令和４年度　徳島大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和４年２月25日

- 理工・医 (保健) 学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 薬・歯・医 (医) 学部　$\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x) = x^2 - 2 \ (x \geqq 0)$ とする．関数 $y = f(x)$ の逆関数を $y = g(x)$ とする．

(1) $g(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の交点の座標を求めよ．

(3) x 軸の $x \geqq 0$ の部分と y 軸の $y \geqq 0$ の部分，および曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a = 18^{50}$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(1) $\log_{10} \sqrt{18}$，および $\log_{10} 5$ の値を求めよ．

(2) a の桁数，および a の最高位の数字を求めよ．

(3) a を 5 進法で表したときの桁数，および最高位の数字を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $|x + y| \leqq |x - y|$ の表す領域を座標平面上に図示せよ．

(2) 不等式 $(x + y)^2 + (x - y + 1)^2 \leqq 2$ の表す領域を座標平面上に図示せよ．

(3) (1) の領域と (2) の領域の共通部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 1, \quad a_{2n} = 3a_{2n-1}, \quad a_{2n+1} = a_{2n} + 3^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2) n を自然数とするとき，a_{2n} および a_{2n-1} をそれぞれ n の式で表せ．

(3) m を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{2m} a_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 三角柱 OAB-CDE の 3 つの側面は 1 辺の長さが 1 の正方形である．辺 BE の中点を M，辺 AD を $t : (1 - t)$ に内分する点を T とする．ただし，$0 < t < 1$ とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を t の式で表せ．

(2) t が $0 < t < 1$ の範囲で動くとき，三角形 OMT の面積 S の最小値を求めよ．

(3) 三角形 OMT の重心を G とする．直線 EG と直線 OA が交わるとき，t の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}$ $(x \geqq 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ の増減を調べて極値を求めよ．

(2) n を自然数とする．θ_n は $0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にあり，$\tan\theta_n = \sqrt{n}$ を満たす．$I_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\,dx$ を n および θ_n を用いて表わせ．

(3) 自然数 n に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ n を 2 以上の自然数とする．n 桁の自然数 a を $a = b_{n-1}10^{n-1} + b_{n-2}10^{n-2} + \cdots + b_1 10 + b_0$ と表す．ただし，b_0，$b_1, \cdots, b_{n-1}$ は 0 から 9 までの整数で，b_{n-1} は 0 ではない．このとき n 桁の自然数 a で，b_k $(0 \leqq k \leqq n - 1)$ がいずれも 3 で割り切れないような a 全体の集合を U_n とする．集合 U_n の要素 a を選ぶとき，a が 3 で割り切れる確率を P_n，3 で割って 1 余る数である確率を Q_n，3 で割って 2 余る数である確率を R_n とする．

(1) P_2 および P_3 を求めよ．

(2) $Q_n = R_n$ が成り立つことを示せ．

(3) 漸化式 $P_{n+1} = Q_n$ および $Q_{n+1} = \dfrac{1}{2}(P_n + Q_n)$ が成り立つことを示せ．

(4) P_n および Q_n をそれぞれ n の式で表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x^2 - 2\ (x \geqq 0)$ より，関数 $y = f(x)$ の値域は　$y \geqq -2$

$x \geqq 0$ に注意して，$y = x^2 - 2$ を x について解くと　$x = \sqrt{y+2}$

求める逆関数は $y = \sqrt{x+2}$ で，その定義域が $x \geqq -2$ であるから

$$y = \sqrt{x+2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{g(x) = \sqrt{x+2}}$$

(2) $y = f(x)\ (x \geqq 0)$, $y = g(x)\ (x \geqq -2)$ の共通する定義域は　$x \geqq 0$

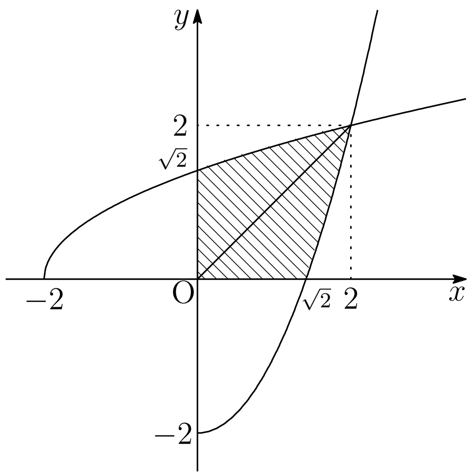
これらの交点は半直線 $y = x\ (x \geqq 0)$ 上にあるから

$$\begin{cases} y = x\ (x \geqq 0) \\ y = x^2 - 2\ (x \geqq 0) \end{cases}\qquad \text{これを解いて}\quad \mathbf{(2,\ 2)}$$

(3) 囲まれた図形は $y = x$ に関して対称である．求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 - \int_{\sqrt{2}}^{2} (x^2 - 2)\,dx \\ &= 2 - \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S = \dfrac{20 - 8\sqrt{2}}{3}}$



■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$$\begin{aligned}\log_{10}\sqrt{18} &= \log_{10} 3\sqrt{2} = \log_{10} 3 + \frac{1}{2}\log_{10} 2 \\ &= 0.4771 + 0.1505 = \mathbf{0.6276}, \\ \log_{10} 5 &= \log_{10}\frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 \\ &= 1 - 0.3010 = \mathbf{0.6990}\end{aligned}$$

(2) $a = 18^{50}$ の常用対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10} a &= \log_{10} 18^{50} = \log_{10}(\sqrt{18})^{100} \\ &= 100\log_{10}\sqrt{18} = 100 \times 0.6276 = 62.76, \\ \log_{10} 5 &= 0.6990, \\ \log_{10} 6 &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781\end{aligned}$$

ゆえに　$\log_{10} 5 + 62 < \log_{10} a < \log_{10} 6 + 62$

したがって　$5{\cdot}10^{62} < a < 6{\cdot}10^{62}$

よって，a は **63** 桁の数で最高位の数は　**5**

(3) 底を 5 に変換すると

$$\begin{aligned}\log_5 a &= \frac{\log_{10} 18^{50}}{\log_{10} 5} = \frac{62.76}{0.6990} = 89.78\cdots, \\ \log_5 3 &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \frac{0.4771}{0.6990} = 0.68\cdots, \\ \log_5 4 &= \frac{2\log_{10} 2}{\log_{10} 5} = \frac{2{\cdot}0.3010}{0.6990} = 0.86\cdots\end{aligned}$$

ゆえに　$89 + \log_5 3 < \log_5 a < 89 + \log 54$

したがって　$3{\cdot}5^{89} < a < 4{\cdot}5^{89}$

よって，a を 5 進法で表した数は **90** 桁で最高位の数は　**3**　■

3 (1) $|x+y| \leqq |x-y|$ より　$-|x-y| \leqq x+y \leqq |x-y|$

(i) $x-y \geqq 0$ のとき $(y \leqq x)$

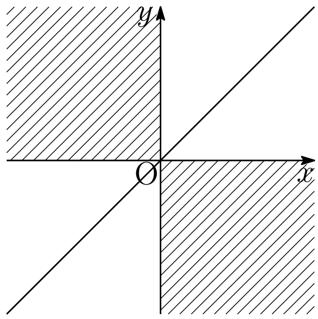
$$-x+y \leqq x+y \leqq x-y$$

ゆえに　$x \geqq 0,\ y \leqq 0,\ y \leqq x$

(ii) $x-y \leqq 0$ のとき $(y \geqq x)$

$$x-y \leqq x+y \leqq y-x$$

ゆえに　$x \leqq 0,\ y \geqq 0,\ y \geqq x$

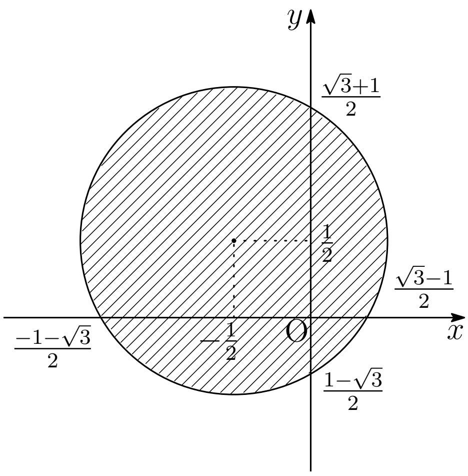


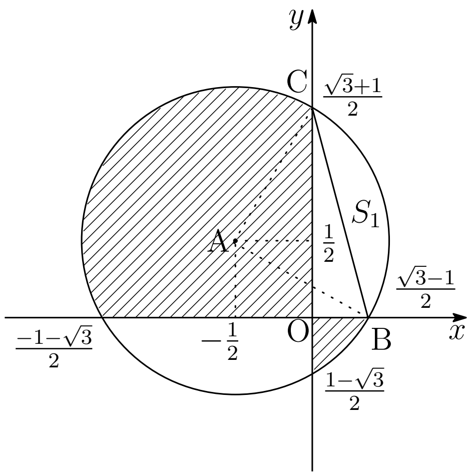
(i)，(ii) より，求める領域は，上の図の斜線部分である．

(2) $(x+y)^2+(x-y+1)^2 \leqq 2$ より

$$x^2+y^2+x-y-\frac{1}{2} \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq 1$$

よって，求める領域は，左下の図の斜線部分で境界線を含む．





(3) 求める面積は，右上の図の斜線部分．$\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\ 0\right)$，

$\mathrm{C}\left(0,\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ とおくと $\mathrm{AB} \perp \mathrm{AC}$．BC と $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ で囲まれた部分を S_1 とする．

$$\triangle\mathrm{OBC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1}{4}, \quad S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

よって　　$\pi\cdot 1^2 - 2(\triangle\mathrm{OBC}+S_1) = \boldsymbol{\frac{\pi+1}{2}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) 与えられた漸化式により

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 3a_1 = 3\cdot 1 = \mathbf{3},\\
a_3 &= a_2 + 3^{1-1} = 3 + 1 = \mathbf{4},\\
a_4 &= 3a_3 = 3\cdot 4 = \mathbf{12}
\end{aligned}
$$

(2) $a_{2n} = 3a_{2n-1}$，$a_{2n+1} = a_{2n} + 3^{n-1}$ より，a_{2n} を消去すると

$$a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3^{n-1}$$

$b_n = a_{2n-1}$ とおくと　$b_1 = 1$，$b_{n+1} = 3b_n + 3^{n-1}$

$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{b_n}{3^n} + \dfrac{1}{9}$ より，$\left\{\dfrac{b_n}{3^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公差 $\dfrac{1}{9}$ の等差数列であるから

$$\frac{b_n}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}(n-1) \quad \text{ゆえに} \quad b_n = (n+2)3^{n-2}$$

よって　$a_{2n-1} = \boldsymbol{(n+2)3^{n-2}}$，　$a_{2n} = 3a_{2n-1} = \boldsymbol{(n+2)3^{n-1}}$

(3) (2) の結果から

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2m} a_n &= \sum_{n=1}^{m}(a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^{m}\{(n+2)3^{n-2} + (n+2)3^{n-1}\}\\
&= \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{m} n3^{n-1} + \frac{8}{3}\sum_{n=1}^{m} 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

$J = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} 3^{n-1}$，$K = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} n3^{n-1}$ とおくと

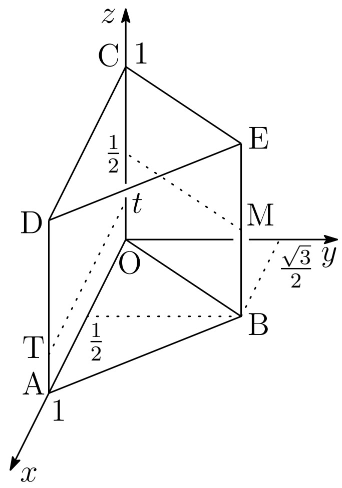
$$
\begin{array}{rrcccccccc}
 & K = & 1 & +2\cdot 3 & +3\cdot 3^2 & +\cdots & +(m-1)3^{m-2} & & +m3^{m-1} & \\
-\,) & 3K = & & 3 & +2\cdot 3^2 & +\cdots & +(m-2)3^{m-2} & +(m-1)3^{m-1} & +m3^m & \\
\hline
 & -2K = & 1 & +3 & +3^2 & +\cdots & & +3^{m-2} & +3^{m-1} & -m3^m
\end{array}
$$

$-2K = J - m3^m$ より，$K = \dfrac{m3^m}{2} - \dfrac{J}{2}$ であるから

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2m} a_n &= \frac{4}{3}K + \frac{8}{3}J = \frac{4}{3}\left(\frac{m3^m}{2} - \frac{J}{2}\right) + \frac{8}{3}J = \frac{2m}{3}\cdot 3^m + 2J\\
&= \frac{2m}{3}\cdot 3^m + 2\cdot\frac{3^m - 1}{3 - 1} = \boldsymbol{\left(\frac{2m}{3} + 1\right)3^m - 1}
\end{aligned}
$$

■

$\boxed{\textbf{5}}$ (1) 三角柱 OAB-CDE を右の図のように座標空間にとると，条件から



$$\mathrm{M}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad \mathrm{T}(1,\ 0,\ t)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1,\ 0,\ t)$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{1}{2}\cdot1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot0+\frac{1}{2}\cdot t=\boldsymbol{\frac{1+t}{2}}$$

(2) (1) の結果を用いて

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\quad |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=1+t^2$$

したがって

$$\triangle\mathrm{OMT}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OT}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OT}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}(1+t^2)-\left(\frac{1+t}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{t^2-\frac{1}{2}t+1}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}$$

よって，$t=\dfrac{1}{4}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{8}}$ をとる．

(3) $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$，△OMT の重心 G は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{t}{3}+\dfrac{1}{6}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}+k\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)+k\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{t}{3}-\frac{5}{6}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}-\frac{k}{3}\right)\sqrt{3},\ 1+k\left(\frac{t}{3}-\frac{5}{6}\right)\right)$$

この終点が OA 上，すなわち，x 軸上にあるから

$$\frac{1}{2}-\frac{k}{3}=0,\quad 1+k\left(\frac{t}{3}-\frac{5}{6}\right)=0$$

上の第 1 式から，$k=\dfrac{3}{2}$　これを第 2 式に代入して　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$ ■

$\boxed{6}$ (1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ $(x \geqq 0)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(1+x) - \sqrt{x}\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

よって，極大値 $f(1) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

(2) $I_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx \quad (\sqrt{n} = \tan\theta_n)$

$\sqrt{x} = \tan\theta$ とおくと，$x = \tan^2\theta$ より $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{2\tan\theta}{\cos^2\theta}$

x	$1 \longrightarrow n$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \theta_n$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_n} \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{2\tan\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_n} \tan^2\theta\,d\theta \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_n} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)d\theta = 2\Big[\ \tan\theta - \theta\ \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_n} \\
&= 2\left(\tan\theta_n - \theta_n\right) - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{2\left(\sqrt{n} - \theta_n - 1 + \frac{\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

(3) $n \geqq 2$ とする．$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(k)$

$f(x)$ は $x \geqq 1$ において単調減少であるから，$k \geqq 2$ のとき

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx < f(k) < \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

$$\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx < \sum_{k=2}^{n} f(k) < \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

$$\int_2^{n+1} f(x)\,dx < \sum_{k=2}^{n} f(k) < \int_1^{n} f(x)\,dx$$

$$f(1) + \int_2^{n+1} f(x)\,dx < f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(k) < f(1) + \int_1^{n} f(x)\,dx$$

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx < f(1)$ であるから

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n < \frac{1}{2} + \int_1^n f(x)\,dx$$

したがって　$I_{n+1} < S_n < \dfrac{1}{2} + I_n$

$$\frac{I_{n+1}}{\sqrt{n}} < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{I_n}{\sqrt{n}} \tag{$*$}$$

(2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{\theta_{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{4\sqrt{n}}\right) = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{I_n}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{\theta_n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{4\sqrt{n}}\right) = 2$$

$(*)$ および上の 2 式から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \mathbf{2}$$

■

7 (1) $B=\{1,2,4,5,7,8\},\ X=\{1,\ 4,\ 7\},\ Y=\{2,\ 5,\ 8\}$ とおくと

$$b_k \in B \quad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

$b_k \in X$ または $b_k \in Y$ であるから $(0 \leqq k \leqq n-1)$，まず 1 桁の数について，$b_0 \in X$，$b_0 \in Y$ である確率がそれぞれ $Q_1,\ R_1$ であるから

$$Q_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad R_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad P_1 = 0$$

n 桁の自然数に対して $n+1$ 桁目に追加される数 b_n は X または Y が等しい確率で追加されるから次の確率漸化式が成立する．

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}(Q_n + R_n), \quad Q_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n + R_n), \quad R_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n + Q_n) \quad (*)$$

$P_n + Q_n + R_n = 1$ であるから，これらの漸化式は

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - P_n), \quad Q_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - Q_n), \quad R_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - R_n) \quad (*)$$

上の第 1 式から　$P_{n+1} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(P_n - \dfrac{1}{3}\right)$

$$P_n = \frac{1}{3} + \left(P_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots ①$$

$P_1 = 0$ であるから　$P_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots ②$

$Q_n,\ R_n$ も ① と同形式であることに注意すると，$Q_1 = R_1 = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$Q_n = R_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots ③$$

② より　$\boldsymbol{P_2 = \dfrac{1}{2},\ P_3 = \dfrac{1}{4}}$

(2) ③ より，$Q_n = R_n$ が成立する．

(3) (2) の結果を $(*)$ の第 1 式および第 2 式に代入すると

$$P_{n+1} = Q_n, \quad Q_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n + Q_n)$$

が成立する．

(4) ②，③ より　$\boldsymbol{P_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\ Q_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$ ■