令和４年度　滋賀医科大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和 4 年 2 月 25 日

- 問題　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$　数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\textbf{1}}$ 実数 a, b, r について，r が a と b の間にあるとは，$a<r<b$ または $b<r<a$ が成り立つことである．したがって $a=b$ のときは，a と b の間にある実数はない．

(1) t を 0 と 1 の間にある実数とする．数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=0$ であり，$b_n=a_{n+1}-a_n$ で定まる階差数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=1$，公比 $-t$ の等比数列となっている．

(i) a_{n+2} は a_n と a_{n+1} の間にあることを示せ．

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(iii) 0 と 1 の間にある実数 r と 3 以上の奇数 n に対して，$a_n=r$ となるような t がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) すべての n に対して c_{n+2} が c_n と c_{n+1} の間にあるような数列 $\{c_n\}$ で，収束しない例を 1 つ作れ．

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) 2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$ を示せ．

(2) $x \geqq 0$ のとき，$\displaystyle\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24} \leqq 1-\cos x \leqq \frac{x^2}{2}$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k^2\cos\frac{1}{k}\right)$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{3}}$ a, b を正の定数とし，xy 平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

を H とする．0 でない実数 t に対して，直線 $y=t$ と H の交点を P，Q とし，P における H の接線と Q における H の接線の交点を R とする．△PQR の面積を S とおく．

(1) R の座標を b, t を用いて表せ．

(2) S を a, b, t を用いて表せ．

(3) t が 0 でない実数全体を動くとき，S の最小値を a, b を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 3 辺の長さが 1, a, b である三角形が作れるとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

(2) 2 辺の長さが a, b である面積 1 の三角形が作れるとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

(3) xy 平面上の点 P について，頂点 A$(2,\ 0)$，内接円が $x^2 + y^2 = 1$ である △ABC を，P が辺 BC 上にあるように作れるとき，点 P の存在する範囲を図示せよ．ただし辺は両端を含む．

解答例

$\boxed{1}$ (1) (i) $\{b_n\}$ は初項 $b_1=1$，公比 $-t$ の等比数列であるから $(0<t<1)$

$$b_n = 1\cdot(-t)^{n-1} = (-t)^{n-1}$$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ より

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= b_n = (-t)^n, \\ a_{n+2} - a_n &= (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ &= (-t)^n + (-t)^{n-1} = (-t+1)(-t)^{n-1} \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を掛けると

$$\begin{aligned} (a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n) &= (-t)^n\cdot(-t+1)(-t)^{n-1} \\ &= (1-t)(-t)^{2n-1} < 0 \end{aligned}$$

よって，a_{n+2} は a_n と a_{n+1} の間にある．

(ii) $a_1 = 0,\ b_n = a_{n+1} - a_n$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1}(-t)^{k-1} = \frac{1-(-t)^{n-1}}{1+t} \quad (0<t<1)$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$a_n = \dfrac{1-(-t)^{n-1}}{1+t}$　$\cdots(*)$

$0<t<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-t)^{n-1} = 0$ であるから，$(*)$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\frac{1}{1+t}}$$

(iii) $(*)$ および $a_n = r$ より (n は 3 以上の奇数)，$(-t)^{n-1} = t^{n-1}$ に注意して

$$\frac{1-t^{n-1}}{1+t} = r \quad \text{整理すると} \quad t^{n-1} + rt + r - 1 = 0$$

$f(t) = t^{n-1} + rt + r - 1$ とおくと，$0<t<1$ において

$$f'(t) = (n-1)t^{n-2} + r > 0$$

$0<t<1$ において，$f(t)$ は単調増加

$$f(0) = r-1 < 0, \quad f(1) = 2r > 0$$

$f(t) = 0$ となる $0<t<1$ がただ 1 つ存在する．

よって，$a_n = r$ となる t がただ 1 つ存在する．

(2) $c_n = (-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$ とすると

$$c_{n+1} = (-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right), \quad c_{n+2} = (-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^{n+2}}\right)$$

これから

$$\begin{aligned} c_{n+2} - c_n &= (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\right), \\ c_{n+2} - c_{n+1} &= (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を掛けると

$$(c_{n+2} - c_n)(c_{n+2} - c_{n+1}) = \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\right)\left(2 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}}\right) < 0$$

したがって，c_{n+2} は c_n と c_{n+1} の間にある．

$c_{2n-1} = 1 + \dfrac{1}{2^{2n-1}}$，$c_{2n} = -1 - \dfrac{1}{2^{2n}}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n-1} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} c_{2n} = -1$$

よって，数列 $\{c_n\}$ は収束しない．

補足 例えば，数列 $\{d_n\}$ が，$d_n > 0$ を満たす単調減少であるとき，d_n は収束し，その極限値を α とする．

$$c_n = (-1)^{n-1} d_n$$

とおくと

$$\begin{aligned} c_{n+2} - c_n &= (-1)^{n-1}(d_{n+2} - d_n), \\ c_{n+2} - c_{n+1} &= (-1)^{n-1}(d_{n+2} + d_{n+1}) \end{aligned}$$

したがって

$$(c_{n+2} - c_n)(c_{n+2} - c_{n+1}) = (d_{n+2} - d_n)(d_{n+2} + d_{n+1}) < 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n-1} = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} c_{2n} = -\alpha$$

また，$d_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ も $d_n > 0$ を満たす単調減少列である [1]． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf の p.9 を参照．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2 以上の自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$
$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$
$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n}$$

(2) $x \geqq 0$ のとき，$1 - \cos x \geqq 0$ であるから

$$\int_0^x (1 - \cos t)\, dt = \Big[\, t - \sin t \, \Big]_0^x = x - \sin x \geqq 0$$

$x \geqq 0$ のとき，$x - \sin x \geqq 0$ であるから

$$\int_0^x (t - \sin t)\, dt = \left[\, \frac{t^2}{2} + \cos t \, \right]_0^x = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \geqq 0 \qquad (*)$$

$x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^2}{2} - 1 + \cos x \geqq 0$ であるから

$$\int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - 1 + \cos t \right) dt = \left[\, \frac{t^3}{6} - t + \sin t \, \right]_0^x = \frac{x^3}{6} - x + \sin x \geqq 0$$

$x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^3}{6} - x + \sin x \geqq 0$ であるから

$$\int_0^x \left(\frac{t^3}{6} - t + \sin t \right) dt = \left[\, \frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{2} - \cos t \, \right]_0^x$$
$$= \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1 - \cos x \geqq 0 \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より，$x \geqq 0$ のとき

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leqq 1 - \cos x \leqq \frac{x^2}{2}$$

(3) $\dfrac{1}{k} \geqq 0$ であるから，(2) の結論から

$$\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{24k^4} \leqq 1 - \cos\frac{1}{k} \leqq \frac{1}{2k^2}$$

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{24k^2} \leqq k^2 - k^2\cos\dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24k^2}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - k^2\cos\frac{1}{k}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}$$
$$\frac{n}{2} - \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqq \sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - k^2\cos\frac{1}{k}\right) \leqq \frac{n}{2}$$

(1) の結果から

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{24}\left(2 - \frac{1}{n}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - k^2\cos\frac{1}{k}\right) \leqq \frac{n}{2}$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - k^2\cos\frac{1}{k}\right) \leqq \frac{1}{2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right\} = \frac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - k^2\cos\frac{1}{k}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) H と直線 $y=t$ との交点を $\mathrm{P}(s,\ t)$，$\mathrm{Q}(-s,\ t)$ とおくと $(s>0)$

$$\frac{s^2}{a^2}-\frac{t^2}{b^2}=1 \quad ゆえに \quad s=\frac{a\sqrt{t^2+b^2}}{b}$$

H 上の点 P，Q における接線の方程式は，それぞれ

$$\frac{sx}{a^2}-\frac{ty}{b^2}=1, \quad -\frac{sx}{a^2}-\frac{ty}{b^2}=1 \quad (t\neq 0)$$

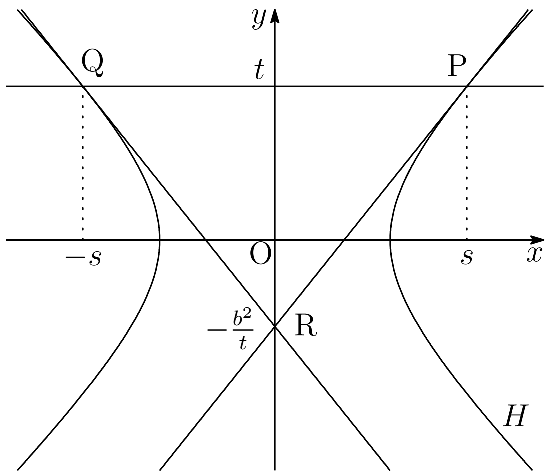
これらの 2 直線の交点は，これらの辺々の和および差をとることにより

$$-\frac{2ty}{b^2}=2, \quad \frac{2sx}{a^2}=0 \quad ゆえに \quad x=0,\ y=-\frac{b^2}{t}$$

よって，求める交点の座標は $\mathbf{R}\left(\mathbf{0},\boldsymbol{-\frac{b^2}{t}}\right)$

(2) (1) の結果から，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2s\left|t-\left(-\frac{b^2}{t}\right)\right|=\frac{a\sqrt{t^2+b^2}}{b}\cdot\frac{t^2+b^2}{|t|}=\boldsymbol{\frac{a(t^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{b|t|}}$$



(3) (2) の結果から $\quad S=\frac{a}{b}\left(\frac{t^2+b^2}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{a}{b}\left(t^{\frac{4}{3}}+\frac{b^2}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

ここで，3 正数 $t^{\frac{4}{3}}$, $\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t^{\frac{4}{3}}+\frac{b^2}{t^{\frac{2}{3}}}=t^{\frac{4}{3}}+\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}+\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}\geqq 3\sqrt[3]{t^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}}=3\left(\frac{b^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$\left(t^{\frac{4}{3}}+\frac{b^2}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\geqq\frac{3\sqrt{3}b^2}{2}$ であるから $\qquad S\geqq\frac{3\sqrt{3}}{2}ab$

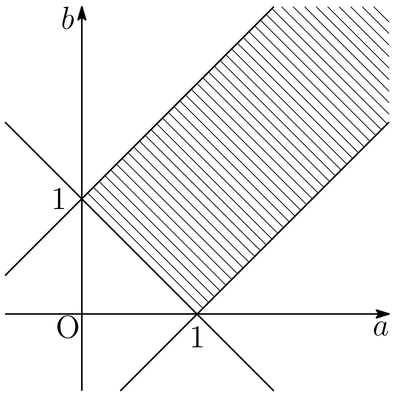
$t^{\frac{4}{3}}=\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}$，すなわち，$|t|=\frac{b}{\sqrt{2}}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}ab}$ をとる． ■

$\boxed{4}$ (1) 3 辺の長さが 1, a, b の三角形の成立条件は

$$|a-b| < 1 < a+b \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -1 < a-b < 1 \\ a+b > 1 \end{cases}$$

したがって $\begin{cases} a-1 < b < a+1 \\ b > -a+1 \end{cases}$

よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．

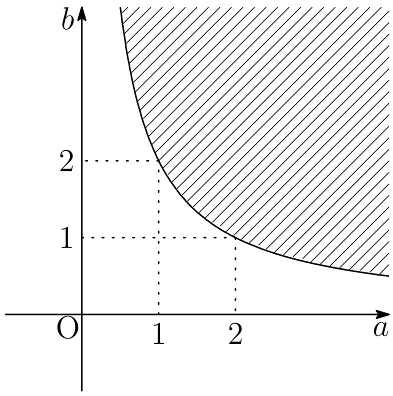


(2) 長さ 1 の辺の対角を θ とすると

$$\frac{1}{2}ab\sin\theta = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta = \frac{2}{ab}$$

$0 < \sin\theta \leqq 1$ より $0 < \dfrac{2}{ab} \leqq 1$ すなわち $ab \geqq 2$

よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



(3) 点 A(2, 0) を極とする円 $x^2+y^2=1$ の極線は　$2x=1$

極線 $2x=1$ と円 $x^2+y^2=1$ の交点は　$\left(\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

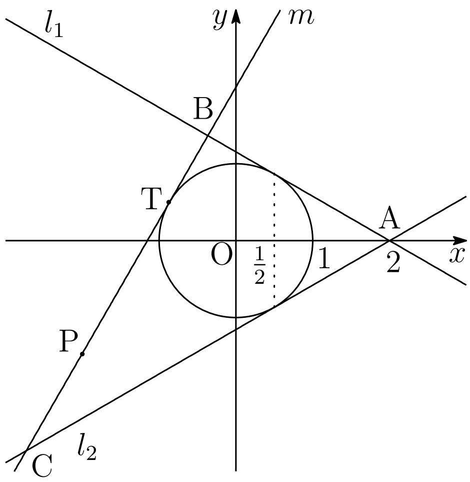
円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における接線を $l_1,\ l_2$ とする．

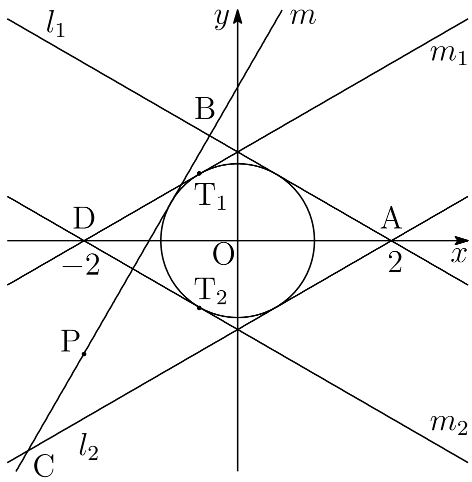
$$l_1 : x+\sqrt{3}y=2, \quad l_2 : x-\sqrt{3}y=2$$

直線 BC を m とし，m と円 $x^2+y^2=1$ の接点を $\mathrm{T}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする．
$l_1,\ l_2$ および 2 点 $\left(\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と y 軸に関して対称な直線および点を

$$m_1 : -x+\sqrt{3}y=2, \quad m_2 : -x-\sqrt{3}y=2$$

$$\mathrm{T}_1\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \mathrm{T}_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$





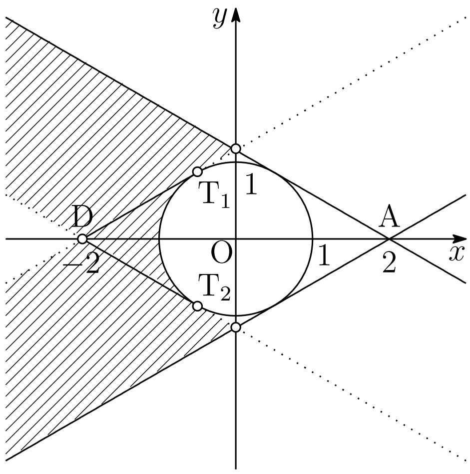
円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{T}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線

$$m : x\cos\theta + y\sin\theta = 1 \quad \left(\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}\right)$$

の包絡線と領域

$$\begin{cases} x+\sqrt{3}y \leqq 2 \\ x-\sqrt{3}y \leqq 2 \end{cases}$$

の共通部分である．よって，求める領域は下の図の斜線部分である．境界線は実線部分を含み，点線部および ∘ は含まない．

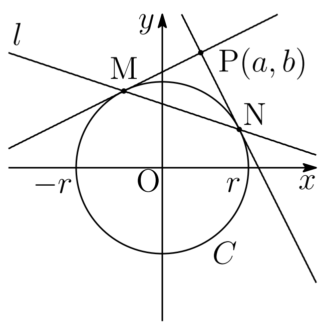


円 $C : x^2+y^2=r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ とする．2 本の接線

$$x_1x+y_1y=r^2, \quad x_2x+y_2y=r^2$$

は点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$ax_1+by_1=r^2, \quad ax_2+by_2=r^2$$



上の 2 式から直線 $l : ax+by=r^2$ は 2 点 M，N を通る．
このとき，l を P を極とする C の極線という．