

令和4年度 鳥取大学2次試験前期日程 (数学問題)

令和4年2月25日

- 医 (生命・保健), 工学部 ① ② ③ ④ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医 (医学) 学部 ② ③ ④ ⑤ 数I・II・III・A・B (120分)
- 地域 (地域人間), 農 (生命環境) 学部 ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ 数I・II・A・B (120分)

① n は自然数とする. $a_1 = 1, b_1 = 3, a_{n+1} = 5a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + 5b_n$ によって定められている数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある. 以下の問いに答えよ.

- (1) a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ.
- (2) $a_n + b_n, a_n - b_n$ の一般項をそれぞれ求めよ.
- (3) a_n, b_n の一般項をそれぞれ求めよ.

② i を虚数単位とし, k を実数とする. $\alpha = -1 + i$ であり, 点 z は複素数平面上で原点を中心とする単位円上を動く. 以下の問いに答えよ.

- (1) $w_1 = \frac{\alpha + z}{i}$ とする. w_1 が描く図形を図示せよ.
- (2) w_2 は等式 $w_2\bar{\alpha} - \overline{w_2}\alpha + ki = 0$ を満たす. w_2 の軌跡が, (1) で求めた w_1 の軌跡と共有点を持つ場合の k の最大値を求めよ. ただし, $\bar{\alpha}, \overline{w_2}$ はそれぞれ α, w_2 の共役複素数である.

③ 曲線 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 上に2点 $A\left(a, \frac{1}{a}\right), B\left(b, \frac{1}{b}\right)$ をとる. ただし, $0 < a < b$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $a < t < b$ を満たす実数 t に対して点 $T\left(t, \frac{1}{t}\right)$ をとり, 三角形 ATB の面積を $f(t)$ で表す. 関数 $f(t) (a < t < b)$ の最大値を M とするとき, $f(t) = M$ を満たす t を a, b を用いて表せ.
- (2) $a = 1, b = 2$ のとき, (1) で求めた $f(t)$ の最大値 M を求めよ.

4 xy 平面上の曲線

$$C : x = f(t), y = g(t) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。ただし、 $f(t)$, $g(t)$ は

$$\begin{cases} f(t) = 2 \sin t + \cos 2t - 1 \\ g(t) = 1 - \cos 2t \end{cases}$$

とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(t)$ の最大値を求めよ。
- (2) 曲線 C 上の点 (x, y) において、 $y = 1$ のときの接線の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C と y 軸で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

5 各項が正の整数である数列 $\{a_n\}$ が、条件

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) すべての正の整数 n に対し、 $a_n \geq n$ が成り立つことを示せ。
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right)^2 < 2$ であることを示せ。

6 正四面体 ABCD において、辺 AB の中点を E、辺 AC を 3 : 1 に内分する点を F、辺 AD を 1 : 3 に内分する点を G とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形 AEF の面積と三角形 AFG の面積の比を求めよ。
- (2) 三角形 AEF の面積と三角形 EFG の面積の比を求めよ。

7 座標空間に 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 1)$, $C(1, 3, -3)$ がある。以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形 ABC の面積を求めよ。
- (2) 原点 O から 3 点 A , B , C を通る平面に下した垂線を OD とする。点 D の座標を求めよ。
- (3) (2) で求めた点 D について、線分 OD の長さを求めよ。
- (4) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

- 8 直線 $y = x$ と曲線 $y = x|x - 1|$ によって囲まれる図形の面積を求めよ.
- 9 正しく作られたさいころがある. さいころをふって6の目が出たらもう1回ふることとする. 以下の問いに答えよ.
- (1) さいころをちょうど2回ふる確率を求めよ.
 - (2) さいころをちょうど k 回ふる確率を求めよ. ただし, k は自然数とする.
 - (3) さいころをふる回数が n 以下となる確率を求めよ. ただし, n は自然数とする.

解答例

- 1** (1) 与えられた漸化式および $a_1 = 1, b_1 = 3$ より

$$a_2 = 5a_1 + b_1 = 5 \cdot 1 + 3 = \mathbf{8},$$

$$b_2 = a_1 + 5b_1 = 1 + 5 \cdot 3 = \mathbf{16},$$

$$a_3 = 5a_2 + b_2 = 5 \cdot 8 + 16 = \mathbf{56},$$

$$b_3 = a_2 + 5b_2 = 8 + 5 \cdot 16 = \mathbf{88}$$

- (2) $a_{n+1} = 5a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + 5b_n$ より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 6(a_n + b_n), \quad a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n)$$

$\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 4$, 公比 6 の等比数列, $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = -2$, 公比 4 の等比数列であるから

$$\mathbf{a_n + b_n = 4 \cdot 6^{n-1}, \quad a_n - b_n = -2 \cdot 4^{n-1}}$$

- (3) (2) の結果の辺々の和および差をとると

$$2a_n = 4 \cdot 6^{n-1} - 2 \cdot 4^{n-1}, \quad 2b_n = 4 \cdot 6^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1}$$

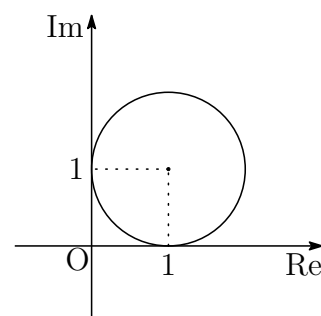
$$\text{よって } \mathbf{a_n = 2 \cdot 6^{n-1} - 4^{n-1}, \quad b_n = 2 \cdot 6^{n-1} + 4^{n-1}} \quad \blacksquare$$

2 (1) $w_1 = \frac{\alpha + z}{i}$ より $z = iw_1 - \alpha$

これを $|z| = 1$ に代入すると $|iw_1 - \alpha| = 1$

$$|i| \left| w_1 - \frac{\alpha}{i} \right| = 1$$

$$\frac{\alpha}{i} = \frac{-1+i}{i} = 1+i \text{ より } |w_1 - (1+i)| = 1$$



よって, w_1 は点 $1+i$ を中心とする半径 1 の円である (上図).

(2) $w_2 = x + yi$ において (x, y は実数), $w_2\bar{\alpha} - \bar{w}_2\alpha + ki = 0$ に代入すると

$$(x + yi)(-1 - i) - (x + yi)(-1 + i) + ki = 0$$

整理すると $(-2x - 2y + k)i = 0$ ゆえに $2x + 2y - k = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

(1) で求めた w_1 について, 同様に, $w_1 = x + yi$ とおくと

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

直線 $\textcircled{1}$ が円 $\textcircled{2}$ と共有点をもつ k の値の範囲を求めればよいから

$$\frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - k|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad |k - 4| \leq 2\sqrt{2}$$

これを解いて $4 - 2\sqrt{2} \leq k \leq 4 + 2\sqrt{2}$

よって, 求める k の最大値は $4 + 2\sqrt{2}$ ■

3 (1) 直線 AB の傾きは $\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{ab}$

$$y = \frac{1}{x} \text{ を微分すると } y' = -\frac{1}{x^2}$$

$f(t)$ を最大にする点 $T\left(t, \frac{1}{t}\right)$ について

$$-\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{ab} \quad \text{これを解いて } t = \sqrt{ab}$$

(2) 直線 AB の方程式は

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{ab}(x - a) \quad \text{整理すると } x + aby - a - b = 0$$

(1) で求めた曲線上の点 $\left(\sqrt{ab}, \frac{1}{\sqrt{ab}}\right)$ と直線 AB の距離を d とすると、
相加平均・相乗平均の大小関係 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ に注意して

$$d = \frac{\left| \sqrt{ab} + ab \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} - a - b \right|}{\sqrt{1 + a^2b^2}} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{\sqrt{1 + a^2b^2}}$$

$$\text{また } AB = \sqrt{(b-a)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)^2} = \frac{b-a}{ab} \sqrt{1 + a^2b^2}$$

$$\text{したがって } M = \frac{1}{2} AB \cdot d = \frac{(b-a)(a+b-2\sqrt{ab})}{2ab}$$

$$a = 1, b = 2 \text{ であるから } M = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} \quad \blacksquare$$

4 (1) $f(t) = 2 \sin t + \cos 2t - 1$ より $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \sin t + (1 - 2 \sin^2 t) - 1 = -2 \sin^2 t + 2 \sin t \\ &= -2 \left(\sin t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって、 $\sin t = \frac{1}{2}$, すなわち、 $t = \frac{\pi}{6}$ のとき、最大値 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ をとる。

(2) $g(t) = 1 - \cos 2t$ より $g(t) = 1 - (1 - 2\sin^2 t) = 2\sin^2 t$
 $s = \sin t$ とおくと $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$

$$C : x = -2s^2 + 2s, \quad y = 2s^2 \quad (0 \leq s \leq 1)$$

$$2s^2 = 1 \text{ とすると } s = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\frac{dx}{ds} = -4s + 2, \quad \frac{dy}{ds} = 4s \text{ より}$$

$$\frac{dx}{ds} = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 = -2\sqrt{2} + 2$$

$$\frac{dy}{ds} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/ds}{dx/ds} = \frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2} + 2} = -2 - \sqrt{2}$$

求める接線は、点 $(-1 + \sqrt{2}, 1)$ を通り、傾き $-2 - \sqrt{2}$ の直線であるから

$$y - 1 = (-2 - \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$$

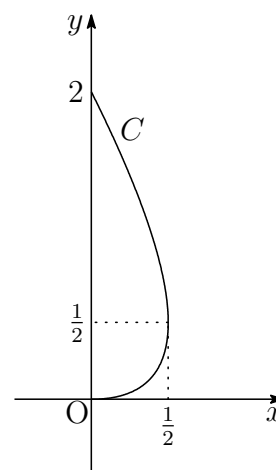
$$\text{よって } y = -(2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} + 1$$

(3) (2) で求めた $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ より

s	0	...	$\frac{1}{2}$...	1
$\frac{dx}{ds}$		+	0	-	
$\frac{dy}{ds}$		+	+	+	
$(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$		↗	↑	↖	
(x, y)	(0, 0)	...	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$...	(0, 2)

よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 x dy = \int_0^1 (-2s^2 + 2s) \cdot 4s ds \\ &= \int_0^1 (-8s^3 + 8s^2) ds = \left[-2s^4 + \frac{8}{3}s^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



5 (1) (*) $a_n \geq n$

[1] $n = 1$ のとき, (*) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, (*) が成立すると仮定すると $a_k \geq k$

$$a_{k+1} \geq a_k + 1 \geq k + 1$$

よって, $n = k + 1$ のときも (*) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, (*) が成立する.

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k}\right)^2$ とおくと, (*) から, $n \geq 3$ とすると

$$\begin{aligned} S_n &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k^2} \\ &\leq \frac{5}{4} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k-1)} = \frac{5}{4} + \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{7}{4} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

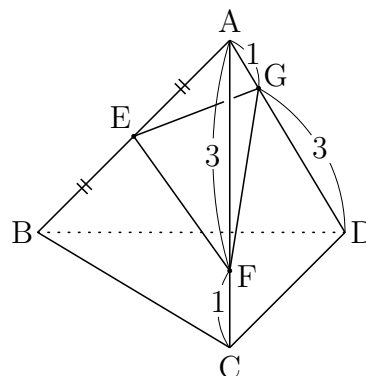
したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{n}\right) = \frac{7}{4} < 2$

よって $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right)^2 < 2$ ■

$$\boxed{6} \quad (1) \quad \triangle AEF = \frac{1}{2}AE \cdot AF \sin \frac{\pi}{3},$$

$$\triangle AFG = \frac{1}{2}AF \cdot AG \sin \frac{\pi}{3} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \triangle AEF : \triangle AFG \\ &= \frac{1}{2}AE \cdot AF \sin \frac{\pi}{3} : \frac{1}{2}AF \cdot AG \sin \frac{\pi}{3} \\ &= AE : AG = \mathbf{2 : 1} \end{aligned}$$



(2) 正四面体の一辺の長さを a とする. $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ とおくと

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = a, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = a^2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{EG} = \frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{EF}|^2 &= \left| \frac{3}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} \right|^2 = \frac{9}{16}|\vec{c}|^2 - \frac{3}{4}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{9}{16}a^2 - \frac{3}{8}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{7}{16}a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{EG}|^2 &= \left| \frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b} \right|^2 = \frac{1}{16}|\vec{d}|^2 - \frac{1}{4}\vec{d} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{16}a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} &= \left(\frac{3}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} \right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b} \right) \\ &= \frac{3}{16}\vec{c} \cdot \vec{d} - \frac{3}{8}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{8}\vec{b} \cdot \vec{d} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{3}{32}a^2 - \frac{3}{16}a^2 - \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{32}a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \triangle EFG &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{EF}|^2 |\overrightarrow{EG}|^2 - (\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG})^2} \\ &= \frac{a^2}{2} \sqrt{\frac{7}{16} \cdot \frac{3}{16} - \left(\frac{3}{32} \right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{64} a^2 \end{aligned}$$

$$\text{また } \triangle AEF = \frac{1}{2}AE \cdot AF \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{32} a^2$$

$$\text{したがって } \triangle AEF : \triangle EFG = \frac{3\sqrt{3}}{32} a^2 : \frac{5\sqrt{3}}{64} a^2 = \mathbf{6 : 5}$$

- 7 (1) $\vec{AB} = (1, 1, 0)$, $\vec{AC} = (0, 2, -4)$ より

$$|\vec{AB}|^2 = 2, \quad |\vec{AC}|^2 = 20, \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2$$

したがって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 20 - 2^2} = \mathbf{3}$$

- (2) \vec{AB} と \vec{AC} に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)$$

とすると $\vec{OA} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}$

$$\vec{OD} = (\vec{OA} \cdot \vec{n}) \vec{n} = \frac{1}{3} \vec{n} = \frac{1}{9}(-2, 2, 1) \quad (*)$$

よって $\mathbf{D} \left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9} \right)$

補足 $\vec{OD} = (\vec{OA} \cdot \vec{n}) \vec{n} = (\vec{OB} \cdot \vec{n}) \vec{n} = (\vec{OC} \cdot \vec{n}) \vec{n}$

(3) (*) より $|\vec{OD}| = \frac{1}{3} |\vec{n}| = \frac{1}{3}$

- (4) (1), (3) の結果から、求める四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \triangle ABC |\vec{OD}| = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$



8 $y = x|x - 1|$ と $y = x$ の 2 式から y を消去すると

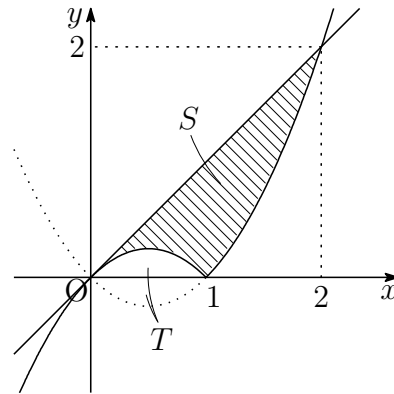
$$x|x - 1| = x \quad \text{ゆえに} \quad x(|x - 1| - 1) = 0$$

これを解いて $x = 0, 2$

求める面積 S は、下の図の斜線部分である.

$$S + 2T = \frac{1}{6}(2 - 0)^3, \quad T = \frac{1}{6}(1 - 0)^3$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} = 1$$



- 9 (1) 1回目に6の目が出て、2回目に6以外の目が出る確率であるから

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

- (2) $k \geq 2$ のとき、1回目から $k-1$ 回目まで6の目が出て、 k 回目で6以外の目が出る確率であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6^k} \quad (*)$$

$k=1$ のとき、1回ふる確率は $\frac{5}{6}$ であるから、(*) は $k=1$ のときも成立する。よって、求める確率は

$$\frac{5}{6^k}$$

- (3) (2) の結果から、求める確率は

$$\sum_{k=1}^n \frac{5}{6^k} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 - \frac{1}{6}} = 1 - \frac{1}{6^n}$$

別解 $n+1$ 回以上ふる確率は、 n 回連続して6の目が出る確率であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{6^n}$$

求める確率は、この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{6^n}$$

