

令和4年度 徳島大学2次試験前期日程 (数学問題)

令和4年2月25日

● 理工・医 (保健) 学部 [1] [2] [3] [4] 数I・II・III・A・B (120分)

● 薬・歯・医 (医) 学部 [3] [5] [6] [7] 数I・II・III・A・B (120分)

[1] $f(x) = x^2 - 2$ ($x \geq 0$) とする. 関数 $y = f(x)$ の逆関数を $y = g(x)$ とする.

(1) $g(x)$ を求めよ.

(2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の交点の座標を求めよ.

(3) x 軸の $x \geq 0$ の部分と y 軸の $y \geq 0$ の部分, および曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

[2] $a = 18^{50}$ とする. 以下の問いに答えよ. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

(1) $\log_{10} \sqrt{18}$, および $\log_{10} 5$ の値を求めよ.

(2) a の桁数, および a の最高位の数字を求めよ.

(3) a を5進法で表したときの桁数, および最高位の数字を求めよ.

[3] 次の問いに答えよ.

(1) 不等式 $|x + y| \leq |x - y|$ の表す領域を座標平面上に図示せよ.

(2) 不等式 $(x + y)^2 + (x - y + 1)^2 \leq 2$ の表す領域を座標平面上に図示せよ.

(3) (1) の領域と (2) の領域の共通部分の面積を求めよ.

[4] 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 1, \quad a_{2n} = 3a_{2n-1}, \quad a_{2n+1} = a_{2n} + 3^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.

(2) n を自然数とするとき, a_{2n} および a_{2n-1} をそれぞれ n の式で表せ.

(3) m を自然数とするとき, $\sum_{n=1}^{2m} a_n$ を求めよ.

- 5 三角柱 OAB-CDE の 3 つの側面は 1 辺の長さが 1 の正方形である. 辺 BE の中点を M, 辺 AD を $t : (1-t)$ に内分する点を T とする. ただし, $0 < t < 1$ とする.

- (1) 内積 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OT}$ を t の式で表せ.
- (2) t が $0 < t < 1$ の範囲で動くとき, 三角形 OMT の面積 S の最小値を求めよ.
- (3) 三角形 OMT の重心を G とする. 直線 EG と直線 OA が交わる時, t の値を求めよ.

- 6 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ ($x \geq 0$) について, 次の問いに答えよ.

- (1) $y = f(x)$ の増減を調べて極値を求めよ.
- (2) n を自然数とする. θ_n は $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ の範囲にあり, $\tan \theta_n = \sqrt{n}$ を満たす. $I_n = \int_1^n f(x) dx$ を n および θ_n を用いて表せ.
- (3) 自然数 n に対して, $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ の値を求めよ.

- 7 n を 2 以上の自然数とする. n 桁の自然数 a を $a = b_{n-1}10^{n-1} + b_{n-2}10^{n-2} + \dots + b_110 + b_0$ と表す. ただし, b_0, b_1, \dots, b_{n-1} は 0 から 9 までの整数で, b_{n-1} は 0 ではない. このとき n 桁の自然数 a で, b_k ($0 \leq k \leq n-1$) がいずれも 3 で割り切れないような a 全体の集合を U_n とする. 集合 U_n の要素 a を選ぶとき, a が 3 で割り切れる確率を P_n , 3 で割って 1 余る数である確率を Q_n , 3 で割って 2 余る数である確率を R_n とする.

- (1) P_2 および P_3 を求めよ.
- (2) $Q_n = R_n$ が成り立つことを示せ.
- (3) 漸化式 $P_{n+1} = Q_n$ および $Q_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n + Q_n)$ が成り立つことを示せ.
- (4) P_n および Q_n をそれぞれ n の式で表せ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^2 - 2$ ($x \geq 0$) より, 関数 $y = f(x)$ の値域は $y \geq -2$
 $x \geq 0$ に注意して, $y = x^2 - 2$ を x について解くと $x = \sqrt{y+2}$
 求める逆関数は $y = \sqrt{x+2}$ で, その定義域が $x \geq -2$ であるから

$$y = \sqrt{x+2} \quad \text{よって} \quad g(x) = \sqrt{x+2}$$

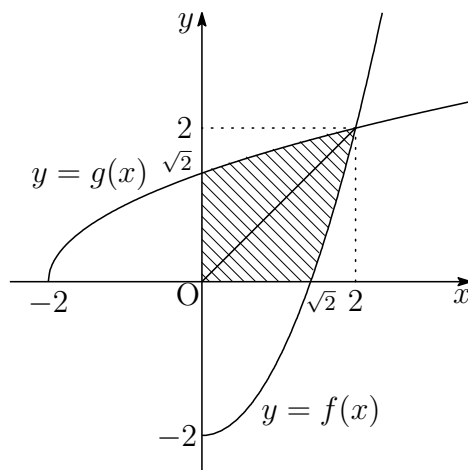
- (2) $y = f(x)$ ($x \geq 0$), $y = g(x)$ ($x \geq -2$) の共通する定義域は $x \geq 0$
 これらの交点は半直線 $y = x$ ($x \geq 0$) 上にあるから

$$\begin{cases} y = x & (x \geq 0) \\ y = x^2 - 2 & (x \geq 0) \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad (2, 2)$$

- (3) 囲まれた図形は $y = x$ に関して対称である. 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \int_{\sqrt{2}}^2 (x^2 - 2) dx \\ &= 2 - \left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_{\sqrt{2}}^2 = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{20 - 8\sqrt{2}}{3}$$



2 (1) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$$\begin{aligned}\log_{10} \sqrt{18} &= \log_{10} 3\sqrt{2} = \log_{10} 3 + \frac{1}{2} \log_{10} 2 \\ &= 0.4771 + 0.1505 = \mathbf{0.6276}, \\ \log_{10} 5 &= \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 \\ &= 1 - 0.3010 = \mathbf{0.6990}\end{aligned}$$

(2) $a = 18^{50}$ の常用対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10} a &= \log_{10} 18^{50} = \log_{10} (\sqrt{18})^{100} \\ &= 100 \log_{10} \sqrt{18} = 100 \times 0.6276 = 62.76, \\ \log_{10} 5 &= 0.6990, \\ \log_{10} 6 &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781\end{aligned}$$

ゆえに $\log_{10} 5 + 62 < \log_{10} a < \log_{10} 6 + 62$

したがって $5 \cdot 10^{62} < a < 6 \cdot 10^{62}$

よって、 a は **63** 桁の数で最高位の数は **5**

(3) 底を 5 に変換すると

$$\begin{aligned}\log_5 a &= \frac{\log_{10} 18^{50}}{\log_{10} 5} = \frac{62.76}{0.6990} = 89.78 \dots, \\ \log_5 3 &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \frac{0.4771}{0.6990} = 0.68 \dots, \\ \log_5 4 &= \frac{2 \log_{10} 2}{\log_{10} 5} = \frac{2 \cdot 0.3010}{0.6990} = 0.86 \dots\end{aligned}$$

ゆえに $89 + \log_5 3 < \log_5 a < 89 + \log_5 4$

したがって $3 \cdot 5^{89} < a < 4 \cdot 5^{89}$

よって、 a を 5 進法で表した数は **90** 桁で最高位の数は **3** ■

3 (1) $|x+y| \leq |x-y|$ より $-|x-y| \leq x+y \leq |x-y|$

(i) $x-y \geq 0$ のとき ($y \leq x$)

$$-x+y \leq x+y \leq x-y$$

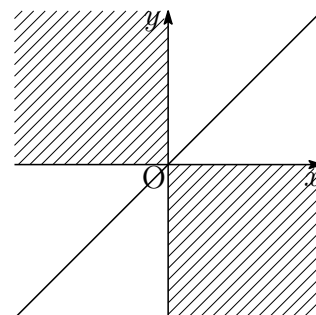
ゆえに $x \geq 0, y \leq 0, y \leq x$

(ii) $x-y \leq 0$ のとき ($y \geq x$)

$$x-y \leq x+y \leq y-x$$

ゆえに $x \leq 0, y \geq 0, y \geq x$

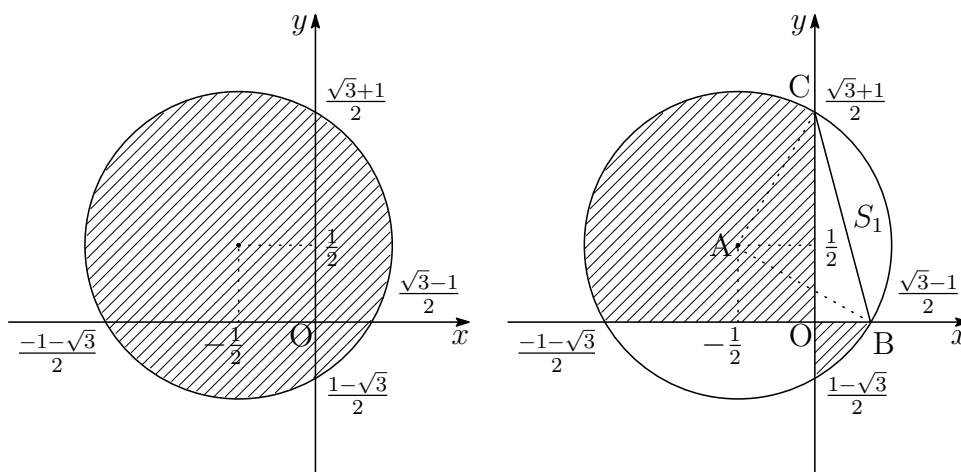
(i), (ii) より, 求める領域は, 上の図の斜線部分である.



(2) $(x+y)^2 + (x-y+1)^2 \leq 2$ より

$$x^2 + y^2 + x - y - \frac{1}{2} \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$$

よって, 求める領域は, 左下の図の斜線部分で境界線を含む.



(3) 求める面積は, 右上の図の斜線部分. $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 0\right)$,

$C\left(0, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ とおくと $AB \perp AC$. BC と \widehat{BC} で囲まれた部分を S_1 とする.

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1}{4}, \quad S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

よって $\pi \cdot 1^2 - 2(\triangle OBC + S_1) = \frac{\pi + 1}{2}$ ■

4 (1) 与えられた漸化式により

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 = 3 \cdot 1 = \mathbf{3}, \\ a_3 &= a_2 + 3^{1-1} = 3 + 1 = \mathbf{4}, \\ a_4 &= 3a_3 = 3 \cdot 4 = \mathbf{12} \end{aligned}$$

(2) $a_{2n} = 3a_{2n-1}$, $a_{2n+1} = a_{2n} + 3^{n-1}$ より, a_{2n} を消去すると

$$a_{2n+1} = 3a_{2n-1} + 3^{n-1}$$

$$b_n = a_{2n-1} \text{ とおくと } b_1 = 1, \quad b_{n+1} = 3b_n + 3^{n-1}$$

$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{b_n}{3^n} + \frac{1}{9}$ より, $\left\{ \frac{b_n}{3^n} \right\}$ は初項 $\frac{1}{3}$, 公差 $\frac{1}{9}$ の等差数列であるから

$$\frac{b_n}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}(n-1) \quad \text{ゆえに} \quad b_n = (n+2)3^{n-2}$$

$$\text{よって } a_{2n-1} = (n+2)3^{n-2}, \quad a_{2n} = 3a_{2n-1} = (n+2)3^{n-1}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2m} a_n &= \sum_{n=1}^m (a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^m \{(n+2)3^{n-2} + (n+2)3^{n-1}\} \\ &= \frac{4}{3} \sum_{n=1}^m n3^{n-1} + \frac{8}{3} \sum_{n=1}^m 3^{n-1} \end{aligned}$$

$$J = \sum_{n=1}^m 3^{n-1}, \quad K = \sum_{n=1}^m n3^{n-1} \text{ とおくと}$$

$$\begin{array}{r} K = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + (m-1)3^{m-2} + m3^{m-1} \\ -) \quad 3K = \quad \quad 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + (m-2)3^{m-2} + (m-1)3^{m-1} + m3^m \\ \hline -2K = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{m-2} + 3^{m-1} - m3^m \end{array}$$

$$-2K = J - m3^m \text{ より, } K = \frac{m3^m}{2} - \frac{J}{2} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2m} a_n &= \frac{4}{3}K + \frac{8}{3}J = \frac{4}{3} \left(\frac{m3^m}{2} - \frac{J}{2} \right) + \frac{8}{3}J = \frac{2m}{3} \cdot 3^m + 2J \\ &= \frac{2m}{3} \cdot 3^m + 2 \cdot \frac{3^m - 1}{3 - 1} = \left(\frac{2m}{3} + 1 \right) 3^m - 1 \end{aligned}$$

■

- 5 (1) 三角柱 OAB-CDE を右の図のように座標空間にとると、条件から

$$M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad T(1, 0, t)$$

したがって

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \overrightarrow{OT} = (1, 0, t)$$

よって

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OT} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot t = \frac{1+t}{2}$$

- (2) (1) の結果を用いて

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \quad |\overrightarrow{OT}|^2 = 1 + t^2$$

したがって

$$\begin{aligned} \Delta OMT &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OM}|^2 |\overrightarrow{OT}|^2 - (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OT})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4}(1+t^2) - \left(\frac{1+t}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} \end{aligned}$$

よって、 $t = \frac{1}{4}$ のとき、最小値 $\frac{\sqrt{15}}{8}$ をとる。

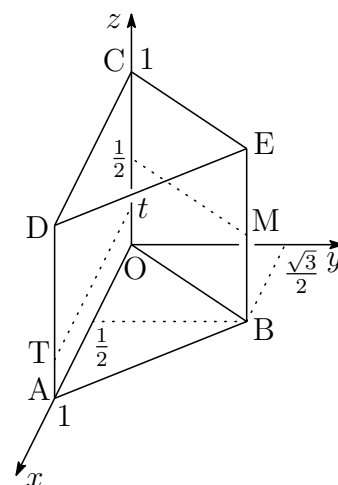
- (3) $E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, ΔOMT の重心 G は $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{t}{3} + \frac{1}{6}\right)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} + k\overrightarrow{EG} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) + k\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{t}{3} - \frac{5}{6}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{3}\right)\sqrt{3}, 1 + k\left(\frac{t}{3} - \frac{5}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

この終点が OA 上、すなわち、 x 軸上にあるから

$$\frac{1}{2} - \frac{k}{3} = 0, \quad 1 + k\left(\frac{t}{3} - \frac{5}{6}\right) = 0$$

上の第 1 式から、 $k = \frac{3}{2}$ これを第 2 式に代入して $t = \frac{1}{2}$ ■



6 (1) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ ($x \geq 0$) を微分すると

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1+x) - \sqrt{x} \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2}$	↘

よって、極大値 $f(1) = \frac{1}{2}$ をとる.

(2) $I_n = \int_1^n f(x) dx = \int_1^n \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ ($\sqrt{n} = \tan \theta_n$)

$\sqrt{x} = \tan \theta$ とおくと、 $x = \tan^2 \theta$ より $\frac{dx}{d\theta} = \frac{2 \tan \theta}{\cos^2 \theta}$

x	$1 \rightarrow n$
θ	$\frac{\pi}{4} \rightarrow \theta_n$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_n} \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{2 \tan \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_n} \tan^2 \theta d\theta \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_n} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) d\theta = 2 \left[\tan \theta - \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_n} \\ &= 2(\tan \theta_n - \theta_n) - 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\sqrt{n} - \theta_n - 1 + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

(3) $n \geq 2$ とする. $S_n = \sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^n f(k)$

$f(x)$ は $x \geq 1$ において単調減少であるから、 $k \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(x) dx &< f(k) < \int_{k-1}^k f(x) dx \\ \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} f(x) dx &< \sum_{k=2}^n f(k) < \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \\ \int_2^{n+1} f(x) dx &< \sum_{k=2}^n f(k) < \int_1^n f(x) dx \\ f(1) + \int_2^{n+1} f(x) dx &< f(1) + \sum_{k=2}^n f(k) < f(1) + \int_1^n f(x) dx \end{aligned}$$

$\int_1^2 f(x) dx < f(1)$ であるから

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < S_n < \frac{1}{2} + \int_1^n f(x) dx$$

したがって $I_{n+1} < S_n < \frac{1}{2} + I_n$

$$\frac{I_{n+1}}{\sqrt{n}} < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{I_n}{\sqrt{n}} \quad (*)$$

(2) の結果から

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{\theta_{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{4\sqrt{n}} \right) = 2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{I_n}{\sqrt{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{\theta_n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{4\sqrt{n}} \right) = 2 \end{aligned}$$

(*) および上の2式から、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$$



- 7 (1) $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $X = \{1, 4, 7\}$, $Y = \{2, 5, 8\}$ とおくと

$$b_k \in B \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

$b_k \in X$ または $b_k \in Y$ であるから $(0 \leq k \leq n-1)$, まず 1 桁の数について, $b_0 \in X$, $b_0 \in Y$ である確率がそれぞれ Q_1 , R_1 であるから

$$Q_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad R_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad P_1 = 0$$

n 桁の自然数に対して $n+1$ 桁目に追加される数 b_n は X または Y が等しい確率で追加されるから次の確率漸化式が成立する.

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}(Q_n + R_n), \quad Q_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n + R_n), \quad R_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n + Q_n) \quad (*)$$

$P_n + Q_n + R_n = 1$ であるから, これらの漸化式は

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - P_n), \quad Q_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - Q_n), \quad R_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - R_n) \quad (*)$$

上の第 1 式から $P_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left(P_n - \frac{1}{3} \right)$

$$P_n = \frac{1}{3} + \left(P_1 - \frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$P_1 = 0$ であるから $P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{2}$

Q_n, R_n も ① と同形式であることに注意すると, $Q_1 = R_1 = \frac{1}{2}$ であるから

$$Q_n = R_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{3}$$

② より $P_2 = \frac{1}{2}, P_3 = \frac{1}{4}$

(2) ③ より, $Q_n = R_n$ が成立する.

(3) (2) の結果を (*) の第 1 式および第 2 式に代入すると

$$P_{n+1} = Q_n, \quad Q_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n + Q_n)$$

が成立する.

(4) ②, ③ より $P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}, Q_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ ■