

令和4年度 滋賀医科大学2次試験前期日程(数学問題)

令和4年2月25日

- 問題 1 2 3 4 数I・II・III・A・B (120分)

1 実数  $a, b, r$  について,  $r$  が  $a$  と  $b$  の間にあるとは,  $a < r < b$  または  $b < r < a$  が成り立つことである. したがって  $a = b$  のときは,  $a$  と  $b$  の間にある実数はない.

(1)  $t$  を 0 と 1 の間にある実数とする. 数列  $\{a_n\}$  は初項  $a_1 = 0$  であり,  $b_n = a_{n+1} - a_n$  で定まる階差数列  $\{b_n\}$  は初項  $b_1 = 1$ , 公比  $-t$  の等比数列となっている.

(i)  $a_{n+2}$  は  $a_n$  と  $a_{n+1}$  の間にあることを示せ.

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.

(iii) 0 と 1 の間にある実数  $r$  と 3 以上の奇数  $n$  に対して,  $a_n = r$  となるような  $t$  がただ 1 つ存在することを示せ.

(2) すべての  $n$  に対して  $c_{n+2}$  が  $c_n$  と  $c_{n+1}$  の間にあるような数列  $\{c_n\}$  で, 収束しない例を 1 つ作れ.

2 (1) 2 以上の自然数  $n$  に対して,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$  を示せ.

(2)  $x \geq 0$  のとき,  $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$  を示せ.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( k^2 - k^2 \cos \frac{1}{k} \right)$  を求めよ.

3  $a, b$  を正の定数とし,  $xy$  平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を  $H$  とする. 0 でない実数  $t$  に対して, 直線  $y = t$  と  $H$  の交点を  $P, Q$  とし,  $P$  における  $H$  の接線と  $Q$  における  $H$  の接線の交点を  $R$  とする.  $\triangle PQR$  の面積を  $S$  とおく.

(1)  $R$  の座標を  $b, t$  を用いて表せ.

(2)  $S$  を  $a, b, t$  を用いて表せ.

(3)  $t$  が 0 でない実数全体を動くとき,  $S$  の最小値を  $a, b$  を用いて表せ.

- 4 (1) 3辺の長さが1,  $a$ ,  $b$ である三角形が作れるとき, 点  $(a, b)$  の存在する範囲を  $ab$  平面上に図示せよ.
- (2) 2辺の長さが  $a$ ,  $b$ である面積1の三角形が作れるとき, 点  $(a, b)$  の存在する範囲を  $ab$  平面上に図示せよ.
- (3)  $xy$  平面上の点  $P$  について, 頂点  $A(2, 0)$ , 内接円が  $x^2 + y^2 = 1$  である  $\triangle ABC$  を,  $P$  が辺  $BC$  上にあるように作れるとき, 点  $P$  の存在する範囲を図示せよ. ただし辺は両端を含む.

## 解答例

- 1 (1) (i)  $\{b_n\}$  は初項  $b_1 = 1$ , 公比  $-t$  の等比数列であるから ( $0 < t < 1$ )

$$b_n = 1 \cdot (-t)^{n-1} = (-t)^{n-1}$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= b_{n+1} = (-t)^n, \\ a_{n+2} - a_n &= (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ &= (-t)^n + (-t)^{n-1} = (-t+1)(-t)^{n-1} \end{aligned}$$

上の2式の辺々を掛けると

$$\begin{aligned} (a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n) &= (-t)^n \cdot (-t+1)(-t)^{n-1} \\ &= (1-t)(-t)^{2n-1} < 0 \end{aligned}$$

よって,  $a_{n+2}$  は  $a_n$  と  $a_{n+1}$  の間にある.

- (ii)  $a_1 = 0$ ,  $b_n = a_{n+1} - a_n$  より,  $n \geq 2$  のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (-t)^{k-1} = \frac{1 - (-t)^{n-1}}{1+t} \quad (0 < t < 1)$$

上式は,  $n = 1$  のときも成立するから  $a_n = \frac{1 - (-t)^{n-1}}{1+t} \dots (*)$

$0 < t < 1$  より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-t)^{n-1} = 0$  であるから, (\*) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1+t}$$

- (iii) (\*) および  $a_n = r$  より ( $n$  は3以上の奇数),  $(-t)^{n-1} = t^{n-1}$  に注意して

$$\frac{1 - t^{n-1}}{1+t} = r \quad \text{整理すると} \quad t^{n-1} + rt + r - 1 = 0$$

$f(t) = t^{n-1} + rt + r - 1$  とおくと,  $0 < t < 1$  において

$$f'(t) = (n-1)t^{n-2} + r > 0$$

$0 < t < 1$  において,  $f(t)$  は単調増加

$$f(0) = r - 1 < 0, \quad f(1) = 2r > 0$$

$f(t) = 0$  となる  $0 < t < 1$  がただ1つ存在する.

よって,  $a_n = r$  となる  $t$  がただ1つ存在する.

(2)  $c_n = (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$  とすると

$$c_{n+1} = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right), \quad c_{n+2} = (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^{n+2}}\right)$$

これから

$$\begin{aligned} c_{n+2} - c_n &= (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\right), \\ c_{n+2} - c_{n+1} &= (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

上の2式の辺々を掛けると

$$(c_{n+2} - c_n)(c_{n+2} - c_{n+1}) = \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\right) \left(2 + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}\right) < 0$$

したがって、 $c_{n+2}$  は  $c_n$  と  $c_{n+1}$  の間にある。

$c_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2^{2n-1}}$ ,  $c_{2n} = -1 - \frac{1}{2^{2n}}$  であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n-1} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n} = -1$$

よって、数列  $\{c_n\}$  は収束しない。

**補足** 例えば、数列  $\{d_n\}$  が、 $d_n > 0$  を満たす単調減少であるとき、 $d_n$  は収束し、その極限値を  $\alpha$  とする。

$$c_n = (-1)^{n-1} d_n$$

とおくと

$$\begin{aligned} c_{n+2} - c_n &= (-1)^{n-1} (d_{n+2} - d_n), \\ c_{n+2} - c_{n+1} &= (-1)^{n-1} (d_{n+2} + d_{n+1}) \end{aligned}$$

したがって

$$(c_{n+2} - c_n)(c_{n+2} - c_{n+1}) = (d_{n+2} - d_n)(d_{n+2} + d_{n+1}) < 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n-1} = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n} = -\alpha$$

また、 $d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  も  $d_n > 0$  を満たす単調減少列である<sup>1</sup>. ■

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_tech.2017.kouki.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2017.kouki.pdf) の p.9 を参照.

**2** (1) 2以上の自然数  $n$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

(2)  $x \geq 0$  のとき,  $1 - \cos x \geq 0$  であるから

$$\int_0^x (1 - \cos t) dt = \left[ t - \sin t \right]_0^x = x - \sin x \geq 0$$

$x \geq 0$  のとき,  $x - \sin x \geq 0$  であるから

$$\int_0^x (t - \sin t) dt = \left[ \frac{t^2}{2} + \cos t \right]_0^x = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \geq 0 \quad (*)$$

$x \geq 0$  のとき,  $\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \geq 0$  であるから

$$\int_0^x \left( \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t \right) dt = \left[ \frac{t^3}{6} - t + \sin t \right]_0^x = \frac{x^3}{6} - x + \sin x \geq 0$$

$x \geq 0$  のとき,  $\frac{x^3}{6} - x + \sin x \geq 0$  であるから

$$\begin{aligned} \int_0^x \left( \frac{t^3}{6} - t + \sin t \right) dt &= \left[ \frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{2} - \cos t \right]_0^x \\ &= \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1 - \cos x \geq 0 \quad (**) \end{aligned}$$

(\*), (\*\*) より,  $x \geq 0$  のとき

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$$

(3)  $\frac{1}{k} \geq 0$  であるから, (2) の結論から

$$\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{24k^4} \leq 1 - \cos \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2k^2}$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{24k^2} \leq k^2 - k^2 \cos \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$  であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{24k^2} \right) &\leq \sum_{k=1}^n \left( k^2 - k^2 \cos \frac{1}{k} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \\ \frac{n}{2} - \frac{1}{24} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq \sum_{k=1}^n \left( k^2 - k^2 \cos \frac{1}{k} \right) \leq \frac{n}{2} \end{aligned}$$

(1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} - \frac{1}{24} \left( 2 - \frac{1}{n} \right) &\leq \sum_{k=1}^n \left( k^2 - k^2 \cos \frac{1}{k} \right) \leq \frac{n}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( k^2 - k^2 \cos \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right\} = \frac{1}{2}$  であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( k^2 - k^2 \cos \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2}$$

■

- 3 (1)  $H$  と直線  $y = t$  との交点を  $P(s, t)$ ,  $Q(-s, t)$  とおくと ( $s > 0$ )

$$\frac{s^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{a\sqrt{t^2 + b^2}}{b}$$

$H$  上の点  $P$ ,  $Q$  における接線の方程式は, それぞれ

$$\frac{sx}{a^2} - \frac{ty}{b^2} = 1, \quad -\frac{sx}{a^2} - \frac{ty}{b^2} = 1 \quad (t \neq 0)$$

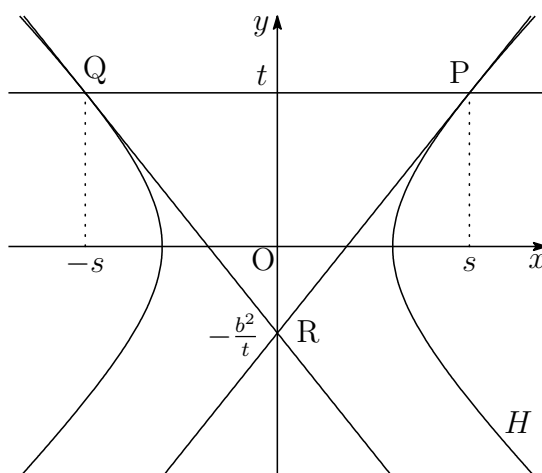
これらの2直線の交点は, これらの辺々の和および差をとることにより

$$-\frac{2ty}{b^2} = 2, \quad \frac{2sx}{a^2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 0, \quad y = -\frac{b^2}{t}$$

よって, 求める交点の座標は  $R\left(0, -\frac{b^2}{t}\right)$

- (2) (1) の結果から,  $\triangle PQR$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2s \left| t - \left(-\frac{b^2}{t}\right) \right| = \frac{a\sqrt{t^2 + b^2}}{b} \cdot \frac{t^2 + b^2}{|t|} = \frac{a(t^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{b|t|}$$



- (3) (2) の結果から  $S = \frac{a}{b} \left( \frac{t^2 + b^2}{t^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{b} \left( t^{\frac{4}{3}} + \frac{b^2}{t^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}$

ここで, 3 正数  $t^{\frac{4}{3}}$ ,  $\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}$ ,  $\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}$  の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t^{\frac{4}{3}} + \frac{b^2}{t^{\frac{2}{3}}} = t^{\frac{4}{3}} + \frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}} + \frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}} \geq 3\sqrt[3]{t^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}} = 3 \left( \frac{b^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\left( t^{\frac{4}{3}} + \frac{b^2}{t^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} \geq \frac{3\sqrt{3}b^2}{2} \quad \text{であるから} \quad S \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} ab$$

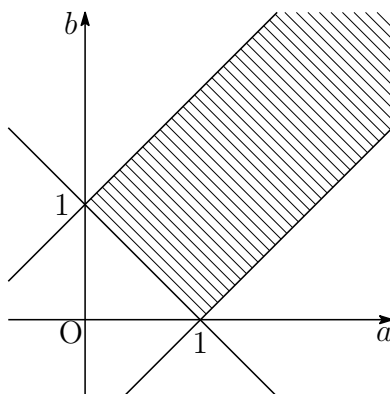
$t^{\frac{4}{3}} = \frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}$ , すなわち,  $|t| = \frac{b}{\sqrt{2}}$  のとき,  $S$  は最小値  $\frac{3\sqrt{3}}{2} ab$  をとる. ■

4 (1) 3辺の長さが1,  $a$ ,  $b$ の三角形の成立条件は

$$|a - b| < 1 < a + b \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -1 < a - b < 1 \\ a + b > 1 \end{cases}$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} a - 1 < b < a + 1 \\ b > -a + 1 \end{cases}$$

よって, 求める領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含まない.

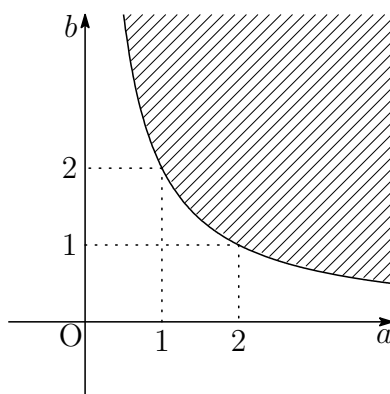


(2) 長さ  $a$ ,  $b$ の2辺のなす角を  $\theta$  とすると

$$\frac{1}{2}ab \sin \theta = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta = \frac{2}{ab}$$

$$0 < \sin \theta \leq 1 \quad \text{より} \quad 0 < \frac{2}{ab} \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad ab \geq 2$$

よって, 求める領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



(3) 点  $A(2, 0)$  を極とする円  $x^2 + y^2 = 1$  の極線は  $2x = 1$

極線  $2x = 1$  と円  $x^2 + y^2 = 1$  の交点は  $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

円  $x^2 + y^2 = 1$  上の点  $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  における接線を  $l_1, l_2$  とする.

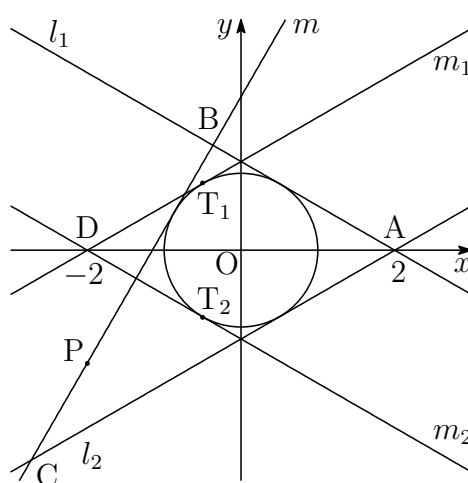
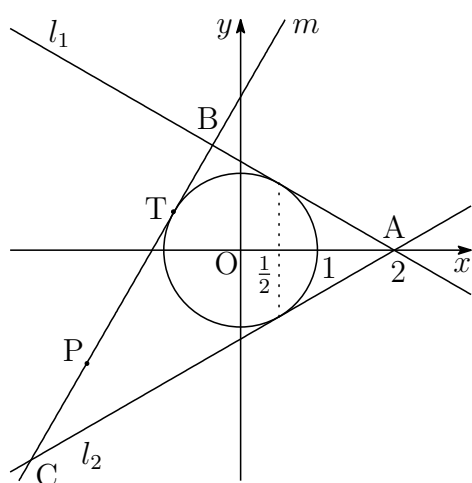
$$l_1: x + \sqrt{3}y = 2, \quad l_2: x - \sqrt{3}y = 2$$

直線  $BC$  を  $m$  とし,  $m$  と円  $x^2 + y^2 = 1$  の接点を  $T(\cos\theta, \sin\theta)$  とする.

$l_1, l_2$  および 2 点  $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  と  $y$  軸に関して対称な直線および点を

$$m_1: -x + \sqrt{3}y = 2, \quad m_2: -x - \sqrt{3}y = 2$$

$$T_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad T_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



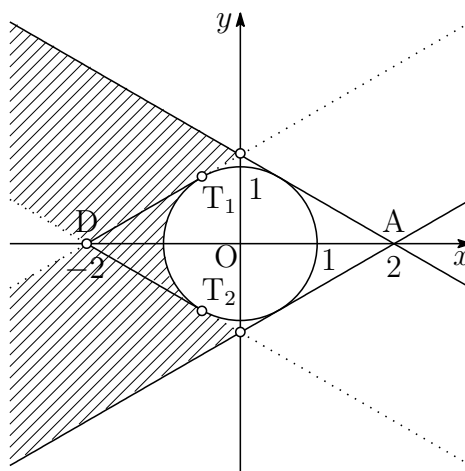
円  $x^2 + y^2 = 1$  上の点  $T(\cos \theta, \sin \theta)$  における接線

$$m : x \cos \theta + y \sin \theta = 1 \quad \left( \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3} \right)$$

の包絡線と領域

$$\begin{cases} x + \sqrt{3}y \leq 2 \\ x - \sqrt{3}y \leq 2 \end{cases}$$

の共通部分である。よって、求める領域は下の図の斜線部分である。境界線は実線部分を含み、点線部および  $\circ$  は含まない。



円  $C : x^2 + y^2 = r^2$  の外部の点  $P(a, b)$  から  $C$  に引いた 2 本の接線の接点を  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$  とする。2 本の接線

$$x_1x + y_1y = r^2, \quad x_2x + y_2y = r^2$$

は点  $P(a, b)$  を通るから

$$ax_1 + by_1 = r^2, \quad ax_2 + by_2 = r^2$$

上の 2 式から直線  $l : ax + by = r^2$  は 2 点  $M, N$  を通る。

このとき、 $l$  を  $P$  を極とする  $C$  の極線という。

