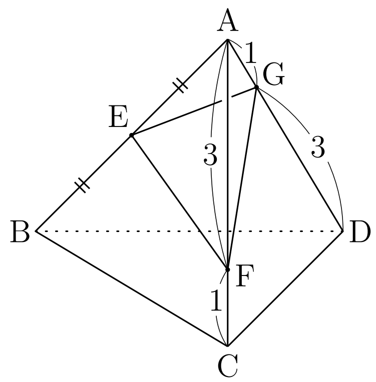
$$\begin{aligned} S_n &\leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^2} \\ &\leqq \frac{5}{4} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = \frac{5}{4} + \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{7}{4} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n \leqq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{4} - \frac{1}{n}\right) = \frac{7}{4} < 2$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2 < 2$ ■

$\boxed{6}$ (1) $\triangle\mathrm{AEF} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AF}\sin\dfrac{\pi}{3}$,

$\triangle\mathrm{AFG} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AG}\sin\dfrac{\pi}{3}$ より



$$\begin{aligned}&\triangle\mathrm{AEF} : \triangle\mathrm{AFG}\\ =&\frac{1}{2}\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AF}\sin\frac{\pi}{3} : \frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AG}\sin\frac{\pi}{3}\\ =&\mathrm{AE} : \mathrm{AG} = \mathbf{2 : 1}\end{aligned}$$

(2) 正四面体の一辺の長さを a とする．$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = a, \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{d} = \vec{d}\cdot\vec{b} = a^2\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \dfrac{3}{4}\vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{EG}} = \dfrac{1}{4}\vec{d} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|^2 &= \left|\frac{3}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\right|^2 = \frac{9}{16}|\vec{c}|^2 - \frac{3}{4}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2\\ &= \frac{9}{16}a^2 - \frac{3}{8}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{7}{16}a^2,\\ |\overrightarrow{\mathrm{EG}}|^2 &= \left|\frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b}\right|^2 = \frac{1}{16}|\vec{d}|^2 - \frac{1}{4}\vec{d}\cdot\vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2\\ &= \frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{16}a^2,\\ \overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}} &= \left(\frac{3}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\\ &= \frac{3}{16}\vec{c}\cdot\vec{d} - \frac{3}{8}\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{d} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2\\ &= \frac{3}{32}a^2 - \frac{3}{16}a^2 - \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{32}a^2\end{aligned}$$

よって　$\triangle\mathrm{EFG} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{EG}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}})^2}$

$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{7}{16}\cdot\frac{3}{16} - \left(\frac{3}{32}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{64}a^2$$

また　$\triangle\mathrm{AEF} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AF}\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{3}{4}a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{32}a^2$

したがって　$\triangle\mathrm{AEF} : \triangle\mathrm{EFG} = \dfrac{3\sqrt{3}}{32}a^2 : \dfrac{5\sqrt{3}}{64}a^2 = \mathbf{6 : 5}$ ■

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 2, -4)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=20,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2$$

したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 20-2^2}=\mathbf{3}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=\frac{1}{3}(-2,\ 2,\ 1)$$

とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{n}=\dfrac{1}{3}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{n})\vec{n}=\frac{1}{3}\vec{n}=\frac{1}{9}(-2,\ 2,\ 1) \qquad (*)$$

よって　$\mathbf{D}\left(-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}},\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\right)$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{n})\vec{n}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{n})\vec{n}=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{n})\vec{n}$

(3) $(*)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\dfrac{1}{3}|\vec{n}|=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

(4) (1)，(3) の結果から，求める四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{3}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

■

$\boxed{8}$ $y = x|x-1|$ と $y = x$ の 2 式から y を消去すると

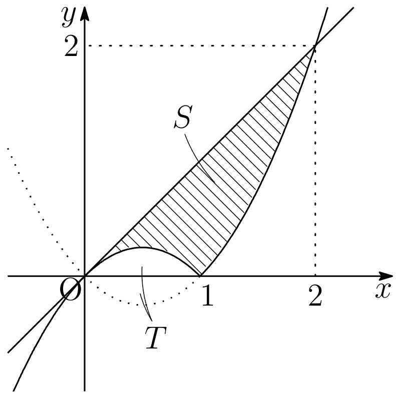
$$x|x-1| = x \quad \text{ゆえに} \quad x(|x-1|-1) = 0$$

これを解いて　　$x = 0,\ 2$

求める面積 S は，下の図の斜線部分である．

$$S + 2T = \frac{1}{6}(2-0)^3, \quad T = \frac{1}{6}(1-0)^3$$

よって　$S = \frac{4}{3} - 2\cdot\frac{1}{6} = \mathbf{1}$



■

9 (1) 1回目に6の目が出て，2回目に6以外の目が出る確率であるから

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{5}{36}}$$

(2) $k \geqq 2$ のとき，1回目から $k-1$ 回目まで6の目が出て，k 回目で6以外の目が出る確率であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6^k} \qquad (*)$$

$k=1$ のとき，1回ふる確率は $\dfrac{5}{6}$ であるから，$(*)$ は $k=1$ のときも成立する．よって，求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{5}{6^k}}$$

(3) (2) の結果から，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{6^k}=\frac{5}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\frac{1}{6}}=\boldsymbol{1-\frac{1}{6^n}}$$

別解 $n+1$ 回以上ふる確率は，n 回連続して6の目が出る確率であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{6^n}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{1}{6^n}$$

■