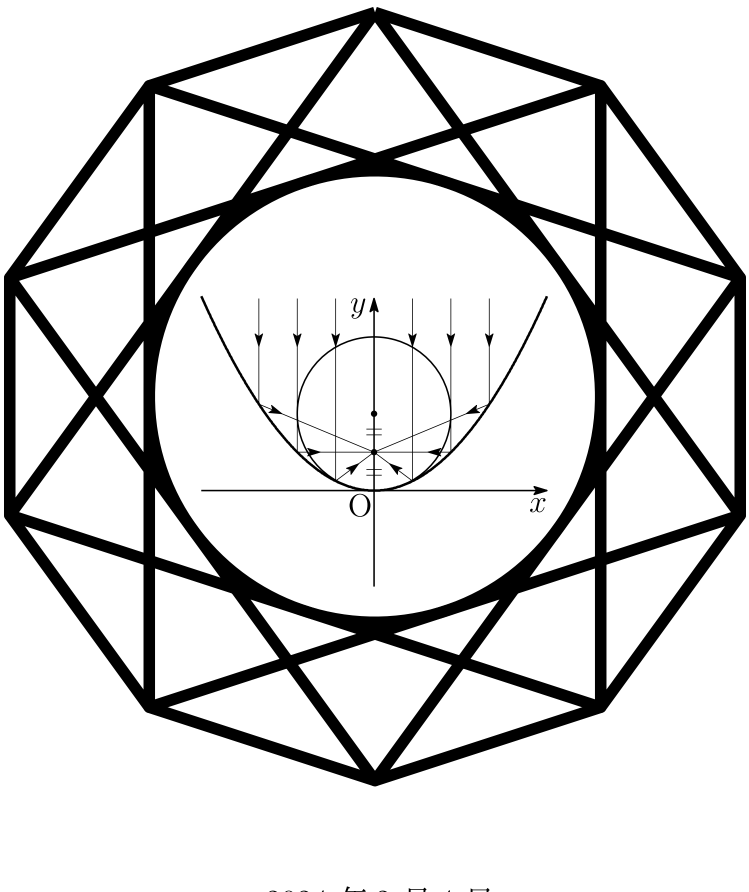
入試の軌跡

大学入試　問題集

2022 年 国立大学

理系数学



2024 年 2 月 4 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

序

本書 [PDF] は，受験指導＋ICT 教材をコンセプトとした入試問題集です．本書の構成は，次のとおりです．

Pick Up　類比問題　頻出問題　応用問題　発展問題　索引

令和 4 年 (2022 年) 度に次の大学で実施された一般前期試験 (理系問題) をすべて掲載しました．なお，一橋大学は理系レベルのため掲載しました．

北海道大学	東北大学	筑波大学	千葉大学	東京大学
東京工業大学	一橋大学	名古屋大学	京都大学	大阪大学
神戸大学	広島大学	山口大学	九州大学	九州工業大学
福岡教育大学	佐賀大学	長崎大学	熊本大学	大分大学
宮崎大学	鹿児島大学	琉球大学		

パソコン・スマートフォン・電子黒板での使用を想定して作成しています．

1. 電子黒板を利用される場合は，電子黒板の PDF ブラウザをご使用ください．ファイルサイズに優れ，ハイパーリンク・拡縮・スワイプ・書き込みもスムーズに機能します．

2. スマートフォンでの使用も想定し，問題と解答に相互リンクを施しています．

令和 4 年 5 月　西村　信一

目 次

1 Pick Up

1.1 北海道大学

□□ 1.1 ［北大理系 2022］ $\boxed{2}$

a は $a \neq 1$ をみたす正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n, \cdots$ および $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots, \mathrm{Q}_n, \cdots$ が，すべての自然数 n について

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}} = \left(0,\ \frac{a^{-n}}{1-a}\right)$$

をみたしているとする．また，P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．

(1) x_{n+2} を $a,\ x_n,\ x_{n+1}$ で表せ．

(2) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $y_1 = \dfrac{a}{(1-a)^2},\ y_2 - y_1 = 1$ のとき，数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ．

□□ 1.2 ［北大理系 2022］ $\boxed{3}$

以下の問いに答えよ．

(1) 連立不等式 $x \geqq 2,\ 2^x \leqq x^y \leqq x^2$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ．ただし，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ をみたすことを用いてよい．

(2) $a > 0$ に対して，連立不等式 $2 \leqq x \leqq 6,\ (x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$ の表す xy 平面上の領域の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

1.2 東北大学

□□ 1.3 ［東北大理系 2022］ $\boxed{5}$

座標空間内において，ベクトル

$$\vec{a} = (1,\ 2,\ 1),\quad \vec{b} = (1,\ 1, -1),\quad \vec{c} = (0,\ 0,\ 1)$$

が定める 2 直線

$$\ell : s\vec{a},\quad \ell' : t\vec{b} + \vec{c}\quad (s,\ t\ は実数)$$

を考える．点 A_1 を原点 $(0, 0, 0)$ とし，点 A_1 から直線 ℓ' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ とおく．次に，点 $\mathrm{B}_1(t_1\vec{b} + \vec{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$ とおく．同様に，点 $\mathrm{A}_k(s_k\vec{a})$ から直線 ℓ' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$，点 $\mathrm{B}_k(t_k\vec{b} + \vec{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を $\mathrm{B}_k\mathrm{A}_{k+1}$ とする手順を繰り返して，点 $\mathrm{A}_n(s_n\vec{a})$，$\mathrm{B}_n(t_n\vec{b} + \vec{c})$ (n は正の整数) を定める．

(1) s_n を用いて s_{n+1} を表せ．

(2) 極限値 $S = \lim_{n\to\infty} s_n,\ T = \lim_{n\to\infty} t_n$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $S,\ T$ に対して，点 A，B をそれぞれ $\mathrm{A}(S\vec{a})$，$\mathrm{B}(T\vec{b} + \vec{c})$ とおくと，直線 AB は 2 直線 $\ell,\ \ell'$ の両方と直交することを示せ．

□□ 1.4 ［東北大理系 2022］ $\boxed{6}$

半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と，半径が r の球を考える．直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき，直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ．

1.3　筑波大学

□□ 1.5　［筑波大 2022］ $\boxed{3}$

$0 < t < 1$ とする．平行四辺形 ABCD について，線分 AB，BC，CD，DA を $t : 1-t$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{D_1}$ とする．さらに，点 $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{D_2}$ および $\mathrm{A_3}$，$\mathrm{B_3}$，$\mathrm{C_3}$，$\mathrm{D_3}$ を次の条件を満たすように定める．

(条件) $k = 1,\ 2$ について，点 A_{k+1}，B_{k+1}，C_{k+1}，D_{k+1} は，それぞれ線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$，$\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$，$\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k$，$\mathrm{D}_k\mathrm{A}_k$ を $t : 1-t$ に内分する．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} = p\vec{a} + q\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ を満たす実数 p，q，x，y を t を用いて表せ．

(2) 四角形 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ は平行四辺形であることを示せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}$ が平行となるような t の値を求めよ．

1.4　千葉大学

□□ 1.6　［千葉大 2022］ $\boxed{1}$

円周を 12 等分するように点 $\mathrm{A_1},\ \mathrm{A_2},\ \mathrm{A_3}, \cdots, \mathrm{A_{12}}$ が時計回りに並んでいる．また，白球 2 個と黒球 4 個が入った袋がある．点 P を，次の操作によって 12 個の点上を移動させる．

操作：袋から球を 1 つ取り出した後にサイコロを投げる．白球ならば時計回りに，黒球ならば反時計回りに，サイコロの目の数だけ P を移動させる．取り出した球は袋に戻さないこととする．

P を最初に点 $\mathrm{A_1}$ に置く．操作を 1 回行い，P が $\mathrm{A_1}$ から移動した点を Q とおく．続けて操作を 1 回行い，P が Q から移動した点を R とおく．もう一度操作を行い，P が R から移動した点を S とおく．

(1) $\mathrm{R} = \mathrm{A_1}$ となる確率を求めよ．

(2) 3 点 Q，R，S を結んでできる図形が正三角形となる確率を求めよ．

□□ 1.7 ［千葉大 2022］ $\boxed{2}$

座標平面において，原点Oと点A(1, 0)と点B(0, 1)がある．$0 < t < 1$に対し，線分BO，OA，ABのそれぞれを$t : (1-t)$に内分する点をP，Q，Rとする．

(1) △PQRの面積をtの式で表せ．

(2) △PQRが二等辺三角形になるときのtの値をすべて求めよ．

(3) $\theta = \angle \mathrm{RPQ}$とする．(2)のそれぞれの場合に$\cos\theta$を求めよ．

□□ 1.8 ［千葉大 2022］ $\boxed{4}$

0以上9999以下の整数を4桁で表示し，以下の操作を行うこととする．ただし，4桁で表示するとは，整数が100以上999以下の場合は千の位の数字を0，10以上99以下の場合は千の位と百の位の数字を0，1以上9以下の場合は千の位と百の位と十の位の数字を0，そして0はどの位の数字も0とすることである．

操作： 千の位の数字と十の位の数字を入れ換える．さらに，百の位の数字と一の位の数字を入れ換える．

また，整数Lに対し，操作によって得られた整数を$\overline{L}$と表す．

(1) Mを0以上9999以下の整数とし，$M = 100x + y$のように整数x, y $(0 \leqq x \leqq 99,\ 0 \leqq y \leqq 99)$を用いて表す．操作によって得られた$\overline{M}$が$M$の$\dfrac{2}{3}$倍に3を足した数に等しいならば，$-197x + 298y = 9$が成り立つことを証明せよ．

(2) Nが0以上9999以下の整数ならば，操作によって得られた整数$\overline{N}$はNの$\dfrac{2}{3}$倍に1を足した数と等しくならないことを証明せよ．

□□ 1.9 ［千葉大 2022］ $\boxed{6}$

座標空間において，原点Oと点A(1, 0, −1)と点B(0, 5, 0)がある．実数tを用いて$t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$と表される点全体を$\ell$とする．また，$xy$平面上の$y = x^2$を満たす点全体からなる曲線を$C$とする．

(1) 曲線C上の点P$(a,\ a^2,\ 0)$を固定する．ℓ上の点Qを，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$が垂直であるようにとる．このとき，点Qの座標を$a$を用いて表せ．

(2) 曲線C上の点Rとℓ上の点Sのうち，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$を最小にする点Rと点Sの組み合わせをすべて求めよ．また，そのときの$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$の値を求めよ．

□□ **1.10** ［千葉大 2022］ $\boxed{\mathbf{9}}$

r を正の実数とし，関数

$$f(x) = x + \frac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

を考える．

(1) $r = 1$ のとき，$f(x)$ はつねに増加することを示せ．

(2) 次の条件を満たす最大の正の実数 c を求めよ．
条件：$0 < r < c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する．

1.5 東京大学

□□ **1.11** ［東大理系 2022］ $\boxed{\mathbf{1}}$

次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $f(x)$ は区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において最小値を持つことを示せ．

(2) $f(x)$ の区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ．

□□ **1.12** ［東大理系 2022］ $\boxed{3}$

O を原点とする座標平面上で考える．座標平面上の 2 点 S$(x_1,\ y_1)$，T$(x_2,\ y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する．

不等式
$$0 \leqq x \leqq 3, \quad 0 \leqq y \leqq 3$$
が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 A$(3,\ 0)$，B$(3,\ 3)$ を考える．さらに，次の条件 (i)，(ii) をともに満たす点 P をとる．

(i) 点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y = x^2$ 上にある．

(ii) 点 P は，3 点 O，A，B のいずれからも十分離れている．

点 P の x 座標を a とする．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 次の条件 (iii)，(iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ．

(iii) 点 Q は領域 D の点である．

(iv) 点 Q は，4 点 O，A，B，P のいずれからも十分離れている．

(3) a は (1) で求めた範囲を動くとする．(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

1.6 東京工業大学

□□ **1.13** ［東工大 2022］ $\boxed{1}$

$a,\ b$ を実数とし，$f(z) = z^2 + az + b$ とする．$a,\ b$ が

$$|a| \leqq 1, \quad |b| \leqq 1$$

を満たしながら動くとき，$f(z) = 0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

□□ **1.14** ［東工大 2022］ $\boxed{5}$

a は $0 < a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数とし，$f(x) = \dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-ax\right)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の等式 $(*)$ を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ．

$$(*) \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

(2) $0 \leqq b < c \leqq 1$ を満たす実数 b, c について，不等式

$$f(b)(c-b) \leqq \int_b^c f(x)\,dx \leqq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の試行を考える．

［試行］n 個の数 $1, 2, \cdots, n$ を出目とする．あるルーレットを k 回まわす．

この［試行］において，各 $i = 1, 2, \cdots, n$ について i が出た回数を $S_{n,k,i}$ とし，

$$(**) \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,k,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$$

が成り立つとする．このとき，(1) の等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

(4) (3) の［試行］において出た数の平均値を $A_{n,k}$ とし，$A_n = \lim\limits_{k\to\infty} A_{n,k}$ とする．$(**)$ が成り立つとき，極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ．

1.7 一橋大学

□□ **1.15** ［一橋大 2022］ $\boxed{1}$

$2^a3^b + 2^c3^d = 2022$ を満たす 0 以上の整数 a, b, c, d の組を求めよ．

□□ **1.16** ［一橋大 2022］ $\boxed{4}$

t を実数とし，座標空間に点 $\mathrm{A}(t-1,\ t,\ t+1)$ をとる．また，$(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$，$(0,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 1)$ を頂点とする立方体を D とする．点 P が D の内部およびすべての面上を動くとき，線分 AP の動く範囲を W とし，W の体積を $f(t)$ とする．

(1) $f(-1)$ を求めよ．

(2) $f(t)$ のグラフを描き，$f(t)$ の最小値を求めよ．

1.8　名古屋大学

□□ 1.17　［名大理系 2022］ $\boxed{1}$

a，b を実数とする．

(1) 整式 x^3 を 2 次式 $(x-a)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) 実数を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x+b$ とする．b の値に応じて，このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ．

□□ 1.18　［名大理系 2022］ $\boxed{3}$

複素数平面上に，原点 O を頂点の 1 つとする正六角形 OABCDE が与えらえている．ただしその頂点は時計の針の進む方向と逆向きに O，A，B，C，D，E とする．互いに異なる 0 でない複素数 α, β, γ が,

$$0 \leqq \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leqq \pi, \quad 4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0,$$
$$2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=0$$

を満たし，α, β, γ のそれぞれが正六角形 OABCDE の頂点のいずれかであるとする．

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求め，α，β がそれぞれどの頂点か答えよ．

(2) 組 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ をすべて求め，それぞれの組について正六角形 OABCDE を複素数平面上に図示せよ．

1.9　京都大学

□□ 1.19　［京大理系 2022］ $\boxed{5}$

曲線 $C : y = \cos^3 x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする．$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ \cos^3 t)$ と原点 O，および $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 OPQR の面積を $f(t)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) S を求めよ．

(2) $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ．そのときの t を α とすると，$f(\alpha) = \dfrac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ であることを示せ．

(3) $\dfrac{f(\alpha)}{S} < \dfrac{9}{16}$ を示せ．

□□ 1.20　［京大理系 2022］ $\boxed{6}$

数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を次の式

$$x_1 = 0,\quad x_{n+1} = x_n + n + 2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

$$y_{3m+1} = 3m,\quad y_{3m+2} = 3m + 2,\quad y_{3m+3} = 3m + 4 \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

により定める．このとき，数列 $\{x_n - y_n\}$ の一般項を求めよ．

1.10　大阪大学

□□ 1.21　［阪大理系 2022］ $\boxed{2}$

$\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$ であることを示せ．

(2) $f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とするとき，$f(\cos\alpha) = 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\cos\alpha$ は無理数であることを示せ．

□□ 1.22　［阪大理系 2022］ $\boxed{3}$

正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える．t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ．

1.11　神戸大学

□□ **1.23**　［神戸大理系 2022］ $\boxed{\mathbf{2}}$

m を 3 以上の自然数，$\theta = \dfrac{2\pi}{m}$，C_1 を半径 1 の円とする．円 C_1 に内接する (すべての頂点が C_1 上にある) 正 m 角形を P_1 とし，P_1 に内接する (P_1 のすべての辺と接する) 円を C_2 とする．同様に，n を自然数とするとき，円 C_n に内接する正 m 角形を P_n とし，P_n に内接する円を C_{n+1} とする．C_n の半径を r_n，C_n の内側で P_n の外側の部分の面積を s_n とし，$f(m) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ とする．以下の問に答えよ．

(1) r_n，s_n の値を θ，n を用いて表せ．

(2) $f(m)$ の値を θ を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} f(m)$ を求めよ．

ただし，必要があれば $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ を用いてよい．

□□ **1.24**　［神戸大理系 2022］ $\boxed{\mathbf{4}}$

a を正の実数とし，双曲線 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ と直線 $y = \sqrt{a}\,x + \sqrt{a}$ が異なる 2 点 P，Q で交わっているとする．線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) s，t の値を a を用いて表せ．

(3) a が (1) で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) t の値を s を用いて表せ．

1.12　広島大学

□□ 1.25　［広大理系 2022］ $\boxed{2}$

a を正の実数，t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．座標平面上の 3 点 A$(0,\ a)$，B$(-1,\ 0)$，C$(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし，その中心が I$(0,\ t)$ であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\angle$IBC を θ とおく．t と a を，それぞれ θ を用いて表せ．

(2) a を t を用いて表せ．

(3) $\triangle$ABC の重心が内接円 S の周上にあるとき，t の値を求めよ．

(4) $\triangle$ABC の垂心が S の周上にあるとき，t の値を求めよ．ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており，その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ．

(5) $\triangle$ABC の外心が S の周上にあるとき，t のとり得る値をすべて求めよ．

1.13　山口大学

□□ 1.26　［山口大 2022］ $\boxed{1}$

関数 $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} - e$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の導関数および不定積分を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(x)|$ を求め，$y = |f(x)|$ のグラフを概形をかきなさい．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-4}^{4} |f(x)|\,dx$ の値を求めなさい．

□□ **1.27** ［山口大 2022］ $\boxed{4}$

xy 平面上の原点を O とし，2 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}_1(1,\ \sqrt{3})$ をとる．自然数 n に対して，x 座標が OP_n の長さを $\dfrac{3}{2}$ 倍して $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ を加えた値となる x 軸上の点を P_{n+1} とおく．P_n を通り直線 OQ_1 と平行な直線と，P_{n+1} を通り x 軸に垂直な直線との交点を Q_{n+1} とする．$\triangle \mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ を T_n とおく．次の問いに答えなさい．

(1) P_2 および P_4 の x 座標の値を求めなさい．

(2) P_n の x 座標の値を α_n とするとき，α_n を n を用いて表しなさい．

(3) $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OQ}_1$ の二等分線を l とする．自然数 n に対して，T_n の辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ と l の交点の座標を求めなさい．

(4) 自然数 n に対して，T_n から l によって切り取られる三角形の面積を s_n としたとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ の和を求めなさい．

□□ **1.28** ［山口大 2022］ $\boxed{7}$

整数全体を定義域とし，整数を値にとる関数 $f(n)$ が，次の条件 1，2 を満たしているとする．

条件 1 $f(0)=0$

条件 2 任意の整数 n に対し，$f(3+n)=f(3-n)$ かつ $f(7+n)=f(7-n)$ が成り立つ

整数全体を定義域とする関数 $g(n)$，$h(n)$ をそれぞれ，$g(n)=6-n$，$h(n)=14-n$ とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) 合成関数 $(h\circ g)(n)$ と $(g\circ h)(n)$ を求めなさい．

(2) 任意の整数 n に対し，2 つの等式 $(f\circ g)(n)=f(n)$ と $(f\circ h)(n)=f(n)$ が成り立つことを示しなさい．

(3) $f(2022)=0$ であることを示しなさい．

(4) 集合 A を，関数 $f(n)$ のとりうる値全体の集合，すなわち，$A=\{f(n)\,|\,n$ は整数$\}$ とする．このとき，集合 A の要素の個数は 5 以下であることを示しなさい．

1.14　九州大学

□□ 1.29　［九大理系 2022］ $\boxed{4}$

定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \cdots ①$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A)，(B)，(C) をもつ。

(A) $\displaystyle\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$

(B) $a \leqq c \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(C) 区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) \geqq h(x)$ ならば，

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqq \int_a^b h(x)\,dx$$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数，k，l は定数である。

以下，$f(x)$ を区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数とし，n を自然数とする。定積分の性質 $\boxed{\quad ア \quad}$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots ②$$

が成り立つことがわかる。$S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式 ② と定積分の性質 $\boxed{\quad イ \quad}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1) - f(0)}{n} \qquad \cdots ③$$

よって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx$ が成り立つ。

(1) 関数 $F(x)$，$G(x)$ が微分可能であるとき，

$$\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x)$$

が成り立つことを，導関数の定義に従って示せ。また，この等式と定積分の定義 ① を用いて，定積分の性質 (A) で $k=l=1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

を示せ。

(2) 定積分の定義 ① と平均値の定理を用いて，次を示せ。

$a<b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x)>0$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$

(3) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\quad ア \quad}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式 ② を示せ。

(4) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\quad イ \quad}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また，不等式 ③ を示せ。

1.15　九州工業大学

□□ **1.30**　［九工大 2022］ $\boxed{\mathbf{2}}$

関数

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}},\quad g(x)=\frac{x-2}{x}$$

がある．次に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})-\log\sqrt{x}\}$ を求めよ．

(2) 2 つの関数 $\sqrt{x(x+4)}$ と $\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})$ をそれぞれ微分せよ．

(3) $x>0$ のとき，不等式 $f(x)>g(x)$ を示せ．

(4) O を原点とする座標平面において，曲線 $y=g(x)$ と x 軸の交点を P とする．$t>2$ のとき，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と線分 OP および直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}S(t)$ を求めよ．

□□ **1.31**　［九工大 2022］ $\boxed{\mathbf{4}}$

数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\frac{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}}{3}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

で定める．次に答えよ．

(1) $a_n=n^2$ の場合を考える．このとき，b_n および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ を n を用いて表せ．

(2) $a_n=\sin n\theta\ (0<\theta<\pi)$ の場合を考える．$b_n=0$ がすべての n について成り立つとき θ を求めよ．

(3) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ の場合を考える．

　(i) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_{n+1}}$ を求めよ．

　(ii) b_n と a_{n+1} の大小を比較せよ．

(4) $a_1=1$，$a_2=4$，および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k$ が成り立つ場合を考える．

　(i) a_{n+1} と a_n の関係を表す等式を求めよ．

　(ii) b_n および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ を n を用いて表せ．

1.16 福岡教育大学

□□ **1.32** ［福教大 2022］ $\boxed{1}$

次の問いに答えよ．

(1) z，w を複素数とする．$|z|=1$ または $|w|=1$ のとき

$$|z\overline{w}+1|=|z+w|$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\overline{w}$ は w の共役な複素数を表す．

(2) a，r を実数とし，$a>0$，$r\neq 0$ とする．$\{b_n\}$ を初項 2，公比 r の等比数列とするとき，次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

$$a_1=a, \quad a_{n+1}={a_n}^r e^{b_n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) θ を $\sin\theta\neq 0$ である実数とし，n を自然数とする．n に関する数学的帰納法によって次の等式を示せ．

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}$$

□□ **1.33** ［福教大 2022］ $\boxed{2}$

n を 6 以下の自然数とする．1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，出た目の最大値が n となる確率を P_n とし，出た目の最小値が n となる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) P_1，p_1 をそれぞれ求めよ．

(2) P_n，p_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(3) $P_n \leqq p_n$ を満たす n をすべて求めよ．

1.17　佐賀大学

□□ **1.34**　［佐賀大 2022］ $\boxed{1}$

座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，B(2, 2, 0)，C(0, 2, 0) について

$$\mathrm{OD} = \mathrm{AD} = \mathrm{BD} = \mathrm{CD} = 2$$

を満たす点 D で，その z 座標が正，負になるものを，それぞれ D_1，D_2 とする．次の問に答えよ．

(1) 2 点 D_1，D_2 の座標を求めよ．

(2) 点 P(1, 1, 0) と実数 a，b について

$$a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OD}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

が 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}_1}$ に垂直であるとする．このとき，a，b の値を求めよ．

(3) 6 点 O，A，B，C，D_1，D_2 を頂点とする正八面体を V とし，V のすべての面に内側から接する球を S とする．このとき，S の半径を求めよ．また，V の各面と S とのすべての接点を頂点とする凸多面体について，その名称を答え，各辺の長さを求めよ．

□□ **1.35**　［佐賀大 2022］ $\boxed{3}$

関数 $f(x) = e^{-x^2}$ について，正の定数 a は $f''(a) = 0$ を満たすとする．次の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ．また，関数 $f(x)$ のグラフの凹凸を調べ，変曲点を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = f(a)$ で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

1.18　長崎大学

□□ **1.36**　［長崎大 2022］ $\boxed{3}$

以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) $a > 0$ とする．$a + a^{-1} = 18$ のとき，$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ および $a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 次の方程式

$$\log_{\frac{1}{3}}(9x^2)\cdot\log_3\left(\frac{x}{81}\right) = -12$$

を解け．

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．

$$\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta \geqq 1$$

(4) 次の方程式

$$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$$

を解け．ただし，i は虚数単位である．

□□ **1.37**　［長崎大 2022］ $\boxed{4}$

自然数 n に対して，以下で定義される x の 2 次関数 $f_n(x)$ がある．

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 3x^2\\
f_2(x) &= 3x^2 + 4x\\
&\ \ \vdots\\
f_{n+2}(x) &= 3x^2 + 4x\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt - \int_0^1 f_n(t)\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}$$

$a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2 の値を，それぞれ求めよ．

(2) a_{n+2} を，a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(3) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とする．b_n と a_n を，それぞれ n の式で表し，2 次関数 $f_n(x)$ を求めよ．

(4) $x = \alpha$ で，$f_{n+1}(x) - f_n(x)$ は，すべての自然数 n に対して一定の値 β をとる．このとき，α と β の値を求めよ．また，2 つの曲線 $y = f_n(x)$ と $y = f_{n+1}(x)$，および直線 $x = \alpha$ で囲まれる図形の面積 S_n を求めよ．

□□ **1.38** ［長大医 2022］ $\boxed{6}$

原点を O とする xy 座標平面上に，楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ と，C 上を動く点 $\mathrm{P}(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) C の方程式の両辺を x で微分し，P における C の接線の傾きを求めよ．また，この接線の方程式は $\dfrac{\cos\alpha}{a}x+\dfrac{\sin\alpha}{b}y=1$ であることを示せ．

(2) P における C の接線と x 軸および y 軸とで囲まれる三角形の面積 S の最小値を求めよ．また，このときの P を点 Q とし，Q における C の接線を l とする．Q の座標および l の方程式を，a，b を用いて表せ．

(3) C 上の点 $\mathrm{R}(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ における接線 m が，(2) で求めた l と垂直に交わるものとし，その交点を A とする．このとき，$\tan\beta$ の値および R の座標を，a，b を用いて表せ．

(4) (2) と (3) における Q，R，A について，線分 OQ，OR，OA の長さの平方 OQ^2，OR^2，OA^2 をそれぞれ a，b を用いて表し，線分 OQ，OR，OA の長さの大小を比較せよ．

1.19 熊本大学

□□ **1.39** ［熊大理系 2022］ $\boxed{1}$ ［熊大医 2022］ $\boxed{1}$

a を実数とし，座標空間の点 $\mathrm{P}_1(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(a+1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ を考える。G_1，G_2 をそれぞれ $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{QR}$，$\triangle\mathrm{P}_2\mathrm{QR}$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_1，P_2 を通る直線と，G_1，G_2 を通る直線は平行であることを示せ。

(2) 四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{G}_2\mathrm{G}_1$ の面積を求めよ。

(3) 四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{G}_2\mathrm{G}_1$ を底面とする四角錐 Q-$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{G}_2\mathrm{G}_1$ の体積を求めよ。

□□ **1.40** ［熊大理系 2022］ $\boxed{3}$

x，y を実数とし，$f(p)=p^2+xp+y$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) p の 2 次方程式 $f(p)=0$ が実数解を持つような点 $(x,\ y)$ 全体の集合を D とおく。D を xy 平面上に図示せよ。

(2) p の 2 次方程式 $f(p)=0$ は実数解を持つとする。$f(p)=0$ の実数解がすべて 1 以下で，少なくとも 1 つの実数解は 0 以上となるような点 $(x,\ y)$ 全体の集合を E とおく。E を xy 平面上に図示せよ。

(3) 点 $(x,\ y)$ が (2) の集合 E 全体を動くとき，x^2+y^2-4y+4 の最小値を求めよ。

1.20　大分大学

□□ 1.41　［大分大 2022］ $\boxed{1}$

四面体 OABC は

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{29},\quad |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \sqrt{11},\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{26},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 8$$

を満たす．t を実数とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をそれぞれ求めなさい．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めなさい．

(3) (2) の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をそれぞれ示しなさい．

(4) 四面体 OABC の体積を求めなさい．

□□ 1.42　［大分大 2022］ $\boxed{3}$

a，b を 0 でない定数とし，

$$f(x) = (x+a)(x-3a),\quad g(x) = b(x-3a)$$

とする．3 次関数 $F(x)$ は $F(0) = 0$ と $F'(x) = f(x)$ を満たし，2 次関数 $G(x)$ は $G'(x) = g(x)$ を満たす．ただし，放物線 $y = G(x)$ の頂点 $(x_0,\ y_0)$ に対して，関数 $F(x)$ は $x = x_0$ で極値 y_0 をとるものとする．

(1) 関数 $F(x)$ を求めなさい．

(2) 関数 $G(x)$ を求めなさい．

(3) 2 つの曲線 $y = F(x)$ と $y = G(x)$ の共有点が 1 個となるとき，b を a を用いて表しなさい．

□□ **1.43** ［大分大 2022］ $\boxed{4}$

自然数 k に対して

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\left|\sin\frac{(k^2+1)\pi}{4}\right|^n$$

とする．また自然数 m に対して

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$$

とする．

(1) a_1，a_2 を求めなさい．

(2) $a_k = 0$ となる k と $a_k = 1$ となる k をそれぞれ求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{b_{2m+1}}{m}$ を求めなさい．

1.21 宮崎大学

□□ **1.44** ［宮崎大 2022］ $\boxed{4}$

次の文章中の空欄を適当な数で埋めよ．

A，B，C という 3 つの袋がある．どの袋の中にも赤玉 2 個と白玉 1 個が入っている．この状態から始めて，3 つの袋の間で次のような 3 回の玉の移動を考える．

> 1 回目は，A から玉を 1 個取り出し，B へ入れる．1 回目の玉の移動が終わったときの B の中の赤玉の個数を N_1 とする．
>
> 続けて，2 回目は，B から玉を 1 個取り出し，C へ入れる．2 回目の玉の移動が終わったときの C の中の赤玉の個数を N_2 とする．
>
> 続けて，3 回目は，C から玉を 1 個取り出し，A へ入れる．3 回目の玉の移動が終わったときの A の中の赤玉の個数を N_3 とする．

ただし，袋 A から玉が取り出されるとき，どの玉も同じ確率で取り出されるものとする．袋 B，C から玉が取り出されるときも同様とする．

$N_1 = 2$ となる確率は $\boxed{\text{あ}}$ であり，$N_1 = 3$ となる確率は $\boxed{\text{い}}$ である．

「1 回目に赤玉が移動して 2 回目に白玉が移動する」確率は $\boxed{\text{う}}$ である．一方,「1 回目に白玉が移動して 2 回目に白玉が移動する」確率は $\boxed{\text{え}}$ である．よって，$N_2 = 2$ となる確率は $\boxed{\text{お}}$ である．

1 回目の移動が終わったときの，A の中の赤玉の個数に注意すると，$N_3 = 1$ となる確率は $\boxed{\text{か}}$ であり，$N_3 = 3$ となる確率は $\boxed{\text{き}}$ である．また，$N_3 = 2$ となる確率は $\boxed{\text{く}}$ である．

□□ **1.45** ［宮崎大 2022］ $\boxed{9}$

袋の中に，1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれた 10 枚の札が入っている．これをはじめの状態とする．袋から無作為に 1 枚の札を取り出し，取り出した札は袋の中に戻さないという操作を，はじめの状態から続けて n 回行う．n 回のうち，k 回目 $(k=1,2,\cdots,n)$ の操作で取り出された札に書かれた数を X_k とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $n=6$ のとき，$X_1,\ X_2,\cdots,X_6$ の組 $(X_1,\ X_2,\cdots,X_6)$ で，$X_1=1$，$X_2=2$ かつ次の $(*)$ を満たす例を 1 つ挙げよ．

$$(*)\ \text{すべての}\ i,\ j\ (i \neq j)\ \text{に対して}\ X_i+X_j \neq 10$$

(2) $n=7$ のとき，次の $(**)$ が必ず成り立つことを示せ．

$$(**)\ X_i+X_j=10\ \text{を満たす}\ i,\ j\ (i \neq j)\ \text{が存在する}$$

(3) $n=3$ のとき，3 回目の操作ではじめて (2) の $(**)$ が成り立つ確率を求めよ．

(4) $n=4$ のとき，4 回目の操作ではじめて (2) の $(**)$ が成り立つ確率を求めよ．

□□ **1.46** ［宮崎大 2022］ $\boxed{11}$

平面上に，長さ 2 の線分 AB を直径とする円 O_1 があり，その中心を M とする．AB を $t:(1-t)$ に内分する点を C とし，C を通る AB の垂線と O_1 の円周との交点の 1 つを D とする．ただし，$0<t<1$ とする．また，3 点 B，C，D を通る円を O_2 とし，その中心を N とする．さらに，3 点 D，M，N を通る円を O_3 とし，その中心を P とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 線分 CD の長さを t を用いて表せ．

(2) 2 つの円 O_2 と O_3 の面積が等しくなるときの t の値を求めよ．

(3) $\triangle$MNP の面積が最大となるときの t の値を求めよ．

(4) 4 点 B，M，P，N が同一円周上にあるときの t の値を求めよ．

1.22　鹿児島大学

□□ **1.47**　［鹿児島大 2022］ $\boxed{1}$

次の各問いに答えよ．

(1) AB $=5$，BC $=9$，CA $=6$ である三角形 ABC を考える．頂点 A から辺 BC に下ろした垂線 AH の長さを求めよ．

(2) $ab=4a-b$ を満たす正の整数 $a,\ b$ の組をすべて求めよ．

(3) 正 $2n$ 角形 $\mathrm{A_1A_2\cdots A_{2n-1}A_{2n}}$ の異なる 3 つの頂点を結んで三角形を作る．このような三角形の作り方は何通りあるか．なお，頂点が異なれば異なる三角形であるとする．またこのような三角形を任意に選ぶとき，それが直角三角形となる確率 p を求めよ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

□□ **1.48**　［鹿児島大 2022］ $\boxed{4}$

平行六面体 OAFB − CEGD を考える．t を正の実数とし，辺 OC を $1:t$ に内分する点を M とする．また三角形 ABM と直線 OG の交点を P とする．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$$

とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ t$ を用いて表せ．

(2) 四面体 OABE の体積を V_1 とし，四面体 OABP の体積を V_2 とするとき，これらの比 $V_1:V_2$ を求めよ．

(3) 三角形 OAB の重心を Q とする．直線 FC と直線 QP が平行になるとき，t の値を求めよ．

1.23　琉球大学

□□ **1.49**　［琉球大 2022］ $\boxed{1}$

$x>0$ の範囲で，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}$$

と定め，$y=f(x)$ で表される曲線を C とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 C の接線で，点 $(0,\ 1)$ を通り，傾きが負であるものを l とする．直線 l の傾きを求めよ．

(3) 曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ．

□□ **1.50**　［琉球大 2022］ $\boxed{2}$

d と n を正の整数とする．1 から n までの d 乗の和を $S_d(n)=1^d+2^d+\cdots+n^d$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) すべての正の整数 n について，$S_3(n)=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) 恒等式 $k^3(k+1)^3-(k-1)^3k^3=6k^5+2k^3$ を利用して，$S_5(n)$ を求めよ．

(3) すべての正の整数 n について，$24S_7(n)$ は整数 $n^2(n+1)^2$ で割り切れることを示せ．

□□ **1.51**　［琉球大 2022］ $\boxed{3}$

一辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA を $2:1$ に内分する点を D，辺 OB を $1:2$ に内分する点を E とする．辺 OC 上に点 P をとり，線分 OP の長さを t とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{EDP}$ を t を用いて表せ．

(2) 点 P が辺 OC 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{EDP}$ の最大値と最小値を求めよ．

2　類比問題

2.1　微分法と積分法 (数学 II)

□□ 2.1 ［千葉大 2022］ $\boxed{3}$

次の問いに答えよ．

(1) a を実数とする．$y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ．

(2) $0 \leqq a \leqq 2$ とする．$S(a)$ を $y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする．$S(a)$ を a の式で表せ．

(3) (2) で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

□□ 2.2 ［広大理系 2022］ $\boxed{1}$

座標平面上の曲線 $y = x^3 + x^2$ を C とする．また，a を実数とし，L_a を点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き a の直線とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C と L_a がちょうど二つの共有点をもつような a の値をすべて求めよ．

(2) a が (1) の条件を満たすそれぞれの場合について，C と L_a で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) C と L_a がちょうど三つの共有点をもち，さらに C と L_a で囲まれた二つの部分の面積の差の絶対値が $\dfrac{3}{2}$ となるとき，a の値を求めよ．

2.2　複素数平面 (数学 III)

□□ 2.3 ［東工大 2022］ $\boxed{4}$

a は正の実数とする．複素数 z が $|z-1| = a$ かつ $z \neq \dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，複素数平面上の点 $w = \dfrac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) K が円となるための a の条件を求めよ．また，そのとき K の中心が表す複素数と K の半径を，それぞれ a を用いて表せ．

(2) a が (1) の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ．

□□ **2.4** ［阪大理系 2022］ $\boxed{1}$

r を正の実数とする．複素数平面上で，点 z が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，

$$z + w = zw$$

を満たす点 w が描く図形を求めよ．

2.3 極限 (数学 III)

□□ **2.5** ［阪大理系 2022］ $\boxed{4}$

$f(x) = \log(x+1) + 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = x$ は，$x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ．

(2) (1) の解を α とする．実数 x が $0 < x < \alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$$

(3) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．このとき，すべての自然数 n に対して，

$$\alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$$

が成り立つことを示せ．

(4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ を示せ．

□□ **2.6** ［広大理系 2022］ $\boxed{5}$

次の問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ．

(2) 関数 $f(x)$ を $f(x)=\sqrt{2}^{\,x}$ と定義し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．C 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線の方程式を，実数 $m,\ k$ を用いて $y=mx+k$ と表すとき，m と k の値をそれぞれ求めよ．

(3) $f(x)$ および m と k を (2) のように定める．すべての実数 x に対して $f(x)\geqq mx+k$ が成り立つことを示せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ により定義する．自然数 n に対して

$$2-a_{n+1}\leqq(\log 2)\cdot(2-a_n)$$

が成り立つことを示し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．必要ならば，自然対数の底が $e=2.718\cdots$ であることを用いてよい．

□□ **2.7** ［分大医 2022］ $\boxed{5}$

関数 $f(x)=\log\dfrac{e^x}{x}$ を用いて，$a_1=2$，$a_{n+1}=f(a_n)$ によって数列 $\{a_n\}$ が与えられている．ただし，対数は自然対数である．以下の問に答えなさい．

(1) $1\leqq x\leqq 2$ のとき，$0\leqq f(x)-1\leqq\dfrac{1}{2}(x-1)$ が成立することを示しなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めなさい．

(3) $b_1=a_1$，$b_{n+1}=a_{n+1}b_n$ によって与えられる数列 $\{b_n\}$ の極限を求めなさい．

2.4 積分法の応用 (数学 III)

□□ **2.8** ［阪大理系 2022］ $\boxed{5}$

座標平面において，t を媒介変数として

$$x=e^t\cos t+e^\pi,\quad y=e^t\sin t\qquad(0\leqq t\leqq\pi)$$

で表される曲線を C とする．曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

□□ **2.9** ［九大理系 2022］ $\boxed{5}$

xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5\cos t + \cos 5t, \quad y = 5\sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leqq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 区間 $0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ において，$\dfrac{dx}{dt} < 0$，$\dfrac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。

(2) 曲線 C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の部分，x 軸，直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。

(4) 曲線 C の概形を図示せよ。

□□ **2.10** ［分大医 2022］ $\boxed{6}$

$a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ とする．また，2 つの楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ の第 1 象限における交点を通り，y 軸に平行な直線の方程式を $x = c$ とする．領域 $D_1 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$，$0 \leqq x \leqq c$，$0 \leqq y$ の面積を S_1，領域 $D_2 : \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} \leqq 1$，$0 \leqq x \leqq c$，$0 \leqq y$ の面積を S_2 とする．以下の問に答えなさい．

(1) c を a, b を用いて表しなさい．

(2) $S_1 + S_2$ を a, b を用いて表しなさい．

2.5 場合の数と確率 (数学 A)

□□ **2.11** ［京大理系 2022］ $\boxed{2}$

箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある．ただし $n \geqq 5$ とし，同じ番号の札はないとする．この箱から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に X, Y, Z とする．このとき，$Y - X \geqq 2$ かつ $Z - Y \geqq 2$ となる確率を求めよ．

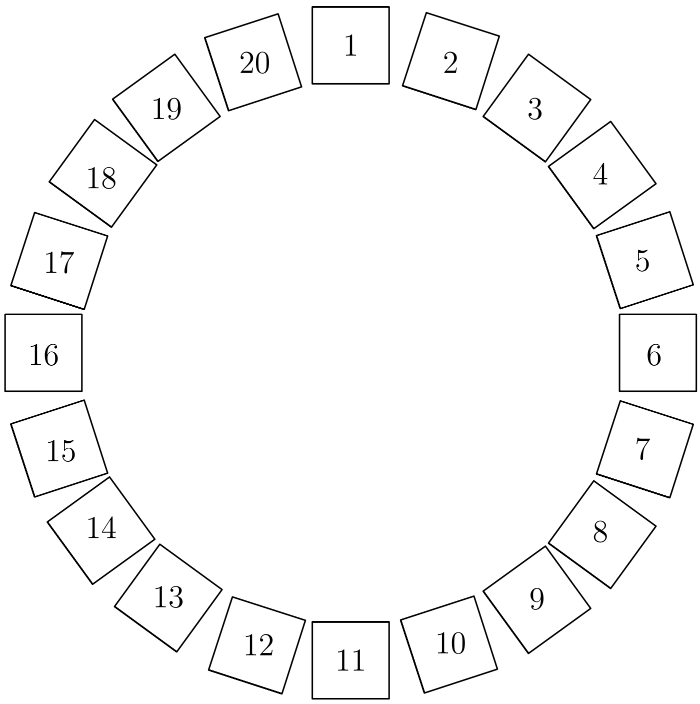
□□ **2.12** ［琉球大 2022］ $\boxed{4}$

次の問いに答えよ．

(1) 1 から 9 までの自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9$ を満たすように 3 つの数を選び，それを $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とする．このような 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 3$ を満たすものは全部で何通りあるか．

(2) 1 から 50 までの自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50$ を満たすように 3 つの数を選び，それを $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とする．このような 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 10$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 10$ を満たすものは全部で何通りあるか．

(3) 1 番から 20 番までの番号が書かれた座席が，図のように円形に並んでいる．この中から，2 つ以上の間隔を空けて 3 つの座席を選ぶ (例えば，1 番を選んだときは 2 番，3 番，19 番，20 番は選べない)．このような 3 つの座席の選び方は全部で何通りあるか．



2.6　数列 (数学 B)

□□ 2.13 ［千葉大 2022］ $\boxed{7}$

x，y についての方程式

$$x^2 - 6xy + y^2 = 9 \quad \cdots (*)$$

に関する次の問いに答えよ．

(1) x，y がともに正の整数であるような $(*)$ の解のうち，y が最小であるものを求めよ．

(2) 数列 a_1，a_2，$a_3, \cdots$ が漸化式

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする．このとき，$(x,\ y) = (a_{n+1},\ a_n)$ が $(*)$ を満たすならば，$(x,\ y) = (a_{n+2},\ a_{n+1})$ も $(*)$ を満たすことを示せ．

(3) $(*)$ の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在することを示せ．

□□ 2.14 ［鹿児島大 2022］ $\boxed{3}$

各項が正となる数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1}a_{n-1} = {a_n}^2 + 1 \quad (n \geqq 2)$$

を満たすとする．

(1) a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2) c を実数とする．3 以上のすべての自然数 n に対して

$$(a_{n+1} + ca_n + a_{n-1})a_{n-1} = a_n(a_n + ca_{n-1} + a_{n-2})$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 3 以上のすべての自然数 n に対して

$$a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

3　頻出問題

3.1　2 次関数 (数学 I)

□□ 3.1　［北大理系 2022］ $\boxed{1}$

$0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたす $a,\ b$ に対し，関数

$$f(x) = |x(x-1)| + |(x-a)(x-b)|$$

を考える．x が実数の範囲を動くとき，$f(x)$ は最小値 m をもつとする．

(1) $x < 0$ および $x > 1$ では $f(x) > m$ となることを示せ．

(2) $m = f(0)$ または $m = f(1)$ であることを示せ．

(3) $a,\ b$ が $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたして動くとき，m の最大値を求めよ．

3.2　図形と方程式 (数学 II)

□□ 3.2　［一橋大 2022］ $\boxed{3}$

次の問いに答えよ．

(1) 実数 $x,\ y$ について，「$|x-y| \leqq x+y$」であることの必要十分条件は「$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$」であることを示せ．

(2) 次の不等式で定まる xy 平面上の領域を図示せよ．

$$|1+y-2x^2-y^2| \leqq 1-y-y^2$$

□□ 3.3　［宮崎大 2022］ $\boxed{5}$

座標平面上に円 $C: x^2+y^2=1$ と点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ がある．A を通る傾き t の直線と C との 2 つの交点を $\mathrm{Q}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}_2(x_2,\ y_2)$ とする．ただし，$x_1 < x_2$ とする．また，C の Q_1 における接線を ℓ_1，Q_2 における接線を ℓ_2 とする．ℓ_1 と ℓ_2 は交わり，その交点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) x_2-x_1 と y_2-y_1 を，それぞれ t を用いて表せ．

(2) $X=-2t$ であることを示せ．

(3) t がすべての実数値をとって変化するとき，点 P の軌跡を求めよ．

3.3 指数関数と対数関数 (数学 II)

□□ 3.4 ［京大理系 2022］ $\boxed{1}$

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ．ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

□□ 3.5 ［宮崎大 2022］ $\boxed{6}$

x を実数とするとき，次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ．

$$8^x + 8^{-x} - (4^x + 4^{-x}) - 11 \geqq 0$$

□□ 3.6 ［鹿児島大 2022］ $\boxed{2}$

次の各問いに答えよ．

(1) $a,\ b,\ c$ が 1 でない正の実数のとき，次の等式が成立することを証明せよ．

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(2) $s = \log_{10} 2$，$t = \log_{10} 3$ とするとき，$\log_{30} 600$ を s と t を用いて表せ．

(3) 次の関数の最大値と最小値を求めよ．またそのときの x の値を求めよ．

$$y = 2(\log_5 x)^2 - \log_5 x^8 + 6 \quad (1 \leqq x \leqq 125)$$

3.4 微分法と積分法 (数学 II)

□□ 3.7 ［一橋大 2022］ $\boxed{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(1,\ 3\sin 2\theta)$ が三角形をなすとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を求めよ．

□□ 3.8 ［山口大 2022］ $\boxed{8}$

関数 $f(x) = x^3 + 3x^2$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形をかきなさい．

(2) 点 $(p,\ q)$ から曲線 $y = f(x)$ に異なる接線が 3 本引けるとき，p と q についての条件を求め，その条件を満たす点 $(p,\ q)$ 全体の領域を pq 平面に図示しなさい．

3.5 複素数平面 (数学 III)

□□ 3.9 ［北大理系 2022］ $\boxed{5}$

複素数 z に関する次の 2 つの方程式を考える．ただし，$\overline{z}$ を z と共役な複素数とし，i を虚数単位とする．

$$z\overline{z} = 4 \quad \cdots ① \qquad\qquad |z| = |z - \sqrt{3} + i| \quad \cdots ②$$

(1) ①，② のそれぞれの方程式について，その解 z 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) ①，② の共通解となる複素数をすべて求めよ．

(3) (2) で求めたすべての複素数の積を w とおく．このとき，w^n が負の実数となるための整数 n の必要十分条件を求めよ．

□□ 3.10 ［佐賀大 2022］ $\boxed{4}$

複素数 z について，1，z，z^2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，C とする．次の問に答えよ．

(1) 点 A，B，C が正三角形の 3 つの頂点となる z をすべて求めよ．

(2) 点 A，B，C が直角三角形の 3 つの頂点となるための z に関する条件を求めよ．また，この条件を満たす点 z 全体を図示せよ．

□□ 3.11 ［福教大 2022］ $\boxed{3}$

複素数 z の実部と虚部がともに正であり，z は

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = 1$$

を満たしている．次の問いに答えよ．

(1) z を極形式で表せ．ただし，偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(2) $z^{100} + \dfrac{1}{z^{100}}$ を求めよ．

(3) 複素数平面上の 3 点 z，z^2，$z^{100} + \dfrac{1}{z^{100}}$ を頂点とする三角形の面積を求めよ．

3.6　極限 (数学 III)

□□ 3.12　［東北大理系 2022］ $\boxed{3}$

正の整数 n に対して,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$$

とする.

(1) 正の実数 x に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{x}{2+x} \leqq \sqrt{1+x}-1 \leqq \frac{x}{2}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

□□ 3.13　［東北大理系 2022］ $\boxed{4}$

xy 平面の第 1 象限内において, 直線 $\ell : y = mx$ $(m > 0)$ と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし, 円 C の中心を通る直線 $y = tx$ $(t > 0)$ を考える. また, 直線 ℓ と x 軸, および, 円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする. ただし, $b > a$ とする.

(1) m を用いて t を表せ.

(2) t を用いて $\dfrac{b}{a}$ を表せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to+0} \frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)$ を求めよ.

□□ 3.14　［神戸大理系 2022］ $\boxed{1}$

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定める. 以下の問に答えよ.

(1) すべての自然数 n について $a_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$ が成り立つことを示せ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定める. b_n の値を n を用いて表せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

□□ **3.15** [熊大理系 2022] $\boxed{4}$ [熊大医 2022] $\boxed{2}$

関数 $f(x)=\sqrt{1+\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最小値と最大値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$\sqrt{2}x \leqq f(x) \leqq \sqrt{2}$ となることを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\int_0^1 \{f(x)\}^n\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定める。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}=0$ を用いてよい。

3.7 微分法とその応用 (数学 III)

□□ **3.16** [山口大 2022] $\boxed{2}$

次の問いに答えなさい．

(1) $x>0$ のとき，関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の最大値を求めなさい．ただし，対数は自然対数とする．

(2) 正の整数の組 $(a,\ b)$ で，$a^b=b^a$ かつ $a \neq b$ を満たすものをすべて求めなさい．

□□ **3.17** [鹿児島大 2022] $\boxed{7}$

曲線 C の媒介変数表示が

$$x=\cos^3 t,\quad y=3\sin^3 t \quad \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

で与えられているとする．また曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(\cos^3 t,\ 3\sin^3 t)$ における接線を ℓ とする．さらに原点を中心とする半径 r の円が直線 ℓ と接しているとする．

(1) 直線 ℓ の方程式は

$$y=-3(\tan t)x+3\sin t$$

と表されることを示せ．

(2) $\alpha=\cos^2 t$ とするとき，r^2 は

$$r^2=\frac{9\alpha(\alpha-1)}{8\alpha-9}$$

と表されることを示せ．

(3) $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ における r の最大値を求めよ．またそのときの t の値を求めよ．

3.8　積分法 (数学 III)

□□ **3.18**　［福教大 2022］ $\boxed{4}$

次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) k が自然数のとき，次の不等式を示せ．

$$\frac{1}{k+1} \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \frac{1}{k}$$

(2) n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式を示せ．

$$\log(n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq 1 + \log n$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ を求めよ．

□□ **3.19**　［宮崎大 2022］ $\boxed{1}$

次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 関数 $f(x) = x(\log x)^2$ の導関数は，$f'(x) = \left(\boxed{\text{あ}}\right) \log x$ である．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{い}}}{x^3 \cos^2 x}$ である．

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{(x-1)(x-2)}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\text{う}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(4) 関数 $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\text{え}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$ の値は，$\boxed{\text{お}}$ である．

□□ **3.20** ［鹿児島大 2022］ $\boxed{\mathbf{6}}$

次の各問いに答えよ．

(1) 次の関数の導関数を求めよ．

$$y = \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$$

(2) $a > 0$ のとき，次の不等式が成立することを示せ．

$$\int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx < \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

(3) 次の不等式が成立することを示せ．

$$\frac{\pi}{4} < \log(1+\sqrt{2})$$

3.9 積分法の応用 (数学 III)

□□ **3.21** ［神戸大理系 2022］ $\boxed{\mathbf{3}}$

a を実数，$0 < a < 1$ とし，$f(x) = \log(1+x^2) - ax^2$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) $f(1) = 0$ とする．曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

□□ **3.22** ［山口大 2022］ $\boxed{\mathbf{5}}$

曲線 $y = f(x) = \log(x^2+1)$ $(x \geqq 0)$ を C とし，C 上の点 $\mathrm{P}(1,\ f(1))$ における接線を l とする．ただし，対数は自然対数とする．

(1) C の変曲点を求め，C と l の共有点は P のみであることを示しなさい．

(2) C と l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい．

□□ **3.23** ［宮崎大 2022］ $\boxed{2}$

関数 $f(x) = x\sqrt{3-x}$ および座標平面上の原点 O を通る曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．

- $f(x)$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{あ}}}{2\sqrt{3-x}}$ である．
- $f(x)$ の第 2 次導関数は，$f''(x) = \dfrac{\boxed{\text{い}}}{4(3-x)\sqrt{3-x}}$ である．
- O における C の接線を ℓ とし，ℓ の方程式を $y = kx$ (k は定数) とすると，k の値は $\boxed{\text{う}}$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3-0} f'(x)$ は，次のいずれかである．

$$\lim_{x\to 3-0} f'(x) \text{ は有限な値である}$$
$$\lim_{x\to 3-0} f'(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to 3-0} f'(x) = -\infty$$

この 3 通りのいずれであるかを答えよ．ただし，有限な値であるときは，その値も求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，曲線 C の概形をかけ．

(4) 曲線 C と直線 ℓ および直線 $x = 3$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

3.10 場合の数と確率 (数学 A)

□□ **3.24** ［北大理系 2022］ $\boxed{4}$

アルファベットの A と書かれた玉が 1 個，D と書かれた玉が 1 個，H と書かれた玉が 1 個，I と書かれた玉が 1 個，K と書かれた玉が 2 個，O と書かれた玉が 2 個ある．これら 8 個の玉を円形に並べる．

(1) 時計回りに HOKKAIDO と並ぶ確率を求めよ．

(2) 隣り合う子音が存在する確率を求めよ．ここで子音とは，D，H，K の 3 文字 (玉は 4 個) のことである．

(3) 隣り合う子音が存在するとき，それが KK だけである条件つき確率を求めよ．

□□ 3.25 ［大分大 2022］ $\boxed{2}$

1と書かれたカード，2と書かれたカードが1枚ずつ1つの袋に入っている．この袋から1枚のカードを取り出し，1つのサイコロを2回投げる．取り出したカードに書かれた数を a，1回目サイコロの出た目の数を b，2回目のサイコロの出た目の数を c とする．

(1) 2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が異なる2つの実数解をもつ確率を求めなさい．

(2) 2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が異なる2つの整数の解をもつ確率を求めなさい．

□□ 3.26 ［千葉大 2022］ $\boxed{5}$

n を自然数とする．n 個のサイコロを同時に投げ，出た目の積を M とおく．

(1) M が2でも3でも割り切れない確率を求めよ．

(2) M が2で割り切れるが，3でも4でも割り切れない確率を求めよ．

(3) M が4では割り切れるが，3では割り切れない確率を求めよ．

□□ 3.27 ［佐賀大 2022］ $\boxed{2}$

n を5以上の整数とする．1枚の硬貨を投げる試行を n 回繰り返すとき，表が出る回数が，ちょうど n 回目の試行で5になる確率を p_n とする．次の問に答えよ．

(1) p_6 の値を求めよ．

(2) p_n を n を用いて表せ．

(3) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ を n を用いて表せ．また，p_n の最大値を求めよ．

□□ 3.28 ［熊大理系 2022］ $\boxed{2}$

袋の中に赤玉 2 個と白玉 2 個の合計 4 個の玉が入っている。A と B の 2 人で次のルールに従ってゲームをする。

- A，B の順で繰り返しプレイヤーになる。
- プレイヤーは袋から玉を同時に 2 個取り出す。取り出した玉の色が同じならば，プレイヤーの勝利とする。取り出した玉の色が異なるならば，それらを袋に戻してよくかき混ぜ，プレイヤーを交替する。
- A が勝利するか，A が勝利せずに A の後に B がプレイヤーになり，B が勝利するか，B が勝利せずにプレイヤーを交替することによって 1 巡が終了する。
- 勝者が決まるとゲームは終了する。

以下の問いに答えよ。

(1) B が 1 巡目で勝者になる確率を求めよ。

(2) N を自然数とし，N 巡目以内に B が勝者になる確率を p_N とする。$p_N > 0.396$ となる N の最小値を求めよ。ただし，$\log_2 3 = 1.585$，$\log_2 5 = 2.322$ とする。

(3) N を自然数とする。N 巡目以内に勝者になる確率は，A と B のどちらが大きいか。

□□ 3.29 ［広大理系 2022］ $\boxed{4}$

n を自然数とする．袋の中に赤玉が 3 個，白玉が $(n+5)$ 個，合計で $(n+8)$ 個の玉が入っている．また，空箱 A，B，C，D，E，F が用意されている．この準備の下で次の試行 1，試行 2 を順に行う．

試行 1 袋から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる．箱 A に入れた玉が白玉なら $i=0$，赤玉なら $i=1$ とおく．

試行 2 次に，袋から白玉を n 個取り出して，箱 B に入れる．この時点で，袋に残った玉 7 個のうち，赤玉は $(3-i)$ 個，白玉は $(4+i)$ 個である．この 7 個の中から 2 個の玉を取り出して，箱 C に入れる．

試行 2 を終えたら，箱 A と箱 C の玉の色を記録して，箱 A，B，C の玉をすべて元通り袋に戻す．そして次の試行 3 を行う．

試行 3 袋から玉を 1 個取り出して，箱 D に入れる．次に，袋から玉を n 個取り出して，箱 E に入れる．最後に袋から玉を 2 個取り出して，箱 F に入れる．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $i=0$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 を求めよ．また，$i=1$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 を求めよ．

(2) 試行 1 において，箱 A に赤玉が入る確率 q_{A} を n を用いて表せ．また，試行 1，試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率 q_{C} を n を用いて表せ．

(3) 試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象を事象 X，箱 E に入る玉がすべて白であるという事象を事象 Y，箱 F に赤玉が 2 個入るという事象を事象 Z と呼ぶことにする．事象 X と事象 Y がともに起こる確率 $P(X\cap Y)$ を n を用いて表せ．また，事象 Y と事象 Z がともに起こる確率 $P(Y\cap Z)$ を n を用いて表せ．

(4) (3) の事象 Y が起こったとき，(3) の事象 X が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と，(3) の事象 Z が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ．

□□ **3.30** ［一橋大 2022］ $\boxed{5}$

中身の見えない 2 つの箱があり，1 つの箱には赤玉 2 つと白玉 1 つが入っており，もう 1 つの箱には赤玉 1 つと白玉 2 つが入っている．どちらかの箱を選び，選んだ箱の中から玉を 1 つ取り出して元に戻す，という操作を繰り返す．

(1) 1 回目は箱を無作為に選び，2 回目以降は，前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱，前回取り出した玉が白玉なら前回とは異なる箱を選ぶ．n 回目に赤玉を取り出す確率 p_n を求めよ．

(2) 1 回目は箱を無作為に選び，2 回目以降は，前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱，前回取り出した玉が白玉なら箱を無作為に選ぶ．n 回目に赤玉を取り出す確率 q_n を求めよ．

□□ **3.31** ［筑波大 2022］ $\boxed{2}$

整数 a_1，a_2，$a_3, \cdots$ を，さいころをくり返し投げることにより，以下のように定めていく．まず，$a_1 = 1$ とする．そして，正の整数 n に対し，a_{n+1} の値を，n 回目に出たさいころの目に応じて，次の規則で定める．

(規則) n 回目に出た目が 1，2，3，4 なら $a_{n+1} = a_n$ とし，5，6 なら $a_{n+1} = -a_n$ とする．

たとえば，さいころを 3 回投げ，その出た目が順に 5，3，6 であったとすると，$a_1 = 1$，$a_2 = -1$，$a_3 = -1$，$a_4 = 1$ となる．

$a_n = 1$ となる確率を p_n とする．ただし，$p_1 = 1$ とし，さいころのどの目も，出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるとする．

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3) $p_n \leqq 0.5000005$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ．
ただし，$0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ であることを用いてよい．

□□ **3.32** ［分大医 2022］ $\boxed{7}$

正四面体 ABCD の頂点 A から出発して，辺を伝って歩き始める．最初の頂点 A では，その頂点につながる 3 本の辺のうち 1 本を確率 $\dfrac{1}{3}$ で選んで次の頂点に向かって歩く．また，どれかの頂点に達したときに，その頂点につながる 3 本の辺のうち 1 本を確率 $\dfrac{1}{3}$ で選んで次の頂点に向かって歩く．n を自然数，Q を頂点 A，B，C，D のどれかとするとき，$P_n(\mathrm{Q})$ で，n 本の辺を伝ったあと頂点 Q に達する確率を表す．以下の問に答えなさい．

(1) $P_1(\mathrm{A})$，$P_1(\mathrm{B})$，$P_1(\mathrm{C})$，$P_1(\mathrm{D})$ を求めなさい．

(2) $P_2(\mathrm{A})$，$P_2(\mathrm{B})$ を求めなさい．

(3) 数列 $\{P_n(\mathrm{A})\}$ の一般項を求め，その極限を求めなさい．

3.11 整数の性質 (数学 A)

□□ **3.33** ［宮崎大 2022］ $\boxed{10}$

次の各問に答えよ．

(1) 整数 p を 5 以上の素数とする．このとき，$p+2$ が素数ならば，$p+1$ は 6 の倍数であることを示せ．

(2) ある素数を 2 進法で表したとき，すべての位の数字が 1 である k 桁の数 $\overbrace{11\cdots1}^{k\,\text{個}}$ になったとする．このとき，k は素数であることを示せ．ただし必要ならば自然数 m に対して，

$$X^m-1=(X-1)(X^{m-1}+X^{m-2}+\cdots+X+1)$$

が成り立つことを用いよ．

□□ **3.34** ［神戸大理系 2022］ $\boxed{5}$

a，b を実数，p を素数とし，$1<a<b$ とする．以下の問に答えよ．

(1) x，y，z を 0 でない実数とする．$a^x=b^y=(ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ であることを示せ．

(2) m，n を $m>n$ をみたす自然数とし，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}$ とする．m，n の値を p を用いて表せ．

(3) m，n を自然数とし，$a^m=b^n=(ab)^p$ とする．b の値を a，p を用いて表せ．

□□ **3.35** ［広大理系 2022］ $\boxed{3}$

$a,\ b$ を整数とする．また，整数の数列 $\{c_n\}$ を $c_1 = a$，$c_2 = b$ および漸化式

$$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a = 39$，$b = 13$ とする．このとき，二つの整数 c_5 と c_6 の最大公約数を求めよ．

(2) a と b はともに奇数であるとする．このとき，自然数 n に対して次の命題 P_n が成り立つことを，n についての数学的帰納法で示せ．

$P_n : c_{3n-2}$ と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である．

(3) d を自然数とし，a と b はともに d の倍数であるとする．このとき，自然数 n に対して c_n が d の倍数になることを示せ．ただし，数学的帰納法を用いて証明すること．

(4) c_{2022} が奇数であるならば，$a + b$ も奇数であることを示せ．

3.12　平面のベクトル (数学 B)

□□ **3.36** ［山口大 2022］ $\boxed{6}$

平面上の 3 点 A，B，C を頂点とする三角形を T とし，T の重心を G とする．G に関して，3 点 A，B，C と対称な点をそれぞれ A′，B′，C′ とし，A′，B′，C′ を頂点とする三角形を T' とする．$\overrightarrow{\mathrm{GA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えなさい．

(1) T の辺 BC と T' の辺 B′C′ は平行であることを示しなさい．

(2) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ であることを示しなさい．

(3) T' の辺 B′C′ は T の辺 AB および AC と交わることを示しなさい．

(4) T と T' の共通部分の面積を，T の面積 S を用いて表しなさい．

3.13　空間のベクトル (数学 B)

□□ 3.37　［山口大 2022］ $\boxed{3}$

1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC において $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えなさい．

(1) 線分 OA を $1:2$ に内分する点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ を用いて表しなさい．

(2) 3 点 A，B，C で定まる平面 α に対して点 O と対称な位置にある点を O′ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表しなさい．ただし，2 点 O，O′ が平面 α に関して対称であるとは，直線 OO′ が α と垂直であり，線分 OO′ の中点が α 上にあるときをいう．

(3) 点 X が $\triangle$ABC 上を動く．$\mathrm{OX}+\mathrm{XP}$ の値が最小となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表しなさい．

□□ 3.38　［京大理系 2022］ $\boxed{4}$

四面体 OABC が

$$\mathrm{OA}=4,\quad \mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=3,\quad \mathrm{OC}=\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$$

を満たしているとする．P を辺 BC 上の点とし，$\triangle$OAP の重心を G とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ．

□□ 3.39　［長崎大 2022］ $\boxed{2}$

空間内の 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 2,\ 3)$，B$(1,\ 1,-1)$，C$(7,\ 3,\ 5)$ がある．直線 OA 上の動点 P に対して，線分 BP，CP の長さの平方の和 $\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，線分の長さの和 $\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ の最小値を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (t は実数) とするとき，$\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ を t の式で表せ．

(2) $\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの P の座標を求めよ．

(3) 2 点 B，C から直線 OA に垂線を下ろし，交点をそれぞれ H，K とするとき，H，K の座標を求めよ．また，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{KC}}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(4) $\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ の値が最小となるのは，P が線分 HK をどのような比に分けるときかを説明せよ．また，そのときの P の座標，および $\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ の値を求めよ．

□□ **3.40** ［宮崎大 2022］ $\boxed{3}$

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC と点 P が

$$3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 8\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 7\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \vec{0}$$

を満たしているとする．直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のそれぞれを，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\triangle$ABQ の面積を求めよ．

(3) $\triangle$ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と平面 ABC が垂直であることを示せ．

(4) 四面体 PABQ の体積を求めよ．

3.14　数列 (数学 B)

□□ **3.41** ［宮崎大 2022］ $\boxed{7}$

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，$a_1 = \dfrac{1}{2}$，$b_1 = 2$，および

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．このとき，次の各問に答えよ．

(1) a_2，b_2，a_3，b_3 を求めよ．

(2) 次の式を満たす定数 p，q，r の組を 2 組求めよ．

$$a_{n+1} + pb_{n+1} + q = r(a_n + pb_n + q) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，それぞれの第 n 項 a_n，b_n を求めよ．

(4) 2 つの数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を，$c_1 = \sqrt{2}$，$d_1 = 4$，および

$$\begin{cases} c_{n+1} = c_n d_n \\ d_{n+1} = 2{c_n}^2 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ の第 n 項 c_n，d_n について，${c_n}^2 d_n$ を求めよ．

3.15　確率分布と統計 (数学 B)

□□ 3.42 ［長崎大 2022］ $\boxed{8}$

動点 P は数直線上の座標 1 あるいは -1 にある．表が出る確率 p $(0 < p < 1)$，裏が出る確率 $1-p$ のコインを投げ，その結果により P に以下のような操作を行う．

> 操作
>
> - 表が出たとき，P が 1 にあれば -1 に，-1 にあれば 1 に移動させる．
> - 裏が出たとき，P は動かさない．

コインを n 回投げたときの P の座標を X_n とし，$X_n = 1$ となる確率を q_n とする．最初に P は 1 にあるものとして，以下の問いに答えよ．

(1) q_1，q_2，q_3 を，それぞれ p を用いて表せ．

(2) q_{n+1} を p と q_n を用いて表せ．

(3) q_n を p と n を用いて表せ．

(4) 確率変数 X_n の平均 $E(X_n)$，分散 $V(X_n)$，標準偏差 $\sigma(X_n)$ を，それぞれ p と n を用いて表せ．

□□ 3.43 ［鹿児島大 2022］ $\boxed{5}$

大小 2 個のサイコロを同時に投げる．大きいサイコロの出る目を十の位，小さいサイコロの出る目を一の位としてできる 2 桁の数を X とし，小さいサイコロの出る目を十の位，大きいサイコロの出る目を一の位としてできる 2 桁の数を Y とする．

(1) 確率 $P(X - Y > 0)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(3) 確率変数 $X - Y$ の標準偏差 $\sigma(X - Y)$ を求めよ．

4　応用問題

4.1　三角関数 (数学 II)

□□ 4.1　［東工大 2022］ $\boxed{3}$

α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．$\angle \mathrm{A} = \alpha$ および $\angle \mathrm{P} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件 (a)，(b) を満たしながら，時刻 $t = 0$ から時刻 $t = \dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする．

(a) 時刻 t での点 A，B の座標は，それぞれ $\mathrm{A}(\sin t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \cos t)$ である．

(b) 点 P は第一象限内にある．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ．

(2) 時刻 $t = 0$ から時刻 $t = \dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ．

(3) xy 平面内において，連立不等式

$$x^2 - x + y^2 < 0, \quad x^2 + y^2 - y < 0$$

により定まる領域を D とする．このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ．

4.2　複素数平面 (数学 III)

□□ 4.2　［筑波大 2022］ $\boxed{6}$

i は虚数単位とする．次の条件 (I)，(II) をどちらも満たす複素数 z 全体の集合を S とする．

(I) z の虚部は正である．

(II) 複素数平面上の点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(1 - iz)$，$\mathrm{C}(z^2)$ は一直線上にある．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 1 でない複素数 α について，α の虚部が正であることは，$\dfrac{1}{\alpha - 1}$ の虚部が負であるための必要十分条件であることを示せ．

(2) 集合 S を複素数平面上に図示せよ．

(3) $w = \dfrac{1}{z - 1}$ とする．z が S を動くとき，$\left| w + \dfrac{i}{\sqrt{2}} \right|$ の最小値を求めよ．

4.3　極限 (数学 III)

□□ **4.3**　［千葉大 2022］ $\boxed{8}$

正の整数 m，n に対して，

$$A(m,\ n) = (m+1)n^{m+1} \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\, dx$$

とおく．

(1) $e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$ を証明せよ．

(2) 各 m に対して，$b_m = \lim_{n\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ．

(3) 各 n に対して，$c_n = \lim_{m\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ．

□□ **4.4**　［九大理系 2022］ $\boxed{2}$

n を 3 以上の自然数，α，β を相異なる実数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 次をみたす実数 A，B，C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x-\alpha)(x-\beta)^2 Q(x) + A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\alpha) + C$$

(2) (1) の A，B，C を n，α，β を用いて表せ。

(3) (2) の A について，n と α を固定して，β を α に近づけたときの極限 $\lim_{\beta\to\alpha} A$ を求めよ。

4.4　微分法とその応用 (数学 III)

□□ **4.5**　［東北大理系 2022］ $\boxed{2}$

a を実数とし，実数 x の関数 $f(x) = (x^2+3x+a)(x+1)^2$ を考える．

(1) $f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $a < 2$ のとき，$f(x)$ は 2 つの極小値をもつ．このとき，$f(x)$ が極小となる x の値を α_1，α_2 $(\alpha_1 < \alpha_2)$ とする．$f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ を示せ．

(3) $f(x)$ が $x < \beta$ において単調減少し，かつ，$x = \beta$ において最小値をとるとする．このとき，a のとり得る値の範囲を求めよ．

□□ **4.6** ［筑波大 2022］ $\boxed{5}$

曲線 $C : y = (x+1)e^{-x}$ $(x > -1)$ 上の点 P における法線と x 軸との交点を Q とする．点 P の x 座標を t とし，点 Q と点 R$(t,\ 0)$ との距離を $d(t)$ とする．

(1) $d(t)$ を t を用いて表せ．

(2) $x \geqq 0$ のとき $e^x \geqq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ であることを示せ．

(3) 点 P が曲線 C 上を動くとき，$d(t)$ の最大値を求めよ．

□□ **4.7** ［熊大医 2022］ $\boxed{3}$

p を正の実数とする。曲線 $y = \sin x$ $(x > 0)$ の接線で点 $(-p,\ 0)$ を通るものをすべて考え，それらの接点の x 座標を小さい方から順に $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ に対して，$\tan a_n = a_n + p$ が成り立つことを示せ。

(2) $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ に対して，$a_{n+1} - a_n > \pi$ が成り立つことを示せ。

(3) $a_1 = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ に対して，$\tan a_{n+1} > n\pi + \sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。

4.5 積分法 (数学 III)

□□ **4.8** ［名大理系 2022］ $\boxed{4}$

関数 $f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ において連続な増加関数で $f(0) = 1$ を満たすとする．ただし $f(x)$ が区間 $x \geqq 0$ における増加関数であるとは，区間内の任意の実数 $x_1,\ x_2$ に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つときをいう．以下，n は正の整数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = \infty$ を示せ．

(2) 区間 $y > 2$ において関数 $F_n(y)$ を $F_n(y) = \displaystyle\int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{x-2}\,dx$ と定めるとき，$\displaystyle\lim_{y\to\infty} F_n(y) = \infty$ を示せ．また $2 + \dfrac{1}{n}$ より大きい実数 a_n で

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = 0$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ．

(3) (2) の a_n について，不等式 $a_n < 4$ がすべての n に対して成り立つことを示せ．

4.6 積分法の応用 (数学 III)

□□ **4.9** ［筑波大 2022］ $\boxed{4}$

$0 < a < 4$ とする．曲線

$$C_1 : y = 4\cos^2 x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$
$$C_2 : y = a - \tan^2 x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

は，ちょうど 2 つの共有点をもつとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

□□ **4.10** ［東大理系 2022］ $\boxed{5}$

座標空間内の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする．S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が $\mathrm{PQ} = 2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

□□ **4.11** ［九工大 2022］ $\boxed{1}$

$p \neq 0$ を定数とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) = x^2 - px + 1, \quad g(x) = \frac{1}{p}x$$

とおく．定数 $\alpha > 1$ に対し $f(\alpha) = 0$ であるとき，曲線 $C : y = f(x)$ および直線 $l : y = g(x)$ について，次に答えよ．

(1) $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$ を示せ．

(2) 曲線 C と直線 l の交点の座標を p を用いて表せ．

(3) 曲線 C の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における法線を m とする．法線 m と直線 l の交点の座標を p を用いて表せ．

(4) (3) の法線 m を $y = h(x)$ と表す．連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq f(x) \\ y \leqq g(x) \\ y \geqq h(x) \end{cases}$$

の表す図形を D とする．図形 D を直線 $x = \dfrac{p}{2}$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を α を用いて表せ．

4.7　場合の数と確率 (数学 A)

□□ **4.12**　［東北大理系 2022］ $\boxed{\mathbf{1}}$

K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 $(l,\ m,\ n)$ の個数 N を考える．ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 3)$ と $(l,\ m,\ n)=(1,\ 3,\ 1)$ とは異なる組とみなす．

(1) $K=99$ のとき，N を求めよ．

(2) $K=99$ のとき，$l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 $(l,\ m,\ n)$ の個数を求めよ．

(3) $N>K$ を満たす最小の K を求めよ．

□□ **4.13**　［名大理系 2022］ $\boxed{\mathbf{2}}$

1 つのサイコロを 3 回投げる．1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする．なおサイコロは 1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとする．

(1) $ab+2c \geqq abc$ となる確率を求めよ．

(2) $ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ．

□□ **4.14** ［東大理系 2022］ $\boxed{6}$

O を原点とする座標平面上で考える．0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\vec{v}_k$ を

$$\vec{v}_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める．投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0，X_1，$\mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_N$ を以下の規則 (i)，(ii) に従って定める．

(i) X_0 は O にある．

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする．X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める．

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}} + \vec{v}_k$$

により X_n を定める．ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする．

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める．

(1) $N = 8$ とする．X_8 が O にある確率を求めよ．

(2) $N = 200$ とする．X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく．ただし $0 \leqq r \leqq 200$ である．p_r を求めよ．また p_r が最大となる r の値を求めよ．

4.8 整数の性質 (数学 A)

□□ **4.15** ［熊大医 2022］ $\boxed{4}$

以下の問いに答えよ。

(1) $m \leqq n$ であって，$mn + 2 = {}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ。

(2) $m \leqq n$ であって，$mn + 2 = {}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ は，(1) で求めた組に限ることを示せ。

□□ 4.16 ［九大理系 2022］ $\boxed{3}$

自然数 m，n が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \quad \cdots ①$$

をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{n^2+1}{2}$, $\dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。

(2) n^2-1 は 168 の倍数であることを示せ。

(3) ① をみたす自然数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ。

□□ 4.17 ［京大理系 2022］ $\boxed{3}$

n を自然数とする．3 つの整数 n^2+2，n^4+2，n^6+2 の最大公約数 A_n を求めよ．

□□ 4.18 ［東工大 2022］ $\boxed{2}$

3 つの正の整数 $a,\ b,\ c$ の最大公約数が 1 であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $a+b+c,\ bc+ca+ab,\ abc$ の最大公約数は 1 であることを示せ．

(2) $a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ．

□□ 4.19 ［東大理系 2022］ $\boxed{2}$

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = {a_n}^2 + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となることを示せ．

(2) k，n を正の整数とする．a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を k，n を用いて表せ．

(3) a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ．

5　発展問題

5.1　テイラー展開

a を定数，n を自然数とする．$f(x)$ を n 回微分可能な関数とし

$$J_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt$$

とおくと

$$\begin{aligned} J_k(x) &= -\int_a^x \left\{ \frac{(x-t)^k}{k!} \right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$J_k(x) - J_{k+1}(x) = \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ であるから，$n \geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \{J_k(x) - J_{k+1}(x)\} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \\ J_1(x) - J_n(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \end{aligned}$$

$J_1(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ であるから

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_n(x)$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると，$J_n(x)$ は

$$\frac{(x-a)^n}{n!} M \text{ と } \frac{(x-a)^n}{n!} m$$

の間の値をとるから，この積分区間を I とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c), \qquad c \in I \tag{1}$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．$n = 1$ のとき，平均値の定理により，上式は成立する．したがって，すべての自然数について上式は成立する．

(1) を $f(x)$ の $x=a$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion) という．
とくに $a=0$ とすると

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \tag{2}$$

となり，これをマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) という．

(1) から得られる級数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

をテイラー級数 (Taylor series) という．同様に，(2) から得られる級数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{3}$$

をマクローリン級数 (Maclaurin's series) という．

- $f(x)=e^x$ のとき，$f^{(n)}(x)=e^x$ より $f^{(n)}(0)=1$
- $f(x)=\cos x$ のとき，$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}$
- $f(x)=\sin x$ のとき，$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$

これらの結果を (3) に代入すると

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots
\end{aligned}$$

上の第 1 式から　$e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

したがって

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= \cos x+i\sin x
\end{aligned}$$

等式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ をオイラーの公式 (Euler's Formula) という．

例えば，n 次多項式 $f(x)$ の x^n の係数が A であるとき，次式が成立する．

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+A(x-a)^n$$

また，2 次関数 $f(x)$ の x^2 の係数が A であるとき

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+A(x-p)^2$$

となる．放物線 $y=f(x)$ 上の $x=p$ における y 座標 $f(p)$ と接線の傾き $f'(p)$ により，$f(x)$ が表される．

東北大理系 2021 年

以下の問いに答えよ．

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

$$e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$$

(2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ．

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) 不等式

$$\left|e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right|<10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ．必要ならば $2<e<3$ であることは証明なしに用いてもよい．

解答　(1) $I_k(a)=\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^k}{k!}e^x\,dx$ とすると (k は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned}I_k(a)&=-\int_0^a\left\{\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}\right\}'e^x\,dx\\&=-\left[\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}e^x\right]_0^a+\int_0^a\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}(e^x)'\,dx\\&=\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}+I_{k+1}(a)\end{aligned}$$

$I_k(a)-I_{k+1}(a)=\dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!}$ より，正の整数 n に対して

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\{I_k(a)-I_{k+1}(a)\}&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}\\I_0(a)-I_n(a)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\end{aligned}$$

$I_0(a)=\displaystyle\int_0^a e^x\,dx=e^a-1$ であるから

$$e^a-1-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\quad ゆえに\quad e^a=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}+I_n(a)\qquad(*)$$

よって　$e^a=1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}+\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$

(2) $0\leqq x\leqq a$ において，$1\leqq e^x\leqq e^a$ であるから

$$\frac{(a-x)^n}{n!}\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^a$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx&\leqq e^a\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx\\-\left[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx&\leqq -e^a\left[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a\end{aligned}$$

よって　$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\frac{e^aa^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) (2) の結果から $\qquad \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq I_n(a) \leqq \dfrac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

$(*)$ から $\qquad I_n(a) = e^a - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$

上の 2 式に $a = 1$ を代入すると

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqq I_n(1) \leqq \frac{e}{(n+1)!}, \quad I_n(1) = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (**)$$

$(**)$ の第 1 式から，$I_n(1) > 0$

$(**)$ の第 2 式から，$I_n(1)$ は単調減少列である．

$(**)$ の第 1 式に $n = 5,\ 6$ を代入すると

$$10^{-3} < \frac{1}{720} = \frac{1}{6!} < I_5(1) < \frac{e}{6!},$$
$$\frac{1}{7!} < I_6(1) < \frac{e}{7!} = \frac{3}{5040} < 10^{-3}$$

上の 2 式から $\qquad I_6(1) < 10^{-3} < I_5(1)$

したがって，不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n は $\qquad \boldsymbol{n = 6}$

□□ 5.1 ［筑波大 2022］ $\boxed{1}$

$t,\ p$ を実数とし，$t > 0$ とする．xy 平面において，原点 O を中心とし点 A$(1,\ t)$ を通る円を C_1 とする．また，点 A における C_1 の接線を ℓ とする．直線 $x = p$ を軸とする 2 次関数のグラフ C_2 は，x 軸と接し，点 A において直線 ℓ とも接するとする．

(1) 直線 ℓ の方程式を t を用いて表せ．

(2) p を t を用いて表せ．

(3) C_2 と x 軸の接点を M とし，C_2 と y 軸の交点を N とする．t が正の実数全体を動くとき，三角形 OMN の面積の最小値を求めよ．

5.2　積分公式

本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x)\\ &\quad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx\end{aligned}$$

例えば，$f(x)$ を n 次関数とし，$g'(x) = e^{ax}$ とすると (積分定数は 0 とする)

$$g^{(-k)}(x) = \frac{e^{ax}}{a^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$f(x)$ の $n+1$ 次導関数は 0 であるから

$$\int f(x)e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{f^{(k)}(x)}{a^k} + C$$

同様の計算により次式を得る．

$$\begin{aligned}\int e^{px}f(x)\,dx &= \frac{e^{px}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C\\ \int a^{px}f(x)\,dx &= \frac{a^{px}}{p\log a}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p\log a} + \frac{f''(x)}{(p\log a)^2} - \frac{f'''(x)}{(p\log a)^3} + \cdots\right\} + C\\ \int e^{x}f(x)\,dx &= e^{x}\left\{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\right\} + C\\ \int e^{-x}f(x)\,dx &= -e^{-x}\left\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\right\} + C\end{aligned}$$

□□ **5.2** ［長崎大 2022］ $\boxed{5}$

曲線 $C: y=e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における接線を l とする．ただし，$0<t<1$ である．以下の問いに答えよ．

(1) l の方程式を求めよ．また，l と y 軸との交点を Q とし，l と x 軸との交点を R とする．このとき，2 点 Q，R の座標を，それぞれ求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ および $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ を，それぞれ求めよ．

(3) l と x 軸および y 軸で囲まれた図形を D_1 とし，これを y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V_1(t)$ とする．同様に，C と l および y 軸で囲まれた図形を D_2 とし，これを y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V_2(t)$ とする．このとき，$V_1(t)$ と $V_2(t)$ を，それぞれ t を用いて表せ．

(4) $V(t)=V_1(t)+V_2(t)$ とするとき，$V(t)$ の最小値，およびそのときの t の値を求めよ．

□□ **5.3** ［長大医 2022］ $\boxed{7}$

自然数 n に対して，$I_n=\displaystyle\int_1^e (\log x)^n\,dx$ とする．ただし，e は自然対数の底であり，無理数である．以下の問いに答えよ．

(1) I_1，I_2 の値を，それぞれ求めよ．また，I_{n+1} を I_n を用いて表せ．

(2) a および b を有理数とする．$a+be=0$ ならば $a=0$ かつ $b=0$ であることを，背理法を用いて証明せよ．

(3) すべての n に対して，$I_n=A_n+B_ne$ (A_n，B_nは有理数) と表すことができる．このことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(4) (3) における A_n に対して，$C_n=\dfrac{A_n}{(-1)^{n+1}n!}$ とする．このとき，C_n および A_n を，それぞれ n を用いて表せ．

(5) (3) における B_n は，$B_n=1+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i{}_n\mathrm{P}_i$ であることを数学的帰納法を用いて証明し，I_5 の値を求めよ．
ただし，${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (r は $r \leqq n$ の自然数) であり，$0!=1$ とする．

5.3　バウムクーヘン型求積法

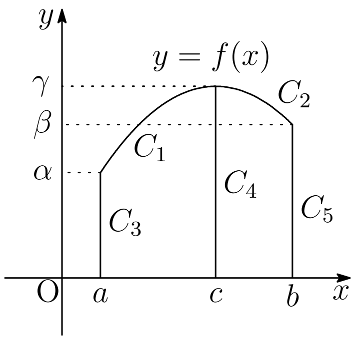
次の回転体の体積について，円筒形に区分して考えると積分の意味が理解できる．

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

証明　$y = f(x)$ のグラフを単調増加または単調減少の区間に分けて証明する．例えば，右の図のように $y = f(x)$ は $a \leqq x \leqq c$ で単調増加，$c \leqq x \leqq b$ では単調減少とする．このとき，それぞれの区間で逆関数が存在することから



$$C_1 : x = g_1(y)\ (\alpha \leqq y \leqq \gamma),$$
$$C_2 : x = g_2(y)\ (\beta \leqq y \leqq \gamma)$$

とおき，さらに次のようにおく．

$$C_3 : x = a\ (0 \leqq y \leqq \alpha),\quad C_4 : x = c\ (0 \leqq y \leqq \gamma),\quad C_5 : x = b\ (0 \leqq y \leqq \beta)$$

x 軸と C_1，C_3，C_4 で囲まれた部分および C_2，C_4，C_5 で囲まれた部分をそれぞれ y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^\gamma c^2\,dy - \int_0^\alpha a^2\,dy - \int_\alpha^\gamma \{g_1(y)\}^2\,dy \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \int_a^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \Big[\ x^2 f(x)\ \Big]_a^c + 2\int_a^c xf(x)\,dx = 2\int_a^c xf(x)\,dx \\
\frac{V_2}{\pi} &= \int_0^\beta b^2\,dy + \int_\beta^\gamma \{g_2(y)\}^2\,dy - \int_0^\gamma c^2\,dy \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \int_b^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \Big[\ x^2 f(x)\ \Big]_b^c - 2\int_b^c xf(x)\,dx = 2\int_c^b xf(x)\,dx
\end{aligned}$$

よって　$V = V_1 + V_2 = 2\pi \displaystyle\int_a^c xf(x)\,dx + 2\pi \int_c^b xf(x)\,dx = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$

一般に，単調増加・単調減少の区間に分けることで上の結果を得る．　　**証終**

5.4 パップス・ギュルダンの定理

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

一般に，$a \leqq x \leqq b$ において $f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq 0$ である 2 曲線 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積を S，その重心の y 座標を h とすると

$$hS = \int_a^b \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} \times \{f_1(x) - f_2(x)\}\,dx$$

$\{f_1(x) - f_2(x)\}\,dx$ は微小区間の面積，$\dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$ はその重心を表す．
この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}\{f_1(x) - f_2(x)\}\,dx$$

よって，上の 2 式から　　$\boldsymbol{V = 2\pi hS}$
回転体の体積は，(回転による重心の軌跡の長さ) × (面積) である．

例題

曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれ部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V

解 1 (基本的な積分法) 曲線 $y = \sin x$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ および $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ の部分をそれぞれ C_1，C_2 とする．C_1 および C_2 を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると，$\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ より

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^1 x^2\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx$$
$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^1 x^2\,dy = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \frac{V_2}{\pi} - \frac{V_1}{\pi} = \int_\pi^0 x^2 \cos x\,dx \\ &= \Big[\, x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \,\Big]_\pi^0 = 2\pi\end{aligned}$$

よって　　$V = \boldsymbol{2\pi^2}$

解 2 (バウムクーヘン型求積法)

$$V = 2\pi\int_0^\pi x\sin x\,dx = 2\pi\Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^\pi = \boldsymbol{2\pi^2}$$

解 3 (パップス・ギュルダンの定理)

$$S = \int_0^\pi \sin x = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = 2$$

図形の重心は直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 上にあるから

$$V = 2\pi\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = \boldsymbol{2\pi^2}$$

九工大 2022 年後期

原点を O とする座標平面上の曲線 $y = x^3$ $(x \geqq 0)$ を C とし，直線 $y = ax$ $(a > 0)$ を l とする．さらに，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ を通り l と垂直に交わる直線を m とし，l と m の交点を Q とする．次に答えよ．

(1) 直線 m の式を a と t を用いて表せ．

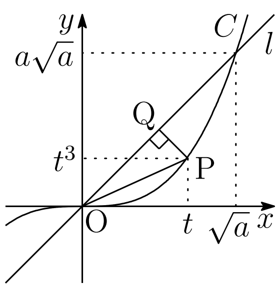
(2) 線分 PQ の長さを a と t を用いて表せ．

(3) 線分 OQ の長さ s を a と t を用いて表せ．

(4) 直線 l と曲線 C で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(5) a が変化するとき，$\dfrac{V}{a^3}$ の最大値を求めよ．

解答 (1) m は点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{a}$ の直線であるから



$$y - t^3 = -\frac{1}{a}(x - t)$$

よって　$\boldsymbol{y = -\dfrac{x}{a} + \dfrac{t}{a} + t^3}$

(2) PQ は点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ と直線 $l : ax - y = 0$ の距離であるから

$$\mathrm{PQ} = \boldsymbol{\frac{|at - t^3|}{\sqrt{a^2+1}}}$$

(3) $\mathrm{OQ}^2=\mathrm{OP}^2-\mathrm{PQ}^2$ であるから

$$\mathrm{OQ}^2=(t^2+t^6)-\frac{(at-t^3)^2}{a^2+1}=t^2\left\{1+t^4-\frac{(a-t^2)^2}{a^2+1}\right\}=\frac{t^2(at^2+1)^2}{a^2+1}$$

$a>0$ より　　$s=\mathrm{OQ}=\boldsymbol{\dfrac{t(at^2+1)}{\sqrt{a^2+1}}}$

(4) (3) の結果を微分すると　$\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{3at^2+1}{\sqrt{a^2+1}}$

C と l の交点を $\mathrm{R}(\sqrt{a},\ a\sqrt{a})$ とし，$s_0=\mathrm{OR}$ とおくと

s	$0 \longrightarrow s_0$
t	$0 \longrightarrow \sqrt{a}$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^{s_0}\mathrm{PQ}^2\,ds=\int_0^{\sqrt{a}}\frac{(at-t^3)^2}{a^2+1}\cdot\frac{ds}{dt}\,dt=\int_0^{\sqrt{a}}\frac{(at-t^3)^2}{a^2+1}\cdot\frac{3at^2+1}{\sqrt{a^2+1}}\,dt\\&=\frac{1}{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\sqrt{a}}\{3at^8+(1-6a^2)t^6+(3a^3-2a)t^4+a^2t^2\}\,dt\\&=\frac{1}{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left[\,\frac{1}{3}at^9+\frac{1}{7}(1-6a^2)t^7+\frac{1}{5}(3a^3-2a)t^5+\frac{1}{3}a^2t^3\,\right]_0^{\sqrt{a}}\\&=\frac{1}{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{8a^{\frac{7}{2}}(a^2+1)}{105}=\frac{8a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\dfrac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}}$

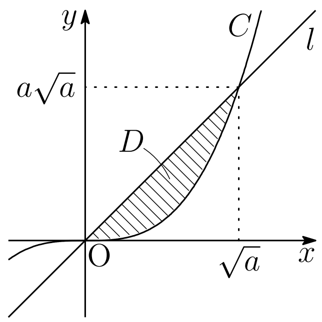
(5) (4) の結果から　$\dfrac{V}{a^3}=\dfrac{8\pi}{105}\sqrt{\dfrac{a}{a^2+1}}=\dfrac{8\pi}{105\sqrt{a+\frac{1}{a}}}$

$a>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2\quad ゆえに\quad \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{a}}}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\dfrac{V}{a^3}\leqq\dfrac{8\pi}{105\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi$　　よって，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi}$

補足 $0 \leqq x \leqq \sqrt{a}$ において，$C: y=x^3$ と $l: y=ax$ で囲まれた図形 D の面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3)\,dx \\ &= \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

D を y 軸，x 軸のまわりにそれぞれ1回転してできる立体の体積 V_1，V_2 は

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\pi\int_0^{\sqrt{a}} x(ax-x^3)\,dx = 2\pi\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{4\pi a^{\frac{5}{2}}}{15}, \\ V_2 &= \pi\int_0^{\sqrt{a}} \{(ax)^2 - (x^3)^2\}\,dx = \pi\left[\frac{a^2x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{4\pi a^{\frac{7}{2}}}{21} \end{aligned}$$

D の重心を $\mathrm{G}(h_1,\ h_2)$ とすると，パップス・ギュルダンの定理により [1]

$$V_1 = 2\pi h_1 S, \quad V_2 = 2\pi h_2 S \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{G}\left(\frac{8\sqrt{a}}{15},\ \frac{8a\sqrt{a}}{21}\right)$$

G と直線 $l: ax - y = 0$ の距離 d は　$d = \dfrac{16a\sqrt{a}}{105\sqrt{a^2+1}}$

D を l のまわりに1回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi dS = 2\pi\cdot\frac{16a\sqrt{a}}{105\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}$$

別解 領域 D の微小区間 $[t,\ t+\Delta t]$ の面積 ΔS とその重心 G は

$$\Delta S = (at - t^3)\Delta t, \quad \mathrm{G}\left(t,\ \frac{at+t^3}{2}\right)$$

G と直線 $l: ax - y = 0$ の距離 d は $(0 \leqq t \leqq \sqrt{a})$　$d = \dfrac{at - t^3}{2\sqrt{a^2+1}}$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_0^{\sqrt{a}} \frac{at-t^3}{2\sqrt{a^2+1}}\cdot(at-t^3)\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}\int_0^{\sqrt{a}} (t^6 - 2at^4 + a^2t^2)\,dt \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}\left[\frac{t^7}{7} - \frac{2a}{5}t^5 + \frac{a^2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

5.5 ベータ関数・ガンマ関数

求積問題ではベータ関数・ガンマ関数の計算結果を知っていれば，簡単に求まるものも少なくありません．求積問題でよく利用する 1/6 公式もベータ関数に由来しています．ここでは，入試問題に関連するベータ関数とガンマ関数について解説します．これらの関数は複素数まで定義域を拡張した特殊関数ですが，入試問題では自然数や $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \cdots$ に対する値が出題されています．

まず，ガンマ関数の定義式は

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \quad (\Re z > 0)$$

部分積分法 (部分積分は解析学最強の計算法) により

$$\Gamma(n+1) = -\Big[\ t^n e^{-t}\ \Big]_0^\infty + n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt = n\Gamma(n) \tag{1}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -\Big[\ e^{-t}\ \Big]_0^\infty = 1$$

上の 2 式から　　$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n! \quad \cdots(*)$

次に，ベータ関数の定義式は

$$B(x,\ y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad (\Re x > 0,\ \Re y > 0)$$

部分積分法により

$$\begin{aligned}
B(m,\ n) &= \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt \\
&= \frac{1}{m}\Big[\ t^m(1-t)^{n-1}\ \Big]_0^1 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 t^m(1-t)^{n-2}\,dt \\
&= \frac{n-1}{m}B(m+1,\ n-1) \\
&= \frac{n-1}{m}\cdot\frac{n-2}{m+1}\cdots\frac{1}{m+n-2}B(m+n-1,\ 1) \\
&= \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-2)!}\int_0^1 t^{m+n-2}\,dt \\
&= \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}
\end{aligned} \tag{2}$$

前頁の m，n は，自然数に限らず成立する．たとえば，$m=n=\dfrac{3}{2}$ を (2) とすると

$$B\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)=\int_0^1\sqrt{t(1-t)}\,dt=\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}$$

上の定積分の値は，半径 $\dfrac{1}{2}$ の半円の面積と等しい．$t>0$ のとき，$t^{\frac{1}{2}}e^{-t}>0$ である から，$\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}!>0$ に注意して

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}\quad ゆえに\quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}!=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{3}$$

さらに，(1) により，次のような計算ができる．

$$\frac{5}{2}!=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)!$ であるから，(3) より

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)!=\sqrt{\pi} \tag{4}$$

なお，(4) をベータ関数を用いて求めることもできる．

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

$t=\sin^2\theta$ とおくと　$\dfrac{dt}{d\theta}=2\sin\theta\cos\theta$

t	0	$\longrightarrow$	1
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

$\Gamma(1)=0!=1$ であるから

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}}\,d\theta=\pi$$

$t>0$ のとき，$t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}>0$ であるから，$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)!>0$ に注意して

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)!=\sqrt{\pi}$$

を得る．

入試に登場する定積分

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$$

について，$x=\alpha+(\beta-\alpha)t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\beta-\alpha$

x	$\alpha \longrightarrow \beta$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx &= (\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt \\ &= (\beta-\alpha)^{m+n+1}B(m+1,\ n+1) \\ &= (\beta-\alpha)^{m+n+1}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

例題 $A(m,\ n)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$ について $(m \geqq 0,\ n \geqq 0)$

$t=\sin^2 x$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx}=2\sin x\cos x$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}A(m,\ n) &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{m-1}{2}}x(1-\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin x\cos x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}\,dt = \frac{\frac{m-1}{2}!\,\frac{n-1}{2}!}{2\cdot\frac{m+n}{2}!}\end{aligned}$$

例えば　$A(2,\ 5)=\dfrac{\frac{1}{2}!2!}{2\cdot\frac{7}{2}!}=\dfrac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}!}=\dfrac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!}=\dfrac{1}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\dfrac{8}{105}$

$A(2,\ 6)=\dfrac{\frac{1}{2}!\frac{5}{2}!}{2\cdot4!}=\dfrac{\frac{1}{2}!\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!}{2\cdot4!}=\dfrac{5}{64}\left(\dfrac{1}{2}!\right)^2$

これに $\dfrac{1}{2}!=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ を代入すると　　$A(2,\ 6)=\dfrac{5}{256}\pi$

2021 年神戸大理系

次の定積分を求めよ．

$$I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

解答 $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}!=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用．$t=x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2x$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$0\longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{x^2(1-x^2)}\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)!}=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}\end{aligned}$$

5.6 ウォリス (Wallis) の積分

ウォリスの積分は次式で定義される (m は 0 以上の整数)[2]．

$$I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\theta\,d\theta$$

$t=\sin^2\theta$ とおくと $\dfrac{dt}{d\theta}=2\sin\theta\cos\theta$

θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$0\longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}I_m&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{m-1}\theta}{\cos\theta}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{m}{2}\right)!}\end{aligned}$$

(i) $m=2n$ のとき (n は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned}I_{2n}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{n!}=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}n!}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)!\right\}^2\\&=\frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^{n+1}(2n)!n!}\pi=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!n!}\pi=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}}\pi\end{aligned}$$

(ii) $m=2n+1$ のとき (n は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned}I_{2n+1}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{n!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(n+\frac{1}{2}\right)!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\frac{(2n+1)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)!}=\frac{2^n n!}{(2n+1)!!}\\&=\frac{2^n n!(2n)!}{(2n+1)!!(2n)!!}=\frac{2^{2n}n!n!}{(2n+1)\cdot(2n)!}=\frac{2^{2n}}{(2n+1)\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_n}\end{aligned}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2014.pdf (p.10 を参照)

2014 年 大分大医医

次の一連の問いに答えなさい．

(1) 自然数 m に対して，$x>0$ のとき $e^x > \dfrac{x^m}{m!}$ であることを示しなさい．

(2) 自然数 n に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ を示しなさい．

(3) 自然数 n に対して $\Gamma_K(n)=\displaystyle\int_0^K x^{n-1}e^{-x}\,dx$ とするとき，$\displaystyle\lim_{K\to\infty}\Gamma_K(n)$ を求めなさい．

解答 (1) (2) は省略 (http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2014.pdf $\boxed{9}$)

(3)
$$\Gamma_K(1)=\int_0^K e^{-x}\,dx=-\Big[\,e^{-x}\,\Big]_0^K=1-e^{-K}$$
$$\Gamma_K(n)=-\Big[\,x^{n-1}e^{-x}\,\Big]_0^K+(n-1)\int_0^K x^{n-2}e^{-x}\,dt$$

$\Gamma(n)=\displaystyle\lim_{K\to\infty}\Gamma_K(n)$ とおくと，$\Gamma(1)=1$，$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$

よって　$\Gamma(n)=(n-1)!\Gamma(1)=\boldsymbol{(n-1)!}$

2015 年 九工大情報工

n を自然数とし，関数 $f_m(x)$ $(m=0,1,2,\cdots,n)$ を次のように定める．

$$f_m(x)=\begin{cases}1 & (m=0)\\ x^m & (m\geqq 1)\end{cases}$$

さらに，a_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ を次のように定める．

$$a_k=\int_{-1}^{1}f_k(1-x)f_{n-k}(1+x)\,dx$$

以下の問いに答えよ．

(1) a_0 と a_1 をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) $k\geqq 1$ のとき，a_k を n，k，a_{k-1} を用いて表せ．

(3) a_k を n，k を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}$ を n を用いて表せ．

解答　(1) $f_m(x) = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ x^m & (m \geqq 1) \end{cases}$ より $(m = 0, 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_{-1}^{1} f_0(1-x)f_n(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\cdot(1+x)^n\,dx \\
&= \left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_{-1}^{1} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{n+1}} \\
a_1 &= \int_{-1}^{1} f_1(1-x)f_{n-1}(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x)(1+x)^{n-1}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \{2-(1+x)\}(1+x)^{n-1}\,dx = \int_{-1}^{1} \{2(1+x)^{n-1}-(1+x)^n\}\,dx \\
&= \left[\frac{2}{n}(1+x)^n - \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{2^{n+1}}{n} - \frac{2^{n+1}}{n+1} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{n(n+1)}}
\end{aligned}$$

(2) 省略(http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2015.pdf $\boxed{3}$)

(3)

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_{-1}^{1} f_k(1-x)f_{n-k}(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x)^k(1+x)^{n-k} \\
&= \frac{k!(n-k)!}{\{k+(n-k)+1\}!}2^{k+(n-k)+1} = \frac{2^{n+1}k!(n-k)!}{(n+1)!} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{(n+1)_n\mathrm{C}_k}}
\end{aligned}$$

(4) (3) の結果より，$\dfrac{1}{a_k} = \dfrac{(n+1)_n\mathrm{C}_k}{2^{n+1}}$ であるから

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times 2^n = \boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$$

5.7　ガウス積分

定積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

について，$t = x^2$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx} = 2x$

x	0	$\longrightarrow$	∞
t	0	$\longrightarrow$	∞

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

これから

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$

$u = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\pi} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$$

次式が標準正規分布の密度関数であることが確認できる．

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ガウス積分は，フビニ (Fubini) の定理と直交座標から極座標への変換を用いて求めることもできる．

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

とおくと $(dxdy = r\,drd\theta)$

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \\ &= \int_0^\infty re^{-r^2}\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$x > 0$ のとき，$e^{-x^2} > 0$ より，$I > 0$ であるから　　$I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

□□ **5.4** ［東大理系 2022］ $\boxed{4}$

座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 - x$$

を考える．

(1) 座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ．

(i) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する．

(2) 次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．

(ii) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 ℓ と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する．

5.8　線形微分方程式

次の問いは，第 n 階線形微分方程式の一般解を求める手がかりがある．

大分大学医医 2010 年

微分可能な関数 $y=f(x)$ が次の方程式を満たすとする．

$$a_n f^{(n)}(x)+a_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1 f^{(1)}(x)+a_0 f(x)=0 \qquad \text{(A)}$$

ここに n は自然数，$a_i\ (i=0,1,2,\cdots,n)$ は実数の定数で，$a_n\neq 0$ である．また，$y^{(k)}=f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の k 次導関数で $y^{(0)}=f^{(0)}(x)=f(x)$ とする．(A) のような方程式を第 n 階微分方程式といい，(A) に対して t の n 次方程式

$$a_n t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1 t+a_0=0 \qquad \text{(B)}$$

を (A) の特性方程式という．このとき次の問いに答えよ．

(1) 特性方程式 (B) の解が実数 r であるとき，関数 $y=e^{rx}$ が方程式 (A) を満たすことを証明せよ．

(2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解(注) にもつとき，次の t に関する方程式は r を $k-1$ 重解にもつことを証明せよ．ただし，$k=2,3,\cdots$ とする．

$$na_n t^{n-1}+(n-1)a_{n-1}t^{n-2}+\cdots+2a_2 t+a_1=0$$

(注) t の m 次方程式が適当な多項式 $Q(t)$ を用いて $(t-r)^k Q(t)=0$ となるとき，$t=r$ をこの方程式の k 重解と定義する．ただし，$k=1,2,\cdots$ とする．

(3) 実数の定数 r に対して x の関数を $y_i=x^i e^{rx}\ (i=0,1,2\cdots)$ とする．
このとき，${y_j}^{(n)}$ を x，${y_{j-1}}^{(n-1)}$ および ${y_{j-1}}^{(n)}$ を用いて表せ．ただし，$j=1,2,3,\cdots$ とする．

(4) 実数 r が n 次方程式 (B) の k 重解であるとき $y_i=x^i e^{rx}$ $(i=0,1,2,\cdots,k-1)$ が微分方程式 (A) を満たすことを証明せよ．ただし，k は自然数とする．

解答　(1) 実数 r は特性方程式 (B) の解であるから

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

両辺に e^{rx} を掛けると

$$\begin{aligned} a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} &= 0 \\ a_n (e^{rx})^{(n)} + a_{n-1} (e^{rx})^{(n-1)} + \cdots + a_1 (e^{rx})^{(1)} + a_0 e^{rx} &= 0 \end{aligned}$$

よって，関数 $y = e^{rx}$ は方程式 (A) を満たす．

(2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解にもつから，$n-k$ 次多項式 $Q(t)$ を用いて

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = (t-r)^k Q(t) \quad \cdots (*)$$

とおける．この両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 & \\ &= k(t-r)^{k-1} Q(t) + (t-r)^k Q'(t) \\ &= (t-r)^{k-1} \{ kQ(t) + (t-r) Q'(t) \} \end{aligned}$$

よって，次の方程式は，r を $k-1$ 重解にもつ．

$$n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 = 0$$

(3) $y_j = x^j e^{rx}$ より，$y_j = x y_{j-1}$ であるから，ライプニッツの公式を用いて微分すると

$$\begin{aligned} y_j^{(n)} = (x y_j)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{(n-k)} {y_{j-1}}^{(k)} \\ &= \sum_{k=n-1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{(n-k)} {y_{j-1}}^{(k)} = \boldsymbol{n {y_{j-1}}^{(n-1)} + x {y_{j-1}}^{(n)}} \end{aligned}$$

解説　ライプニッツの公式[3]

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

証明は，数学的帰納法により示すことができる．

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2020.pdf $\boxed{6}$ を参照.

(4) $(*)$ の $Q(t)$ を，定数 $b_i (i=0,1,2,\cdots,n-k)$ を用いて $(b_{n-k}=a_n)$

$$Q(t)=\sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i$$

とおくと，$(*)$ から

$$\begin{aligned} a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 =& (t-r)^k Q(t) \\ =& \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j t^{k-j} (-r)^j \sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i \\ =& \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j t^{k+i-j} \end{aligned}$$

上式から

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k+i-j)}$$

ここで $z=\displaystyle\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k-j)}$ とおくと

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i z^{(i)}$$

このとき，微分方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \cdots (**)$$

は，次のようになる．

$$b_0 z + b_1 z' + b_2 z'' + \cdots + b_{n-k} z^{(n-k)} = 0$$

したがって，$z=0$ は微分方程式 $(**)$ の解の 1 つであるから

$$\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k-j)} = 0$$

$$e^{-rx} \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k-j)} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j y^{(k-j)} (e^{-rx})^{(j)} = 0$$

ゆえに，ライプニッツの公式により

$$(ye^{-rx})^{(k)} = 0$$

上式の両辺を k 回積分すると，右辺は x の $k-1$ 次式になるので

$$ye^{-rx} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1}$$

となる (c_jは定数 ($j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$))．

したがって，次式は微分方程式 $(**)$ の解の 1 つである．

$$y = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$$

よって，x^je^{rx} ($j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$) は，$(**)$ をみたす．　　　(終わり)

解説 t に関する n 次方程式

$$a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0 = 0$$

が α_i を m_i 重解にもつとき ($i = 0, 1, \cdots, l$)

$$\sum_{k=0}^{n} a_kt^k = a_n\prod_{i=0}^{l}(t-\alpha_i)^{m_i} \qquad (m_0 + m_1 + \cdots + m_l = n)$$

このとき，第 n 階線形微分方程式

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \qquad \cdots(*)$$

は，$\pi_m(x)$ を $m-1$ 次の x の多項式とするとすると，本題 (4) の結果で，$(*)$ は

$$y = \pi_{m_i}(x)e^{\alpha_ix}$$

を解にもつことを示している．

また，微分方程式 $(*)$ の線形性により，$(*)$ が $y = u$ および $y = v$ を解にもつとき，

$$y = \lambda u\ (\lambda\text{は定数}), \quad y = u + v$$

も $(*)$ の解である．したがって，$(*)$ の一般解は

$$y = \sum_{i=0}^{l}\pi_{m_i}(x)e^{\alpha_ix}$$

なお，α_i が複素数であっても，オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

により書き直すことができる．

例題 ばね定数 k[N/m] のばねの一端が固定され，他端に質量 m[kg] のおもりが付けられ，なめらかな水平面を運動している．自然長の位置を原点 O とし，ばねが伸びる向きを変位 x[m] の正の向きとし，おもりの加速度を a[m/s^2] とすると，次式が成り立つ．

$$ma = -kx$$

このとき，$a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ より，$a = x''$ とおくと

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

となる，このとき特性方程式の解が $\pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ であるから

$$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \qquad (C_1,\ C_2\text{は定数})$$

を得る．初期条件を $t = 0$ のとき，$x = A$，$v = \dfrac{dx}{dt} = 0$ とすると

$$C_1 + C_2 = A,\ \ C_1 - C_2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

したがって　$x = \dfrac{A}{2}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)$

オイラーの公式により

$$e^{\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \pm i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \qquad (\text{複号同順})$$

よって　$x = A\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$

この単振動の周期を T[s] とすると

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

を得る．

微分方程式

$$4y'' - 12y' + 25y = 0 \tag{4}$$

について，その特性方程式 $4t^2 - 12t + 25 = 0$ の解が $\dfrac{3}{2} \pm 2i$ であるから，(4) の一般解は，定数 A_1，A_2 を用いて

$$\begin{aligned} y &= A_1 e^{(\frac{3}{2}+2i)x} + A_2 e^{(\frac{3}{2}-2i)x} \\ &= e^{\frac{3}{2}x}(A_1 e^{2xi} + A_2 e^{-2xi}) \end{aligned}$$

オイラーの公式により

$$e^{\pm 2xi} = \cos 2x \pm i \sin 2x \qquad \text{(複号同順)}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= e^{\frac{3}{2}x}\{A_1(\cos 2x + i\sin 2x) + A_2(\cos 2x - i \sin 2x)\} \\ &= e^{\frac{3}{2}x}\{(A_1 + A_2)\cos 2x + (A_1 - A_2) i \sin 2x\} \end{aligned}$$

ここで，$C_1 = A_1 + A_2$，$C_2 = (A_1 - A_2)i$ とおくと

$$y = e^{\frac{3}{2}x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

よって，$y = e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + \cos 2x)$ は，(4) の解の 1 つである．

例 1 微分方程式 $y' - \alpha y = 0$ を解け $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$.

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y' e^{-\alpha x} + y(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})' = 0$$

これを積分すると　$ye^{-\alpha x} = C$　よって　$y = Ce^{\alpha x}$　(C は定数)

例 2 $\alpha \neq \beta$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とするとき，次の微分方程式を解け．

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

解答 与式から　$(y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta y) = 0$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$(y' - \beta y)'e^{-\alpha x} + (y' - \beta)(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{(y' - \beta y)e^{-\alpha x}\}' = 0$$

これを積分すると

$$(y' - \beta y)e^{-\alpha x} = A_1 \quad \text{ゆえに} \quad y' - \beta y = A_1 e^{\alpha x} \quad (A_1\text{は定数})$$

となる．同様にして　$y' - \alpha y = A_2 e^{\beta x}$　(A_2は定数)

よって，上の 2 式から，y' を消去すると

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \quad (C_1,\ C_2\text{は定数})$$

例 3 例 2 において，$\beta = \alpha$ とした，次の微分方程式を解け．

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha})'' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})^{(2)} = 0$$

これを 2 回積分すると

$$ye^{-\alpha x} = C_3 x + C_4 \quad \text{よって} \quad y = (C_3 x + C_4)e^{\alpha x} \quad (C_3,\ C_4\text{は定数})$$

微分方程式 $ay'' + by' + cy = 0$ $(a \neq 0)$ について，その特性方程式 $at^2 + bt + c = 0$ の解により，一般解は，次のようになる．C_i $(i = 1, 2, \cdots, 6)$ は定数．

i) 異なる 2 つの実数解 α，β をもつとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

ii) 重解 α をもつき

$$y = (C_3 x + C_4)e^{\alpha x}$$

iii) 虚数解 $p \pm qi$ をもつとき

$$y = e^{px}(C_5 \cos qx + C_6 \sin qx)$$

□□ **5.5** ［宮大医 2022］ $\boxed{8}$

微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ が，$g(0)=1$，および

$$f(x) = g(x) + 3\int_0^x e^{t-x} f(t)\,dt$$

を満たしているとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $f'(x) = 2f(x) + h(x)$ を満たす関数 $h(x)$ を，$g(x)$ と $g'(x)$ を用いて表せ．

(2) $e^{-2x}f(x)$ の導関数を，$g(x)$，$g'(x)$ および e^{-2x} を用いて表せ．

(3) $e^{-2x}f(x)$ が定数関数のとき，$e^x g(x)$ も定数関数であることを示せ．また，このときの $g(x)$ および $f(x)$ を求めよ．

(4) $g(x) = x^2 + 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

5.9　ベクトル積

2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積 (外積)** という．
2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のベクトル積は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であり，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

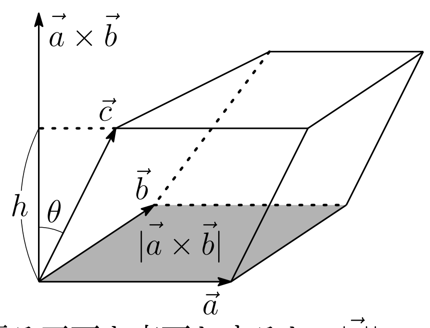
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

両辺の絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

□□ 5.6 ［九大理系 2022］ $\boxed{1}$

座標空間内の 5 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 1,\ 2),\ \mathrm{P}(4,\ 0,-1),\ \mathrm{Q}(4,\ 0,\ 5)$$

を考える。3 点 O，A，B を通る平面を α とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P$'$ の座標を求めよ。

(3) 点 R が平面 α 上を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

□□ 5.7 ［九工大 2022］ $\boxed{3}$

O を原点とする座標空間に一直線上にない 3 点 A，B，C がある．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示を $(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の成分表示を $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ とする．また，点 A を始点とし成分表示が $(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)$ となるベクトルの終点を D とする．次に答えよ．

(1) 3 点 A，B，C の定める平面上の任意の点を P とする．このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の値が 0 になることを示せ．

以下では，3 点 A，B，C の座標をそれぞれ

$$(-1,\ 1,\ 2),\quad (3,-1,\ 0),\quad (1,\ 3,-2)$$

とする．

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(3) 正の実数 k に対して $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をみたす点 E がある．三角形 EBC の面積が $6\sqrt{5}$ であるとき，点 E の座標を求めよ．

(4) (3) で求めた点 E に対して，三角形 EBC の重心を G とする．以下の 2 つの条件をみたす点 Q の座標をすべて求めよ．
(条件 1) $\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$ は 3 点 E，B，C の定める平面に垂直である．
(条件 2) 四面体 QEBC の体積と四面体 EABC の体積が等しい．

5.10　平面の方程式

89 ページの問題 5.6 の平面 α 上の任意の点を $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ とすると，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=0$ であるから

$$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z=0 \quad \text{ゆえに} \quad 2x-2y-z=0$$

上式が平面 α の方程式である．

点 $\mathrm{P}(4,\ 0,-1)$ を通り，$3\vec{n}=(2,-2,-1)$ に平行な直線を ℓ とすると，その方程式は，媒介変数 t を用いて

$$\begin{aligned}\ell:(x,\ y,\ z)&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t(3\vec{n})\\&=(4,\ 0,-1)+t(2,-2,-1)\\&=(4+2t,-2t,-1-t)\end{aligned}$$

と表される．α と ℓ の交点を Q とすると

$$2(4+2t)-2(-2t)-(-1-t)=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=-1$$

$t=-1$ を ℓ に代入すると，α と ℓ の交点 $\mathrm{Q}(2,\ 2,\ 0)$ を得る．

2 点 $\mathrm{P}(4,\ 0,-1)$，$\mathrm{Q}(2,\ 2,\ 0)$ の距離 PQ は

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(2-4)^2+(2-0)^2+(0+1)^2}=3$$

また，P と P$'$ の中点が Q であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2(2,\ 2,\ 0)-(4,\ 0,-1)=(0,\ 4,\ 1)$$

補足　次頁に示した公式により，PQ は点 $\mathrm{P}(4,\ 0,-1)$ と平面 $\alpha:2x-2y-z=0$ の距離であるから

$$\mathrm{PQ}=\frac{|2\cdot4-2\cdot0-(-1)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=3$$

一般に点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ に垂直な平面 α 上の任意の点を $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=0$ より，平面 α の方程式

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

を得る．また，$d=-ax_0-by_0-cz_0$ とおくと

$$ax+by+cz+d=0 \tag{$*$}$$

となる．次に，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，α に垂直な直線 ℓ は

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\vec{n}=(x_1+at,\ y_1+bt,\ z_1+ct) \tag{$**$}$$

$(*)$，$(**)$ を連立すると

$$a(x_1+at)+b(y_1+bt)+c(z_1+ct)+d=0 \quad ゆえに \quad t=-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}$$

$t_1=-\dfrac{ax_1+by_1+cz_1}{a^2+b^2+c^2}$ とおくと，α と ℓ の交点 Q，α に関して P と対称な点 P$'$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t_1\vec{n}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2t_1\vec{n}$$

となる．上の第 1 式から　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=t_1\vec{n}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|t_1||\vec{n}|=\left|-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

これから，次が成立する．

点と平面の距離

点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離は

$$\boldsymbol{\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

これは，座標平面において，点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離が

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

であることと関連して覚えるとよい．

□□ **5.8** ［熊大文系 2022］ $\boxed{\textbf{1}}$

座標空間の 6 点

$$\begin{array}{l} \mathrm{A}(2,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 3,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1) \\ \mathrm{D}\left(3, -1,\ \dfrac{5}{6}\right),\ \mathrm{E}\left(8,\ 4, -\dfrac{1}{3}\right),\ \mathrm{F}\left(5,\ 3,\ \dfrac{1}{2}\right) \end{array}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 A，B，C は一直線にないこと，および 3 点 D，E，F は一直線上にないことを示せ。

(2) 3 点 A，B，C を通る平面と，3 点 D，E，F を通る平面の交わりとして得られる直線を ℓ とする。ℓ 上の点を 1 つと，ℓ と平行なベクトルを 1 つ求めよ。

解答例

1.1 (1) $\vec{p}_n=\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$，$\vec{q}_n=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ とおくと，与えられた漸化式から

$$\vec{p}_{n+1}-\vec{p}_n=(1-a)(\vec{q}_n-\vec{p}_n),\qquad \vec{q}_{n+1}-\vec{q}_n=\left(0,\ \frac{a^{-n}}{1-a}\right)\qquad (*)$$

$(*)$ の第 1 式から

$$\vec{p}_{n+1}-a\vec{p}_n=(1-a)\vec{q}_n,\quad \vec{p}_{n+2}-a\vec{p}_{n+1}=(1-a)\vec{q}_{n+1}$$

上の第 2 式から第 1 式の辺々の差をとると

$$\vec{p}_{n+2}-(a+1)\vec{p}_{n+1}+a\vec{p}_n=(1-a)(\vec{q}_{n+1}-\vec{q}_n)=(0,\ a^{-n})$$

$\vec{p}_n=(x_n,\ y_n)$ であるから

$$(x_{n+2},\ y_{n+2})-(a+1)(x_{n+1},\ y_{n+1})+a(x_n,\ y_n)=(0,\ a^{-n})\qquad (**)$$

$(**)$ の x 成分から

$$x_{n+2}-(a+1)x_{n+1}+ax_n=0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{x_{n+2}=(a+1)x_{n+1}-ax_n}$$

(2) (1) の結果から

$$x_{n+2}-x_{n+1}=a(x_{n+1}-x_n),\quad x_{n+2}-ax_{n+1}=x_{n+1}-ax_n$$

それぞれの式から $(x_1=0,\ x_2=1)$

$$x_{n+1}-x_n=(x_2-x_1)a^{n-1}=a^{n-1},$$
$$x_{n+1}-ax_n=x_2-ax_1=1$$

$a\neq 1$ であるから，上の 2 式から $\quad \boldsymbol{x_n=\dfrac{a^{n-1}-1}{a-1}}$

(3) $(**)$ の y 成分から

$$y_{n+2}-(a+1)y_{n+1}+ay_n=a^{-n}$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\{(y_{k+2}-ay_{k+1})-(y_{k+1}-ay_k)\}=\sum_{k=1}^{n-1}a^{-k}=\frac{a^{-1}(1-a^{-n+1})}{1-a^{-1}}$$
$$y_{n+1}-ay_n-y_2+ay_1=\frac{1}{a-1}+\frac{a^{-n+1}}{1-a}$$

このとき $\quad -y_2+ay_1=-(y_2-y_1)+(a-1)y_1$

$$=-1+(a-1)\cdot\frac{a}{(1-a)^2}=\frac{1}{a-1} \quad \cdots①$$

したがって $\quad y_{n+1}-ay_n=\dfrac{a^{1-n}}{1-a} \quad \cdots(\mathrm{A})$

① より，$n=1$ のときも (A) は成立する．これから $\quad \dfrac{y_{n+1}}{a^{n+1}}-\dfrac{y_n}{a^n}=\dfrac{a^{-2n}}{1-a}$

$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{y_{k+1}}{a^{k+1}}-\frac{y_k}{a^k}\right)=\frac{1}{1-a}\sum_{k=1}^{n-1}a^{-2k}$$

$$\frac{y_n}{a^n}-\frac{1}{(1-a)^2}=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{a^{-2}(1-a^{-2n+2})}{1-a^{-2}}$$

$$\frac{y_n}{a^n}=\frac{a+a^{-2n+2}}{(1-a)^2(1+a)}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから $\quad \boldsymbol{y_n=\dfrac{a^{n+1}+a^{-n+2}}{(1-a)^2(1+a)}}$ ■

1.2　(1) $x \geqq 2$,　$2^x \leqq x^y \leqq x^2$ より

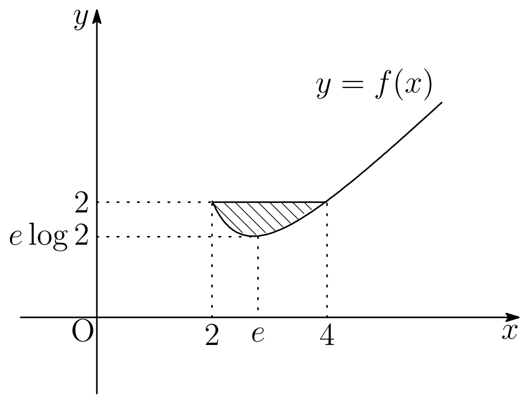
$$x\log 2 \leqq y\log x \leqq 2\log x \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x\log 2}{\log x} \leqq y \leqq 2 \quad (x \geqq 2)$$

$f(x) = \dfrac{x\log 2}{\log x}$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{(\log x - 1)\log 2}{(\log x)^2}$

$x \geqq 2$, $y \leqq 2$，$f(2) = f(4) = 2$ であるから．(x) の増減表は

x	2	$\cdots$	e	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$e\log 2$	$\nearrow$	2

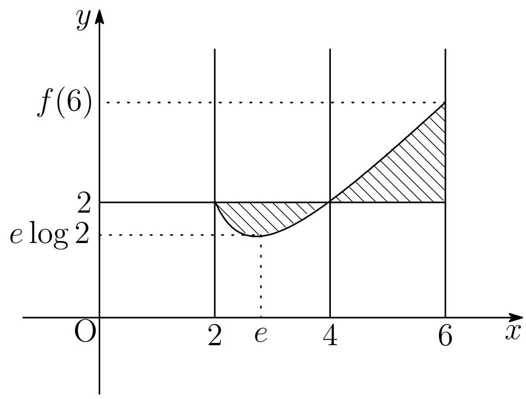
よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) 連立不等式 $2 \leqq x \leqq 6$，$(x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$ より

$$\begin{cases} 2 \leqq x \leqq 6 \\ y \geqq f(x) \\ y \leqq a \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 2 \leqq x \leqq 6 \\ y \leqq f(x) \\ y \geqq a \end{cases}$$

右の図の斜線部分の面積が $a = 2$ のときの面積 $S(2)$ である．



下の図から分かるように

$$\begin{array}{ll} a > f(6)\text{ のとき} & S(a) > S(f(6)), \\ 0 < a < f(e)\text{ のとき} & S(a) > S(f(e)) \end{array}$$

したがって，$S(a)$ の最小値は，$f(e) \leqq a \leqq f(6)$ の値の範囲でとる．

$f(e) \leqq a < 2$ のとき，$a \leqq y \leqq 2$ の部分の面積の大小関係により

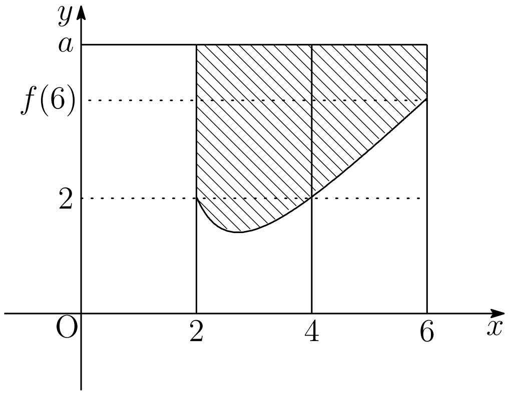
$$S(2) < S(a)$$

$2 \leqq a < f(6)$ のとき，$2 \leqq y \leqq a$ の部分の面積の大小関係により

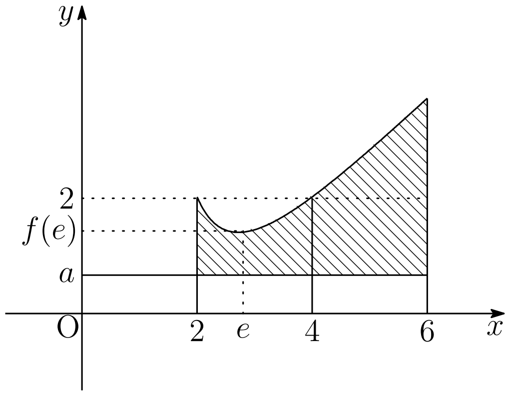
$$S(2) < S(a)$$

よって，$S(a)$ を最小にする a の値は　$\boldsymbol{a = 2}$

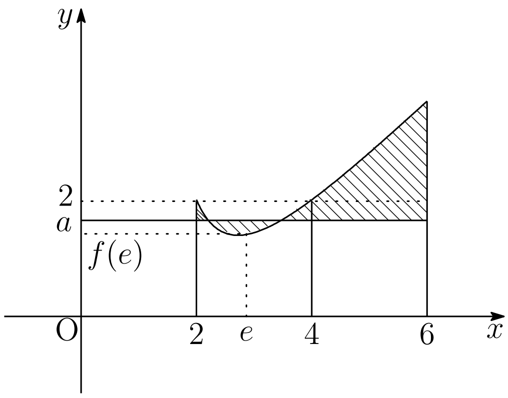
$a > f(6)$



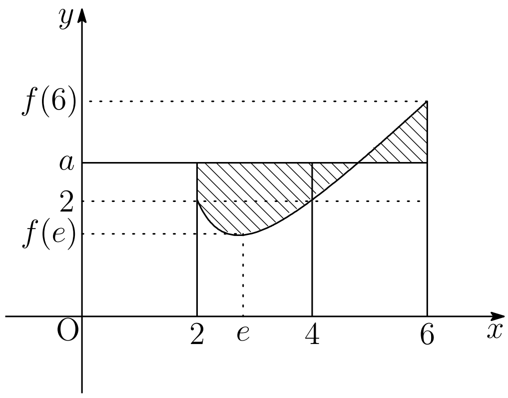
$0 < a < f(e)$



$f(e) \leqq a < 2$



$2 < a \leqq f(6)$



1.3 (1) $\mathrm{A}_n(s_n\vec{a})$，$\mathrm{B}_n(t_n\vec{b}+\vec{c})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} = (t_n\vec{b}+\vec{c}) - s_n\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}} = s_{n+1}\vec{a} - (t_n\vec{b}+\vec{c})$$

$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\perp\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}}\perp\vec{a}$ であるから，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=0$，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}}=0$ より

$$\vec{b}\cdot(t_n\vec{b}+\vec{c}-s_n\vec{a})=0, \quad \vec{a}\cdot(s_{n+1}\vec{a}-t_n\vec{b}-\vec{c})=0$$

$\vec{a}=(1,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 1, -1)$，$\vec{c}=(0,\ 0,\ 1)$ より

$$|\vec{a}|^2=6, \quad |\vec{b}|^2=3, \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=2, \quad \vec{b}\cdot\vec{c}=-1, \quad \vec{c}\cdot\vec{a}=1$$

したがって　$3t_n-1-2s_n=0, \quad 6s_{n+1}-2t_n-1=0$ 　$(*)$

上の 2 式から t_n を消去して整理すると　$\boldsymbol{s_{n+1}=\frac{2}{9}s_n+\frac{5}{18}}$

(2) (1) の結果から　$s_{n+1}-\dfrac{5}{14}=\dfrac{2}{9}\left(s_n-\dfrac{5}{14}\right)$

$s_1=0$ であるから　$s_n=\dfrac{5}{14}\left\{1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　$S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{14}\left\{1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\right\}=\boldsymbol{\frac{5}{14}}$

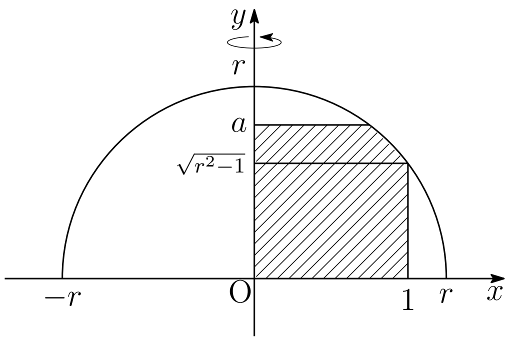
$(*)$ の第 1 式から　$3T-1-2S=0$ より　ゆえに　$T=\dfrac{1}{3}(2S+1)=\boldsymbol{\dfrac{4}{7}}$

(3) (2) の結果から　$\mathrm{A}\left(\dfrac{5}{14}\vec{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}\right)$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\dfrac{5}{14}\vec{a}+\dfrac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}$

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{5}{14}|\vec{a}|^2+\frac{4}{7}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-\frac{5}{14}\cdot6+\frac{4}{7}\cdot2+1=0,$$
$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{5}{14}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{7}|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{5}{14}\cdot2+\frac{4}{7}\cdot3+(-1)=0$$

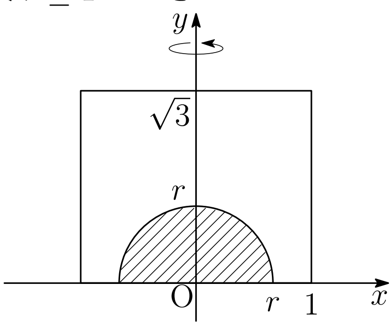
よって，直線 AB は 2 直線 ℓ, ℓ' の両方と直交する． ■

1.4 図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転させた立体の体積を $I(a)$ とすると ($r \geqq 1$, $\sqrt{r^2-1} \leqq a \leqq r$)

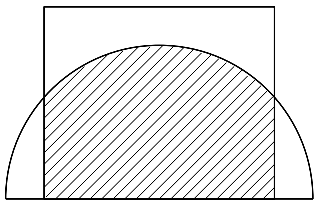


$$\begin{aligned}\frac{I(a)}{\pi} &= \sqrt{r^2-1} + \int_{\sqrt{r^2-1}}^{a} (r^2-y^2)\,dy \\ &= \sqrt{r^2-1} + \left[\, r^2y - \frac{y^3}{3} \,\right]_{\sqrt{r^2-1}}^{a} \\ &= \sqrt{r^2-1} + r^2(a-\sqrt{r^2-1}) \\ &\qquad - \frac{1}{3}\{a^3-(r^2-1)^{\frac{3}{2}}\} \\ &= a\left(r^2-\frac{a^2}{3}\right) - \frac{2}{3}(r^2-1)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

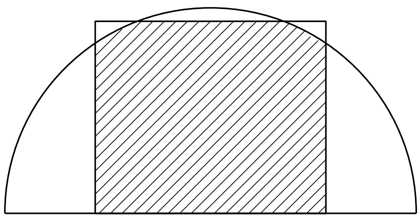
$0 < r \leqq 1$ のとき



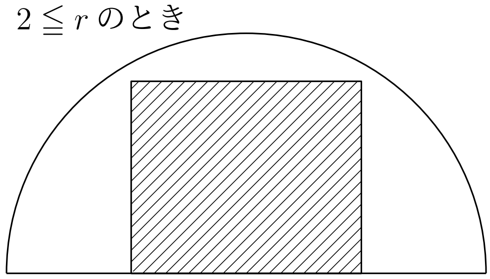
$1 \leqq r \leqq \sqrt{3}$ のとき



$\sqrt{3} \leqq r \leqq 2$ のとき



$2 \leqq r$ のとき



よって

$0 < r \leqq 1$ のとき $V(r) = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi r^3}$

$1 \leqq r \leqq \sqrt{3}$ のとき $V(r) = I(r) = \boldsymbol{\dfrac{2\pi}{3}\{r^3-(r^2-1)^{\frac{3}{2}}\}}$

$\sqrt{3} \leqq r \leqq 2$ のとき $V(r) = I(\sqrt{3}) = \boldsymbol{\pi(r^2-1)\left(\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\sqrt{r^2-1}\right)}$

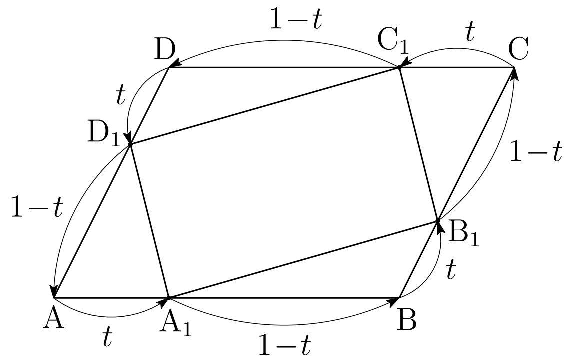
$2 \leqq r$ のとき $V(r) = \pi\cdot 1^2\cdot\sqrt{3} = \boldsymbol{\sqrt{3}\pi}$ ■

1.5 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AA_1}}=t\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}=\vec{a}+t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD_1}}=(1-t)\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}=\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}-\overrightarrow{\mathrm{AA_1}}=\vec{a}+t\vec{b}-t\vec{a}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}=\overrightarrow{\mathrm{AD_1}}-\overrightarrow{\mathrm{AA_1}}=(1-t)\vec{b}-t\vec{a}=-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

これらが $\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}=p\vec{a}+q\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ を満たすとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1 次独立であるから

$$\boldsymbol{p=1-t,\quad q=t,\quad x=-t,\quad y=1-t}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC_1}}=\vec{b}+(1-t)\vec{a}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{D_1C_1}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}-\overrightarrow{\mathrm{AD_1}}=\{\vec{b}+(1-t)\vec{a}\}-(1-t)\vec{b}\\&=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}\end{aligned}$$

よって，四角形 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ は平行四辺形である．

(3) (1) で示した $\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}=-t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}},\quad \overrightarrow{\mathrm{A_2D_2}}=-t\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{A_2D_2}}\\&=(1-t)\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}\}+t\{-t\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}\}\\&=(1-2t)\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}+2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}\\&=(1-2t)\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}+2t(1-t)\{-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\\&=(1-t)(1-2t-2t^2)\vec{a}+t(3-6t+2t^2)\vec{b}\end{aligned}$$

これが $\vec{b}$ と平行であるから　$(1-t)(1-2t-2t^2)=0$

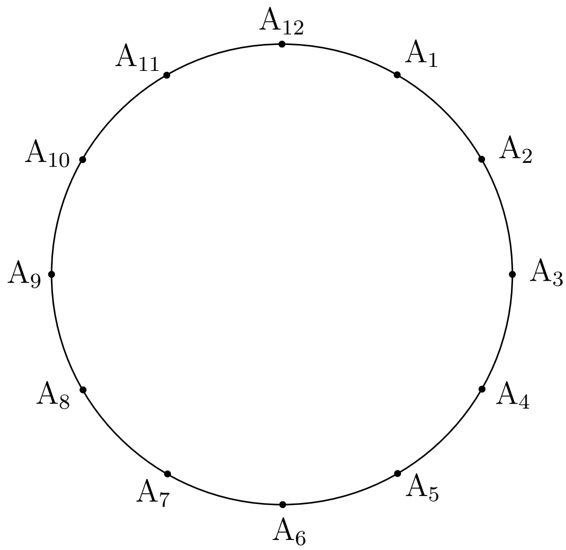
t の値の範囲に注意して　$\boldsymbol{t=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$ ■

1.6 (1) 「白球と黒球を1個ずつ取り出し，1〜5の同じ目のサイコロが2回連続して出る」事象を A とし,「6の目が2回連続して出る」事象を B とすると

$$P(A) = \left(\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\right) \times 5\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2, \quad P(B) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

求める確率は $P(A \cup B)$ で，A と B は互いに排反であるから

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{11}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \mathbf{\frac{11}{108}}$$



(2) 3個の球を「黒球，白球，白球」または「白球，黒球，黒球」または「黒球，黒球，黒球」の順序で取り出す事象を C とすると

$$P(C) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{7}{15}$$

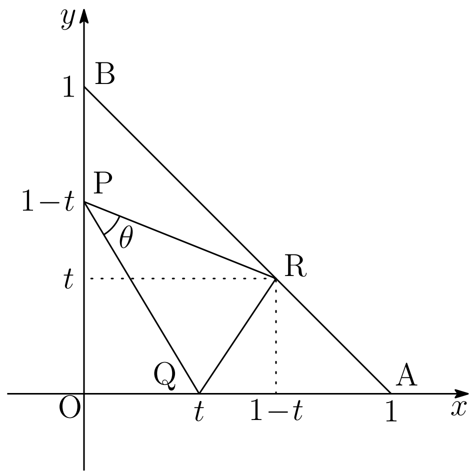
サイコロの2回目と3回目がともに4の目が出る事象を D とすると

$$P(D) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

求める確率は $\quad P(C \cap D) = P(C)P(D) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{36} = \mathbf{\frac{7}{540}}$ ■

1.7 (1) 条件より，P$(0,\ 1-t)$，Q$(t,\ 0)$，R$(1-t,\ t)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (t,\ t-1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (1-t,\ 2t-1)$$



したがって

$$S = \frac{1}{2}|t(2t-1)-(t-1)(1-t)|$$
$$= \frac{1}{2}|3t^2-3t+1|$$

ここで　　$3t^2-3t+1 = 3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} > 0$

よって　　$\boldsymbol{\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}(3t^2-3t+1)}$

別解 直線 PR : $y = \dfrac{2t-1}{1-t}x+1-t$ と直線 $x=t$ の交点の y 座標は

$$y = \frac{2t-1}{1-t}t+1-t = \frac{3t^2-3t+1}{1-t}$$

これと点 R の x 座標 $1-t$ より

$$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}(1-t)\cdot\frac{3t^2-3t+1}{1-t} = \frac{1}{2}(3t^2-3t+1)$$

(2) P$(0,\ 1-t)$，Q$(t,\ 0)$，R$(1-t,\ t)$ より $(0<t<1)$

$$\mathrm{PQ}^2 = t^2+(1-t)^2 = 2t^2-2t+1,$$
$$\mathrm{QR}^2 = (1-2t)^2+t^2 = 5t^2-4t+1,$$
$$\mathrm{RP}^2 = (t-1)^2+(1-2t)^2 = 5t^2-6t+2$$

PQ $=$ QR のとき　$2t^2-2t+1 = 5t^2-4t+1$

$$3t^2-2t=0 \quad \text{ゆえに} \quad t(3t-2)=0 \quad \text{すなわち} \quad t=\frac{2}{3}$$

QR $=$ RP のとき　$5t^2-4t+1 = 5t^2-6t+2$

$$2t-1=0 \quad \text{すなわち} \quad t=\frac{1}{2}$$

RP $=$ PQ のとき　$5t^2-6t+2 = 2t^2-2t+1$

$$3t^2-4t+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-1)(3t-1)=0 \quad \text{すなわち} \quad t=\frac{1}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{t = \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}}$

(3) θ は 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t,\ t-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1-t,\ 2t-1)$ のなす角であるから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\frac{t(1-t)+(t-1)(2t-1)}{\sqrt{t^2+(t-1)^2}\sqrt{(1-t)^2+(2t-1)^2}}$$
$$=\frac{(1-t)^2}{\sqrt{2t^2-2t+1}\sqrt{5t^2-6t+2}}$$

よって　$t=\dfrac{2}{3}$ のとき　$\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

$t=\dfrac{1}{3}$ のとき　$\cos\theta=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

■

1.8 (1) $M = 100x + y$ より，$\overline{M} = 100y + x$ であるから，これらを

$$\overline{M} = \frac{2}{3}M + 3$$

に代入すると

$$100y + x = \frac{2}{3}(100x + y) + 3 \quad \text{整理すると} \quad -197x + 298y = 9$$

(2) $N = 100x + y$ より，$\overline{N} = 100y + x$ であるから，これらを

$$\overline{N} = \frac{2}{3}N + 1$$

に代入すると

$$100y + x = \frac{2}{3}(100x + y) + 1 \quad \text{整理すると} \quad -197x + 298y = 3 \qquad (*)$$

ユークリッドの互除法[4]により，298 と 197 の最大公約数は，1 である．

$$\begin{array}{r|r|r|r|r} & 19 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 5\,) & 96\,) & 101\,) & 197\,) & 298 \\ & 95 & 96 & 101 & 197 \\ \hline & 1 & 5 & 96 & 101 \end{array}$$

$P = 298,\ Q = 197,\ a = 101,\ b = 96,\ c = 5$ とおくと

$$P = Q + a, \quad Q = a + b, \quad a = b + c, \quad b = 19c + 1$$

これより，$1 = b - 19c,\ \ c = a - b,\ \ b = Q - a,\ \ a = P - Q$ であるから

$$\begin{aligned} 1 &= b - 19c = b - 19(a - b) \\ &= -19a + 20b = -19a + 20(Q - a) \\ &= 20Q - 39a = 20Q - 39(P - Q) \\ &= -39P + 59Q \end{aligned}$$

$(*)$ は $-Qx + Py = 3$ であるから，上式より

$$-Qx + Py = 3(-39P + 59Q) \quad \text{ゆえに} \quad P(y + 117) = Q(x + 177)$$

$x + 177$ は 298 $(= P)$ を因数にもつから，整数 k を用いて

$$x + 177 = 298k \quad \text{ゆえに} \quad x = 298k - 177$$

$k = 0$ のとき $x = -177$，$k = 1$ のとき $x = 121$ となり，$0 \leqq x \leqq 99$ を満たす整数 x，すなわち，条件を満たす N は存在しない． ■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (p.18 を参照)

1.9 (1) A$(1,\ 0,-1)$，B$(0,\ 5,\ 0)$ より，ℓ 上の点は (t は実数)

$$t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(1,\ 0,-1)+(0,\ 5,\ 0)=(t,\ 5,\ -t)$$

ℓ 上の点 Q を $(q,\ 5,-q)$ とおくと，P$(a,\ a^2,\ 0)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(a-q,\ a^2-5,\ q)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ であるから

$$1(a-q)+0\cdot(a^2-5)+(-1)\cdot q=0 \quad ゆえに \quad q=\frac{a}{2}$$

よって　　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{a}{2},\ 5,-\frac{a}{2}}\right)$

(2) (1) の結果から，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ が最小になるとき，点 R$(a,\ a^2,\ 0)$ に対して，

$$\mathrm{S}\left(\frac{a}{2},\ 5,-\frac{a}{2}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|^2&=\left(\frac{a}{2}-a\right)^2+(5-a^2)^2+\left(-\frac{a}{2}\right)^2\\&=a^4-\frac{19}{2}a^2+25\\&=\left(a^2-\frac{19}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ は，$a=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{39}}{4}}$ をとる．このとき

$$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{19}}{2},\ \frac{19}{4},\ 0}\right),\quad \mathbf{S}\left(\boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{19}}{4},\ 5,\ \mp\frac{\sqrt{19}}{4}}\right)$$ **(複号同順)**

補足 C 上の点 R の座標を $(r,\ r^2,\ 0)$，ℓ 上の点 S の座標を $(s,\ 5, -s)$ とする．

2 変数関数

$$f(r,\ s) = |\overrightarrow{\mathrm{RS}}|^2 = (s-r)^2 + (5-r^2)^2 + s^2$$

を考えると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} f(r,\ s) &= 2(r-s) + 4r(r^2-5) = 4r^3 - 18r - 2s, \\
\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r,\ s) &= 12r^2 - 18, \\
\frac{\partial}{\partial s} f(r,\ s) &= 2(s-r) + 2s = 4s - 2r, \\
\frac{\partial^2}{\partial s^2} f(r,\ s) &= 4
\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial}{\partial r} f(r,\ s) = \dfrac{\partial}{\partial s} f(r,\ s) = 0$ とすると

$$4r^3 - 18r - 2s = 4s - 2r = 0 \quad \text{ゆえに} \quad r = 2s = \pm\frac{\sqrt{19}}{2}$$

このとき $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} f(r,\ s) > 0,\quad \dfrac{\partial^2}{\partial s^2} f(r,\ s) > 0$

したがって，このとき極小値 (最小値) をとる [5]． ■

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2018.pdf (p.11 を参照)

1.10 (1) $r=1$ のとき　$f(x)=x+(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=1-(1+\sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}\sin x\cos x$$
$$=1-\frac{\sin 2x}{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

$-1\leqq\sin 2x\leqq 1$，$0<\dfrac{1}{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}\leqq\dfrac{1}{2}$ より

$$-\frac{1}{2}\leqq\frac{\sin 2x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}\leqq\frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad f'(x)=1-\frac{1}{2}\geqq\frac{1}{2}>0$$

よって，$f(x)$ はつねに増加する．

(2) $f(x)=x+r(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$ より，(1) と同様にして

$$f'(x)=1-\frac{r\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

$\sin x\cos x<0$ のとき　$f'(x)>0$
$\sin x\cos x\geqq 0$ のとき

$$f'(x)=1-r\sqrt{\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(1+\sin^2 x)^3}}=1-r\sqrt{\frac{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^3}}\qquad(*)$$

ここで，$t=\sin^2 x$ とし

$$g(t)=\frac{t(1-t)}{(1+t)^3}=(t-t^2)(1+t)^{-3}$$

とおくと $(0\leqq t\leqq 1)$

$$g'(t)=(1-2t)(1+t)^{-3}+(t-t^2)\cdot(-3)(1+t)^{-4}$$
$$=\frac{(1-2t)(1+t)-3(t-t^2)}{(1+t)^4}=\frac{t^2-4t+1}{(t+1)^4}$$

t の値の範囲に注意して $g'(t)=0$ を解くと　$t=2-\sqrt{3}$

$g(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$$\begin{aligned} g(2-\sqrt{3}) &= \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(3-\sqrt{3})^3} = \frac{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3})^3(\sqrt{3}-1)^3} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}-1)}{6\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$(*)$ より，常に $f'(x) \geqq 0$ であるための条件は

$$1 - r\sqrt{\frac{1}{6\sqrt{3}}} \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < r \leqq \sqrt{6\sqrt{3}}$$

よって，$0 < r < c$ を満たす最大の実数 c は　$\boldsymbol{c = \sqrt{6\sqrt{3}}}$ ■

1.11 (1) $f(x)=(\cos x)\log(\cos x)-\cos x+\displaystyle\int_0^x(\cos t)\log(\cos t)\,dt$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=-(\sin x)\log(\cos x)+\cos x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}+\sin x+(\cos x)\log(\cos x)\\&=(\cos x-\sin x)\log(\cos x)=\cos x(1-\tan x)\log(\cos x)\end{aligned}$$

したがって，$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$f(x)$ は区間 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ において最小値 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をとる.

(2) (1) の結果から，最小値は

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\log\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)-\cos\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)\log(\cos t)\,dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)\log(\cos t)\,dt\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)\log(\cos t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t)'\log(\cos t)\,dt\\&=\Big[\,(\sin t)\log(\cos t)\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t\cdot\frac{-\sin t}{\cos t}\,dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos t}-\cos t\right)dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\left[\,\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t}-\sin t\,\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\log(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

よって，求める最小値は

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\log(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\boldsymbol{\log(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}(\log\sqrt{2}+1)}\end{aligned}$$

補足 $u=\sin t$ とおくと，$\dfrac{du}{dt}=\cos t$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos t}\,dt &= \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{du}{1-u^2}\\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)du\\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C\end{aligned}$$

上式と同様に次式が利用できる．

$$\begin{aligned}\int (\cos t)\log(\cos t)\,dt &= \frac{1}{2}\int \log(1-u^2)\,du\\ &= \frac{1}{2}u\log(1-u^2) - \frac{1}{2}\int u\cdot\frac{-2u}{1-u^2}\,du\\ &= \frac{1}{2}u\log(1-u^2) + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}-2\right)du\\ &= \frac{1}{2}u\log(1-u^2) + \frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - u + C\\ &= (\sin t)\log|\cos t| + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \sin t + C\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt = (\sin x)\log|\cos x| + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \sin x$$

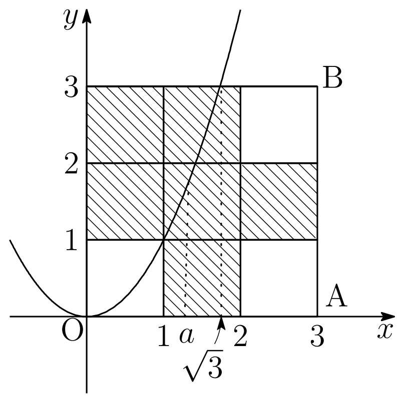
これから，$f(x)$ は $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}f(x) &= (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt\\ &= (\cos x)\log(\cos x) - \cos x\\ &\qquad + (\sin x)\log(\cos x) + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \sin x\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + (\sin x + \cos x)\{\log(\cos x) - 1\}\end{aligned}$$

よって，最小値は　$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \log(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}(\log\sqrt{2}+1)$ ■

1.12 (1) D で (ii) を満たす点 P の表す領域は図の斜線部分である．放物線上の点 $(a,\ a^2)$ がこの領域にあるから

$$\boldsymbol{1 \leqq a \leqq \sqrt{3}}$$



(2) (1) の結果に注意して，$a^2+1 \leqq 3$ および $3 \leqq a^2+1$，すなわち，$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ および $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ で場合分けを行う．

(i) $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

$1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 3$ における点 Q の領域の面積は　$(3-2)\cdot 1 = 1$

$0 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2$ における点 Q の領域の領域は　$(3-2)\cdot 1 = 1$

$0 \leqq x \leqq 1,\ 2 \leqq y \leqq 3$ における点 Q の領域の領域は

$$1 - \{1-(a-1)\}\{(a^2+1)-2\} = a^3 - 2a^2 - a + 3$$

したがって　$f(a) = 1 + 1 + (a^3 - 2a^2 - a + 3) = a^3 - 2a^2 - a + 5$

(ii) $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき

$1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 1$ における点 Q の領域の面積は　1

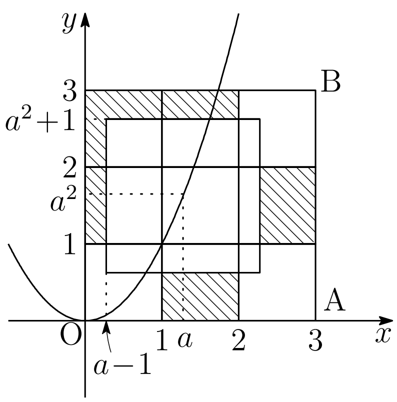
$0 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2$ における点 Q の領域の面積は

$$3\cdot 1 - 2\{2-(a^2-1)\} = 2a^2 - 3$$

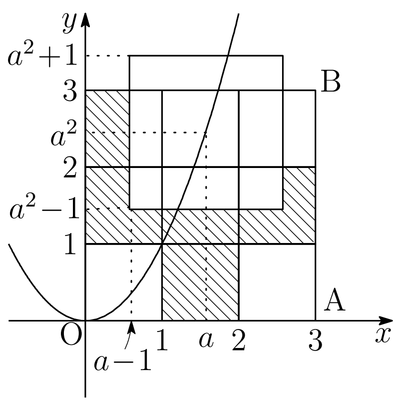
$0 \leqq x \leqq 1,\ 2 \leqq y \leqq 3$ における点 Q の領域の面積は　$1(a-1) = a-1$

したがって　$f(a) = 1 + (2a^2-3) + (a-1) = 2a^2 + a - 3$

i) $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$



ii) $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$



よって　$\boldsymbol{f(a)=\begin{cases} a^3-2a^2-a+5 & (1 \leqq a \leqq \sqrt{2}) \\ 2a^2+a-3 & (\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}) \end{cases}}$

(3) $f(a)$ は $1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ で連続であり

$$f'(a)=\begin{cases} 3a^2-4a-1=3\left(a-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{3} & (1<a<\sqrt{2}) \\ 4a+1 & (\sqrt{2}<a<\sqrt{3}) \end{cases}$$

$1<a<\sqrt{2}$ で $f'(a)<5-4\sqrt{2}<0$，$\sqrt{2}<a<\sqrt{3}$ で $f'(a)>0$.

よって，$f(a)$ を最小にする a の値は　　$\boldsymbol{a=\sqrt{2}}$ ■

1.13 $f(z)=z^2+az+b$ について $(|a| \leqq 1,\ |b| \leqq 1)$，$f(z)=0$ の解は

$$z=\frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$$

(i) $a^2-4b \geqq 0$ のとき，2 つの実数解を

$$\alpha=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\ \beta=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

とおく．まず，a を固定すると，$-1 \leqq b \leqq 1$ より

$$\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2} \leqq \alpha \leqq -\frac{a}{2}, \quad -\frac{a}{2} \leqq \beta \leqq \frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

これらの解は，閉区間 $\left[\dfrac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2}, \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$ にある．

$-1 \leqq a \leqq 1$ より，閉区間 $\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ である．

(ii) $a^2-4b<0$ のとき，2 つの虚数解を $\alpha,\ \overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係から

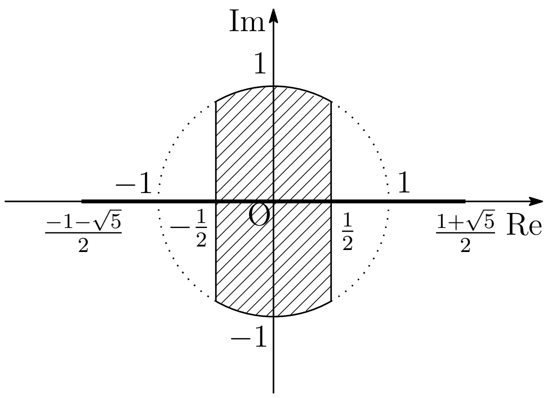
$$\alpha+\overline{\alpha}=-a, \quad \alpha\overline{\alpha}=b \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(\alpha)=\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=-\frac{a}{2}, \quad |\alpha|^2=b$$

このとき，$-1 \leqq a \leqq 1$，$0<b \leqq 1$ に注意して

$$-\frac{1}{2} \leqq \mathrm{Re}(\alpha) \leqq \frac{1}{2}, \quad |\alpha|^2 \leqq 1 \quad (|\alpha| \leqq 1)$$

したがって $\quad -\dfrac{1}{2} \leqq \mathrm{Re}(z) \leqq \dfrac{1}{2},\ |z| \leqq 1$

(i)，(ii) より，z のとりうる値の範囲は，次の境界線を含む領域である．



■

1.14 (1) $f(x)=\dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-ax\right)$ より　$f(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\sin 2ax$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sin 2ax\right)dx\\ &= \left[\,\frac{2}{3}x-\frac{1}{3a}\cos 2ax\,\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3}-\frac{1}{3a}\cos 2a+\frac{1}{3a}\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=1$ が成立するとき

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3a}\cos 2a+\frac{1}{3a}=1 \quad ゆえに \quad a+\cos 2a-1=0 \qquad (*)$$

$g(a)=a+\cos 2a-1$ とおくと　$g'(a)=1-2\sin 2a$

$0<a\leqq\dfrac{\pi}{4}$ における $g(a)$ の増減表は

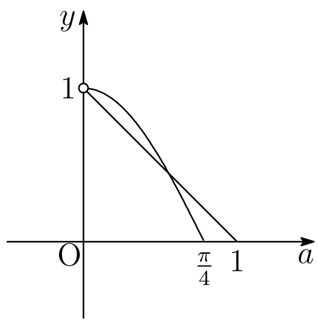
a	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	(0)	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}-1$

$\dfrac{\pi}{4}-1<0$ であるから，$(*)$ を満たす a がただ1つ存在する．

別解　$0<a\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において

$$\cos 2a=-a+1 \qquad \text{(A)}$$

が満たす a がただ1つ存在することを示してもよい．$0<a\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において，$y=\cos 2a$ と $y=-a+1$ のグラフをかくと，右の図から，(A) を満たす a がただ1つ存在する．



(2) $0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加であるから，$0\leqq b<c\leqq 1$ について

$$f(b)\leqq f(x)\leqq f(c) \qquad (b\leqq x\leqq c)$$

$\displaystyle\int_b^c f(b)\,dx\leqq\int_b^c f(x)\,dx\leqq\int_b^c f(c)\,dx$ により，次式が成立する．

$$f(b)(c-b)\leqq\int_b^c f(x)\,dx\leqq f(c)(c-b)$$

(3) 定義から $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_{n,k,i} = k$ ゆえに $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{S_{n,k,i}}{k} = 1$

上の第 2 式および (∗∗) が成立するとき

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{S_{n,k,i}}{k} = 1$$

(4) $S_{n,k,i}$ を用いて $\displaystyle A_{n,k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} iS_{n,k,i} = \sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{S_{n,k,i}}{k}$

(∗∗) を適用すると

$$A_n = \lim_{k\to\infty} A_{n,k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{S_{n,k,i}}{k} = \sum_{i=1}^{n} i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \qquad \text{(A)}$$

ここで，$b = \dfrac{i-1}{n}$，$c = \dfrac{i}{n}$ を (2) に代入した不等式を用いると

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\frac{i}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq i\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{i}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

(A) より $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq A_n \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n} \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 xf(x)\,dx$ であるから，

はさみうちの原理により

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n} &= \int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sin 2ax\right) dx \\
&= \left[\,\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3a}\cos 2ax + \frac{1}{6a^2}\sin 2ax\,\right]_0^1 \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3} - \frac{\cos 2a}{3a} + \frac{\sin 2a}{6a^2}}
\end{aligned}$$

■

1.15 $2022=2{\cdot}3{\cdot}337$．2^a3^b と 2^c3^d の最大公約数を g とすると，$g\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

［1］$g=1$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(1.1)\ \ 2^x3^y+1=2022 \quad \text{または} \quad (1.2)\ \ 2^x+3^y=2022$$

(1.1) より　$2^x3^y=2021$　右辺は 2 でも 3 で割り切れないので不適．

(1.2) より　$3^y=2022-2^x$　$x\geqq 1$ とすると，右辺は 2 を因数にもち，等式を満たさない．$x=0$ となり，$3^y=2021$．等式の右辺は 3 で割り切れず，不適．

［2］$g=2$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(2.1)\ \ 2(2^x3^y+1)=2022 \quad \text{または} \quad (2.2)\ \ 2(2^x+3^y)=2022$$

(2.1) より　$2^x3^y=1010$．右辺は 5 を因数にもつので，不適．

(2.2) より　$2^x=1011-3^y$．$y\geqq 1$ とすると，右辺は 3 を因数にもち，等式を満たさない．$y=0$ となり，$2^x=1010$．右辺は 5 を因数にもち，不適．

［3］$g=3$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(3.1)\ \ 3(2^x3^y+1)=2022 \quad \text{または} \quad (3.2)\ \ 3(2^x+3^y)=2022$$

(3.1) より　$2^x3^y=673$．右辺は 2，3 で割り切れないので，不適．

(3.2) より　$3^y=674-2^x$．$x\geqq 1$ とすると，右辺は 2 を因数にもち，等式を満たさない．$x=0$ となり，$3^y=673$．右辺は 3 で割り切れず，不適．

［4］$g=6$ のとき，次式を満たす 0 以上の整数 $x,\ y$ を求めればよい．

$$(4.1)\ \ 6(2^x3^y+1)=2022 \quad \text{または} \quad (4.2)\ \ 6(2^x+3^y)=2022$$

(4.1) より　$2^x3^y=336$．右辺は 7 を因数にもつので，不適．

(4.2) より　$2^x=337-3^y$．$0\leqq y\leqq 5$ について調べればよい．

y	0	1	2	3	4	5
$337-3^y$	336	334	328	310	256	94

$2^x=337-3^y$ を満たすのは，$256=2^8$ により　$x=8,\ y=4$

したがって　　$6(2^8+3^4)=2^9{\cdot}3^1+2^1{\cdot}3^5=2022$

対称性に注意して　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d)=(9,\ 1,\ 1,\ 5),\ (1,\ 5,\ 9,\ 1)}$　■

1.16 (1) D の境界面を次の 6 つに分ける．

平面 $x=0$，平面 $x=1$ の部分をそれぞれ $E_{x,0}$，$E_{x,1}$ とする．
平面 $y=0$，平面 $y=1$ の部分をそれぞれ $E_{y,0}$，$E_{y,1}$ とする．
平面 $z=0$，平面 $z=1$ の部分をそれぞれ $E_{z,0}$，$E_{z,1}$ とする．

$E_{\alpha,k}$ $(\alpha=x,y,z,\ k=0,1)$ を底面，点 $\mathrm{A}(t-1,\ t,\ t+1)$ を頂点する四角錐の体積を $V_{\alpha,k}(t)$ とすると

$$\begin{aligned} V_{x,0}(t)&=\frac{1}{3}|t-1|, & V_{x,1}(t)&=\frac{1}{3}|t-2|,\\ V_{y,0}(t)&=\frac{1}{3}|t|, & V_{y,1}(t)&=\frac{1}{3}|t-1|,\\ V_{z,0}(t)&=\frac{1}{3}|t+1|, & V_{z,1}(t)&=\frac{1}{3}|t| \end{aligned}$$

ただし，これらの D の領域外の体積は次の範囲にある．

- $V_{x,0}(t)$ は $t\leqq 1$，$V_{x,1}(t)$ は $2\leqq t$
- $V_{y,0}(t)$ は $t\leqq 0$，$V_{y,1}(t)$ は $1\leqq t$
- $V_{z,0}(t)$ は $t\leqq -1$，$V_{z,1}(t)$ は $0\leqq t$

$t=-1$ のとき，$\mathrm{A}(-2,-1,\ 0)$ であるから

$$f(-1)=1^3+V_{x,0}(-1)+V_{y,0}(-1)=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\mathbf{2}$$

(2) 点 $\mathrm{A}(t-1,\ t,\ t+1)$ は，点 $(-1,\ 0,\ 1)$ を通り，方向ベクトルが $(1,\ 1,\ 1)$ の直線上にある．また，点 A は D の外部にあるから

(i) $t\leqq -1$ のとき

$$\begin{aligned} f(t)&=1^3+V_{x,0}(t)+V_{y,0}(t)+V_{z,0}(t)\\ &=1+\frac{1}{3}|t-1|+\frac{1}{3}|t|+\frac{1}{3}|t+1|\\ &=1+\frac{1}{3}(-t+1)+\frac{1}{3}(-t)+\frac{1}{3}(-t-1)=-t+1 \end{aligned}$$

(ii) $-1\leqq t\leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(t)&=1^3+V_{x,0}(t)+V_{y,0}(t)=1+\frac{1}{3}|t-1|+\frac{1}{3}|t|\\ &=1+\frac{1}{3}(-t+1)+\frac{1}{3}(-t)=-\frac{2}{3}t+\frac{4}{3} \end{aligned}$$

(iii) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= 1^3 + V_{x,0}(t) + V_{z,1}(t) = 1 + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\ &= 1 + \frac{1}{3}(-t+1) + \frac{1}{3}t = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(iv) $1 \leqq t \leqq 2$ のとき

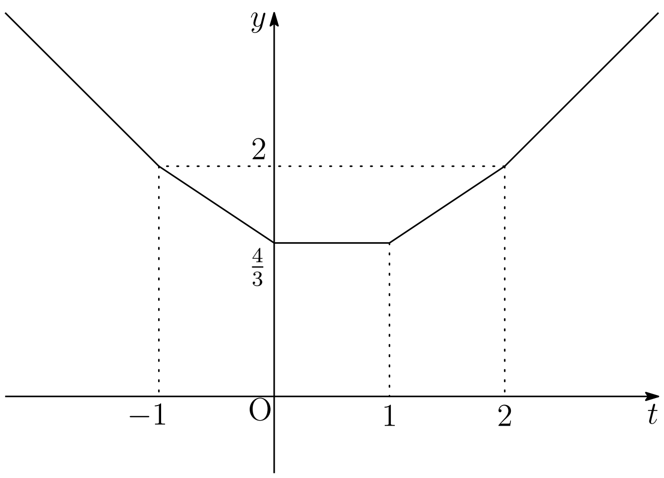
$$\begin{aligned} f(t) &= 1^3 + V_{y,1}(t) + V_{z,1}(t) = 1 + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\ &= 1 + \frac{1}{3}(t-1) + \frac{1}{3}t = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(v) $2 \leqq t$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= 1^3 + V_{x,1}(t) + V_{y,1}(t) + V_{z,1}(t) \\ &= 1 + \frac{1}{3}|t-2| + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\ &= 1 + \frac{1}{3}(t-2) + \frac{1}{3}(t-1) + \frac{1}{3}t = t \end{aligned}$$

(i)〜(v) より $\quad f(t) = \begin{cases} -t+1 & (t \leqq -1) \\ -\frac{2}{3}t + \frac{4}{3} & (-1 \leqq t \leqq 0) \\ \frac{4}{3} & (0 \leqq t \leqq 1) \\ \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} & (1 \leqq t \leqq 2) \\ t & (2 \leqq t) \end{cases}$

$y = f(t)$ のグラフは，下の図のようになる．$f(t)$ の最小値は $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$



1.17 (1) $x^3=(x-a)^2(x+2a)+3a^2x-2a^3$ より，求める余りは　$\boldsymbol{3a^2x-2a^3}$

(2) $x^3=(x^2+\alpha x+\beta)(x-\alpha)+(\alpha^2-\beta)x+\alpha\beta$

x^3 を $x^2+\alpha x+\beta$ で割った余りが $3x+b$ であるから

$$\alpha^2-\beta=3,\quad \alpha\beta=b \qquad (*)$$

上の 2 式から β を消去すると　$b=\alpha^3-3\alpha$

$g(\alpha)=\alpha^3-3\alpha$ とすると

$$g'(\alpha)=3\alpha^2-3=3(\alpha+1)(\alpha-1)$$

α	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(\alpha)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$(*)$ の第 1 式から，α の値により，一意的に β が決定するから，$f(x)$ の個数は，方程式 $b=g(\alpha)$ の解の個数と一致する．よって

$\boldsymbol{-2<b<2}$ **のとき　3 個**
$\boldsymbol{b=\pm 2}$ **のとき　2 個**
$\boldsymbol{b<-2,\ 2<b}$ **のとき　1 個**

■

1.18 (1) $4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ より $(\alpha\neq 0)$ $\quad \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)+4=0$

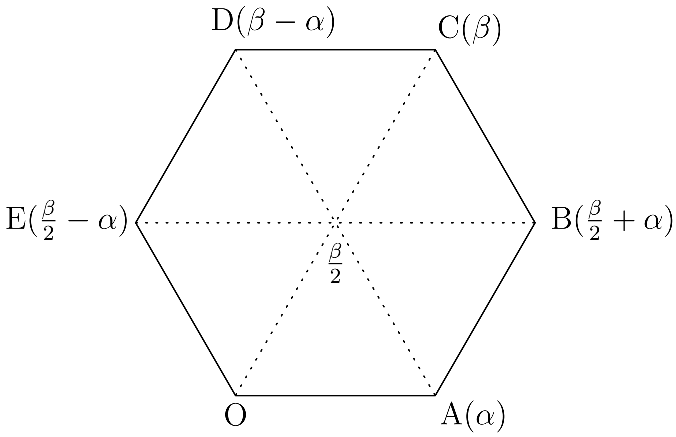
$0\leqq \arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\leqq\pi$ に注意して $\quad \boldsymbol{\dfrac{\beta}{\alpha}=1+\sqrt{3}i}$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$$|\beta|=2|\alpha|,\quad \angle\alpha 0\beta=\frac{\pi}{3}$$ よって **$\boldsymbol{\alpha}$ は A，$\boldsymbol{\beta}$ は C**

(2) (1) の結果から，点 B，D，E を α, β を用いて表すと

$$\mathrm{B}\left(\frac{\beta}{2}+\alpha\right),\quad \mathrm{D}\,(\beta-\alpha),\quad \mathrm{E}\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)$$



$2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=0$ より

$$(2\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-1)=0$$

A(α)，C(β) の中点 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ は γ ではないから $\quad \gamma=\alpha+1$

(i) γ が点 B であるとき，(1) の結果を用いて

$$\gamma=\alpha+1=\frac{\beta}{2}+\alpha,\quad \frac{\beta}{\alpha}=1+\sqrt{3}i$$

上の第 1 式から $\quad \beta=2\quad$ これを第 2 式に代入して $\quad \alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

また第 1 式から $\quad \gamma=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}$

(ii) γ が点 D であるとき，(1) の結果を用いて

$$\gamma=\alpha+1=\beta-\alpha,\quad \frac{\beta}{\alpha}=1+\sqrt{3}i$$

上の第 1 式から　$\beta=2\alpha+1$　これを第 2 式に代入して

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha}=1+\sqrt{3}i \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\alpha}=-1+\sqrt{3}i$$

$\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{4}$ であるから　$\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2},\quad \gamma=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{4}$

(iii) γ が点 E であるとき，(1) の結果を用いて

$$\gamma=\alpha+1=\frac{\beta}{2}-\alpha,\quad \frac{\beta}{\alpha}=1+\sqrt{3}i$$

上の第 1 式から　$\beta=4\alpha+2$　これを第 2 式に代入して

$$\frac{4\alpha+2}{\alpha}=1+\sqrt{3}i \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{\alpha}=-3+\sqrt{3}i$$

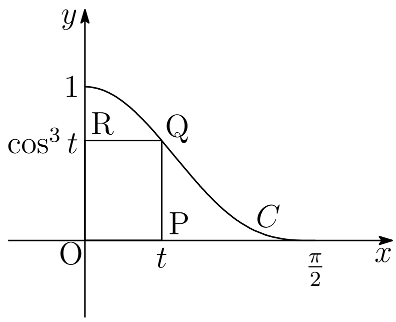
$\alpha=\dfrac{-3-\sqrt{3}i}{6}$ であるから　$\beta=-\dfrac{2\sqrt{3}i}{3},\quad \gamma=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{6}$

(i)〜(iii) より

$$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ 2,\ \frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right),}$$
$$\boldsymbol{\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{4},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{3-\sqrt{3}i}{4}\right),}$$
$$\boldsymbol{\left(\frac{-3-\sqrt{3}i}{6},-\frac{2\sqrt{3}i}{3},\ \frac{3-\sqrt{3}i}{6}\right)}$$

■

1.19 (1) 求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx \\ &= \left[\ \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

(2) $f(t) = t\cos^3 t$ であるから，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において

$$f'(t) = \cos^3 t + t{\cdot}3\cos^2 t(-\sin t) = \cos^3 t(1-3t\tan t)$$

$g(t) = 1 - 3t\tan t\ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$g(t)$ は単調減少で

$$g(0) = 1, \qquad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} = -\infty$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において，$g(t) = 0$ をみたす $t = \alpha$ がただ 1 つ存在する．
$f'(t) = g(t)\cos^3 t$ より，$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$g(\alpha) = 0$ より　$1 - 3\alpha\tan\alpha = 0$　ゆえに　$\alpha = \dfrac{1}{3\tan\alpha}$

したがって　$f(\alpha) = \alpha\cos^3\alpha = \dfrac{1}{3\tan\alpha}{\cdot}\cos^3\alpha = \dfrac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$

(3) $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 - 3{\cdot}\dfrac{\pi}{6}\tan\dfrac{\pi}{6} = 1 - \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}-\pi}{2\sqrt{3}} > 0$ より　$\dfrac{\pi}{6} < \alpha$

関数 $\dfrac{\cos^4 t}{3\sin t}\ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ は単調減少であるから

$$\frac{\cos^4\frac{\pi}{6}}{3\sin\frac{\pi}{6}} > \frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{8} > f(\alpha)$$

上の第 2 式および (1) の結果から

$$\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{3}{8}\Big/\frac{2}{3} = \frac{9}{16}$$

■

1.20 「0 以上のすべての整数 m について，x_{3m+1}，x_{3m+2}，x_{3m+3} は

$$x_{3m+1} \equiv 0, \quad x_{3m+2} \equiv 0, \quad x_{3m+3} \equiv 1 \pmod 3$$

を満たす整数である」を (A) とする．

［1］$m=0$ のとき

$$x_1 = 0,\ x_2 = x_1 + 1 + 2\cos\frac{2\pi x_1}{3} = 3,\ x_3 = x_2 + 2 + 2\cos\frac{2\pi x_2}{3} = 7$$

したがって，$m=0$ のとき (A) は成立する．

［2］$m=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると　$x_{3k+3} \equiv 1 \pmod 3$

$$\begin{aligned} x_{3k+4} &= x_{3k+3} + 3k + 3 + 2\cos\frac{2\pi x_{3k+3}}{3} \equiv 0 \pmod 3 \\ x_{3k+5} &= x_{3k+4} + 3k + 4 + 2\cos\frac{2\pi x_{3k+4}}{3} \equiv 0 \pmod 3 \\ x_{3k+6} &= x_{3k+5} + 3k + 5 + 2\cos\frac{2\pi x_{3k+5}}{3} \equiv 1 \pmod 3 \end{aligned}$$

したがって，$m=k+1$ のときも (A) は成立する．

［1］,［2］より，すべての 0 以上の整数 m について (A) が成立する．

(A) の結論から

$$x_{n+1} - x_n - n = 2\cos\frac{2\pi x_n}{3} = \begin{cases} 2 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 2 \pmod 3) \\ -1 & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases} \qquad (*)$$

$y_{3m+1} = 3m,\quad y_{3m+2} = 3m+2,\quad y_{3m+3} = 3m+4 \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$ により

$$y_{n+1} - y_n = \begin{cases} 2 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 2 \pmod 3) \\ -1 & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$x_{n+1} - x_n - n = y_{n+1} - y_n$　ゆえに　$x_{n+1} - y_{n+1} - (x_n - y_n) = n$

$x_1 = y_1 = 0$ より，$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{x_{k+1} - y_{k+1} - (x_k - y_k)\} = \sum_{k=1}^{n-1} k$

$n=1$ のときも成立することに注意して　$\boldsymbol{x_n - y_n = \dfrac{1}{2}n(n-1)}$

補足 $\left\{\cos\dfrac{2n\pi}{3}\right\}$ の周期性に注目すると

$$2\cos\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} -1 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ -1 & (n \equiv 2 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases}$$

上式および $(*)$，$(**)$ の右辺に注目して

$$a_n = 1 - 2\cos\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 2 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 2 \pmod 3) \\ -1 & (n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases}$$

とおくと，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} a_k &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2\cos\frac{2k\pi}{3}\right) \\ &= n - 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} \\ &= n - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sin\frac{2k-1}{3}\pi - \sin\frac{2k+1}{3}\pi\right) \\ &= n - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n-1}{3}\pi \end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ および $x_1 = y_1 = 0$ より

$$\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k - k) = \sum_{k=1}^{n-1}(y_{k+1} - y_k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

したがって　　$x_n - \dfrac{1}{2}n(n-1) = y_n = n - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{2n-1}{3}\pi$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n-1}{3}\pi, \\ y_n &= n - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n-1}{3}\pi \end{aligned}$$

■

1.21 (1) $\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ より $\cos 4\alpha = \cos\dfrac{8\pi}{7} = \cos\left(\dfrac{\pi}{7}+\pi\right) = -\cos\dfrac{\pi}{7}$

$$\cos 3\alpha = \cos\frac{6\pi}{7} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$$

よって $\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$

別証 $\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ より，$7\alpha = 2\pi$ であるから

$$\cos 4\alpha = \cos(2\pi - 3\alpha) = \cos(-3\alpha) = \cos 3\alpha$$

(2) $\cos(n+1)\alpha = 2\cos\alpha\cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha$ より

$$\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1,\\
\cos 3\alpha &= 2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha\\
&= 2\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \cos\alpha\\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,\\
\cos 4\alpha &= 2\cos\alpha\cos 3\alpha - \cos 2\alpha\\
&= 2\cos\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) - (2\cos^2\alpha - 1)\\
&= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1
\end{aligned}$$

$x = \cos\alpha$ とおいて ($x \neq 1$)，上の 2 式を (1) の等式に代入すると

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = 4x^3 - 3x \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1) = 0$$

$x \neq 1$ であるから $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

よって，$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とすると $f(\cos\alpha) = 0$

(3) (2) の結果から

$$8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1 = 0$$

$$(2\cos\alpha)^3 + (2\cos\alpha)^2 - 2(2\cos\alpha) - 1 = 0 \qquad (*)$$

$\cos\alpha$ を有理数と仮定すると，$2\cos\alpha$ も有理数であるから

$$2\cos\alpha = \frac{p}{q} \quad (p,\ q \text{ は互いに素である正の整数})$$

とおいて，これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{p^3}{q^3} + \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{q} - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{p^3}{q} = -p^2 + 2pq + q^2$$

上の第 2 式の右辺は整数であるから，$q = 1$ より

$$p^3 = -p^2 + 2p + 1 \quad \text{ゆえに} \quad p(p^2 + p - 2) = 1$$

$p = 1$ となるが，$p = 1$ は上式を満たさない．よって $\cos\alpha$ は無理数．

補足 $q=1$ であることを示すと

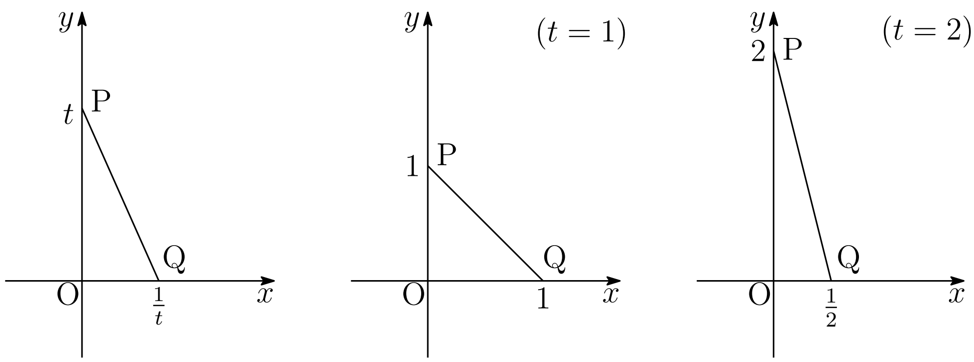
$$2\cos\alpha = p \quad \text{ゆえに} \quad \cos\alpha = \frac{p}{2}$$

$0<\cos\alpha<1$ より，$p=1$ となり，$\cos\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ より矛盾．■

1.22 線分 PQ を表す方程式は $(1 \leqq t \leqq 2)$ $\quad y = -t^2x + t \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{t}\right)$

$f(t) = -t^2x + t$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ とおくと，線分 PQ が通過する領域は，点 Q が x 軸上で $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ にあることに注意すると

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad \min_{1\leqq t\leqq 2} f(t) \leqq y \leqq \max_{1\leqq t\leqq 2} f(t)$$
$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} \quad 0 \leqq y \leqq \max_{1\leqq t\leqq 2} f(t)$$



$0 < x \leqq 1$ のとき $\quad f(t) = -x\left(t - \dfrac{1}{2x}\right)^2 + \dfrac{1}{4x}$

(i) $x = 0$ のとき，$f(t) = t$ より $\quad 1 \leqq y \leqq 2$

(ii) $2 \leqq \dfrac{1}{2x}$，すなわち，$0 < x \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき

$$f(1) \leqq y \leqq f(2) \quad \text{ゆえに} \quad -x + 1 \leqq y \leqq -4x + 2$$

(iii) $\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{1}{2x} \leqq 2$，すなわち，$\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき

(定義域の中央 $\dfrac{3}{2}$ が軸 $t = \dfrac{1}{2x}$ より左側にあるから，左端 $f(1)$ が最小値)

$$f(1) \leqq y \leqq f\left(\frac{1}{2x}\right) \quad \text{ゆえに} \quad -x + 1 \leqq y \leqq \frac{1}{4x}$$

(iv) $1 \leqq \dfrac{1}{2x} \leqq \dfrac{3}{2}$，すなわち，$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

(定義域の中央 $\dfrac{3}{2}$ が軸 $t = \dfrac{1}{2x}$ より右側にあるから，右端 $f(2)$ が最小値)

$$f(2) \leqq y \leqq f\left(\frac{1}{2x}\right) \quad \text{ゆえに} \quad -4x + 2 \leqq y \leqq \frac{1}{4x}$$

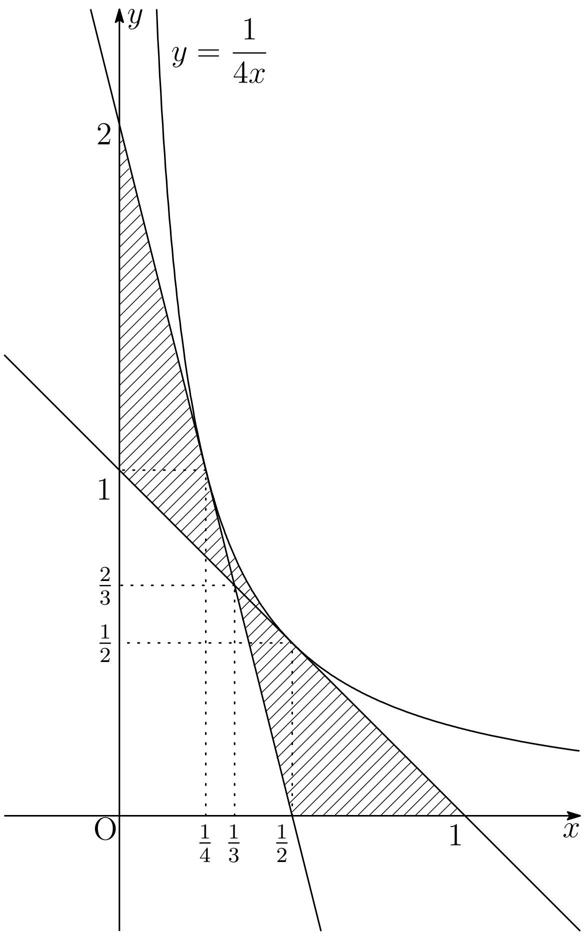
(v) $\dfrac{1}{2x} \leqq 1$，すなわち，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ のとき

$$0 \leqq y \leqq f(1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq y \leqq -x+1$$

(i)〜(v) について，(i) と (ii) をまとめると次のようになる．

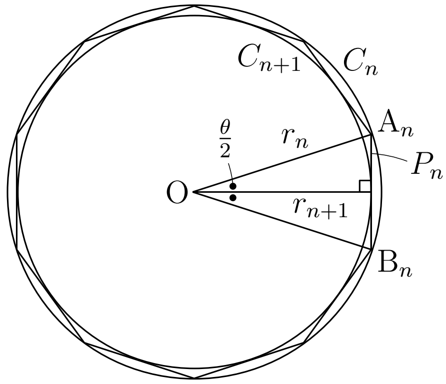
$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{4} \text{ のとき} & -x+1 \leqq y \leqq -4x+2 \\ \dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{3} \text{ のとき} & -x+1 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4x} \\ \dfrac{1}{3} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき} & -4x+2 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4x} \\ \dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} & 0 \leqq y \leqq -x+1 \end{cases}$$

求める領域は，下の図の境界線を含む斜線部分である．



■

1.23 (1) P_n の1辺を $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ とすると



$$r_1 = 1, \quad r_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta}{2}$$

したがって

$$r_n = 1\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\cos^{n-1}\frac{\theta}{2}},$$

$$\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n = \frac{1}{2}{r_n}^2 \sin\theta$$

$\theta = \dfrac{2\pi}{m}$ より，$m = \dfrac{2\pi}{\theta}$ であるから

$$\begin{aligned} s_n &= \pi {r_n}^2 - m\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n = \pi {r_n}^2 - \frac{2\pi}{\theta}\cdot\frac{1}{2}{r_n}^2 \sin\theta \\ &= \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right){r_n}^2 = \boldsymbol{\pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cos^{2n-2}\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より

$$\begin{aligned} f(m) &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n = \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\cos^{2n-2}\frac{\theta}{2} \\ &= \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\frac{1}{1-\cos^2\frac{\theta}{2}} = \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \boldsymbol{4\pi\cdot\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2} \end{aligned}$$

(3) $\theta = \dfrac{2\pi}{m}$ より，$m \to \infty$ のとき $\theta \to 0$ であるから

$$\lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{\theta\to 0} 4\pi\cdot\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 = 4\pi\cdot\frac{1}{6}\cdot 1^2 = \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$$

■

1.24 (1) 双曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ と直線 $\ell : y = \sqrt{a}\,x + \sqrt{a}$ の方程式から y を消去して整理すると

$$(a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0 \qquad (*)$$

C と ℓ が異なる 2 点で交わるとき，上の方程式の係数について

$$a - 1 \neq 0 \quad \text{かつ} \quad D = a^2 - (a-1)(a+4) = 4 - 3a > 0$$

$a > 0$ であるから $\quad \boldsymbol{0 < a < 1,\ 1 < a < \dfrac{4}{3}}$

(2) $(*)$ の 2 つの解を s_1, s_2 とすると，解と係数の関係により

$$s_1 + s_2 = -\frac{2a}{a-1} \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{s_1 + s_2}{2} = \boldsymbol{\frac{a}{1-a}}$$

これを $\ell : y = \sqrt{a}(x+1)$ の方程式に代入すると

$$t = \sqrt{a}\left(\frac{a}{1-a} + 1\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{1-a}}$$

(3) (2) の結果から $\quad s = -\dfrac{1}{a-1} - 1$

$f(a) = -\dfrac{1}{a-1} - 1$ とおくと，$f(a)$ は $a < 1$, $1 < a$ で単調増加.

$$f(0) = 0, \quad \lim_{a \to 1-0} f(a) = \infty, \quad \lim_{a \to 1+0} f(a) = -\infty, \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = -4$$

よって，$0 < a < 1$, $1 < a < \dfrac{4}{3}$ において $\quad \boldsymbol{s < -4,\ 0 < s}$

(4) $s = \dfrac{a}{1-a}$ より $\quad (s+1)a = s \quad s \neq -1$ であるから $\quad a = \dfrac{s}{s+1}$

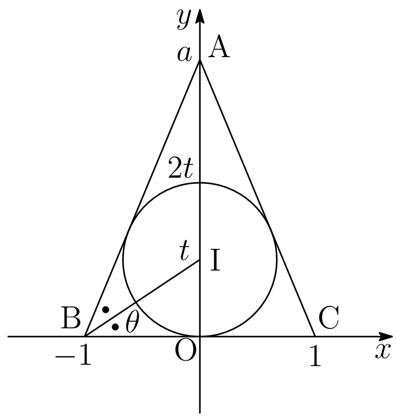
(2) の結果から $\quad t = \dfrac{\sqrt{\dfrac{s}{s+1}}}{1 - \dfrac{s}{s+1}} = \boldsymbol{(s+1)\sqrt{\dfrac{s}{s+1}}}$

補足 次のように表記することもできる.

$$t = \begin{cases} \sqrt{s(s+1)} & (0 < s) \\ -\sqrt{s(s+1)} & (s < -4) \end{cases}$$

■

1.25 (1) 右の図から



$$\boldsymbol{t = \tan\theta,\quad a = \tan 2\theta}$$

(2) (1) の結果より

$$a = \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \boldsymbol{\frac{2t}{1-t^2}}$$

(3) △ABC の重心の座標は $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$

これが円周上の点 $(0,\ 2t)$ と一致するから

$$\frac{a}{3} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad a = 6t$$

これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{2t}{1-t^2} = 6t \quad \text{ゆえに} \quad t(3t^2-2) = 0$$

$0 < t < 1$ に注意して $\boldsymbol{t = \dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(4) 点 $\mathrm{B}(-1,\ 0)$ を通り，直線 AC に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{1}{a}(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{x}{a} + \frac{1}{a}$$

この直線と y 軸との交点 $\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ が，$(0,\ 2t)$ と一致するから

$$\frac{1}{a} = 2t$$

これに (2) の結果を代入すると $(0 < t < 1)$

$$\frac{1-t^2}{2t} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad 5t^2 = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

(5) ACの垂直二等分線，すなわち，ACの中点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{a}$ の直線の方程式は

$$y-\frac{a}{2}=\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{2}\right)\quad すなわち\quad y=\frac{x}{a}+\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}$$

この直線と y 軸との交点 $\left(0,\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}\right)$ が，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ または $(0,\ 2t)$ に一致するときである．

(i) $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=0$ のとき $(a>0)$

$$a^2=1\quad ゆえに\quad a=1$$

これに (2) の結果を代入すると $\quad\dfrac{2t}{1-t^2}=1$

$$t^2+2t-1=0\quad t\,の値の範囲に注意して\quad t=-1+\sqrt{2}$$

(ii) $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=2t$ のとき，これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{t}{1-t^2}-\frac{1-t^2}{4t}=2t\quad 整理すると\quad 7t^4-2t^2-1=0$$

したがって $\quad t^2=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}\quad t$ の範囲に注意して $\quad t=\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$

(i)，(ii) より $\qquad \boldsymbol{t=-1+\sqrt{2},\ \sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}}$ ■

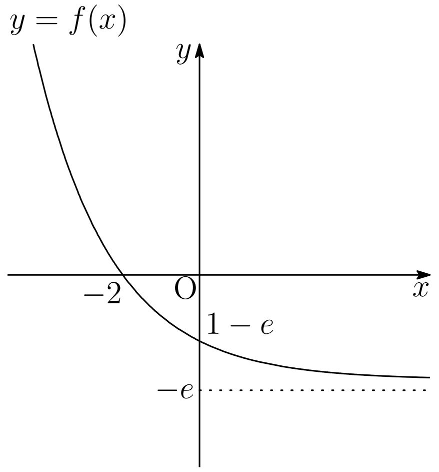
1.26 (1) $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}-e$ より

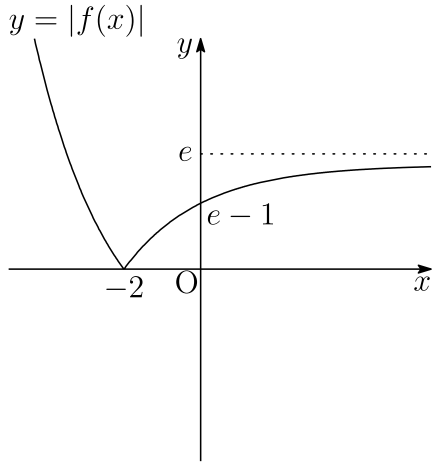
$$\boldsymbol{f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}},\quad \int f(x)\,dx=-2e^{-\frac{x}{2}}-ex+C}\quad (\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数})$$

(2) (1) の結果から，$f(x)$ は単調減少．$f(-2)=0$．

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=-e$ より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(x)|=\boldsymbol{e}$

したがって，左下の $y=f(x)$ のグラフの概形から，右下の $y=|f(x)|$ のグラフのグラフの概形を得る．





(3) (1) の結果から，$F(x)=-2e^{-\frac{x}{2}}-ex$ とおくと

$$F(-4)=-2e^2+4e,\quad F(-2)=0,\quad F(4)=-2e^{-2}-4e$$

(2) の $y=|f(x)|$ のグラフにより

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{4}|f(x)|\,dx&=\int_{-4}^{-2}f(x)\,dx-\int_{-2}^{4}f(x)\,dx\\&=\Big[\,F(x)\,\Big]_{-4}^{-2}-\Big[\,F(x)\,\Big]_{-2}^{4}\\&=2F(-2)-F(-4)-F(4)\\&=2\cdot0-(-2e^2+4e)-(-2e^{-2}-4e)\\&=\boldsymbol{2(e^2+e^{-2})}\end{aligned}$$

■

1.27 (1) P_n の x 座標を α_n とすると，条件から

$$\alpha_{n+1} = \frac{3}{2}\alpha_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\alpha_{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$n \geqq 2$ のとき，$\alpha_1 = 1$ より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\alpha_{k+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^k \alpha_k\right\} &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k \\
\left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n - \frac{2}{3}\alpha_1 &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
\alpha_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3^n-1}{2^n}
\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから $\alpha_n = \dfrac{3^n-1}{2^n} \quad \cdots(*)$

よって　P_2 の x 座標は $\alpha_2 = \dfrac{3^2-1}{2^2} = \mathbf{2}$

P_4 の x 座標は $\alpha_4 = \dfrac{3^4-1}{2^4} = \mathbf{5}$

別解 順次，漸化式に $n = 1,\ 2,\ 3$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{3}{2}\alpha_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2} = \mathbf{2}, \\
\alpha_3 &= \frac{3}{2}\alpha_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}, \\
\alpha_4 &= \frac{3}{2}\alpha_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{13}{4} + \frac{1}{8} = \mathbf{5}
\end{aligned}$$

(2) $(*)$ より　$\boldsymbol{\alpha_n = \dfrac{3^n-1}{2^n}}$

(3) 直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ は点 $\mathrm{P}_n(\alpha_n,\ 0)$ を通り，傾き $\sqrt{3}$ の直線であるから

$$y = \sqrt{3}(x-\alpha_n) \quad \cdots ①$$

直線 OQ_1 の偏角が $\dfrac{\pi}{3}$ であるから，l の偏角は $\dfrac{\pi}{6}$

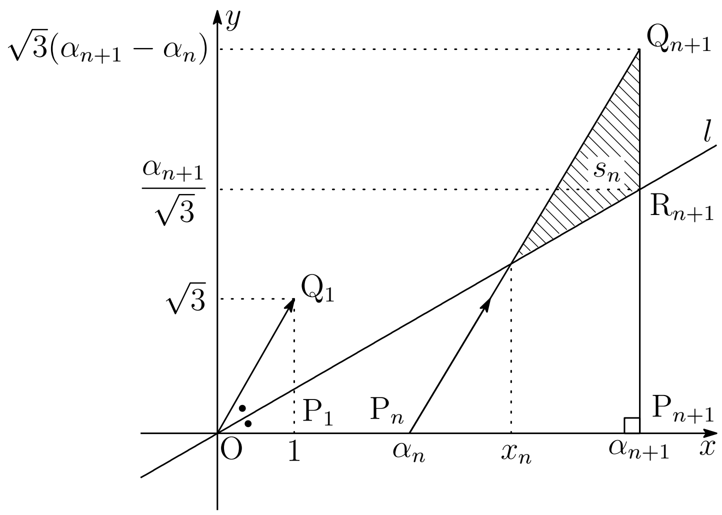
直線 l の方程式は　$y = x\tan\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$　$\cdots ②$

直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ と直線 l の交点の x 座標を x_n とすると

$$\sqrt{3}(x_n-\alpha_n) = \frac{x_n}{\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに} \quad x_n = \frac{3}{2}\alpha_n \quad \cdots ③$$

よって，直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ と直線 l の交点は

$$\left(\frac{3}{2}\alpha_n,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_n\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\left(\frac{3^{n+1}-3}{2^{n+1}},\ \frac{\sqrt{3}(3^n-1)}{2^{n+1}}\right)}$$



(4) ① より，点 Q_{n+1} の y 座標は　$\sqrt{3}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$

直線 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$ と直線 l の交点を R_{n+1} とおくと，

② より，R_{n+1} の y 座標は　$\dfrac{\alpha_{n+1}}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}(\alpha_{n+1}-x_n) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{3}(\alpha_{n+1}-\alpha_n) - \frac{\alpha_{n+1}}{\sqrt{3}}\right\}\left(\alpha_{n+1}-\frac{3}{2}\alpha_n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\alpha_{n+1}-\frac{3}{2}\alpha_n\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$ ■

1.28　(1) $g(n)=6-n$，$h(n)=14-n$ より

$$(h\circ g)(n)=h(6-n)=14-(6-n)=\boldsymbol{n+8},$$
$$(g\circ h)(n)=g(14-n)=6-(14-n)=\boldsymbol{n-8}$$

(2) $f(3+n)=f(3-n)$ において，$m=3+n$ とおくと $(n=m-3)$

$$f(m)=f(3-(m-3))=f(6-m)$$

したがって　$f(n)=f(6-n)=(f\circ g)(n)$

$f(7+n)=f(7-n)$ において，$m=7+n$ とおくと $(n=m-7)$

$$f(m)=f(7-(m-7))=f(14-m)$$

したがって　$f(n)=f(14-n)=(f\circ h)(n)$

(3) (2) の結果から　$f(6-n)=f(14-n)$
上式において，$m=6-n$ とおくと $(n=6-m)$

$$f(m)=f(14-(6-m))=f(m+8) \qquad (*)$$

$2022=6+8\cdot252$ であるから　$f(2022)=f(6)$

$(**)$　$f(3+n)=f(3-n)$ に $n=3$ を代入すると

$$f(6)=f(0)=0 \quad \cdots①$$

よって　$f(2022)=\mathbf{0}$

(4) $(*)$ より　$A=\{f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5),\ f(6),\ f(7)\}$

$(**)$ に $n=1,\ 2$ に代入すると

$$f(4)=f(2),\quad f(5)=f(1)$$

上の 2 式と ① より

$$A=\{f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(7)\}$$

よって，A の要素の個数は 5 個以下である．■

1.29 (1) $F(x)$, $G(x)$ が微分可能であるから

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

$H(x) = F(x) + G(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} H'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \frac{F(x+h) + G(x+h) - F(x) - G(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = F'(x) + G'(x) \end{aligned}$$

よって　$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$

次に，$F'(x) = f(x)$，$G'(x) = g(x)$ を満たす $F(x)$，$G(x)$ をとり，

$$H(x) = F(x) + G(x), \quad h(x) = H'(x)$$

とすると，次式が成立する．

$$h(x) = H'(x) = \{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

上式および定積分の定義 ① により

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b h(x)\,dx = \Big[\, H(x) \,\Big]_a^b &= H(b) - H(a) \\ &= F(b) + G(b) - \{F(a) + G(a)\} \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \end{aligned}$$

(2) $G'(x) = g(x)$ を満たす $G(x)$ をとると，定積分の定義により

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

上式の右辺は平均値の定理により

$$\frac{G(b) - G(a)}{b - a} = G'(c) \quad (a < c < b)$$

$G'(c) = g(c) > 0$ であるから，以上の結果から

$$\int_a^b g(x)\,dx = (b - a)g(c) > 0$$

(3) 答 **(C)**

(2) と同様に $\displaystyle\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$ に平均値の定理を適用すると $(i=1,2,\cdots,n)$

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx = \left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)f(c_i) = \frac{1}{n}f(c_i) \quad \left(\frac{i-1}{n} < c_i < \frac{i}{n}\right)$$

$f(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数であるから

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq f(c_i) \leqq f\left(\frac{i}{n}\right)$$

以上の結果から，次式を得る．

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(4) 答 **(B)**

S_n の定義により

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1) - \frac{1}{n}f(0)\\ &= S_n + \frac{f(1)-f(0)}{n}\end{aligned}$$

上式に注意すると，② より

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx &\leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\\ S_n \leqq \int_0^1 f(x)\,dx &\leqq S_n + \frac{f(1)-f(0)}{n}\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle 0 \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1)-f(0)}{n}$ ■

1.30 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})-\log\sqrt{x}\}=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right)=\boldsymbol{\log 2}$

(2)

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x(x+4)}=\frac{\{x(x+4)\}'}{2\sqrt{x(x+4)}}=\boldsymbol{\frac{x+2}{\sqrt{x(x+4)}}}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})&=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})'}{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}\\&=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+4)}}=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x(x+4)}}}\end{aligned}$$

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$，$g(x)=\dfrac{x-2}{x}$

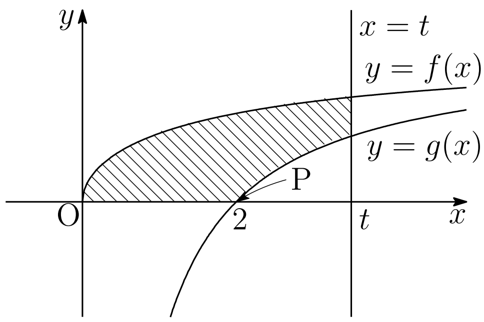
(i) $0<x\leqq 2$ のとき，$f(x)>0$，$g(x)\leqq 0$ より　$f(x)>g(x)$

(ii) $x>2$ のとき，$f(x)>0$，$g(x)>0$

$$\begin{aligned}f(x)^2-g(x)^2&=\frac{x}{x+4}-\frac{(x-2)^2}{x^2}\\&=\frac{x^3-(x+4)(x-2)^2}{x^2(x+4)}=\frac{4(3x-4)}{x^2(x+4)}>0\end{aligned}$$

(i)，(ii) より　$x>0$ のとき　$f(x)>g(x)$

(4) $S(t)$ は，次の図の斜線部分の面積である



これから

$$S(t)=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^t\{f(x)-g(x)\}\,dx \qquad (*)$$

(2) の結果から

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}} = \frac{x}{\sqrt{x(x+4)}} \\
&= \frac{x+2}{\sqrt{x(x+4)}} - 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x(x+4)}} \\
&= \frac{d}{dx}\left\{\sqrt{x(x+4)} - 4\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})\right\},
\end{aligned}
$$

また

$$
g(x) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x} = \frac{d}{dx}(x - 2\log x)
$$

これから

$$
F(x) = \sqrt{x(x+4)} - 4\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}), \quad G(x) = x - 2\log x \qquad (**)
$$

とおくと

$$
\sqrt{x(x+4)} - x = \frac{x(x+4)-x^2}{\sqrt{x(x+4)}+x} = \frac{4x}{\sqrt{x(x+4)}+x} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}
$$

に注意して

$$
\begin{aligned}
F(x) - G(x) &= \sqrt{x(x+4)} - 4\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}) - (x - 2\log x) \\
&= \sqrt{x(x+4)} - x - 4\{\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}) - \log\sqrt{x}\} \\
&= \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1} - 4\log\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right) \qquad (***)
\end{aligned}
$$

$(*)$ より
$$
\begin{aligned}
S(t) &= \Big[\ F(x)\ \Big]_0^2 + \Big[\ F(x) - G(x)\ \Big]_2^t \\
&= -F(0) + G(2) + \{F(t) - G(t)\}
\end{aligned}
$$

$(**)$ より　$F(0) = -4\log 2$，$G(2) = 2 - 2\log 2$

$(***)$ より　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\{F(t) - G(t)\} = 2 - 4\log 2$

よって

$$
\lim_{t\to\infty} S(t) = -(-4\log 2) + (2 - 2\log 2) + (2 - 4\log 2) = \mathbf{4 - 2\log 2}
$$

■

1.31 (1) $a_n = n^2$ より

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\{n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2\} = \boldsymbol{n^2 + 2n + \frac{5}{3}} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2 + 2k + \frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{5}{3}n \\ &= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) + 6(n+1) + 10\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(2n^2 + 9n + 17)} \end{aligned}$$

(2) $a_n = \sin n\theta\ (0 < \theta < \pi)$ より

$$\begin{aligned} 3b_n &= a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \\ &= \sin n\theta + \sin(n+1)\theta + \sin(n+2)\theta \\ &= \sin(n+1)\theta + \{\sin n\theta + \sin(n+2)\theta\} \\ &= \sin(n+1)\theta + 2\sin(n+1)\theta\cos\theta \\ &= (1 + 2\cos\theta)\sin(n+1)\theta = 0 \end{aligned}$$

$1 + 2\cos\theta \neq 0$ と仮定すると，すべての n について

$$\sin(n+1)\theta = 0$$

となる．例えば，$n = 1,\ 2$ のとき

$$\sin 2\theta = 0 \quad \text{かつ} \quad \sin 3\theta = 0$$

すなわち　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$　かつ　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}$　これを満たす θ は存在しない．

したがって，$1 + 2\cos\theta = 0\ (0 < \theta < \pi)$ を解いて　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{2\pi}{3}}$

(3)　(i)　$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ より

$$b_n=\frac{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})+(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})\}$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$

また，$a_{n+1}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$ であるから

$$\frac{b_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{1+1}{1+1}=\mathbf{1}$

(ii)　$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ より

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\quad \text{すなわち}\quad a_{n+1}<a_n$$

$\{a_n\}$ は単調減少列であるから

$$\frac{b_n}{a_{n+1}}-1=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}-1$$
$$=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$
$$=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$
$$=\frac{a_n-a_{n+2}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}>0$$

$a_{n+1}>0$ であるから　　$\boldsymbol{b_n>a_{n+1}}$

(4) (i) $(*)\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると，$a_1=b_1$ より

$$a_1 = \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \quad \text{整理すると} \quad a_3+a_2-2a_1=0 \quad \cdots ①$$

$n \geqq 2$ のとき，$(*)$ より

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} b_k, \quad \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k + b_n$$

上の 2 式から　$a_n = b_n$

$$a_n = \frac{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}}{3} \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0 \qquad (**)$$

① より，$(**)$ は，正の整数 n について成立するから

$$a_{n+2}+2a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}+2a_n=a_2+2a_1$$

$a_1=1$，$a_2=4$ より　$\boldsymbol{a_{n+1}+2a_n=6}$

(ii) $(**)$ より　$a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)$

$$a_{n+1}-a_n=(-2)^{n-1}(a_2-a_1)=3(-2)^{n-1}$$

これと (i) の結果から，a_{n+1} を消去すると

$$3a_n=6-3(-2)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n=2-(-2)^{n-1}$$

$a_n=b_n$ であるから　$\boldsymbol{b_n=2-(-2)^{n-1}}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n}\{2-(-2)^{k-1}\}\\ &= 2n-\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}\\ &= \boldsymbol{2n-\frac{1-(-2)^n}{3}}\end{aligned}$$

■

1.32 (1) $|z|=1$ のとき，$z\overline{z}=1$ より

$$\begin{aligned}|z\overline{w}+1| &= |z\overline{w}+z\overline{z}| = |z(\overline{w}+\overline{z})|\\ &= |z||\overline{z}+\overline{w}| = |\overline{z+w}| = |z+w|\end{aligned}$$

$|w|=1$ のとき，$w\overline{w}=1$ より

$$\begin{aligned}|z\overline{w}+1| &= |w||z\overline{w}+1| = |w(z\overline{w}+1)|\\ &= |zw\overline{w}+w| = |z+w|\end{aligned}$$

(2) 漸化式 $a_1=a>0$，$a_{n+1}={a_n}^r e^{b_n}$ より，$a_n>0$ に注意して

$$\log a_{n+1} = r\log a_n + b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 2，公比 r の等比数列より，$b_n=2r^{n-1}$ であるから

$$\log a_{n+1} = r\log a_n + 2r^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\log a_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{\log a_n}{r^n} + \frac{2}{r^2}$$

$\left\{\dfrac{\log a_n}{r^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{\log a}{r}$，公差 $\dfrac{2}{r^2}$ の等差数列であるから

$$\frac{\log a_n}{r^n} = \frac{\log a}{r} + \frac{2}{r^2}(n-1)$$

したがって　$\log a_n = r^{n-1}\log a + 2r^{n-2}(n-1)$

よって　$\boldsymbol{a_n = e^{r^{n-1}\log a + 2r^{n-2}(n-1)}}$

補足 $a_n = a^{r^{n-1}}e^{2r^{n-2}(n-1)}$ と表記してもよい．

(3) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin(2k+1)\theta &= \sin 2k\theta\cos\theta + \cos 2k\theta\sin\theta\\ \sin(2k-1)\theta &= \sin 2k\theta\cos\theta - \cos 2k\theta\sin\theta\end{aligned}$$

上の第 1 式から第 2 式を引くと

$$\sin(2k+1)\theta - \sin(2k-1)\theta = 2\sin\theta\cos 2k\theta$$

$\sin\theta \neq 0$ であるから

$$2\cos 2k\theta = \frac{\sin(2k+1)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(2k-1)\theta}{\sin\theta} \qquad (*)$$

n を自然数とする等式

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}$$

を (A) とする．

［1］ $n=1$ のとき，$k=1$ を $(*)$ に代入すると

$$2\cos 2\theta=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\quad \text{ゆえに}\quad 1+2\cos 2\theta=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$$

よって，$n=1$ のとき，(A) は成立する．

［2］ $n=m$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$1+2\sum_{k=1}^{m}\cos 2k\theta=\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}$$

$k=m+1$ を $(*)$ に代入すると

$$2\cos 2(m+1)\theta=\frac{\sin(2m+3)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$1+2\sum_{k=1}^{m+1}\cos 2k\theta=\frac{\sin(2m+3)\theta}{\sin\theta}$$

よって，$n=m+1$ のときも (A) は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する． ■

1.33 (1) P_1 は3回続けて1の目が出る確率であるから $P_1=\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{1}{216}}$

出た目の最小値が2以上である確率は $\left(\dfrac{5}{6}\right)^3$

p_1 はこの余事象の確率であるから $p_1=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{91}{216}}$

(2) 出た目の最大値が n 以下である確率は $\left(\dfrac{n}{6}\right)^3$

出た目の最大値が $n-1$ 以下である確率は $\left(\dfrac{n-1}{6}\right)^3$

したがって $P_n=\left(\dfrac{n}{6}\right)^3-\left(\dfrac{n-1}{6}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{3n^2-3n+1}{216}}$

出た目の最小値が n 以上である確率は $\left(\dfrac{7-n}{6}\right)^3$

出た目の最小値が $n+1$ 以上である確率は $\left(\dfrac{6-n}{6}\right)^3$

したがって $p_n=\left(\dfrac{7-n}{6}\right)^3-\left(\dfrac{6-n}{6}\right)^3$

ここで，$A=7-n$ とおくと，前の計算に注意して

$$p_n=\left(\frac{A}{6}\right)^3-\left(\frac{A-1}{6}\right)^3=\frac{3A^2-3A+1}{216} \qquad (*)$$

よって $p_n=\dfrac{3(7-n)^2-3(7-n)+1}{216}=\boldsymbol{\dfrac{3n^2-39n+127}{216}}$

(3) P_n および $(*)$ を $P_n \leqq p_n$ に代入すると

$$\frac{3n^2-3n+1}{216} \leqq \frac{3A^2-3A+1}{216}$$

ゆえに $(n-A)(n+A-1) \leqq 0$ すなわち $6(2n-7) \leqq 0$

n は6以下の自然数であるから $\boldsymbol{n=1,\ 2,\ 3}$

補足 P_n，p_n の結果をそのまま利用してもよい． ■

1.34 (1) P(1, 1, 0) は D から平面 OABC に降ろした垂線の足である．
$\mathrm{OP}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OD}=2$ より

$$\mathrm{PD}=\sqrt{\mathrm{OD}^2-\mathrm{OP}^2}=\sqrt{2}$$

D_1，D_2 の z 座標の符号により

$$\mathbf{D_1(1,\ 1,\ \sqrt{2}),\ D_2(1,\ 1,-\sqrt{2})}$$

(2) O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0) および (1) の結果から

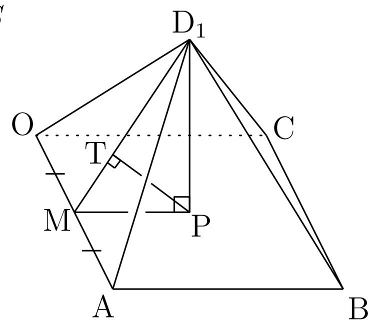
$$\begin{aligned} a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OD_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= a(2,\ 0,\ 0)+b(1,\ 1,\ \sqrt{2})-(1,\ 1,\ 0) \\ &= (2a+b-1,\ b-1,\ \sqrt{2}b) \end{aligned}$$

これがベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OD_1}}=(1,\ 1,\ \sqrt{2})$ に垂直であるから

$$2(2a+b-1)=0,\quad 1(2a+b-1)+1(b-1)+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}b=0$$

それぞれ整理すると　$2a+b=1,\quad a+2b=1$　よって　$\boldsymbol{a=b=\dfrac{1}{3}}$

(3) 辺 OA の中点を M とし，平面 $\mathrm{OAD_1}$ と球 S の接点を T とすると



$$2\triangle\mathrm{MPD_1}=\mathrm{MD_1}\cdot\mathrm{PT}=\mathrm{MP}\cdot\mathrm{PD_1}$$

したがって　$\sqrt{3}\mathrm{PT}=1\cdot\sqrt{2}$

よって，半径は　$\mathrm{PT}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(2) の結果より，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD_1}}$ であるから，T は $\triangle\mathrm{OAD_1}$ の重心．
$\triangle\mathrm{BCD_1}$ の重心を T′，平面 OABC に関して T と対称な点を T″ とすると

$$\mathrm{TT'}=\frac{2}{3}\mathrm{OC}=\frac{4}{3},\quad \mathrm{TT''}=\frac{2}{3}\mathrm{PD_1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\triangle\mathrm{OAD_1}$，$\triangle\mathrm{ABD_1}$，$\triangle\mathrm{BCD_1}$，$\triangle\mathrm{COD_1}$ の 4 重心が凸多面体の頂点であり，その 1 辺の長さは

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{TT'}=\mathrm{TT''}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

よって，凸多面体は**立方体**である．■

1.35 (1) $f(x)=e^{-x^2}$ より

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\quad f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

$f''(a)=0$ より $(a>0)$　$2a^2-1=0$　よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

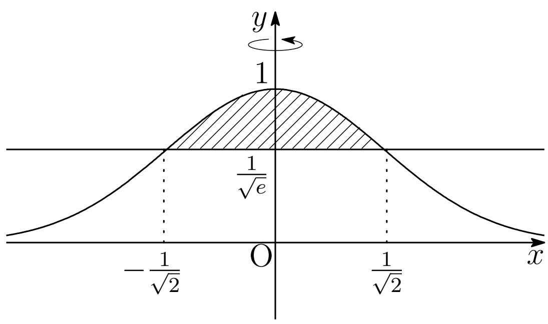
したがって，$f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	⤵

変曲点は　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right),\quad \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)}$

(2) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^a x\{f(x)-f(a)\}\,dx=2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\left(e^{-x^2}-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)dx\\&=\pi\left[-e^{-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{e}}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\boldsymbol{\pi\left(1-\frac{3}{2\sqrt{e}}\right)}\end{aligned}$$



バウムクーヘン型求積法

$a\leqq x\leqq b$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

■

1.36 (1) $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=18+2=20$

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}>0$ であるから　$\boldsymbol{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{5}}$

$(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3-3(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})=a+a^{-1}=18$ より，$x=a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}$ とおくと

$$x^3-3x=18 \quad \text{ゆえに} \quad (x-3)(x^2+3x+6)=0$$

$x>0$ であるから　$x=3$　よって　$\boldsymbol{a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=3}$

(2) 　(∗)　$\log_{\frac{1}{3}}(9x^2)\cdot\log_3\left(\dfrac{x}{81}\right)=-12$

真数は正であるから

$$9x^2>0 \quad \text{かつ} \quad \frac{x}{81}>0 \quad \text{すなわち} \quad x>0 \quad \cdots①$$

(∗) を変形すると　$-(2\log_3 x+2)(\log_3 x-4)=-12$

$$(\log_3 x)^2-3\log_3 x-10=0 \quad \text{ゆえに} \quad (\log_3 x+2)(\log_3 x-5)=0$$

したがって　$\log_3 x=-2,\ 5$　①に注意して　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{9},\ 243}$

(3) 不等式 $\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta \geqq 1\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ より

$$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right) \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\frac{\pi}{6} < 4\pi+\frac{\pi}{6}$$

したがって　$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{5\pi}{6}$,　$2\pi+\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\pi+\dfrac{5\pi}{6}$

よって　$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3},\ \ \pi \leqq \theta \leqq \dfrac{4\pi}{3}}$

(4) $z^4=-8-8\sqrt{3}i=16\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2^4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

$|z|=2$，$4\arg z=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$　ゆえに　$\arg z=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k}{2}\pi$

$0 \leqq \arg z < 2\pi$ であるから　$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

したがって　$|z|=2,\ \arg z=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{11\pi}{6}$

よって　$\boldsymbol{z=1+\sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}+i,\ -1-\sqrt{3}i,\ \sqrt{3}-i}$ ■

1.37 (1) 漸化式から

$$a_1 = \int_0^1 f_1(t)\,dt = \int_0^1 3t^2\,dt = \Big[\,t^3\,\Big]_0^1 = \mathbf{1}$$
$$a_2 = \int_0^1 f_2(t)\,dt = \int_0^1 (3t^2 + 4t)\,dt = \Big[\,t^3 + 2t^2\,\Big]_0^1 = \mathbf{3}$$

(2) $(*)$ $f_{n+2}(x) = 3x^2 + 4a_{n+1}x - a_n$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \int_0^1 f_{n+2}(t)\,dt = \int_0^1 (3t^2 + 4a_{n+1}t - a_n)\,dt \\ &= \Big[\,t^3 + 2a_{n+1}t^2 - a_nt\,\Big]_0^1 \\ &= \boldsymbol{1 + 2a_{n+1} - a_n} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 1$　ゆえに　$b_{n+1} = b_n + 1$

$\{b_n\}$ は初項$b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$，公差 1 の等差数列であるから

$$b_n = 2 + 1(n-1) = \boldsymbol{n + 1}$$

$a_{n+1} - a_n = n + 1$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

ゆえに　$a_n - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n+2)$　整理すると　$a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$

これは，$n = 1$ のときも成立するから　　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}n(n+1)}$

$n \geqq 3$ のとき，これを $(*)$ に代入すると

$$f_n(x) = 3x^2 + 2(n-1)nx - \frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

上式は，$n = 1, 2$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{f_n(x) = 3x^2 + 2(n-1)nx - \frac{1}{2}(n-2)(n-1)}$$

(4) (3) の結果から

$$(**)\quad f_{n+1}(x)-f_n(x)=2\{n(n+1)-(n-1)n\}x-\frac{1}{2}\{(n-1)n-(n-2)(n-1)\}$$
$$=4nx-(n-1)$$
$$=n(4x-1)+1$$

$x=\dfrac{1}{4}$ のとき，すべての自然数 n に対して，上式は 1 であるから

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{1}{4},\quad \beta=1}$$

$g_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$ とおくと，$(**)$ より，$g_n(x)$ は 1 次関数であり，$g_n(x)=0$ の解を γ とすると

$$\gamma=\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}=\alpha-\frac{1}{4n}\quad ゆえに\quad \alpha-\gamma=\frac{1}{4n}$$

$g_n(\alpha)=1$ より　$S_n=\dfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)g_n(\alpha)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4n}\cdot1=\boldsymbol{\dfrac{1}{8n}}$

補足 $g_n(\alpha)\geqq0$，$g_n(\gamma)\geqq0$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}|\alpha-\gamma|\{g_n(\alpha)+g_n(\gamma)\}$ ■

1.38 (1) $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の両辺を x で微分すると $(y \neq 0)$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \quad ゆえに \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

C 上の点 $\mathrm{P}(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ における接線の傾きは，$b\sin\alpha \neq 0$ に注意して

$$y' = -\frac{b^2{\cdot}a\cos\alpha}{a^2{\cdot}b\sin\alpha} = \boldsymbol{-\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}}$$

したがって，C 上の点 P における接線 l の方程式は

$$y - b\sin\alpha = -\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}(x - a\cos\alpha)$$

両辺に $\dfrac{\sin\alpha}{b}$ を掛けると $\quad \dfrac{\sin\alpha}{b}(y - b\sin\alpha) = -\dfrac{\cos\alpha}{a}(x - a\cos\alpha)$

整理すると $\quad \dfrac{\cos\alpha}{a}x + \dfrac{\sin\alpha}{b}y = 1$

(2) (1) で示した接線の x 切片，y 切片がそれぞれ，$\dfrac{a}{\cos\alpha}$, $\dfrac{b}{\sin\alpha}$ であるから

$$S = \frac{1}{2}{\cdot}\frac{a}{\cos\alpha}{\cdot}\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{ab}{\sin 2\alpha} \geqq ab \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ で S は最小値 $\boldsymbol{ab}$ をとる．$\mathbf{Q}\boldsymbol{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)}$，$\boldsymbol{l : \dfrac{x}{\sqrt{2}a} + \dfrac{y}{\sqrt{2}b} = 1}$

(3) C 上の点 $\mathrm{R}(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ $\left(\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$ における接線 m は

$$\frac{\cos\beta}{a}x + \frac{\sin\beta}{b}y = 1$$

2 直線 l，m の法線ベクトルは，それぞれ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}a},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}b}\right)$，$\left(\dfrac{\cos\beta}{a},\ \dfrac{\sin\beta}{b}\right)$
であり，これらは垂直であるから

$$\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}a^2} + \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}b^2} = 0 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{\tan\beta = -\frac{b^2}{a^2}}$$

このとき $\quad \dfrac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \tan^2\beta = \dfrac{a^4+b^4}{a^4}$，$\dfrac{1}{\sin^2\beta} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2\beta} = \dfrac{a^4+b^4}{b^4}$

$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より，$\cos\beta = -\dfrac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$，$\sin\beta = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$ であるから

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\left(-\frac{a^3}{\sqrt{a^4+b^4}},\ \frac{b^3}{\sqrt{a^4+b^4}}\right)}$$

(4) (2) の結果から，l の方程式は

$$l : bx + ay = \sqrt{2}ab$$

また，(3) の結果から，m の方程式は

$$m : -ax + by = \sqrt{a^4 + b^4}$$

これらの 2 式から，l と m の交点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ について

$$\begin{aligned}(bx + ay)^2 + (-ax + by)^2 &= (\sqrt{2}ab)^2 + (\sqrt{a^4 + b^4})^2 \\ (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) &= (a^2 + b^2)^2 \\ x^2 + y^2 &= a^2 + b^2 \\ \mathbf{OA^2} &= \boldsymbol{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

また，(2)，(3) の結果から

$$\mathbf{OQ^2} = \boldsymbol{\frac{a^2 + b^2}{2}},\quad \mathbf{OR^2} = \boldsymbol{\frac{a^6 + b^6}{a^4 + b^4}}$$

以上の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OR}^2 &= a^2 + b^2 - \frac{a^6 + b^6}{a^4 + b^4} = \frac{a^2b^2(a^2 + b^2)}{a^4 + b^4} > 0, \\ \mathrm{OR}^2 - \mathrm{OQ}^2 &= \frac{a^6 + b^6}{a^4 + b^4} - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^2}{2(a^4 + b^4)} > 0\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{OA}^2 > \mathrm{OR}^2 > \mathrm{OQ}^2$　よって　$\mathbf{OA > OR > OQ}$　■

1.39 (1) $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = (1,\ 0,\ 0)$

$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$．$\triangle\mathrm{P_1QR}$，$\triangle\mathrm{P_2QR}$ のそれぞれの重心 $\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ は

$$\mathrm{G_1}\left(\frac{a}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right),\quad \mathrm{G_2}\left(\frac{a+1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}} = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$

よって，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ を通る直線と，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ を通る直線は平行である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = (1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}} = \left(-\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$ より

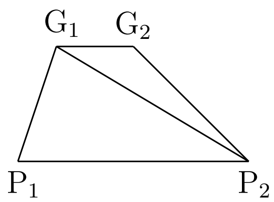
$$|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|^2 = 1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}|^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{10}{9},\quad \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}} = -\frac{2a}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{10}{9}\right) - \left(-\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{6}\end{aligned}$$

求める四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{P_1P_2G_1} + \triangle\mathrm{G_1G_2P_2} \\ &= \triangle\mathrm{P_1P_2G_1} + \frac{1}{3}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1} \\ &= \frac{4}{3}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{6} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{10}}{9}}\end{aligned}$$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{P_1R}} = (-a,\ 0,\ 3)$．$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}$ に垂直な単位ベクトルの1つを

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, -3,\ 1)$$

とする．点Rから四角形 $\mathrm{P_1P_2G_1G_2}$ に引いた垂線の長さ h は

$$h = |\overrightarrow{\mathrm{P_1R}}\cdot\vec{n}| = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

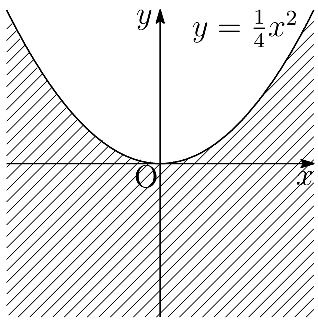
よって，求める立体の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$ ■

1.40 (1) $f(p)=p^2+xp+y$ について，$f(p)=0$ が実数解を持つから係数について

$$x^2-4y \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \leqq \frac{1}{4}x^2$$

よって，$D: y \leqq \frac{1}{4}x^2$ の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) $f(p)=\left(p+\frac{x}{2}\right)^2+y-\frac{x^2}{4}$

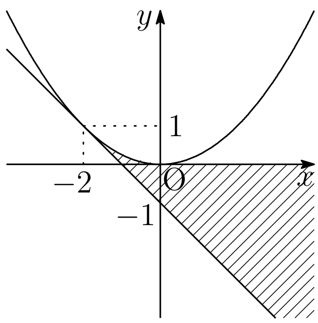
［1］ $f(p)=0$ の 2 つの解がともに $0 \leqq p \leqq 1$ にあるとき，
$0 \leqq -\frac{x}{2} \leqq 1$，$y-\frac{x^2}{4} \leqq 0$，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \geqq 0$ より

$$-2 \leqq x \leqq 0, \quad y \leqq \frac{x^2}{4}, \quad y \geqq 0, \quad y \geqq -x-1$$

［2］ $f(p)=0$ の 1 つの解が $p \leqq 0$，他の 1 つの解が $0 \leqq p \leqq 1$ にあるとき，
$f(0) \leqq 0$，$f(1) \geqq 0$ より

$$y \leqq 0, \quad y \geqq -x-1$$

E の表す領域は,［1］または［2］を満たす領域で境界線を含む．



(3) $f(x,\ y)=x^2+y^2-4y+4$ とおくと，$f(x,\ y)=x^2+(y-2)^2$ は点 $(x,\ y)$ と点 $(0,\ 2)$ の距離の 2 乗である．これを最小にする E 上の点は

$$y=\frac{1}{4}x^2 \quad (-2 \leqq x \leqq 0)$$

にあるから，$-2 \leqq x \leqq 0$ における次式の最小値を求めればよい．

$$f\left(x,\ \frac{1}{4}x^2\right)=x^2+\left(\frac{1}{4}x^2-2\right)^2=\frac{1}{16}x^4+4$$

よって，求める最小値は $f(0,\ 0)=\mathbf{4}$ ■

1.41 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2)=\frac{1}{2}(29+29-8)=\mathbf{25}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=8+26-2\cdot8=18$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2)=\frac{1}{2}(29+11-18)=\mathbf{11},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2)=\frac{1}{2}(11+29-26)=\mathbf{7}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(1) の結果を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=11-7=4\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=t^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

$$=8t^2+8t+11=8\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+9$$

よって　$\boldsymbol{t=-\frac{1}{2}}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は最小値 **3** をとる．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{2}\cdot8+4=0$$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=11-7=4$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{1}{2}\cdot8+4=0$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(4) $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8\cdot26-8^2}=6$

P は平面 ABC 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は平面 ABC に垂直であるから，求める体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{1}{3}\cdot6\cdot3=\mathbf{6}$$

■

1.42 (1) $F'(x)=(x+a)(x-3a)=x^2-2ax-3a^2$，$F(0)=0$ より

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x$$

(2) $G'(x)=b(x-3a)$，放物線 $y=G(x)$ の頂点が $(x_0,\ y_0)$ より

$$G(x)=\frac{b}{2}(x-3a)^2+y_0,\quad x_0=3a$$

$y_0=F(3a)$ であるから

$$y_0=\frac{1}{3}(3a)^3-a(3a)^2-3a^2\cdot 3a=-9a^3$$

よって　$\boldsymbol{G(x)=\frac{b}{2}(x-3a)^2-9a^3}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}F(x)-G(x)&=\frac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x-\left\{\frac{b}{2}(x-3a)^2-9a^3\right\}\\&=\frac{1}{3}x^3-\left(a+\frac{b}{2}\right)x^2-(3a^2-3ab)x+9a^3-\frac{9}{2}a^2b\\&=\frac{1}{3}(x-3a)^2\left(x+3a-\frac{3}{2}b\right)\end{aligned}$$

$F(x)-G(x)=0$ の解が1個であるから　$3a=-3a+\frac{3}{2}b$　よって　$\boldsymbol{b=4a}$

別解 $x_0=3a$，$F(3a)=y_0$ に注目すると

$$\begin{aligned}F'(x)&=(x+a)(x-3a)=\{(x-3a)+4a\}(x-3a)\\&=(x-3a)^2+4a(x-3a)\end{aligned}$$

したがって　$F(x)=\frac{1}{3}(x-3a)^3+2a(x-3a)^2+y_0$

これと $G(x)=\frac{b}{2}(x-3a)^2+y_0$ について，$F(x)=G(x)$ とすると

$$\frac{1}{3}(x-3a)^3+2a(x-3a)^2+y_0=\frac{b}{2}(x-3a)^2+y_0$$

$$(x-3a)^2\left\{(x-3a)+6a-\frac{3b}{2}\right\}=0$$

$$(x-3a)^2\left(x+3a-\frac{3b}{2}\right)=0$$

解が1個であるから　$3a=-3a+\frac{3b}{2}$　よって　$\boldsymbol{b=4a}$ ■

1.43 (1) $a_k = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{(k^2+1)\pi}{4}\right|^n$ より

$$a_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{(1^2+1)\pi}{4}\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{\pi}{2}\right|^n = \mathbf{1},$$
$$a_2 = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{(2^2+1)\pi}{4}\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{5\pi}{4}\right|^n = \mathbf{0}$$

(2) j を自然数とする．

$$a_{2j-1} = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{(2j-1)^2+1}{4}\pi\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \left(j^2 - j + \frac{1}{2}\right)\pi\right|^n = 1,$$
$$a_{2j} = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{(2j)^2+1}{4}\pi\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \left(j^2 + \frac{1}{4}\right)\pi\right|^n = 0$$

よって，$a_k = 0$ となる k は**偶数**，$a_k = 1$ となる k は**奇数**．

(3) (2) の結果から　$b_{2m+1} = \sum_{k=1}^{2m+1} a_k = m + 1$

よって　$\lim_{m\to\infty} \frac{b_{2m+1}}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{m+1}{m} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \mathbf{1}$　■

1.44 • $N_1 = 2$ となる確率は，1 回目に白玉を取り出す確率であるから $\dfrac{1}{3}$

$N_1 = 3$ となる確率は，1 回目に赤玉を取り出す確率であるから $\dfrac{2}{3}$

• 1 回目に赤玉が移動して 2 回目に白玉が移動する確率は $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$

1 回目に白玉が移動して 2 回目に白玉が移動する確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{6}$

よって，$N_2 = 2$ となる確率は $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

• $N_3 = 1$ となるは，次の色の玉が移動する場合である．

(1 回目，2 回目，3 回目)=(赤玉，赤玉，白玉)，(赤玉，白玉，白玉)

よって，その確率は $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{4} = \dfrac{5}{24}$

$N_3 = 3$ となるは，次の色の玉が移動する場合である．

(1 回目，2 回目，3 回目)=(白玉，赤玉，赤玉)，(白玉，白玉，赤玉)

よって，その確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{4} = \dfrac{5}{24}$

$N_3 = 2$ となる確率は，$N_3 = 1$ と $N_3 = 3$ の余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{5}{24} + \frac{5}{24}\right) = \frac{7}{12}$$

(あ) $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ (い) $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ (う) $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ (え) $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ (お) $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ (か) $\boldsymbol{\dfrac{5}{24}}$ (き) $\boldsymbol{\dfrac{5}{24}}$ (く) $\boldsymbol{\dfrac{7}{12}}$ ■

1.45 (1) $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6) = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10)$

補足 $A_1 = \{1,\ 9\}, A_2 = \{2,\ 8\}, A_3 = \{3,\ 7\}, A_4 = \{4,\ 6\}, A_5 = \{5\}, A_6 = \{10\}$ とすると，A_k $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ から 1 つずつ取り出す場合である．残りの A_3，A_4 から 1 つずつ選ぶ場合であるから，全部で $2^2 = 4$ 通りある．

(2) $A_1 = \{1,\ 9\}, A_2 = \{2,\ 8\}, A_3 = \{3,\ 7\}, A_4 = \{4,\ 6\}, A_5 = \{5\}, A_6 = \{10\}$ とする．1 から 10 の 10 枚の札から 7 枚取り出すとき，A_1，A_2，A_3，A_4 の 4 組の同じ組から 2 枚取り出されるものが少なくとも 1 組存在する．
したがって，$(**)$ が成立する．

(3) $(**)$ を満たす組合せは A_1，A_2，A_3，A_4 の 4 通りある．A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ の要素 2 枚とそれ以外の 8 枚から 1 枚選んだ 3 枚について，A_k の要素が必ず 3 回目に並ぶ場合が $2{\cdot}2! = 4$ 通りある．よって，求める確率は

$$\frac{4{\cdot}8{\cdot}4}{{}_{10}\mathrm{P}_3} = \frac{4{\cdot}8{\cdot}4}{10{\cdot}9{\cdot}8} = \boldsymbol{\frac{8}{45}}$$

(4) $(**)$ を満たす組合せは A_1，A_2，A_3，A_4 の 4 通りある．A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ の要素 2 枚とそれ以外の 8 枚から 2 枚選ぶとき，A_j $(j \neq k)$ から 2 枚選ぶ場合を除いた

$${}_8\mathrm{C}_2 - 3 = \frac{8{\cdot}7}{2{\cdot}1} - 3 = 25 \ (\text{通り})$$

これら 4 枚について，A_k の要素が必ず 4 回目に並ぶ場合が $2{\cdot}3! = 12$ 通りある．よって，求める確率は

$$\frac{4{\cdot}25{\cdot}12}{{}_{10}\mathrm{P}_4} = \frac{4{\cdot}25{\cdot}12}{10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7} = \boldsymbol{\frac{5}{21}}$$

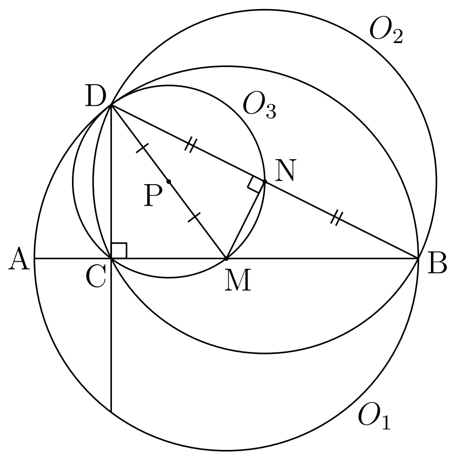
■

1.46 (1) C は線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点であるから $(0<t<1)$

$$\mathrm{AC}=2t \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{CM}=|1-2t|$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{CD}&=\sqrt{\mathrm{MD}^2-\mathrm{CD}^2}\\&=\sqrt{1^2-(1-2t)^2}\\&=\boldsymbol{2\sqrt{t(1-t)}}\end{aligned}$$



(2) $\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$ であるから，O_2 は BD を直径とする円．
BC = AB − AC = 2 − 2t および (1) の結果から，O_2 の半径を R_2 とすると

$$(2R_2)^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2 \quad \text{ゆえに} \quad {R_2}^2=(1-t)^2+t(1-t)=1-t$$

したがって　$R_2=\sqrt{1-t}$
N は BD の中点で $\triangle\mathrm{BMN}\equiv\triangle\mathrm{DMN}$ より　$\angle\mathrm{MND}=90^\circ$
O_3 は DM を直径とする円で，その半径を R_3 とすると　$R_3=\dfrac{1}{2}$
$R_2=R_3$ より　$\sqrt{1-t}=\dfrac{1}{2}$　これを解いて　$\boldsymbol{t=\dfrac{3}{4}}$

(3) 直角三角形 MND において，$\mathrm{MD}=1$，$\mathrm{DN}=R_2=\sqrt{1-t}$ より

$$\mathrm{MN}=\sqrt{\mathrm{MD}^2-\mathrm{DN}^2}=\sqrt{t}$$

したがって　$\triangle\mathrm{MNP}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{MND}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{MN}\cdot\mathrm{DN}=\dfrac{1}{4}\sqrt{t(1-t)}$

$0<t<1$ において　$t(1-t)=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{1}{4}$

よって，$\triangle\mathrm{MNP}$ の面積が最大となるとき　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$

(4) 4 点 B，M，P，N が同一円周上にあるから，方べきの定理により

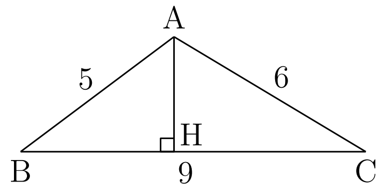
$$\mathrm{DP}\cdot\mathrm{DM}=\mathrm{DN}\cdot\mathrm{DB}$$

$\mathrm{DP}=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{DM}=1$，$\mathrm{DN}=R_2$，$\mathrm{DB}=2R_2$ を代入して

$$\frac{1}{2}\cdot 1=2{R_2}^2 \quad \text{ゆえに} \quad {R_2}^2=\frac{1}{4}$$

したがって　$1-t=\dfrac{1}{4}$　よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{3}{4}}$　■

1.47 (1) 余弦定理を △ABC に適用すると



$$\cos B = \frac{5^2+9^2-6^2}{2\cdot 5\cdot 9} = \frac{7}{9}$$

ゆえに $\quad \sin B = \sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

よって $\quad \mathrm{AH} = \mathrm{AB}\sin B = 5\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9} = \boldsymbol{\frac{20\sqrt{2}}{9}}$

別解 $a=9$，$b=6$，$c=5$ であるから，$s = \frac{a+b+c}{2} = 10$，△ABC の面積を S とすると，ヘロンの公式より

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{10(10-9)(10-6)(10-5)} = 10\sqrt{2}$$

$S = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}$ より $\quad \frac{1}{2}\cdot 9\cdot \mathrm{AH} = 10\sqrt{2}$ $\quad$ よって $\quad \mathrm{AH} = \frac{20\sqrt{2}}{9}$

(2) $ab = 4a - b$ より $\qquad (a+1)(b-4) = -4$

a, b は正の整数であるから，$a+1 \geqq 2$, $b-4 \geqq -3$ に注意して

$$\begin{cases} a+1=2 \\ b-4=-2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a+1=4 \\ b-4=-1 \end{cases}$$

よって $\qquad \boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 2),\ (3,\ 3)}$

(3) $2n$ 個の頂点から異なる 3 つの頂点を結んでできる三角形の総数は

$${}_{2n}\mathrm{C}_3 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \boldsymbol{\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}} \ \text{(個)}$$

円周角が 90° となるのは，弦が直径であるときに限る．直径のとり方が $\frac{2n}{2}$ 通りあり，その円周角のとり方が直径の両端を除く $2n-2$ 個ある．したがって，直角三角形の総数は

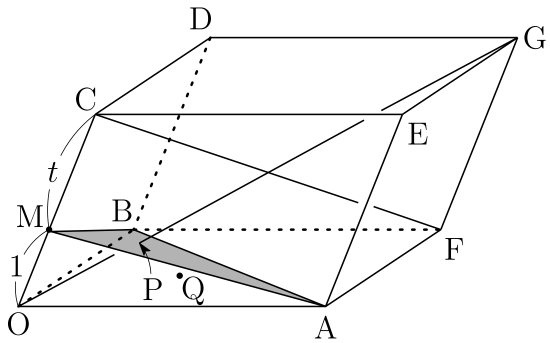
$$\frac{2n}{2}(2n-2) = 2n(n-1) \ \text{(個)}$$

よって，求める確率は $\quad 2n(n-1)\Big/\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3} = \boldsymbol{\frac{3}{2n-1}}$ ■

1.48 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1+t)\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1+t)\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=(3+t)\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1+t)\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{1+1+(1+t)}=(3+t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3+t}}$



(2) 四面体OABEの体積と四面体OAGBの体積は等しいから，(1) の結果より

$$\boldsymbol{V_1:V_2=3+t:1}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},\\\overrightarrow{\mathrm{QP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3+t}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\\&=\frac{1}{3+t}\left(-\frac{t}{3}\vec{a}-\frac{t}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{FC}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ であるから　$-\dfrac{t}{3}=-1$　よって　$\boldsymbol{t=3}$ ■

1.49 (1) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x}$ より　$f'(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2(1-x)}{x^3}$

したがって，$x > 0$ における $f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$

よって　極大値 $f(1) = \mathbf{1}$

(2) C 上の点 $\left(t, -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{2}{t}\right)$ における接線の方程式は

$$y = \left(\frac{2}{t^3} - \frac{2}{t^2}\right)(x - t) - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}$$

これが点 $(0,\ 1)$ を通るから

$$1 = -\frac{2}{t^2} + \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} \quad \text{整理すると} \quad 1 = -\frac{3}{t^2} + \frac{4}{t}$$

したがって　$t^2 - 4t + 3 = 0$　ゆえに　$t = 1,\ 3$

$f'(1) = 0$，$f'(3) = -\dfrac{4}{27}$ より，求める l の傾きは　$\boldsymbol{-\dfrac{4}{27}}$

(3) l は点 $(0,\ 1)$ を通り，傾き $-\dfrac{4}{27}$ の直線であるから　$y = -\dfrac{4}{27}x + 1$

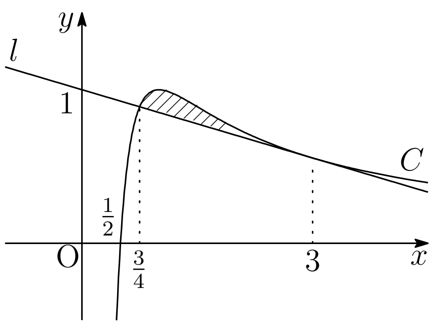
C と l の方程式から y を消去すると

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = -\frac{4}{27}x + 1 \quad \text{整理すると} \quad 4x^3 - 27x^2 + 54x - 27 = 0$$

したがって　$(x-3)^2(4x-3) = 0$　ゆえに　$x = 3,\ \dfrac{3}{4}$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{3}{4}}^{3} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{4}{27}x - 1\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{x} + 2\log x + \frac{2}{27}x^2 - x\right]_{\frac{3}{4}}^{3} \\ &= \mathbf{4\log 2 - \frac{21}{8}} \end{aligned}$$



■

1.50 (1) (A) $S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

［1］$n=1$ のとき　$S_3(1) = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1^3$

よって，$n=1$ のとき，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると　$S_3(k) = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

$$\begin{aligned} S_3(k+1) &= S_3(k) + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

(2) $k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 = 6k^5 + 2k^3$ および $k^3 = S_3(k) - S_3(k-1)$ より

$$k^5 = \frac{1}{6}\{k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3\} - \frac{1}{3}\{S_3(k) - S_3(k-1)\}$$

$S_5(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5$ であるから

$$\begin{aligned} S_5(n) &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\{k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3\} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{S_3(k) - S_3(k-1)\} \\ &= \frac{1}{6}n^3(n+1)^3 - \frac{1}{3}S_3(n) = \frac{1}{6}n^3(n+1)^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2\{2n(n+1)-1\} = \boldsymbol{\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)} \end{aligned}$$

(3) $k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4 = 8k^7 + 8k^5$ より

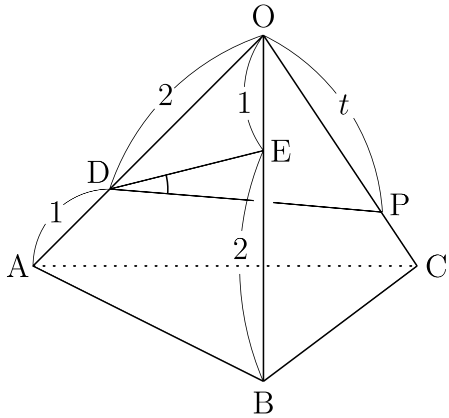
$$\sum_{k=1}^{n}\{k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4\} = 8\sum_{k=1}^{n}k^7 + 8\sum_{k=1}^{n}k^5$$
$$n^4(n+1)^4 = 8S_7(n) + 8S_5(n)$$

したがって

$$\begin{aligned} 24S_7(n) &= 3n^4(n+1)^4 - 24S_5(n) \\ &= 3n^4(n+1)^4 - 2n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \\ &= n^2(n+1)^2\{3n^2(n+1)^2 - 2(2n^2+2n-1)\} \end{aligned}$$

よって，$24S_7(n)$ は整数 $n^2(n+1)^2$ で割り切れる．■

1.51 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと



$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{c}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}$$

これから

$$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=\frac{1}{9}|\vec{b}|^2-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{a}|^2=\frac{1}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{3},$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|^2=t^2|\vec{c}|^2-\frac{4}{3}t\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{4}{9}|\vec{a}|^2=t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{1}{3}t\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{3}t\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{a}|^2=-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}$$

したがって

$$\cos\angle\mathrm{EDP}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DE}}||\overrightarrow{\mathrm{DP}}|}=\frac{-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(2-t)}{2\sqrt{9t^2-6t+4}}}$$

(2) $f(t)=\dfrac{\sqrt{3}(2-t)}{2\sqrt{9t^2-6t+4}}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とおいて，$f(t)$ を微分すると

$$f'(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(-1)\sqrt{9t^2-6t+4}-(2-t)\cdot\dfrac{9t-3}{\sqrt{9t^2-6t+4}}}{9t^2-6t+4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-(9t^2-6t+4)-(2-t)(9t-3)}{(9t^2-6t+4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2-15t}{(9t^2-6t+4)^{\frac{3}{2}}}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{15}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{7}}{3}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{21}}{14}$

よって　最大値 $f\left(\dfrac{2}{15}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$，最小値 $f(1)=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{14}}$ ■

2.1 (1) $y=ax$ と $y=x|x-2|$ の 2 式から y を消去すると

$$ax=x|x-2| \quad ゆえに \quad x(a-|x-2|)=0$$

交点の x 座標は　$a<0$ のとき　$x=0$,
$a \geqq 0$ のとき　$x=0,\ 2\pm a$

したがって，交点の x 座標の個数は

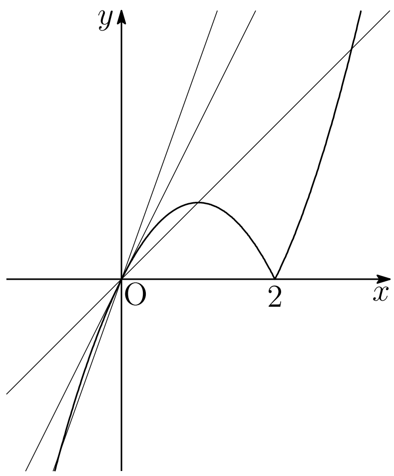
$a<0$ のとき	1 個,
$a=0,\ 2$ のとき	2 個,
$0<a<2,\ 2<a$ のとき	3 個

よって，求める a の範囲は　$\boldsymbol{0<a<2,\ 2<a}$

別解 $y=x|x-2|$ の $x=0$ における接線の傾きは，
$y=x(2-x)$ より $y'=2-2x$ であるから

$$x=0 \text{ のとき} \quad y'=2$$

したがって，$y=x|x-2|$ の $x=0$ における
接線の方程式は　$y=2x$

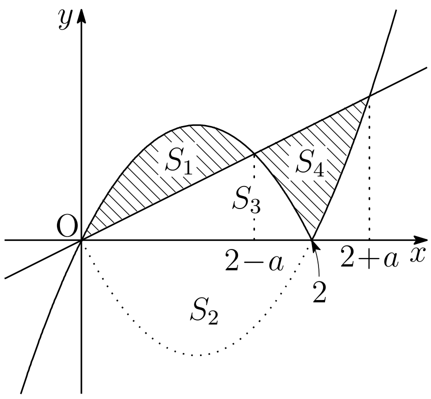


$a<0$ のとき	1 個,
$a=0,\ 2$ のとき	2 個,
$0<a<2,\ 2<a$ のとき	3 個

よって，求める a の範囲は

$$\boldsymbol{0<a<2,\ 2<a}$$

(2) 右の図の S_1〜S_4 の面積は，(1) で求めた交点の x 座標および x^2 の係数により



$$S_1=\frac{1}{6}(2-a)^3,$$

$$S_2=\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{4}{3},$$

$$S_3=S_2-S_1=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}(2-a)^3,$$

$$S_4=\frac{1}{6}(2+a)^3-(S_2+S_3)$$

$S_2+S_3=\dfrac{4}{3}+\left\{\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{6}(2-a)^3\right\}=\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{6}(2-a)^3$ であるから

$$\begin{aligned}S_4&=\frac{1}{6}(2+a)^3-(S_2+S_3)\\&=\frac{1}{6}(2+a)^3-\left\{\frac{8}{3}-\frac{1}{6}(2-a)^3\right\}\\&=\frac{1}{6}(2+a)^3+\frac{1}{6}(2-a)^3-\frac{8}{3}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}S(a)=S_1+S_4&=\frac{1}{6}(2-a)^3+\frac{1}{6}(2+a)^3+\frac{1}{6}(2-a)^3-\frac{8}{3}\\&=\frac{1}{3}(2-a)^3+\frac{1}{6}(2+a)^3-\frac{8}{3}\\&=\boldsymbol{-\frac{a^3}{6}+3a^2-2a+\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$S'(a)=-\dfrac{a^2}{2}+6a-2=-\dfrac{1}{2}(a^2-12a+4)$

$0<a<2$ に注意して，$S'(a)=0$ を解くと　$a=6-4\sqrt{2}$

したがって，$S(a)$ の増減表は

a	(0)	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	(2)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

よって，$S(a)$ を最小にする a の値は　$\boldsymbol{6-4\sqrt{2}}$ ■

2.2 (1) $C : y = x^3 + x^2$ と点 $(-1,\ 0)$ を通り傾き a 直線 $L_a : y = a(x+1)$ の方程式から y を消去すると

$$x^3 + x^2 = a(x+1) \quad ゆえに \quad (x+1)(x^2 - a) = 0 \qquad (*)$$

この方程式が重解もつ次の場合である．

(i) $x^2 - a = 0$ が重解をもつとき　$a = 0$

(ii) $x^2 - a = 0$ が $x = -1$ を解にもつとき　$a = 1$

(i)，(ii) から，求める a の値は　$\boldsymbol{a = 0,\ 1}$

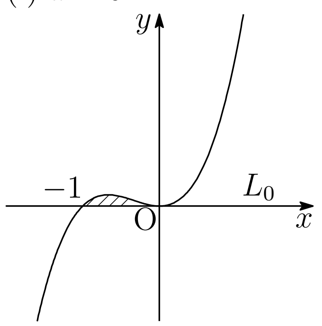
(2) (i) $a = 0$ のとき，$(*)$ の解は　$x = -1,\ 0$

$$\int_{-1}^{0} (x^3 + x^2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

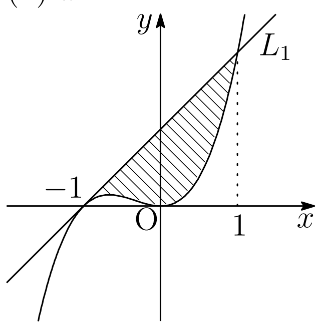
(ii) $a = 1$ のとき，$(*)$ の解は　$x = -1,\ 1$

$$\int_{-1}^{1} \{(x+1) - (x^3 + x^2)\}\,dx = 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)\,dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

(i) $a = 0$



(ii) $a = 1$



補足 積分公式[6] $\displaystyle\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \{(x+1) - (x^3 + x^2)\}\,dx &= \int_{-1}^{1} (x+1)^2(1-x)\,dx \\ &= \frac{1}{12}\{1 - (-1)\}^4 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

(3) C と L_a がちょうど三つの共有点をもつとき，方程式 (∗) は異なる 3 つの実数解をもつから，a の値は次の範囲にある．

(i) $0 < a < 1$ のとき，下の図に示した S_1，S_2 の面積について，(2) の結果から

$$0 < S_1 < \frac{1}{12}, \quad 0 < S_2 < \frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad |S_2 - S_1| < \frac{4}{3}$$

このとき，$|S_2 - S_1| \neq \dfrac{3}{2}$ であり，不適．

(ii) $a > 1$ のとき，$f(x) = a(x+1) - (x^3 + x^2)$ とおくと，下の図の二つの部分の面積 T_1，T_2 は

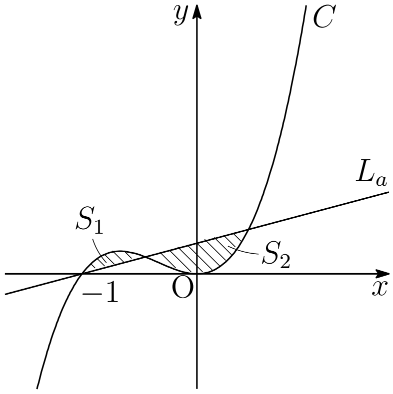
$$T_1 = -\int_{-\sqrt{a}}^{-1} f(x)\,dx, \quad T_2 = \int_{-1}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx$$

したがって

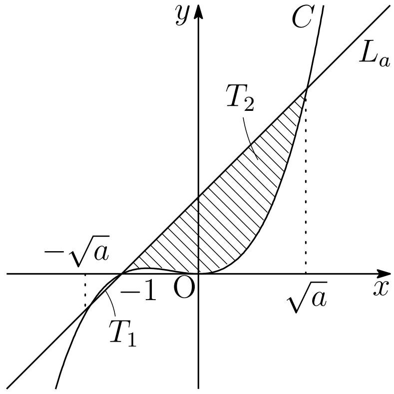
$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= \int_{-1}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx + \int_{-\sqrt{a}}^{-1} f(x)\,dx, \\ &= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx \\ &= 2\Big[\, ax - \frac{x^3}{3} \,\Big]_0^{\sqrt{a}} = \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

条件より $\dfrac{4}{3}a^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$ ゆえに $a^{\frac{3}{2}} = \dfrac{9}{8}$ よって $\boldsymbol{a = \dfrac{3^{\frac{4}{3}}}{4}}$

(i) $0 < a < 1$



(ii) $a > 1$



2.3 (1) $w=\dfrac{z-3}{1-2z}$ より $(2w+1)z=w+3$ $w\neq -\dfrac{1}{2}$ であるから $z=\dfrac{w+3}{2w+1}$

これを $|z-1|=a$ に代入すると

$$\left|\frac{w+3}{2w+1}-1\right|=a \quad \text{ゆえに} \quad \left|\frac{-w+2}{2w+1}\right|=a \qquad (*)$$

上の第 2 式より $\quad |w-2|^2=a^2|2w+1|^2$

$$(4a^2-1)|w|^2+2(a^2+1)(w+\overline{w})+a^2-4=0$$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\mathrm{Re}(w)=\dfrac{w+\overline{w}}{2}=\dfrac{3}{4}$ となり，w は直線を表す．

$a\neq\dfrac{1}{2}$ のとき $\quad |w|^2+\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}(w+\overline{w})+\dfrac{a^2-4}{4a^2-1}=0$

$$\left|w+\frac{2(a^2+1)}{4a^2-1}\right|^2=\frac{25a^2}{(4a^2-1)^2}$$

したがって，K が円である条件は $\boldsymbol{a\neq\dfrac{1}{2}}$ **かつ** $\boldsymbol{a>0}$

K の中心 $\boldsymbol{-\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}}$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{5a}{|4a^2-1|}}$

別解 $a\neq\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ より $\quad |w-2|:|w+\frac{1}{2}|=2a:1$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，K は 2 点 $2,-\dfrac{1}{2}$ の垂直二等分線 $\mathrm{Re}(w)=\dfrac{3}{4}$

K は 2 点 $2,-\dfrac{1}{2}$ を $2a:1$ に内分および外分する 2 点

$$\frac{1\cdot2+2a\left(-\frac{1}{2}\right)}{2a+1},\quad \frac{-1\cdot2+2a\left(-\frac{1}{2}\right)}{2a-1},\quad \text{すなわち} \quad \frac{2-a}{2a+1},\quad \frac{-2-a}{2a-1}$$

を直径の両端とする円である．

中心は $\quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2-a}{2a+1}+\dfrac{-2-a}{2a-1}\right)=-\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}$

半径は $\quad \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2-a}{2a+1}-\dfrac{-2-a}{2a-1}\right|=\dfrac{5a}{|4a^2-1|}$

(2) (1) の結果から，2 点 $-\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}+\dfrac{5a}{|4a^2-1|}i$, $-\dfrac{2(a^2+1)}{4a^2-1}-\dfrac{5a}{|4a^2-1|}i$ を結ぶ線分が通過する領域である．その領域を表す点を $x+yi$ とすると

$$x=-\frac{2(a^2+1)}{4a^2-1},\quad |y| \leqq \frac{5a}{|4a^2-1|}$$

上の第 1 式から　$a^2=\dfrac{x-2}{2(2x+1)}>0$　ゆえに　$x<-\dfrac{1}{2},\ 2<x$

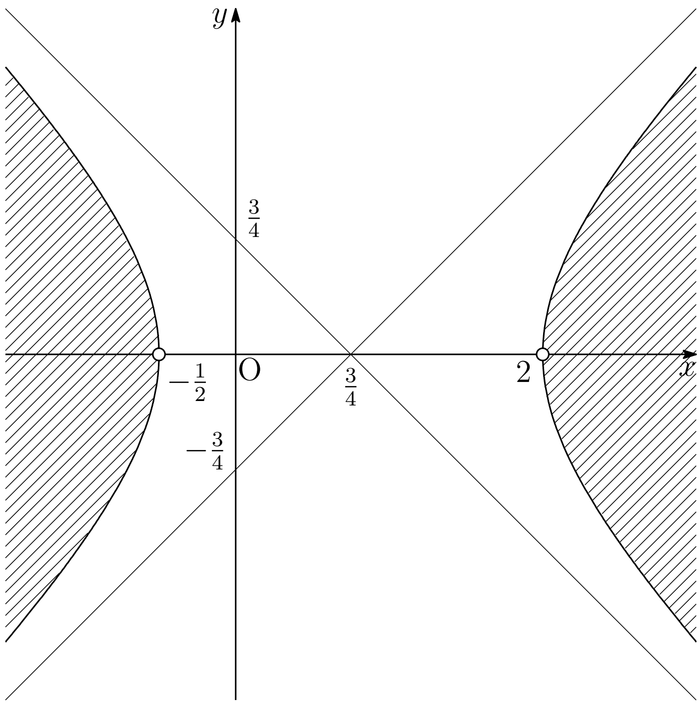
$x+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{4a^2-1}$ より　$-\dfrac{2}{5}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4a^2-1},\ \dfrac{2}{5}|y| \leqq \dfrac{2a}{4a^2-1}$

$$\left(\frac{2}{5}|y|\right)^2-\left\{\frac{2}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2 \leqq \frac{4a^2}{(4a^2-1)^2}-\frac{1}{(4a^2-1)^2}=\frac{1}{4a^2-1}$$

したがって　$\dfrac{4}{25}y^2-\dfrac{4}{25}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqq -\dfrac{2}{5}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

以上の結果から　$\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-y^2 \geqq \dfrac{25}{16},\ \ x \neq -\dfrac{1}{2},\ 2$

求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．ただし，○は含まない．



■

2.4 点 z が点 $\frac{3}{2}$ を中心とする半径 r $(r>0)$ の円周上を動くとき

$$\left|z-\frac{3}{2}\right|=r \quad \cdots ①$$

$z+w=zw$ より　$(w-1)z=w$　$w\neq 1$ であるから　$z=\dfrac{w}{w-1}$　$\cdots ②$

② を ① に代入すると　$\left|\dfrac{w}{w-1}-\dfrac{3}{2}\right|=r$

$$\left|\frac{2w-3(w-1)}{w-1}\right|=2r \quad \text{ゆえに} \quad \frac{|w-3|}{|w-1|}=2r \qquad (*)$$

(i) $2r=1$ のとき，w は 2 点 1, 3 の垂直二等分線であるから

$$\mathrm{Re}(w)=2$$

(ii) $2r\neq 1$ のとき，w は 2 点 1, 3 を $1:2r$ に内分および外分する 2 点

$$\frac{2r+3}{1+2r}, \quad \frac{-2r+3}{1-2r}$$

を直径の両端とする円 (アポロニウスの円) である．w の中心は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2r+3}{1+2r}+\frac{-2r+3}{1-2r}\right)=\frac{3-4r^2}{1-4r^2}$$

w の半径は

$$\frac{1}{2}\left|\frac{2r+3}{1+2r}-\frac{-2r+3}{1-2r}\right|=\frac{4r}{|1-4r^2|}$$

(i)，(ii) より，w が描く図形は

$$\begin{cases} \boldsymbol{r=\dfrac{1}{2}} \textbf{のとき　直線} \ \boldsymbol{\mathrm{Re}(w)=2} \\ \boldsymbol{r\neq\dfrac{1}{2}} \textbf{のとき} \ \boldsymbol{(r>0)} \ \textbf{中心} \boldsymbol{\dfrac{3-4r^2}{1-4r^2}}\textbf{，半径} \boldsymbol{\dfrac{4r}{|1-4r^2|}} \textbf{の円} \end{cases}$$

別解 $(*)$ より $\quad |w-3|^2=4r^2|w-1|^2$

$$(w-3)(\overline{w}-3)=4r^2(w-1)(\overline{w}-1)$$
$$(1-4r^2)w\overline{w}-(3-4r^2)(w+\overline{w})+9-4r^2=0 \qquad (**)$$

(i) $r=\dfrac{1}{2}$ のとき，これを $(**)$ に代入すると

$$w+\overline{w}=4 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(w)=\frac{w+\overline{w}}{2}=2$$

(ii) $r\neq\dfrac{1}{2}$ のとき $(r>0)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}
w\overline{w}-\frac{3-4r^2}{1-4r^2}(w+\overline{w})&=-\frac{9-4r^2}{1-4r^2}\\
\left|w-\frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right|^2&=\left(\frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right)^2-\frac{9-4r^2}{1-4r^2}\\
\left|w-\frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right|^2&=\frac{16r^2}{(1-4r^2)^2}\\
\left|w-\frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right|&=\frac{4r}{|1-4r^2|}
\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，w が描く図形は

$$\begin{cases} \boldsymbol{r=\dfrac{1}{2}}\textbf{のとき} \quad \mathbf{Re}(\boldsymbol{w})=\mathbf{2} \\ \boldsymbol{r\neq\dfrac{1}{2}}\textbf{のとき}\ (\boldsymbol{r>0}) \quad \textbf{中心}\boldsymbol{\dfrac{3-4r^2}{1-4r^2}}\textbf{，半径}\boldsymbol{\dfrac{4r}{|1-4r^2|}} \end{cases}$$

■

2.5 (1) $g(x) = x - f(x)$ とおくと $(x > 0)$

$$g(x) = x - \log(x+1) - 1,$$
$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$$

$g(x)$ は単調増加関数である．

$$g(0) = -1 < 0, \quad g(e^2 - 1) = e^2 - 4 = (e+2)(e-2) > 0$$

$g(x) = 0$，すなわち，$f(x) = x$ は，$x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつ．

(2) $f(x) = \log(x+1) + 1$ より，$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$，$f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$
$x > 0$ において，$f'(x) > 0$，$f''(x) < 0$ より，$f(x)$ は単調増加，$f'(x)$ は単調減少である．$0 < x < \alpha$ を満たすとき

$$f(x) < f(\alpha) = \alpha \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} > 0 \qquad \text{(A)}$$

また，平均値の定理により

$$\frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} = f'(c), \quad x < c < \alpha$$

を満たす c が存在する．$x < c$ より $f'(x) > f'(c)$ であるから

$$\frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x) \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) より

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x) \qquad \text{(証終)}$$

別証 $f''(x) < 0$ を利用する．

$$\begin{aligned}
f(\alpha) - f(x) &= \int_x^\alpha f'(t)\,dt = \int_x^\alpha (t-\alpha)' f'(t)\,dt \\
&= \Big[(t-\alpha) f'(t)\Big]_x^\alpha - \int_x^\alpha (t-\alpha) f''(t)\,dt \\
&= (\alpha - x) f'(x) + \int_x^\alpha (\alpha - t) f''(t)\,dt \\
&< (\alpha - x) f'(x)
\end{aligned}$$

(3) すべての自然数 n について，$(*)\ 1 \leqq x_n < \alpha$ が成立することを示す．

［1］$n=1$ のとき，$x_1 = 1$ より，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定する．

$f(x)$ が単調増加であるから，$1 \leqq x_n < \alpha$ より

$$f(1) \leqq f(x_n) < f(\alpha) \quad \text{ゆえに} \quad 1 < \log 2 + 1 \leqq x_{n+1} < \alpha$$

よって，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．　(証終)

$x = x_n$ として，(2) の結論を利用すると

$$0 < \frac{\alpha - f(x_n)}{\alpha - x_n} < f'(x_n)$$

$f'(x)$ が単調減少であることと $1 \leqq x_n$ により

$$0 < \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} < f'(x_n) \leqq f'(1) = \frac{1}{2} \qquad (**)$$

よって　$\dfrac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} < \dfrac{1}{2}$

(4) $(**)$ より　$0 < \alpha - x_{n+1} < \dfrac{1}{2}(\alpha - x_n)$

したがって　$0 < \alpha - x_n < (\alpha - 1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\alpha - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha - x_n) = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

■

2.6 (1) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{2}\right)} > \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$

よって　$\boldsymbol{\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)} < \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}}$

(2) $f(x) = \sqrt{2}^{\,x}$ より　$f'(x) = \sqrt{2}^{\,x}\log\sqrt{2}$

$f(2) = 2,\ f'(2) = 2\log\sqrt{2} = \log 2$ であるから，求める接線の方程式は

$$y - 2 = (x-2)\log 2 \quad \text{すなわち} \quad y = x\log 2 + 2 - 2\log 2$$

よって　$\boldsymbol{m = \log 2,\ \ k = 2 - 2\log 2}$

(3) $f'(x) = \sqrt{2}^{\,x}\log\sqrt{2} > 0,\quad f''(x) = \sqrt{2}^{\,x}(\log\sqrt{2})^2 > 0$

$mx + k = f'(2)(x-2) + f(2)$ より

$$g(x) = f(x) - f'(2)(x-2) - f(2)$$

とおくと　$g(2) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - f'(2)$$

$f'(x)$ は単調増加であるから，$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，すべての実数 x に対して

$$g(x) \geqq 0 \quad \text{よって} \quad f(x) \geqq mx + k$$

(4) $\sqrt{2} \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x)$, $f'(x)$ は単調増加である．平均値の定理により

$$\frac{f(2)-f(x)}{2-x} = f'(c) \quad (x < c < 2)$$

を満たす c が存在する．$f(2)=2$ および $f'(c) \leqq f'(2) = \log 2$ より

$$\frac{2-f(x)}{2-x} \leqq \log 2 \tag{A}$$

$f(2)=2$ で，$\sqrt{2} \leqq x \leqq 2$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x) \leqq f(2) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq 2 - f(x) \tag{B}$$

(A)，(B) より，$\sqrt{2} \leqq x \leqq 2$ のとき，次式が成立する．

$$0 \leqq 2 - f(x) \leqq (2-x)\log 2 \tag{$*$}$$

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = \sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ で定義されたとき，すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$a_n < a_{n+1} < 2 \tag{$**$}$$

［1］$n=1$ のとき，$a_1 = \sqrt{2}$，$a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ について

$$\sqrt{2} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{2} \quad \text{ゆえに} \quad a_1 < a_2 < 2$$

よって，$n=1$ のとき，$(**)$ が成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(**)$ が成立する，すなわち，$a_k < a_{k+1} < 2$ であると仮定すると，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(a_k) < f(a_{k+1}) < f(2) \quad \text{ゆえに} \quad a_{k+1} < a_{k+2} < 2$$

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する．(証終)

$(**)$ より，すべての自然数 n について

$$\sqrt{2} \leqq a_n < 2$$

が成立するから，これを $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq 2 - a_{n+1} \leqq (2-a_n)\log 2$$

したがって $\qquad 0 \leqq 2 - a_n \leqq (2-\sqrt{2})(\log 2)^{n-1}$

$0 < \log 2 < 1$ より $\quad \lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{2})(\log 2)^{n-1} = 0$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(2-a_n) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}$$

■

2.7 (1) $f(x) = \log \dfrac{e^x}{x} = x - \log x$ より　$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x)$, $f'(x)$ は単調増加である．平均値の定理により

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c) \quad (1 < c < x)$$

を満たす c が存在する．$f(1) = 1$ および $f'(c) \leqq f'(2) = \dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} \leqq \frac{1}{2} \tag{A}$$

$f(1) = 1$ で，$1 \leqq x \leqq 2$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(1) \leqq f(x) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq f(x) - 1 \tag{B}$$

(A)，(B) より，$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，次式が成立する．

$$0 \leqq f(x) - 1 \leqq \frac{1}{2}(x - 1) \tag{$*$}$$

(2) すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$1 < a_{n+1} < a_n \tag{$**$}$$

［1］ $n = 1$ のとき，$a_1 = 2$，$a_2 = 2 - \log 2$

$$1 < 1 + (1 - \log 2) = a_2 < 2 \quad \text{ゆえに} \quad 1 < a_2 < a_1$$

よって，$n = 1$ のとき，$(**)$ は成立する．

［2］ $n = k$ のとき，$(**)$ が成立する，すなわち，$1 < a_{k+1} < a_k$ であると仮定すると，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(1) < f(a_{k+1}) < f(a_k) \quad \text{ゆえに} \quad 1 < a_{k+2} < a_{k+1}$$

［1］，［2］ より，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する．(証終)

$(**)$ より，すべての自然数 n について $1 < a_n \leqq 2$ が成立するから，これを $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq a_{n+1} - 1 \leqq \frac{1}{2}(a_n - 1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - 1) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

別解　すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$1 \leqq a_n \leqq 2 \qquad (\#)$$

［1］$n=1$ のとき，$a_1 = 2$ より，明らかに $(\#)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(\#)$ が成立する，すなわち，$1 \leqq a_k \leqq 2$ であると仮定すると，$(*)$ から

$$0 \leqq a_{k+1} - 1 \leqq \frac{1}{2}(a_k - 1) \leqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq a_{k+1} \leqq \frac{3}{2} \leqq 2$$

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(\#)$ が成立する．　(証終)

再度，$(\#)$ を $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq a_{n+1} - 1 \leqq \frac{1}{2}(a_n - 1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - 1) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

(3) 漸化式より　$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = a_{n+1}$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{b_k} = \prod_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \quad (n \geqq 2)$

$$\frac{b_n}{b_1} = \prod_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \quad b_1 = a_1 \text{ より} \quad b_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \qquad (***)$$

漸化式より　$a_{n+1} = f(a_n) = a_n - \log a_n$

$$\log a_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = e^{a_n - a_{n+1}}$$

したがって

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} e^{a_k - a_{k+1}} = e^{2-a_{n+1}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ であるから，上式および $(***)$ から

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} a_k = e^{2-1} = \boldsymbol{e}$$

■

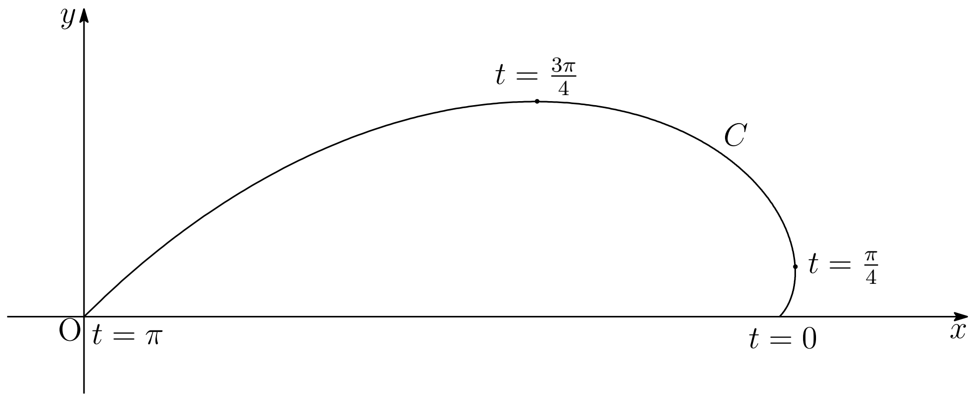
2.8 $C : x = e^t\cos t + e^{\pi},\ y = e^t\sin t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= e^t(\cos t - \sin t) = \sqrt{2}e^t\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \\
\frac{dy}{dt} &= e^t(\sin t + \cos t) = \sqrt{2}e^t\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	(x_0, y_0)	$\cdots$	$(x_{\frac{\pi}{4}}, y_{\frac{\pi}{4}})$	$\cdots$	$(x_{\frac{3\pi}{4}}, y_{\frac{3\pi}{4}})$	$\cdots$	$(0, 0)$

ただし　$(x_0, y_0) = (1 + e^{\pi},\ 0)$，$(x_{\frac{\pi}{4}}, y_{\frac{\pi}{4}}) = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^{\pi},\ \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$，

$(x_{\frac{3\pi}{4}},\ y_{\frac{3\pi}{4}}) = \left(\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^{\pi},\ \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$



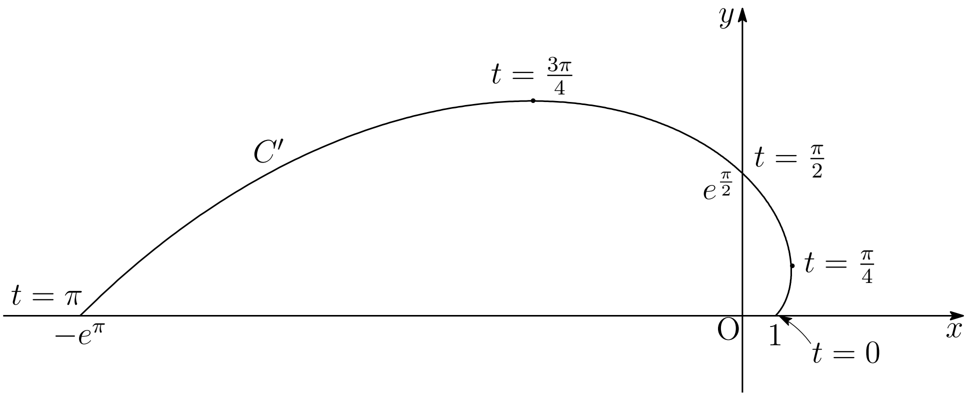
$x = f(t),\ y = g(t)$ とし，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{f(\pi)}^{f(\frac{\pi}{4})} y\,dx - \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{4})} y\,dx = -\int_{f(0)}^{f(\pi)} y\,dx \\
&= -\int_0^{\pi} g(t)f'(t)\,dt = -\int_0^{\pi} e^t\sin t\cdot e^t(\cos t - \sin t)\,dt \\
&= -\int_0^{\pi} e^{2t}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1 - \cos 2t}{2}\right)dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}(\sin 2t + \cos 2t - 1)\,dt \\
&= -\frac{1}{4}\Big[\,e^{2t}(\sin 2t - 1)\,\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)}
\end{aligned}$$

別解 C を x 軸方向に $-e^{\pi}$ だけ平行移動させた曲線

$$C' : x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積を求めてもよい．



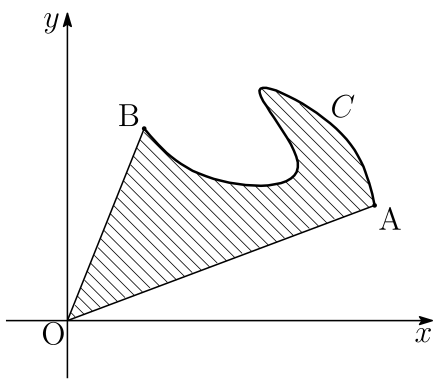
C' は O を極とする極方程式 $r = e^t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ で表されるから，その面積は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}\,dt = \frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)}$$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 $>$OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



本題は，ガウス・グリーンの定理を用いて求めることもできる．

$$f(t)g'(t) - f'(t)g(t) = e^t \cos t \cdot e^t(\sin t + \cos t) - e^t(\cos t - \sin t) \cdot e^t \sin t = e^{2t}$$

したがって，求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}\,dt = \frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)}$$

補足 極座標 $x = r\cos t,\ y = r\sin t$ について $xy' - x'y = r^2$ であるから，ガウス・グリーンの定理により，極方程式における面積公式が導かれる． ■

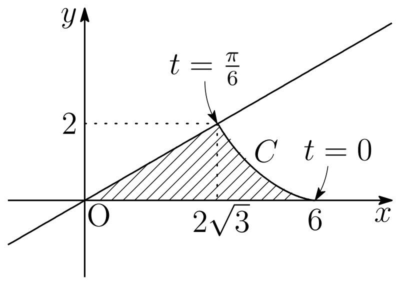
2.9 (1) $x = 5\cos t + \cos 5t,\quad y = 5\sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leqq t < \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt} = -5(\sin t + \sin 5t) = -10\sin 3t\cos 2t,$$
$$\frac{dy}{dt} = 5(\cos t - \cos 5t) = 10\sin 3t\sin 2t,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = -\tan 2t$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$0 < 2t < 3t < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\boldsymbol{\dfrac{dx}{dt} < 0,\quad \dfrac{dy}{dx} < 0}$

(2) (1) の結果および $\dfrac{dy}{dt} > 0$ より

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	
$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$		$\nwarrow$	
$(x,\ y)$	$(6,\ 0)$	$\cdots$	$(2\sqrt{3},\ 2)$



右上の図の斜線部分が求める面積で，その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 + \int_{2\sqrt{3}}^{6} y\,dx = 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} y\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$= 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} (5\sin t - \sin 5t)(-5\sin t - 5\sin 5t)\,dt$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (5\sin^2 t - \sin^2 5t + 4\sin 5t\sin t)\,dt$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left\{5\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} - \frac{1-\cos 10t}{2} - 2(\cos 6t - \cos 4t)\right\} dt$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\left[\,2t - \frac{5}{4}\sin 2t + \frac{1}{20}\sin 10t - \frac{1}{3}\sin 6t + \frac{1}{2}\sin 4t\,\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}$$

(3) $f(t) = 5\cos t + \cos 5t$,　$g(t) = 5\sin t - \sin 5t$ とおくと

$$f(-t) = f(t), \quad g(-t) = -g(t)$$

よって，C 上の 2 点 $(f(t),\ g(t))$ と $(f(-t),\ g(-t))$ は x 軸に関して対称.

xy 直交座標系の原点 O を中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた直交座標系を XY 系とすると

$$x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = X\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3}\end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = X\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3}\end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix}-\sin\frac{\pi}{3}\\ \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$$

$X = f(t)$，$Y = g(t)$ とすると

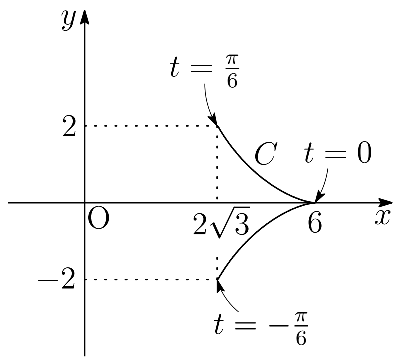
$$\begin{aligned}
x &= (5\cos t + \cos 5t)\cos\frac{\pi}{3} - (5\sin t - \sin 5t)\sin\frac{\pi}{3}\\
&= 5\left(\cos t\cos\frac{\pi}{3} - \sin t\sin\frac{\pi}{3}\right) + \cos 5t\cos\frac{\pi}{3} + \sin 5t\sin\frac{\pi}{3}\\
&= 5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(5t - \frac{\pi}{3}\right)\\
&= 5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) + \cos 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = f\left(t+\frac{\pi}{3}\right),\\
y &= (5\cos t + \cos 5t)\sin\frac{\pi}{3} + (5\sin t - \sin 5t)\cos\frac{\pi}{3}\\
&= 5\left(\cos t\sin\frac{\pi}{3} + \sin t\cos\frac{\pi}{3}\right) + \cos 5t\sin\frac{\pi}{3} - \sin 5t\cos\frac{\pi}{3}\\
&= 5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(5t - \frac{\pi}{3}\right)\\
&= 5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) - \sin 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = g\left(t+\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

XY 系における点 $(f(t),\ g(t))$ は，xy 系における点 $\left(f\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right),\ g\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ であるから，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にある.

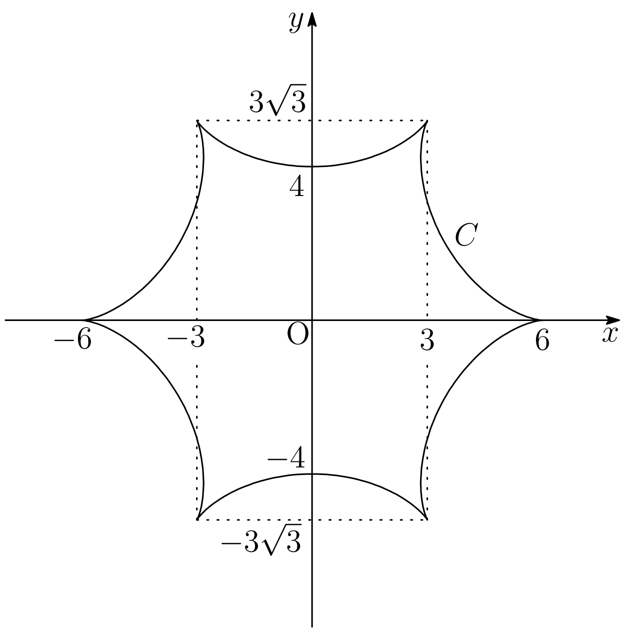
(4) $\dfrac{dy}{dx} = -\tan 2t$ および $\dfrac{dx}{dt} < 0$ $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{6}\right)$ により，$0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ において

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg/\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-\tan 2t)\Bigg/\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{\cos^2 2t}\Bigg/\frac{dx}{dt} > 0$$

(3) の結果から，C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の部分と $-\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq 0$ の部分は x 軸に関して対称であるから，C の $-\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の概形は次のようになる．



さらに，これを原点を中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた部分も C 上にある．よって，C の $-\pi \leqq t < \pi$ の概形は，次のようになる．



解説 C 上の点 $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))$ における接ベクトルは $(f'(t),\ g'(t))$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\}\cdot\frac{dt}{dx}$$

逆関数定理により，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{f'(t)}$ であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^2}\cdot\frac{1}{f'(t)}=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}$$

本題において

$$f(t)=5\cos t+\cos 5t, \quad g(t)=5\sin t-\sin 5t \quad (-\pi \leqq t<\pi)$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(t)&=-5(\sin t+\sin 5t), & g'(t)&=5(\cos t-\cos 5t)\\ f''(t)&=-5(\cos t+5\cos 5t), & g''(t)&=-5(\sin t-5\sin 5t) \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)&=25(\sin t-5\sin 5t)(\sin t+\sin 5t)\\ &\qquad +25(\cos t-\cos 5t)(\cos t+5\cos 5t)\\ &=-100+100(\cos 5t\cos t-\sin 4t\sin t)\\ &=-100(1-\cos 6t) \end{aligned}$$

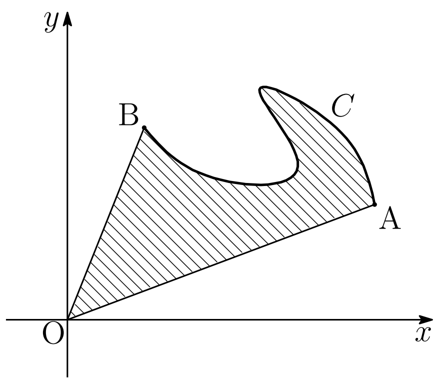
$0<t<\dfrac{\pi}{6}$ において　$f'(t)<0,\quad g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)<0$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}>0$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C: x=f(t),\ y=g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t=\alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}dt$$



本題 (2) は，ガウス・グリーンの定理を用いて求めることもできる．

$$\begin{aligned}
f(t)g'(t)-f'(t)g(t) &= (5\cos t+\cos 5t)\cdot 5(\cos t-\cos 5t) \\
&\qquad + 5(\sin t+\sin 5t)\cdot(5\sin t-\sin 5t) \\
&= 20-20(\cos 5t\cos t-\sin 5t\sin t) \\
&= 20(1-\cos 6t)
\end{aligned}$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\,dt \\
&= 10\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 6t)\,dt = 10\left[\,t-\frac{1}{6}\sin 6t\,\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}
\end{aligned}$$

■

2.10 (1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ より

$$\frac{b^2x^2}{a^2}+y^2=b^2,\quad \frac{a^2x^2}{b^2}+y^2=a^2 \tag{$*$}$$

上の 2 式の辺々の差をとると $\left(\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{a^2}{b^2}\right)x^2=b^2-a^2$

$$\frac{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}{a^2b^2}x^2=b^2-a^2$$

$b^2-a^2\neq 0$ であるから　$x^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$　これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$\frac{b^4}{a^2+b^2}+y^2=b^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

第 1 象限における交点 $\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ から　$\boldsymbol{c=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

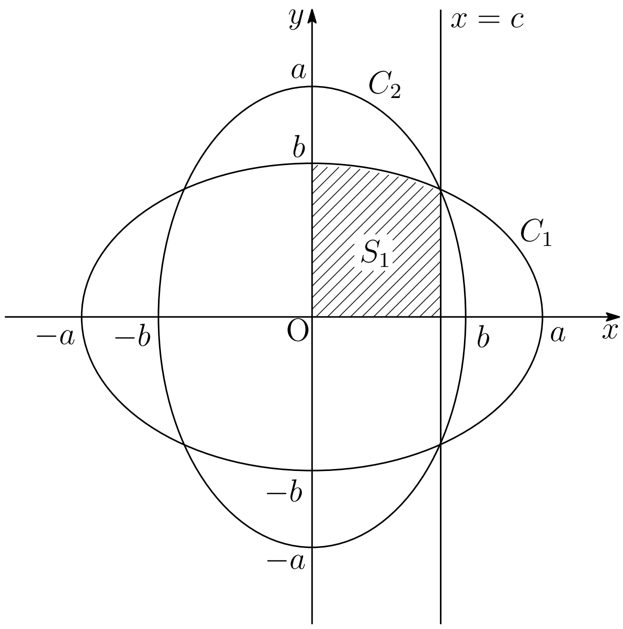
(2) 2 つの楕円を

$$C_1(\theta)=(a\cos\theta,\ b\sin\theta),\quad C_2(\theta)=(b\cos\theta,\ a\sin\theta)$$

とおく．(1) で求めた交点 $(c,\ c)$ が，$C_1(\alpha)$ および $C_2(\beta)$ であるとき

$$c=a\cos\alpha=b\sin\alpha=b\cos\beta=a\sin\beta \quad \left(0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}\right)$$

ゆえに　$\sin\alpha=\cos\beta$，$\cos\alpha=\sin\beta$　すなわち　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$　$\cdots$①



したがって

$$S_1 = \int_{a\cos\frac{\pi}{2}}^{a\cos\alpha} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} b\sin\theta(-a\sin\theta)\,d\theta = ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}ab\Big[\ \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\ \Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \frac{1}{4}ab\sin 2\alpha$$

ここで　$\dfrac{1}{4}ab\sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}ab\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}(a\cos\alpha)(b\sin\alpha) = \dfrac{1}{2}c^2$

$$S_1 = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \frac{1}{2}c^2$$

同様にして

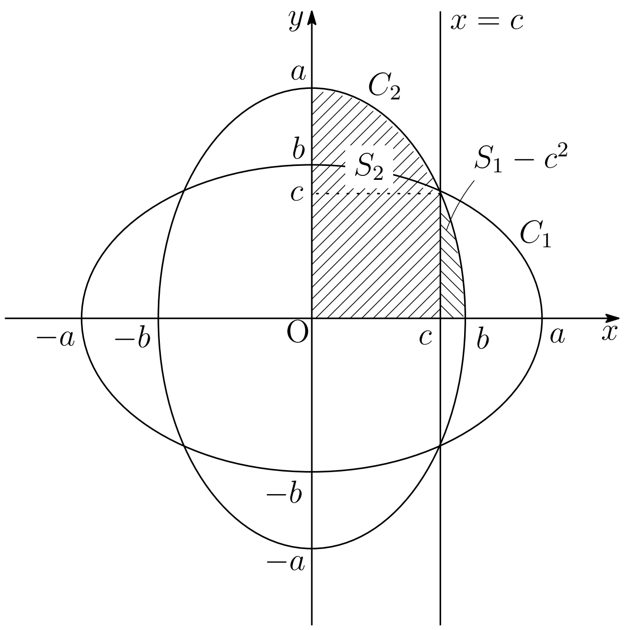
$$S_2 = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) + \frac{1}{2}c^2$$

① および (1) の結果により

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ab\{\pi - (\alpha+\beta)\} + c^2 = \boldsymbol{\frac{\pi ab}{4} + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$$

補足 C_1 と C_2 は直線 $y = x$ に関して対称であるから，前頁の S_1 から下の図の面積 $S_1 - c^2$ と S_2 の面積の和を利用すると

$$(S_1 - c^2) + S_2 = \frac{\pi ab}{4} \quad \text{ゆえに} \quad S_1 + S_2 = \frac{\pi ab}{4} + c^2$$



別解 原点 O と交点 $(c,\ c)$ を結ぶ線分と y 軸および C_1 で囲まれた部分の面積を T_1 とすると，ガウス・グリーンの定理[7] により

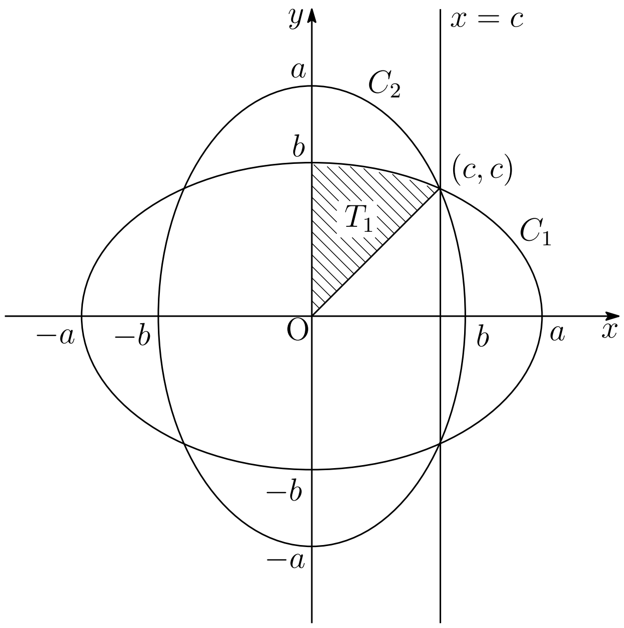
$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\{a\cos\theta(b\sin\theta)' - (a\cos\theta)'b\sin\theta\}d\theta \\
&= \frac{1}{2}ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)
\end{aligned}
$$

同様に，原点 O と交点 $(c,\ c)$ を結ぶ線分と y 軸および C_2 で囲まれた部分の面積を T_2 とすると

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}\{b\cos\theta(a\sin\theta)' - (b\cos\theta)'a\sin\theta\}d\theta \\
&= \frac{1}{2}ab\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)
\end{aligned}
$$

$S_1 = T_1 + \dfrac{1}{2}c^2$，$S_2 = T_2 + \dfrac{1}{2}c^2$ であるから，① および (1) の結果により

$$
S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ab\{\pi - (\alpha+\beta)\} + c^2 = \boldsymbol{\frac{\pi ab}{4} + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}
$$



■

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2021.pdf (p.11 を参照)．

2.11 n 枚から 3 枚取り出す場合の総数は

$$ {}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad (\text{通り}) $$

$n-2$ 個の石を横 1 列に並べ，その中から 3 つ選び，選んだ 3 つの石を左から X, Y, Z とする．このとき，X と Y および Y と Z の間にそれぞれ石を 1 個ずつ追加する操作を考える．これら n 個並んだ石の配置について，X, Y, Z を左から数えた順番とすればよいから，その場合の総数は

$$ {}_{n-2}\mathrm{C}_3 = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} \quad (\text{通り}) $$

よって，求める確率は

$$ \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} \Big/ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}} $$

■

2.12 (1) 5 個の石を横 1 列に並べ，その中から 3 つ選び，選んだ 3 つの石を左から a_1，a_2，a_3 とする．このとき，a_1 と a_2 および a_2 と a_3 の間にそれぞれ石を 2 個ずつ追加する操作を考える．これら 9 個並んだ石の配置について，a_1，a_2，a_3 を左から数えた順番とすればよいから，求める場合の総数は

$$ {}_5\mathrm{C}_3 = \mathbf{10} \ (\text{通り}) $$

(2) 32 個の石を横 1 列に並べ，その中から 3 つ選び，選んだ 3 つの石を左から a_1，a_2，a_3 とする．このとき，a_1 と a_2 および a_2 と a_3 の間にそれぞれ石を 9 個ずつ追加する操作を考える．これら 50 個並んだ石の配置について，a_1，a_2，a_3 を左から数えた順番とすればよいから，求める場合の総数は

$$ {}_{32}\mathrm{C}_3 = \mathbf{4960} \ (\text{通り}) $$

(3) 座席が横 1 列のとき，条件を満たす場合の総数は (1) と同様にして

$$ {}_{16}\mathrm{C}_3 = 560 \ (\text{通り}) $$

座席が円形であるため，この中から $(a_1,\ a_3) = (1,\ 20)$，$(1,\ 19)$，$(2, 20)$ の場合を除けばよい．

$(a_1,\ a_3) = (1,\ 20)$ のとき　$a_2 = 4, 5, \cdots, 17$ の 14 通り
$(a_1,\ a_3) = (1,\ 19)$ のとき　$a_2 = 4, 5, \cdots, 16$ の 13 通り
$(a_1,\ a_3) = (2,\ 19)$ のとき　$a_2 = 5, 6, \cdots, 17$ の 13 通り

よって，求める場合の総数は

$$ 560 - (14 + 13 + 13) = \mathbf{520} \ (\text{通り}) $$

■

2.13 (1) $(*)$ に順次 $y=1,2,3$ を代入すると

$y=1$ のとき　$x^2-6x-8=0$　ゆえに　$x=3\pm\sqrt{17}$

$y=2$ のとき　$x^2-12x-5=0$　ゆえに　$x=6\pm\sqrt{41}$

$y=3$ のとき　$x^2-18x=0$　ゆえに　$x=0,\ 18$

$(*)$ を満たす正の整数 $(x,\ y)$ の組で，y が最小のものは

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(18,\ 3)}$$

(2) $(x,\ y)=(a_{n+1},\ a_n)$ が $(*)$ を満たすとき

$$a_{n+1}{}^2-6a_{n+1}a_n+a_n{}^2=9$$

与えられた漸化式から　$a_n=6a_{n+1}-a_{n+2}$

上の 2 式から a_n を消去すると

$$a_{n+1}{}^2-6a_{n+1}(6a_{n+1}-a_{n+2})+(6a_{n+1}-a_{n+2})^2=9$$

上式の左辺を整理すると

$$a_{n+2}{}^2-6a_{n+2}a_{n+1}+a_{n+1}{}^2=9$$

よって，$(x,\ y)=(a_{n+2},\ a_{n+1})$ も $(*)$ を満たす．

(3) $a_1=3$，$a_2=18$ とおくと $(x,\ y)=(a_2,\ a_1)$ は $(*)$ を満たす．

次の命題 (A) が成立することを示す．

(A)　すべての自然数 n について　$a_{n+1}>a_n>0$

与えらえた漸化式から

$$a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)+4a_n \qquad (**)$$

[1] $a_2>a_1>0$ であるから，$n=1$ のとき (A) は成立する．

[2] $n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，$(**)$ より

$$a_{k+2}>a_{k+1}>0$$

したがって，$n=k+1$ のときも (A) が成立する．

[1]，[2] より，(A) が成立する．

よって，(2) の結果と (A) により，$(*)$ の整数解は無数にある．

補足 $\begin{vmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$，$a_2=18,\ a_1=3,\ a_0=0$

$$\begin{vmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

ゆえに　$a_{n+2}a_{n+1}-a_{n+1}{}^2=-9$　よって　$a_{n+1}{}^2-6a_{n+1}a_n+a_n{}^2=9$ ■

2.14 (1) $a_{n+1}a_{n-1} = {a_n}^2 + 1 > 0$ より，すべての自然数 n で，$a_n \neq 0$ であるから [8]

$$a_{n+1} = \frac{{a_n}^2 + 1}{a_{n-1}} \quad (n \geqq 2)$$

$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ であるから，$n = 2,\ 3,\ 4$ を上式に順次代入すると

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{{a_2}^2+1}{a_1} = \frac{2^2+1}{1} = \mathbf{5}, \\ a_4 &= \frac{{a_3}^2+1}{a_2} = \frac{5^2+1}{2} = \mathbf{13}, \\ a_5 &= \frac{{a_4}^2+1}{a_3} = \frac{13^2+1}{5} = \mathbf{34} \end{aligned}$$

(2) $a_{n+1}a_{n-1} = {a_n}^2 + 1$ より $({a_{n-1}}^2 = a_na_{n-2} - 1)$

$$\begin{aligned} (a_{n+1} + ca_n + a_{n-1})a_{n-1} &= a_{n+1}a_{n-1} + ca_na_{n-1} + {a_{n-1}}^2 \\ &= ({a_n}^2 + 1) + ca_na_{n-1} + (a_na_{n-2} - 1) \\ &= a_n(a_n + ca_{n-1} + a_{n-2}) \end{aligned}$$

(3) すべての n について，$a_n \neq 0$ であるから，(2) の結果より

$$\frac{a_{n+1} + ca_n + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n + ca_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

したがって $\quad \dfrac{a_n + ca_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \dfrac{a_3 + ca_2 + a_1}{a_2}$

$c = -3$ のとき，$a_3 + ca_2 + a_1 = 5 - 3{\cdot}2 + 1 = 0$ より

$$a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

補足 フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ の特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$f_n - (\alpha + \beta)f_{n-1} + \alpha\beta f_{n-2} = 0$$

$f_1 = 1,\ f_2 = 1$ であるから $\quad f_n = \dfrac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$

$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1$ より，$\alpha^2 + \beta^2 = 3,\ \alpha^2\beta^2 = 1$ であるから

$$a_n - (\alpha^2 + \beta^2)a_{n-1} + \alpha^2\beta^2 a_{n-2} = 0$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 2$ より $\quad a_n = \dfrac{\beta^{2n-1} - \alpha^{2n-1}}{\beta - \alpha} = f_{2n-1}$

[8] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2015.pdf $\boxed{4}$ を参照.

発展 $f_1=1,\ f_2=1,\ f_{n+2}-f_{n+1}-f_n=0\ (n=1,2,\cdots)$ とすると

$$\begin{aligned} f_{n+4}-f_{n+3}-f_{n+2}&=0\\ f_{n+3}-f_{n+2}-f_{n+1}&=0\\ -f_{n+2}+f_{n+1}+f_n&=0 \end{aligned}$$

これらの辺々を加えると

$$f_{n+4}-3f_{n+2}+f_n=0$$

これから

$$f_{2n+3}-3f_{2n+1}+f_{2n-1}=0 \quad \text{または} \quad f_{2n+4}-3f_{2n+2}+f_{2n}=0$$

$a_n=f_{2n-1}$，$b_n=f_{2n}$ とおくと

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0, \quad b_{n+2}-3b_{n+1}+b_n=0$$

$a_1=f_1=1$，$a_2=f_3=2$ とすると，$\{a_n\}$ はフィボナッチ数列の奇数項.
$b_1=f_2=1$，$b_2=f_4=3$ とすると，$\{b_n\}$ はフィボナッチ数列の偶数項.

$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$，すなわち，$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

両辺の行列式をとると $(\det(AB)=\det A\det B)$

$$\begin{vmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

したがって　$a_{n+2}a_n-{a_{n+1}}^2=a_{n+1}a_{n-1}-{a_n}^2$

$a_1=1,\ a_2=2$ より，$a_3=5$ であるから

$$a_{n+1}a_{n-1}-{a_n}^2=a_3a_1-{a_2}^2=5\cdot1-2^2=1$$

これより，設問の漸化式を得る.　■

3.1 (1) $x<0,\ 1<x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-1)+(x-a)(x-b) = 2x^2-(a+b+1)x+ab \\ &= 2\left(x-\frac{a+b+1}{4}\right)^2+f\left(\frac{a+b+1}{4}\right) \end{aligned}$$

$0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ より $\dfrac{1}{4} \leqq \dfrac{a+b+1}{4} \leqq \dfrac{3}{4}$ であるから

$$\begin{aligned} x<0 \text{ では } \ f(x) > f(0) \geqq m, \\ 1<x \text{ では } \ f(x) > f(1) \geqq m \end{aligned}$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2-(a+b+1)x+ab & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ (1-a-b)x+ab & (0 \leqq x \leqq a,\ b \leqq x \leqq 1) \\ -2x^2+(a+b+1)x-ab & (a \leqq x \leqq b) \end{cases}$$

(1) の結果から，最小値は $0 \leqq x \leqq 1$ の区間でとる．関数の増減から

$$m = \min\{f(0),\ f(a),\ f(b),\ f(1)\}$$

である．これらの値は

$$\begin{aligned} &f(0) = ab, && f(a) = a(1-a), \\ &f(b) = b(1-b), && f(1) = (1-a)(1-b) \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} &f(a)-f(0) = a(1-a-b), && f(b)-f(0) = b(1-a-b), \\ &f(a)-f(1) = (1-a)(a+b-1), && f(b)-f(1) = (1-b)(a+b-1) \end{aligned}$$

(i) $a+b-1 \geqq 0$ のとき

$$f(0) \geqq f(a) \geqq f(1), \quad f(0) \geqq f(b) \geqq f(1) \quad \text{ゆえに} \quad m = f(1)$$

(ii) $a+b-1 \leqq 0$ のとき

$$f(1) \geqq f(a) \geqq f(0), \quad f(1) \geqq f(b) \geqq f(0) \quad \text{ゆえに} \quad m = f(0)$$

(i)，(ii) より　　$m = f(0)$ または $m = f(1)$

(3) (2) の結果から

(i) $a+b-1 \geqq 0$ のとき $(1-b \leqq a)$

$$m = f(1) = (1-a)(1-b) \leqq (1-a)a = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

したがって，$m \leqq \dfrac{1}{4}$ が成立し，等号が成立するとき

$$1-b=a,\ a=\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad a=b=\frac{1}{2}$$

(ii) $a+b-1 \leqq 0$ のとき $(a \leqq 1-b)$

$$m = f(0) = ab \leqq (1-b)b = -\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

したがって，$m \leqq \dfrac{1}{4}$ が成立し，等号が成立するとき

$$a=1-b,\ b=\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad a=b=\frac{1}{2}$$

(i)，(ii) より　$a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき，m は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる． ■

3.2 (1) 同値変形を用いると

$$
\begin{aligned}
|x-y| \leqq x+y &\iff -(x+y) \leqq x-y \leqq x+y \\
&\iff \begin{cases} -(x+y) \leqq x-y \\ x-y \leqq x+y \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

(2) $|1+y-2x^2-y^2| \leqq 1-y-y^2$ について

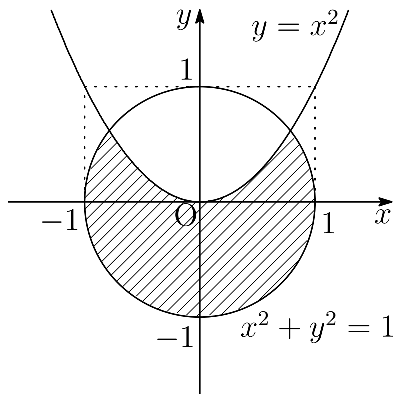
$$A-B=1+y-2x^2-y^2, \quad A+B=1-y-y^2$$

とすると　$A=1-x^2-y^2,\ B=x^2-y$

(1) の結論に適用すると，$A \geqq 0,\ B \geqq 0$ であるから

$$\begin{cases} 1-x^2-y^2 \geqq 0 \\ x^2-y \geqq 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ y \leqq x^2 \end{cases}$$

よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



補足 円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=x^2$ の方程式から x を消去すると

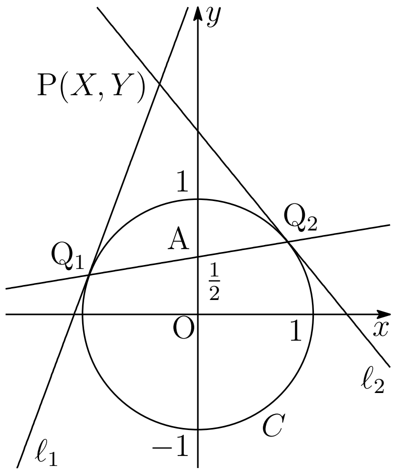
$$y^2+y-1=0 \quad \text{これを解いて} \quad y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$0 \leqq y \leqq 1$ に注意して　$y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

これを $y=x^2$ に代入することにより　$x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

したがって，これらの交点の座標は　$\left(\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}},\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ■

3.3 (1) 点 A$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通り，傾き t の直線は



$$y = tx + \frac{1}{2} \qquad (*)$$

この直線と $C : x^2 + y^2 = 1$ の方程式から y を消去して整理すると

$$(t^2+1)x^2 + tx - \frac{3}{4} = 0$$

これを解くと　$x = \dfrac{-t \pm \sqrt{4t^2+3}}{2(t^2+1)}$

この方程式の解が $x_1,\ x_2$ であるから $(x_1 < x_2)$

$$x_2 - x_1 = \frac{-t+\sqrt{4t^2+3}}{2(t^2+1)} - \frac{-t-\sqrt{4t^2+3}}{2(t^2+1)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{4t^2+3}}{t^2+1}}$$

$y_1 = tx_1 + \dfrac{1}{2}$，$y_2 = tx_2 + \dfrac{1}{2}$ であるから

$$y_2 - y_1 = t(x_2 - x_1) = \boldsymbol{\frac{t\sqrt{4t^2+3}}{t^2+1}}$$

(2) 2 点 Q_1，Q_2 を通る直線は点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を極とする極線

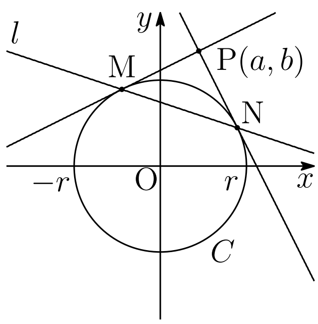
$$Xx + Yy = 1$$

である．$(*)$ より，これが $-2tx + 2y = 1$ に一致するから

$$X = -2t, \quad Y = 2 \qquad (**)$$

(3) $(**)$ より，$\mathrm{P}(-2t,\ 2)$ であるから，点 P の軌跡は　$\boldsymbol{y = 2}$ ■

円 $C : x^2 + y^2 = r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ とする．2 本の接線



$$x_1x + y_1y = r^2, \quad x_2x + y_2y = r^2$$

は点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$ax_1 + by_1 = r^2, \quad ax_2 + by_2 = r^2$$

上の 2 式から直線 $l : ax + by = r^2$ は 2 点 M，N を通る．
このとき，l を P を極とする C の極線という．

3.4 $2000 < 2022 < 2048$ より

$$\begin{aligned}
&\log_4 2022 < \log_4 2048 = \log_4 2^{11} = 5.5,\\
&\log_4 2022 > \log_4 2000 = \frac{\log_{10} 2000}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 2 + 3}{2\log_{10} 2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\log_{10} 2}\\
&\qquad\qquad > \frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot 0.3011} = 0.5 + 4.98\cdots > 5.4
\end{aligned}$$

よって　　$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ ■

3.5 $t=2^x+2^{-x}$ とおくと　$t \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$　$\cdots$ ①

$$\begin{aligned} 8^x+8^{-x} &= (2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})=t^3-3t, \\ 4^x+4^{-x} &= (2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2 \end{aligned}$$

このとき，不等式 $8^x+8^{-x}-(4^x+4^{-x})-11 \geqq 0$ は

$$t^3-3t-(t^2-2)-11 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-3)(t^2+2t+3) \geqq 0$$

$t^2+2t+3=(t+1)^2+2>0$ および ① に注意して　$t \geqq 3$

$$2^x+2^{-x} \geqq 3 \quad \text{ゆえに} \quad (2^x)^2-3\cdot 2^x+1 \geqq 0$$

したがって　　$2^x \leqq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$,　$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq 2^x$

よって　　$\boldsymbol{x \leqq \log_2 \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$**,**　$\boldsymbol{\log_2 \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq x}$ ■

3.6 (1) 対数の定義から $\quad b=a^p \quad \Longleftrightarrow \quad p=\log_a b$

$q=\log_c a$ とすると $\quad a=c^q \quad$ ゆえに $\quad b=a^p=c^{pq}$

したがって，対数の定義により $\quad pq=\log_c b \quad$ (条件から $pq\neq 0$)

$$\log_a b\log_c a=\log_c b \quad \text{よって} \quad \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(2) (1) で示した等式を用いて

$$\begin{aligned}\log_{30}600&=\frac{\log_{10}600}{\log_{10}30}=\frac{\log_{10}(2\cdot3\cdot10^2)}{\log_{10}(3\cdot10)}\\&=\frac{\log_{10}2+\log_{10}3+2}{\log_{10}3+1}=\boldsymbol{\frac{s+t+2}{t+1}}\end{aligned}$$

(3) 与えられた関数

$$y=2(\log_5 x)^2-\log_5 x^8+6 \quad (1\leqq x\leqq 125)$$

について，$t=\log_5 x$ とおくと $\quad y=2t^2-8t+6 \quad (0\leqq t\leqq 3)$

$$y=2(t-2)^2-2$$

よって $\quad t=0$，すなわち，$\boldsymbol{x=1}$ のとき最大値 **6**

$t=2$，すなわち，$\boldsymbol{x=25}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-2}$

補足 $p=\log_a b$ より，$b=a^p$ の両辺を c を底とする対数をとると

$$\begin{aligned}\log_c b&=\log_c a^p\\&=p\log_c a\end{aligned}$$

の式変形を別途証明 (省略) した上で，次に続く．

$$p=\frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{よって} \quad \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(証終)

さらに，p の底 a を c，d に変換すると $\quad \dfrac{\log_c b}{\log_c a}=\dfrac{\log_d b}{\log_d a}$

$$\log_c a\log_d b=\log_d a\log_c b$$

これらの積は底 (真数) について互換性が成立する．

例えば $\quad \log_3 8\log_2 9=\log_2 8\log_3 9=3\cdot2=6$ ■

3.7 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(1,\ 3\sin 2\theta)$ より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OPQ} &= \frac{1}{2}|\cos\theta{\cdot}3\sin 2\theta - \sin\theta{\cdot}1| \\ &= \frac{1}{2}|6\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta| \\ &= \frac{1}{2}|6\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin\theta| \\ &= \frac{1}{2}|-6\sin^3\theta + 5\sin\theta|\end{aligned}$$

$t=\sin\theta$ とおくと $(0 \leqq \theta < 2\pi)$　$-1 \leqq t \leqq 1$

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}|-6t^3+5t|$$

$f(t) = -6t^3+5t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ とおくと　$f'(t) = -18t^2+5$

$f'(t)=0$ とすると　$t = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{6}$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{5\sqrt{10}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{10}}{9}$	$\searrow$	-1

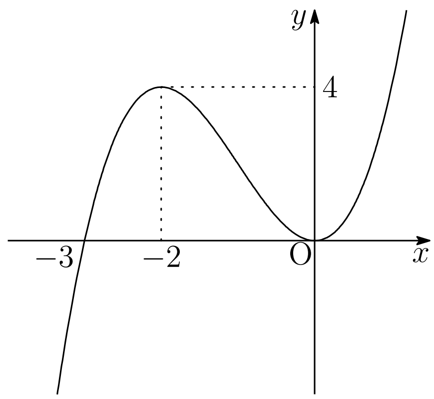
$|f(t)| \leqq \dfrac{5\sqrt{10}}{9}$ であるから，求める最大値は　$\dfrac{1}{2}{\cdot}\dfrac{5\sqrt{10}}{9} = \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{10}}{18}}$ ■

3.8 (1) $f(x) = x^3 + 3x^2$ より

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

極大値 $f(-2) = \mathbf{4}$，極小値 $f(0) = \mathbf{0}$



(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

これが点 $(p,\ q)$ を通るから [9]

$$q = f'(t)(p-t) + f(t) \quad \text{ゆえに} \quad f(t) + f'(t)(p-t) - q = 0$$

$\varphi(t) = f(t) + f'(t)(p-t) - q$ とおくと $\varphi(t) = -2t^3 - 3t^2 + 3pt(t+2) - q$

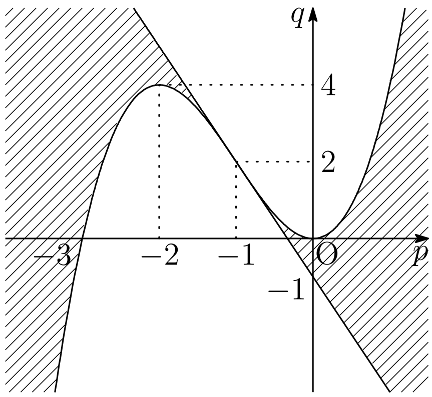
$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= f'(t) + f''(t)(p-t) + f'(t)\cdot(-1)\\ &= f''(t)(p-t) = 6(t+1)(p-t)\end{aligned}$$

$\varphi'(t) = 0$ を解くと $t = -1,\ p$

3 次方程式 $\varphi(t) = 0$ の解の個数が点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から曲線 $y = x^3 + 3x^2$ に引ける接線の本数であるから

$$\varphi(-1)\varphi(p) = (-3p - q - 1)(p^3 + 3p^2 - q) < 0$$

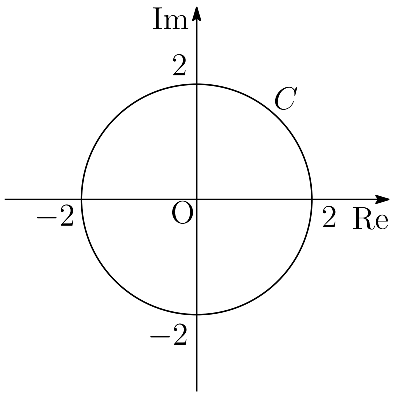
よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線は含まない．

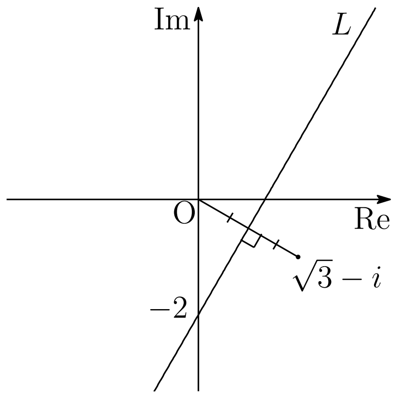


■

[9] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf (p.12 を参照)

3.9 (1) ① は原点 O を中心とする半径 2 の円を表す．② は原点 O と点 $\sqrt{3}-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を表す．①，② の図形をそれぞれ C，L とすると次のようになる．





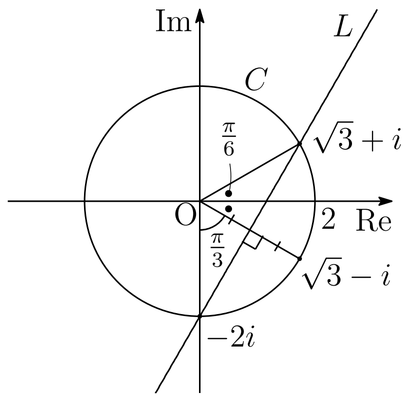
(2) (1) の結果から，C と L の 1 つの交点は

$$-2i$$

点 $\sqrt{3}-i$ の偏角は $-\dfrac{\pi}{6}$ であるから，もう 1 つの交点は

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$$

よって　　$\boldsymbol{-2i,\ \sqrt{3}+i}$



(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}w&=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\&=4\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\end{aligned}$$

ゆえに　$\arg w^n=n\arg w=n\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{n\pi}{3}$

w^n が負の実数となるとき

$$-\frac{n\pi}{3}=(2k-1)\pi \quad (k \text{ は整数})$$

をみたせばよい．ゆえに　$n=3-6k$　よって　$\boldsymbol{n\equiv 3 \pmod 6}$ ■

3.10 (1) 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) に関する必要条件は

$$z \neq 1, \quad z^2 \neq 1, \quad z^2 \neq z \quad \text{すなわち} \quad z \neq 0, \ \pm 1 \qquad (*)$$

このとき，$\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\frac{z^2-1}{z-1} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad z+1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

よって　$\boldsymbol{z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

別解 $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} \neq 0$ より　$|z-1| = |z^2 - z| = |z^2 - 1| \neq 0$

$$|z-1| = |z||z-1| = |z+1||z-1| \neq 0$$

したがって　$1 = |z| = |z-1|, \ z \neq 1$

2 円 $|z| = 1, \ |z-1| = 1$ の交点であるから　$\boldsymbol{z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

(2) (i) $\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$(*)$ に注意して　$\dfrac{z^2-1}{z-1} = z+1$

上式は，純虚数であるから

$$(z+1) + (\overline{z+1}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} = -1, \ z \neq -1$$

(ii) $\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$(*)$ に注意して　$\dfrac{z^2-z}{1-z} = -z$

上式は，純虚数であるから

$$-z + (\overline{-z}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(z) = 0, \ z \neq 0$$

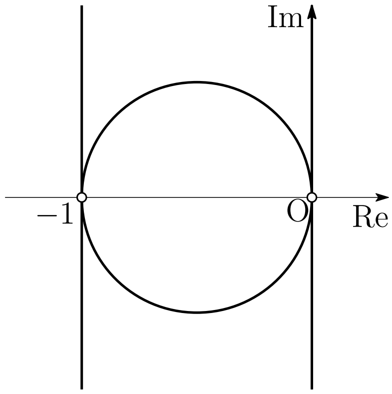
(iii) $\angle \mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$(*)$ に注意して　$\dfrac{1-z^2}{z-z^2} = \dfrac{1+z}{z}$

上式は，純虚数であるから

$$\frac{1+z}{z} + \left(\overline{\frac{1+z}{z}}\right) = 0 \quad \text{整理すると} \quad \overline{z}(1+z) + z(1+\overline{z}) = 0$$

$$z\overline{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \ z \neq 0, -1$$

(i)〜(iii) より，点 z 全体は，下の図のようになる．



別解 $\mathrm{AB}=|z-1|$，$\mathrm{BC}=|z^2-z|=|z||z-1|$，$\mathrm{CA}=|1-z^2|=|z+1||z-1|$

このとき，$\mathrm{AB}\neq 0$, $\mathrm{BC}\neq 0$, $\mathrm{CA}\neq 0$ より　$z\neq 0$, ± 1

$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CA}=1:|z|:|z+1|$ であるから，次の (i)〜(iii) の場合がある．

(i) $1^2+|z+1|^2=|z|^2$ のとき

$$z+\overline{z}=-2 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}=-1,\quad z\neq -1$$

(ii) $1^2+|z|^2=|z+1|^2$ のとき

$$z+\overline{z}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}=0,\ z\neq 0$$

(iii) $|z|^2+|z+1|^2=1^2$ のとき

$$z\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\ z\neq 0,-1$$

■

3.11 (1) $z^2+\dfrac{1}{z^2}=1$ より $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=3,\quad \left(z-\dfrac{1}{z}\right)^2=-1$

したがって $\quad z+\dfrac{1}{z}=\pm\sqrt{3},\quad z-\dfrac{1}{z}=\pm i$

上の 2 式から $\quad z=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i\quad$ (複号任意)

z の実部と虚部がともに正であるから

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}z^{100}&=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{100}=\cos\frac{100\pi}{6}+i\sin\frac{100\pi}{6}\\&=\cos\left(16\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(16\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

$z\overline{z}=1$ より，$\dfrac{1}{z}=\overline{z}$ であるから

$$\frac{1}{z^{100}}=\overline{z^{100}}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\quad よって\quad z^{100}+\frac{1}{z^{100}}=\boldsymbol{-1}$$

(3) 3 点 $-1,\ z,\ z^2$ を頂点とする三角形の面積を S とすると [10]

$$S=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\{(\overline{z+1})(z^2+1)\}\right|$$

このとき
$$\begin{aligned}(\overline{z+1})(z^2+1)&=(\overline{z}+1)(z^2+1)\\&=z+\overline{z}+1+z^2\end{aligned}$$

したがって $\quad \mathrm{Im}\{(\overline{z+1})(z^2+1)\}=\mathrm{Im}(z^2)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，三角形の面積は $\quad S=\dfrac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\{(\overline{z+1})(z^2+1)\}\right|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$ ■

[10] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2020.pdf $\boxed{2}$ (2) を参照．

3.12 (1) $x > 0$，$\sqrt{1+x} - 1 = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}$ であるから

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{2+x} \leqq \sqrt{1+x} - 1 \leqq \frac{x}{2} \\
\iff\ & \frac{x}{2+x} \leqq \frac{x}{\sqrt{1+x}+1} \leqq \frac{x}{2} \\
\iff\ & 2+x \geqq \sqrt{1+x}+1 \geqq 2 \\
\iff\ & 1+x \geqq \sqrt{1+x} \geqq 1 \qquad \cdots(*)
\end{aligned}$$

$r = \sqrt{1+x}$ とすると $r > 1$ より　$r^2 \geqq r \geqq 1$

$(*)$ が成立するから，与えられた不等式も成立する．

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ を (1) の不等式に適用すると

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2 + \frac{k}{n^2}} \leqq S_n \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2} = \frac{n+1}{4n}$$

上式の左辺について

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2 + \frac{k}{n^2}} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2 + \frac{n}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)}$$

したがって　$\dfrac{n+1}{2(2n+1)} \leqq S_n \leqq \dfrac{n+1}{4n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4n} \right) = \frac{1}{4}$$

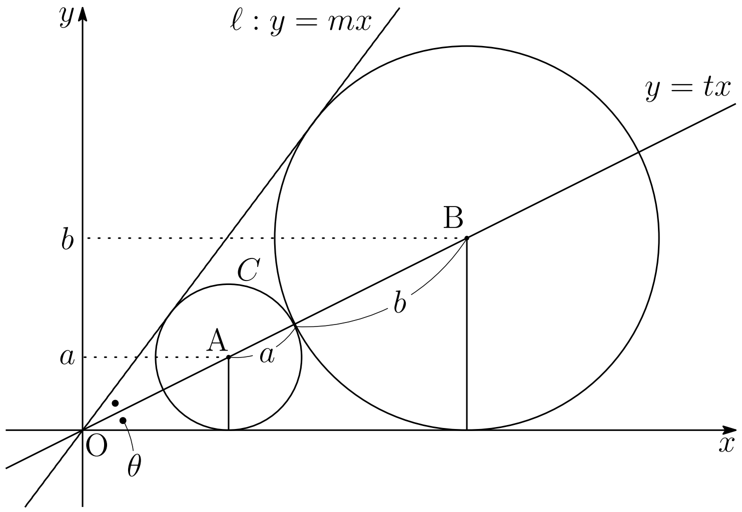
はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \mathbf{\frac{1}{4}}$ ■

3.13 (1) $t=\tan\theta$ とすると

$$m=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2t}{1-t^2}$$

t について整理すると　$mt^2+2t-m=0$

$m,\ t>0$ に注意して，t について解くと　$\boldsymbol{t=\dfrac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}}$



(2) 円の中心を A, B とする．

$\mathrm{OA}=\dfrac{a}{\sin\theta}$，$\mathrm{OB}=\dfrac{b}{\sin\theta}$，$\mathrm{AB}=a+b$，$\mathrm{AB}=\mathrm{OB}-\mathrm{OA}$ であるから

$$a+b=\frac{b}{\sin\theta}-\frac{a}{\sin\theta}\quad ゆえに\quad a\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)=b\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)$$

$\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t}$ であるから

$$a\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}+1\right)=b\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}-1\right)\quad よって\quad \boldsymbol{\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t}}$$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{b}{a}-1=\dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}-t}$

$$\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)=\frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}-t}=(1-t^2)(\sqrt{1+t^2}+t)$$

$m\to+0$ のとき $t\to+0$ であるから

$$\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)=\lim_{t\to+0}(1-t^2)(\sqrt{1+t^2}+t)=\mathbf{1}$$ ■

3.14 (1) (∗) $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_n}$ より

$$a_{n+2}\sqrt{a_{n+1}} = a_{n+1}\sqrt{a_n} \quad ゆえに \quad a_{n+1}\sqrt{a_n} = a_2\sqrt{a_1}$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2\ より \quad a_{n+1}\sqrt{a_n} = 2\sqrt{1} \quad よって \quad a_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{a_n}}$$

(2) (∗) の両辺の自然対数をとると

$$\log a_{n+2} = \frac{1}{2}\log a_{n+1} + \frac{1}{2}\log a_n$$

$$b_n = \log a_n\ より \quad b_1 = 0,\ b_2 = \log 2,\ b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$$

$$b_{n+2} + \frac{1}{2}b_{n+1} = b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n,$$
$$b_{n+2} - b_{n+1} = -\frac{1}{2}(b_{n+1} - b_n)$$

したがって

$$b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n = b_2 + \frac{1}{2}b_1 = \log 2,$$
$$b_{n+1} - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b_2 - b_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\log 2$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$\frac{3}{2}b_n = \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log 2$$

よって $\boldsymbol{b_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log 2}$

(3) (2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{3}\log 2 = \log 2^{\frac{2}{3}} \quad ゆえに \quad \lim_{n\to\infty}\log a_n = \log 2^{\frac{2}{3}}$$

よって $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 2^{\frac{2}{3}}}$ ■

3.15 (1) $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ は単調増加であるから

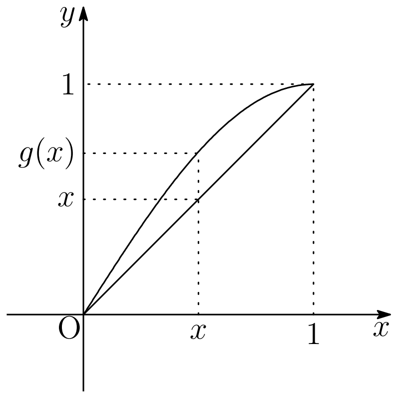
$$\text{最小値 } f(0) = \mathbf{1}, \quad \text{最大値 } f(1) = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

(2) $g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ とおく $(0 \leqq x \leqq 1)$．

$y = g(x)$ は上に凸であり，曲線 $y = g(x)$ は，2 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ を結ぶ線分

$$y = x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

の下側にないから



$$g(x) \geqq x \geqq 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つ．したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x)^2 - 2x^2 &= 1 + \sin^2\frac{\pi x}{2} - 2x^2 \\ &= 1 - x^2 + g(x)^2 - x^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

$f(x) > 0$ であるから　　$f(x) \geqq \sqrt{2}x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

上式および (1) の結果から　$\sqrt{2}x \leqq f(x) \leqq \sqrt{2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

(3) (2) の結果から

$$\int_0^1 (\sqrt{2}x)^n\,dx \leqq \int_0^1 \{f(x)\}^n\,dx \leqq \int_0^1 (\sqrt{2})^n\,dx$$

したがって　$\dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1} \leqq a_n \leqq (\sqrt{2})^n$　ゆえに　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} \leqq \sqrt[n]{a_n} \leqq \sqrt{2} \quad \cdots(*)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log\sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n} = 0$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1} = 1 \quad \cdots(**)$

$(*)$，$(**)$ から，はさみうちの原理により　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \sqrt{2}}$ ■

3.16 (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ より　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表より　最大値 $f(e)=\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$

(2) $a^b=b^a$ の両辺の自然対数をとると　$b\log a=a\log b$

$$\frac{\log a}{a}=\frac{\log b}{b}\quad \text{ゆえに}\quad f(a)=f(b) \qquad (*)$$

$f(1)=0$．$e<x$ のとき $f(x)>0$．

増減表から，$(*)$ を満たす a，b の一方は 2 であるから，$a=2$ とすると

$$\frac{\log 2}{2}=\frac{\log b}{b}\quad \text{ゆえに}\quad 2^b=b^2$$

$b=4$ はこれを満たす．よって，求める $(a,\ b)$ の組は

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(2,\ 4),\ (4,\ 2)}$$

■

3.17 (1) $C : x = \cos^3 t,\ y = 3\sin^3 t\ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t\cos^2 t, \quad \frac{dy}{dt} = 9\sin^2 t\cos t$$

このとき，$0 < \sin t < 1$，$0 < \cos t < 1$ に注意して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{9\sin^2 t\cos t}{-3\sin t\cos^2 t} = -\frac{3\sin t}{\cos t} = -3\tan t$$

したがって，C 上の点 $\mathrm{P}(\cos^3 t,\ 3\sin^3 t)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - 3\sin^3 t = -3(\tan t)(x - \cos^3 t)$$

したがって　$y = -(3\tan t)x + 3\sin t(\sin^2 t + \cos^2 t)$

よって　$y = -3(\tan t)x + 3\sin t$

(2) r は $\ell : 3(\tan t)x + y - 3\sin t = 0$ と原点の距離 r により　$r = \dfrac{|-3\sin t|}{\sqrt{9\tan^2 t + 1}}$

$\alpha = \cos^2 t$ とすると

$$r^2 = \frac{9\sin^2 t}{9\tan^2 t + 1} = \frac{9(1-\cos^2 t)}{9\left(\dfrac{1}{\cos^2 t} - 1\right) + 1} = \frac{9(1-\alpha)}{9\left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right) + 1}$$
$$= \frac{9\alpha(1-\alpha)}{9(1-\alpha) + \alpha} = \frac{9\alpha(\alpha - 1)}{8\alpha - 9}$$

(3) (2) の結果から

$$r^2 = \frac{(8\alpha - 9)\left(\dfrac{9}{8}\alpha + \dfrac{9}{64}\right) + \dfrac{81}{64}}{8\alpha - 9} = \frac{9}{8}\alpha + \frac{9}{64} + \frac{81}{64}\cdot\frac{1}{8\alpha - 9}$$
$$= \frac{9}{64}(8\alpha - 9 + 9) + \frac{9}{64} + \frac{81}{64}\cdot\frac{1}{8\alpha - 9} = \frac{45}{32} - \frac{9}{64}\left(9 - 8\alpha + \frac{9}{9 - 8\alpha}\right)$$

$9 - 8\alpha > 0$ であるから $(0 < \alpha < 1)$，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$9 - 8\alpha + \frac{9}{9 - 8\alpha} \geqq 2\sqrt{(9 - 8\alpha)\cdot\frac{9}{9 - 8\alpha}} = 6 \quad \text{ゆえに} \quad r^2 \leqq \frac{9}{16}$$

上式で等号が成立するとき　$9 - 8\alpha = \dfrac{9}{9 - 8\alpha}$　すなわち　$\alpha = \dfrac{3}{4}$

$\cos^2 t = \dfrac{3}{4}\ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$\boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき，r は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$ をとる． ■

3.18 (1) $k \leqq x \leqq k+1$ のとき (k は自然数) $\quad \dfrac{1}{k+1} \leqq \dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{k}$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$$

したがって
$$\frac{1}{k+1} \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \frac{1}{k}$$

(2) (1) の結果から $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$

両辺に 1 を加えると
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq 1 + \log n \qquad (*)$$

(1) の結果から
$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{ゆえに} \quad \log(n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より
$$\log(n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq 1 + \log n$$

(3) (2) の結果から，n を 2 以上の自然数とすると
$$\frac{\log(n+1)}{\log n} \leqq \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq \frac{1}{\log n} + 1$$

ここで
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log(n+1) - \log n}{\log n} + 1 \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} + 1 \right\} = 1,\end{aligned}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\log n} + 1 \right) = 1$$

はさみうちの原理により $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mathbf{1}$ ■

3.19 (1) $f(x) = x(\log x)^2$ を微分すると

$$f'(x) = (\log x)^2 + x{\cdot}2(\log x)\frac{1}{x} = (\log x + 2)\log x$$

(あ) $\boldsymbol{\log x + 2}$

(2) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2} = x^{-2}\tan x$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x^{-3}\tan x + x^{-2}{\cdot}\frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{-2\sin x\cos x + x}{x^3\cos^2 x} = \frac{x - \sin 2x}{x^3\cos^2 x} \end{aligned}$$

(い) $\boldsymbol{x - \sin 2x}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2} = x + 3 + \dfrac{7}{x - 2}$ より

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 7\log|x - 2| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(う) $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{2} + 3x + 7\log|x - 2|}$

(4) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ について，$u = \sqrt{x}$ とおくと，$x = u^2$ より $\dfrac{dx}{du} = 2u$

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int e^u \frac{dx}{du}\,du = 2\int e^u u\,du \\ &= 2e^u(u - 1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C \end{aligned}$$

(え) $\boldsymbol{2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}$

(5) $\sin^2 x\cos^2 x = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x = \dfrac{1}{8}(1 - \cos 4x)$ より

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 x\cos^2 x\,dx &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 - \cos 4x)dx = \frac{1}{8}\left[\, x - \frac{1}{4}\sin 4x \,\right]_0^{\frac{\pi}{12}} \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}{\cdot}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{96} - \frac{\sqrt{3}}{64} \end{aligned}$$

(お) $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{96} - \dfrac{\sqrt{3}}{64}}$ ■

3.20 (1) $y = \log|x + \sqrt{x^2+1}|$ を微分すると

$$y' = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

(2) $x \neq 0$ のとき $\quad \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

したがって，$a > 0$ のとき，次式が成立する．

$$\int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx < \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad (*)$$

(3) $a = 1$ を $(*)$ に代入すると

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad (**)$$

$(**)$ の左辺について，$x = \tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{dx}{d\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$(**)$ の右辺について，(1) の結果を用いると

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \Big[\ \log|x + \sqrt{x^2+1}|\ \Big]_0^1 = \log(1+\sqrt{2})$$

以上の結果を $(**)$ に代入すると

$$\frac{\pi}{4} < \log(1+\sqrt{2})$$

■

3.21 (1) $f(x)=\log(1+x^2)-ax^2$ より $(0<a<1)$

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-2ax=\frac{2x(1-a-ax^2)}{1+x^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ \pm\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘

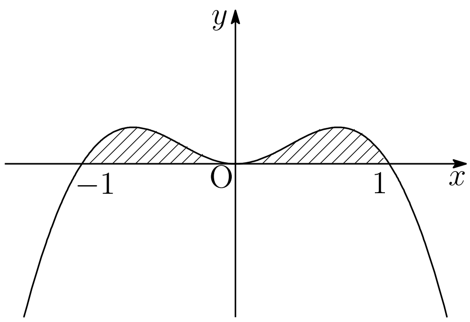
よって　極大値 $f\left(\pm\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\right)=\boldsymbol{a-1-\log a}$，極小値 $f(0)=\mathbf{0}$

(2) $f(0)=0$，$f(1)=0$．$y=f(x)$ のグラフは x 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^1 f(x)\,dx=\Big[\,xf(x)\,\Big]_0^1-\int_0^1 xf'(x)\,dx\\&=-\int_0^1 x\left(\frac{2x}{1+x^2}-2ax\right)dx\\&=\int_0^1(2ax^2-2)\,dx+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx\qquad(*)\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^1(2ax^2-2)\,dx=\left[\,\frac{2}{3}ax^3-2x\,\right]_0^1=\frac{2}{3}a-2$$



$x=\tan\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

これらを $(*)$ に代入すると　$\dfrac{S}{2}=\dfrac{2}{3}a-2+\dfrac{\pi}{2}$

$f(1)=\log 2-a=0$ より　$a=\log 2$　よって　$\boldsymbol{S=\dfrac{4}{3}\log 2-4+\pi}$ ■

3.22 (1) $f(x)=\log(x^2+1)\ (x \geqq 0)$ より

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\log 2$	$\nearrow$

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1},$$
$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

よって，曲線 C の変曲点は　**P(1，log 2)**

$g(x)=f(x)-f'(1)(x-1)-f(1)$ とおくと　$g(1)=0$

$$g'(x)=f'(x)-f'(1)=\frac{2x}{x^2+1}-1=-\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\leqq 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(x)=0$ を満たす x は $x=1$ に限る．

方程式 $f(x)-f'(1)(x-1)-f(1)=0$ の解が1個，すなわち，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ の共有点は $\mathrm{P}(1,\ f(1))$ の1つだけである．

(2) (1) の結果から，$0\leqq x\leqq 1$ において，$g(x)\geqq 0$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1 g(x)\,dx=\Big[\,xg(x)\,\Big]_0^1-\int_0^1 xg'(x)\,dx\\&=g(1)-\int_0^1 x\{f'(x)-f'(1)\}\,dx\\&=0-\int_0^1 x\left(\frac{2x}{x^2+1}-1\right)dx=\int_0^1\left(\frac{2}{x^2+1}+x-2\right)dx\\&=2\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^1=2\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

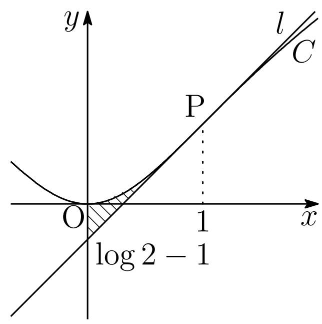
ここで，$x=\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

よって，求める面積は

$$S=2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi-3}{2}}$$



3.23 (1) $f(x) = x\sqrt{3-x}$ より

$$f'(x) = \sqrt{3-x} + x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3}{2}\cdot\frac{(-1)\sqrt{3-x}-(2-x)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}}{3-x} \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{-2(3-x)+(2-x)}{(3-x)\sqrt{3-x}} = \frac{3(x-4)}{4(3-x)\sqrt{3-x}} \end{aligned}$$

C の O における接線の傾き k は　$k = f'(0) = \sqrt{3}$

(あ) $\boldsymbol{3(2-x)}$　(い) $\boldsymbol{3(x-4)}$　(う) $\boldsymbol{\sqrt{3}}$

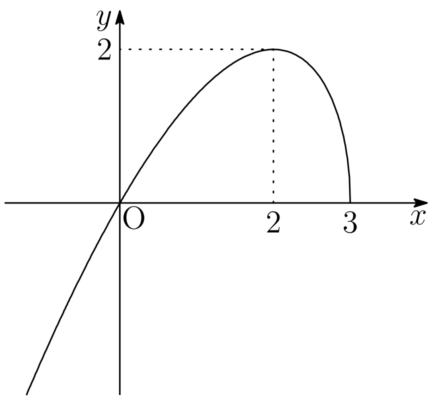
(2) (1) の結果から　$\displaystyle\lim_{x\to 3-0} f'(x) = -\infty$

(3) $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	

変曲点はなし．

$C : y = f(x)$ の概形は右の図のとおり．



(4) $f(x) = x\sqrt{3-x} = \{(x-3)+3\}\sqrt{3-x} = -(3-x)^{\frac{3}{2}} + 3(3-x)^{\frac{1}{2}}$ より

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)\,dx &= \int_0^3 \{-(3-x)^{\frac{3}{2}} + 3(3-x)^{\frac{1}{2}}\}\,dx \\ &= \left[\frac{2}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}} - 2(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{12}{5}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$l : y = \sqrt{3}x$ は，$x = 3$ のとき，$y = 3\sqrt{3}$

よって　　$S = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sqrt{3} - \dfrac{12}{5}\sqrt{3} = \boldsymbol{\dfrac{21}{10}\sqrt{3}}$ ■

3.24 (1) H を基準に他の 7 個を円形に並べる場合の総数は

$$\frac{7!}{2!2!} = 1260 \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率は $\quad \boldsymbol{\dfrac{1}{1260}}$

(2) 隣り合う子音が存在しない確率を求める．母音と子音がそれぞれ 4 個あり，交互に配置する場合の総数は，H を基準に子音 3 個の並び方 $\dfrac{3!}{2!} = 3$ 通り，母音 4 個の並び方 $\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通りあるから，その確率は

$$\frac{3 \cdot 12}{1260} = \frac{1}{35}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{35} = \boldsymbol{\frac{34}{35}}$$

(3) KK を基準に母音 4 個の並び方は $\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通り

残りの子音 2 個の並び方は，下の図の○の 3 カ所の 2 カ所に並べる

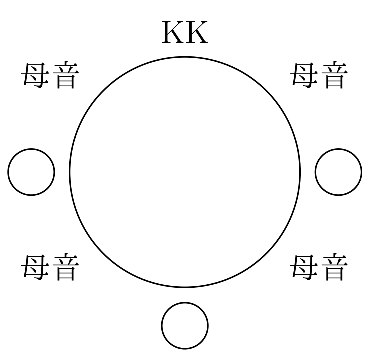
$${}_3\mathrm{P}_2 = 6 \text{ 通り}$$

したがって，隣り合う子音が KK だけである確率は

$$\frac{12 \cdot 6}{1260} = \frac{2}{35}$$

よって，求める条件つき確率は

$$\frac{2}{35} \Big/ \frac{34}{35} = \boldsymbol{\frac{1}{17}}$$



■

3.25 (1) 2次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が異なる2つの実数解をもつとき　$b^2-4ac>0$

(i) $a=1$ のとき，$c<\dfrac{b^2}{4}$ より，次の17通り．

$b\leqq 2$ のとき　c はなし

$b=3$ のとき　$c=1,\ 2$

$b=4$ のとき　$c=1,\ 2,\ 3$

$b=5,\ 6$ のとき　$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

(ii) $a=2$ のとき，$c<\dfrac{b^2}{8}$ より，次の9通り

$b\leqq 2$ のとき　c はなし

$b=3,\ 4$ のとき　$c=1$

$b=5$ のとき　$c=1,\ 2,\ 3$

$b=6$ のとき　$c=1,\ 2,\ 3,\ 4$

よって，求める確率は　$\dfrac{17+9}{2{\cdot}6^2}=\mathbf{\dfrac{13}{36}}$

(2) 異なる2つの整数の解をもつとき，因数分解に着目する．

(i) $a=1$ のとき，$x^2-bx+c=0$ より

$c=1$ のとき　b はなし	$c=4$ のとき　$b=5$
$c=2$ のとき　$b=3$	$c=5$ のとき　$b=6$
$c=3$ のとき　$b=4$	$c=6$ のとき　$b=5$

(ii) $a=2$ のとき，2つの整数解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=\frac{b}{2},\quad \alpha\beta=\frac{c}{2}\quad \text{ゆえに}\quad b=2(\alpha+\beta),\ c=2\alpha\beta$$

$b,\ c$ はともに偶数であるから，$b'=\dfrac{b}{2},\ c'=\dfrac{c}{2}$ として

$$x^2-b'x+c'=0\quad (b',c'=1,2,3)$$

この方程式が異なる整数を解にもつ $b',\ c'$ を求めればよい．

$c'=1$ のとき　b' はなし

$c'=2$ のとき　$b'=3$

$c'=3$ のとき　b' はなし

(i)，(ii) より，求める確率は　$\dfrac{5+1}{2{\cdot}6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{12}}$　■

3.26 M が 3 で割り切れない事象を A，M が 2 で割り切れない事象を B，M が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない事象を C，M が 4 で割り切れる事象を D とする．

(1) M が 2 でも 3 でも割り切れない確率は，n 個のサイコロの出た目がすべて 1 または 5 の確率であるから

$$P(A \cap B) = \left(\frac{2}{6}\right)^n = \boldsymbol{\frac{1}{3^n}}$$

(2) n 個のサイコロの中で 1 個だけ 2 の目が出て，残りの $n-1$ 個は 1 または 5 の目が出る確率であるから

$$P(A \cap C) = {}_n\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{n}{2 \cdot 3^n}}$$

(3) M が 3 で割り切れない確率は

$$P(A) = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \frac{2^n}{3^n}$$

求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap D) &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &= \frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{n}{2 \cdot 3^n} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1} - 2 - n}{2 \cdot 3^n}} \end{aligned}$$

■

3.27 (1) p_6 は，5 回目までに表が 4 回出て，6 回目に表が出る確率であるから

$$p_6 = {}_5\mathrm{C}_4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \frac{1}{2} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \boldsymbol{\frac{5}{64}}$$

(2) p_n は，$n-1$ 回目までに表が 4 回出て，n 回目に表が出る確率であるから

$$\begin{aligned} p_n &= {}_{n-1}\mathrm{C}_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3{\cdot}2^{n+3}}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3{\cdot}2^{n+4}} \cdot \frac{3{\cdot}2^{n+3}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \\ &= \boldsymbol{\frac{n}{2(n-4)}} \end{aligned}$$

ゆえに　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = \dfrac{n}{2(n-4)} - 1 = \dfrac{8-n}{2(n-4)}$

したがって　$p_5 < p_6 < p_7 < p_8 = p_9 > p_{10} > p_{11} > \cdots$

よって，最大値　$\boldsymbol{p_8 = p_9 = \frac{35}{256}}$ ■

3.28 (1) 違う色の玉を取り出す確率は $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \dfrac{2 \times 2}{6} = \dfrac{2}{3}$

同じ色の玉を取り出す確率は，上の余事象の確率であるから $1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

よって，B が 1 巡目で勝者になる確率は $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

(2) N 巡目で B が勝者になる確率は $\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}^{N-1} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{N-1}$

よって，N 巡目以内に B が勝者になる確率 p_N は

$$p_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{2}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2}{5}\left\{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N\right\}$$

$p_N > 0.396$ となるとき $\dfrac{2}{5}\left\{1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^N\right\} > 0.396$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^N < \frac{1}{100} \quad ゆえに \quad \left(\frac{3}{2}\right)^N > 10$$

上の第 2 式について 2 を底とする対数をとると

$$N(\log_2 3 - 1) > 1 + \log_2 5 \quad ゆえに \quad 0.585N > 3.322$$

したがって $N > \dfrac{3322}{585} = 5.6\cdots$ よって N の最小値は **6**

(3) N 巡目で A が勝者になる確率は $\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}^{N-1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{N-1}$

N 巡目以内に A が勝者になる確率を q_N とすると

$$q_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5}\left\{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N\right\}$$

したがって $q_N - p_N = \dfrac{1}{5}\left\{1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^N\right\} > 0$

よって，求める確率は，**A の方が大きい．** ■

3.29 (1) 条件付き確率 p_0 は，赤玉 3 個，白玉 4 個の計 7 個から 2 個取り出し，2 個とも赤玉の確率であるから

$$p_0 = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{3}{21} = \boldsymbol{\frac{1}{7}}$$

条件付き確率 p_1 は，赤玉 2 個，白玉 5 個の計 7 個から 2 個取り出し，2 個とも赤玉の確率であるから

$$p_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{21}}$$

(2) $q_\mathrm{A} = \boldsymbol{\dfrac{3}{n+8}}$

箱 A に白玉が入る確率を $\overline{q_\mathrm{A}}$ とすると　$\overline{q_\mathrm{A}} = 1 - q_\mathrm{A} = \dfrac{n+5}{n+8}$

$$\begin{aligned} q_\mathrm{C} &= \overline{q_\mathrm{A}}p_0 + q_\mathrm{A}p_1 \\ &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{3}{n+8}\cdot\frac{1}{21} = \boldsymbol{\frac{n+6}{7(n+8)}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(X\cap Y) &= \frac{3}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n} = \frac{3}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_5}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7} = \frac{3}{n+8}\cdot\frac{(n+5)!}{n!5!}\cdot\frac{n!7!}{(n+7)!} \\ &= \frac{3}{n+8}\cdot\frac{7\cdot6}{(n+7)(n+6)} = \boldsymbol{\frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X\cap Y\cap Z) &= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{6}{(n+8)(n+7)(n+6)}, \\ P(\overline{X}\cap Y\cap Z) &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_4}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{(n+4)!}{n!4!}\cdot\frac{n!7!}{(n+7)!}\cdot\frac{1}{7} = \frac{30}{(n+8)(n+7)(n+6)} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P(Y\cap Z) &= P(X\cap Y\cap Z) + P(\overline{X}\cap Y\cap Z) \\ &= \frac{6}{(n+8)(n+7)(n+6)} + \frac{30}{(n+8)(n+7)(n+6)} \\ &= \boldsymbol{\frac{36}{(n+8)(n+7)(n+6)}} \end{aligned}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X}\cap Y) &= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n} = \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_4}{{}_{n+7}\mathrm{C}_7}\\
&= \frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{(n+4)!}{n!4!}\cdot\frac{n!7!}{(n+7)!} = \frac{210}{(n+8)(n+7)(n+6)}
\end{aligned}
$$

上式および (3) の結果から

$$
\begin{aligned}
P(Y) &= P(X\cap Y) + P(\overline{X}\cap Y)\\
&= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)} + \frac{210}{(n+8)(n+7)(n+6)}\\
&= \frac{336}{(n+8)(n+7)(n+6)}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
P_Y(X) &= \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}\\
&= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)}\cdot\frac{(n+8)(n+7)(n+6)}{336} = \mathbf{\frac{3}{8}},\\
P_Y(Z) &= \frac{P(Y\cap Z)}{P(Y)}\\
&= \frac{36}{(n+8)(n+7)(n+6)}\cdot\frac{(n+8)(n+7)(n+6)}{336} = \mathbf{\frac{3}{28}}
\end{aligned}
$$

■

3.30 (1) 赤玉 2 つと白玉 1 つが入っている箱を A，赤玉 1 つと白玉 2 つが入っている箱を B とする．n 回目の操作で A を選ぶ確率を x_n とすると

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3}(1 - x_n) = \frac{2}{3} \quad (n \geqq 1)$$

すなわち　$x_1 = \dfrac{1}{2}$，$x_n = \dfrac{2}{3}$ $(n \geqq 2)$

したがって　$p_n = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}(1 - x_n) = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}$　$\cdots$①

よって　$p_1 = \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$$p_n = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{5}{9}} \quad \boldsymbol{(n \geqq 2)}$$

(2) n 回目の操作で A を選ぶ確率を y_n とすると

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1 - y_n) = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{3}$$

ゆえに　$y_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}\left(y_n - \dfrac{2}{3}\right)$　すなわち　$y_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

① と同様にして　$q_n = \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{3}$

よって　$q_n = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} + \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{5}{9} - \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$　■

3.31 (1) $p_1=1$，$p_2=\dfrac{2}{3}p_1$，$p_3=\dfrac{2}{3}p_2+\dfrac{1}{3}(1-p_2)=\dfrac{1}{3}p_2+\dfrac{1}{3}$ より

$$p_2=\frac{2}{3}\cdot 1=\mathbf{\frac{2}{3}},\quad p_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$

(2) 条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}(1-p_n)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}}$$

(3) (2) の結果から　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

$\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\quad \text{ゆえに}\quad p_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

$p_n \leqq 0.5000005=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot 10^{-6}$ より

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^{n-1}}\right)\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 10^{-6}\quad \text{ゆえに}\quad 3^{n-1}\geqq 10^6$$

上の第 2 式の常用対数をとると

$$(n-1)\log_{10}3\geqq 6\quad \text{ゆえに}\quad n\geqq 1+\frac{6}{\log_{10}3}$$

$0.47<\log_{10}3<0.48$ より，$\dfrac{25}{12}<\dfrac{1}{\log_{10}3}<\dfrac{100}{47}$ であるから

$$12+\frac{1}{2}=\frac{25}{2}<\frac{6}{\log_{10}3}<\frac{600}{47}=12+\frac{36}{47}$$

したがって　$13+\dfrac{1}{2}<1+\dfrac{6}{\log_{10}3}<13+\dfrac{36}{47}$

よって，$(*)$ を満たす最小の正の整数 n は　**14**　■

3.32 (1) 条件から $\boldsymbol{P_1(\mathrm{A}) = 0}$, $\boldsymbol{P_1(\mathrm{B}) = \frac{1}{3}}$, $\boldsymbol{P_1(\mathrm{C}) = \frac{1}{3}}$, $\boldsymbol{P_1(\mathrm{D}) = \frac{1}{3}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} P_2(\mathrm{A}) &= \frac{1}{3}\{P_1(\mathrm{B}) + P_1(\mathrm{C}) + P_1(\mathrm{D})\} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}, \\ P_2(\mathrm{B}) &= \frac{1}{3}\{P_1(\mathrm{A}) + P_1(\mathrm{C}) + P_1(\mathrm{D})\} \\ &= \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{2}{9}} \end{aligned}$$

(3) $P_n(\mathrm{A}) + P_n(\mathrm{B}) + P_n(\mathrm{C}) + P_n(\mathrm{D}) = 1$ に注意して

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\mathrm{A}) &= \frac{1}{3}\{P_n(\mathrm{B}) + P_n(\mathrm{C}) + P_n(\mathrm{D})\} \\ &= \frac{1}{3}\{1 - P_n(\mathrm{A})\} \end{aligned}$$

したがって $P_{n+1}(\mathrm{A}) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left\{P_n(A) - \frac{1}{4}\right\}$

$$P_n(\mathrm{A}) - \frac{1}{4} = \left\{P_1(\mathrm{A}) - \frac{1}{4}\right\}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$P_1(\mathrm{A}) = 0$ より $\boldsymbol{P_n(\mathrm{A}) = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$

よって $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} P_n(\mathrm{A}) = \frac{1}{4}}$ ■

3.33 (1) p は 5 以上の素数であるから，p は奇数，すなわち，$p+1$ は偶数.

2 数 $p,\ p+2\ (p \geqq 5)$ が素数であるから，p と $p+2$ はともに 3 で割り切れない．このとき，連続する 3 整数 $p,\ p+1,\ p+2$ のうち 1 つが 3 の倍数，すなわち，$p+1$ が 3 の倍数である．ゆえに，$p+1$ は偶数かつ 3 の倍数.

よって，$p+1$ は 6 の倍数である.

補足 $p \geqq 5$ とする双子素数 $(p,\ p+2)$ について，その間の $p+1$ が 6 の倍数になることは，次からも分かる．5 以上の整数を

$$6n-1,\ 6n,\ 6n+1,\ 6n+2,\ 6n+3,\ 6n+4 \quad (n=1,2,\cdots)$$

とおくと，$6n,\ 6n+2=2(3n+1),\ 6n+3=3(2n+1),\ 6n+4=2(3n+2)$ であるから，2 整数

$$(p,\ p+2)=(6n-1,\ 6n+1)$$

が双子素数であるための必要条件である.

よって，$(p,\ p+2)$ が双子素数のとき，$p+1=6n$ は 6 の倍数である.

一般に，5 以上の整数 N について，$N \equiv \pm 1 \pmod 6$ は N が素数であるための必要条件である．エラトステネスの篩(ふるい) (素数判定) で数字を書き並べるとき，1 列に 6 個ずつ数字を並べると，素数の配列が分かりやすい.

双子素数は無数に存在するかという問題，いわゆる「双子素数の予想」や「双子素数の問題」は，いまだに数学上の未解決問題である．無数に存在するだろうと，多くの数論学者が予想している.

(2) すべての位の数字が 1 である k 桁の数 $\overbrace{11\cdots1}^{k\text{ 個}}$ を N とすると

$$N=2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2+1=2^k-1$$

k が素数でない，すなわち，$k=pq$ (p,q は 2 以上の整数) とすると

$$N=2^{pq}-1=(2^p)^q-1=(2^p-1)\{2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\cdots+2^p+1\}$$

このとき，$2^p-1 \geqq 3,\ 2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\cdots+2^p+1 \geqq 2^p+1 \geqq 5$

したがって　k が素数でない $\Longrightarrow$ N は素数ではない

よって　N が素数 $\Longrightarrow$ k は素数 ■

3.34 (1) $R = a^x = b^y = (ab)^z$ とおくと $(x,\ y,\ z \neq 0,\ 1 < a < b)$ $R \neq 1$

$$a = R^{\frac{1}{x}}, \quad b = R^{\frac{1}{y}}, \quad ab = R^{\frac{1}{z}}$$

ゆえに $R^{\frac{1}{x}}R^{\frac{1}{y}} = R^{\frac{1}{z}}$ したがって $R^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = R^{\frac{1}{z}}$ よって $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$

別解 $R = a^x = b^y = (ab)^z$ とおくと $(x,\ y,\ z \neq 0,\ 1 < a < b)$ $R \neq 1$

正の実数 c $(c \neq 1)$ を底とする対数をとると

$$\log_c R = x\log_c a = y\log_c b = z(\log_c a + \log_c b)$$

したがって $\log_c a = \dfrac{\log_c R}{x}$, $\log_c b = \dfrac{\log_c R}{y}$, $\log_c a + \log_c b = \dfrac{\log_c R}{z}$

上の第 1 式，第 2 式を第 3 式に代入すると

$$\frac{\log_c R}{x} + \frac{\log_c R}{y} = \frac{\log_c R}{z} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

(2) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$ より $mn = (m+n)p$ ゆえに $(m-p)(n-p) = p^2$

$m > n$ に注意すると，$m - p > n - p > 0$ であるから

$$m - p = p^2,\quad n - p = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(m,\ n) = (p^2 + p,\ p+1)}$$

別解 $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$ より $mn = (m+n)p$ $\cdots$①

p は素数であるから，m または n は p を因数にもつ．m が p を因数にもつ，すなわち，$m = kp$ (k は整数) とし，① に代入すると

$$kpn = (kp+n)p \quad \text{ゆえに} \quad n = \frac{kp}{k-1}$$

上の第 2 式の右辺は整数で k と $k-1$ は互いに素であるから，$k - 1 = 1,\ p$ である．このとき，$(m,\ n) = (2p,\ 2p),\ (p(p+1),\ p+1)$

また，$m,\ n$ の対称性から

$$(m,\ n) = (2p,\ 2p),\ (p(p+1),\ p+1),\ (p+1,\ p(p+1))$$

$m > n$ であるから $\boldsymbol{m = p(p+1),\ \ n = p+1}$

(3) $m,\ n$ は自然数であるから，$Q = a^m = b^n$ とおくと $(1 < a < b)$　$Q > 1$

$$a = Q^{\frac{1}{m}}, \quad b = Q^{\frac{1}{n}}$$

$a < b$ より　$Q^{\frac{1}{m}} < Q^{\frac{1}{n}}$　ゆえに　$\dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n}$　すなわち　$m > n$

さらに，(1)，(2) の結論を適用すると

$$a^{p(p+1)} = b^{p+1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b = a^p}$$ ■

3.35 (1) $c_1=39,\ c_2=13,\ c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$ より

$$c_3=52,\quad c_4=65,\quad c_5=117,\quad c_6=182$$

$117=13{\cdot}3^2$，$182=13{\cdot}2{\cdot}7$ より，c_5 と c_6 の最大公約数は **13**

補足 n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x,y) と表記すると

$$(x,y)\,|\,x,\quad (x,y)\,|\,y$$

が成り立つ．

$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$ より，$(c_{n+1},c_n)\,|\,c_{n+2}$，また，$(c_{n+1},c_n)\,|\,c_{n+1}$ であるから，(c_{n+1},c_n) は，c_{n+2} と c_{n+1} の公約数，したがって

$$(c_{n+1},c_n)\,|\,(c_{n+2},c_{n+1}) \tag{A}$$

$c_n=c_{n+2}-c_{n+1}$ より，$(c_{n+2},c_{n+1})\,|\,c_n$，また，$(c_{n+2},c_{n+1})\,|\,c_{n+1}$ であるから，(c_{n+2},c_{n+1}) は，c_{n+1} と c_n の公約数，したがって

$$(c_{n+2},c_{n+1})\,|\,(c_{n+1},c_n) \tag{B}$$

(A)，(B) より　$(c_{n+2},c_{n+1})=(c_{n+1},c_n)$　一般に　$(c_{n+1},c_n)=(c_2,\ c_1)$

(2) 　P_n : c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である．

［1］$n=1$ のとき，c_1 と c_2 がともに奇数であるから，c_3 は偶数．
よって，P_1 が成立する．

［2］P_k が成立すると仮定すると

c_{3k-1} が奇数，c_{3k} が偶数より　c_{3k+1} は奇数，
c_{3k} が偶数，c_{3k+1} が奇数より　c_{3k+2} は奇数，
c_{3k+1} が奇数，c_{3k+2} が奇数より　c_{3k+3} は偶数

よって，P_{k+1} も成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，P_n が成立する．　(証終)

(3) $Q_n : c_{2n-1}$ と c_{2n} はともに d の倍数である．

［1］c_1 と c_2 はともに d の倍数であるから，Q_1 は成立する．

［2］Q_k が成立すると仮定すると

$$c_{2k-1} = dx_{2k-1}, \quad c_{2k} = dx_{2k}$$

となる整数 x_{2k-1}，x_{2k} が存在するから

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= c_{2k} + c_{2k-1} = d(x_{2k} + x_{2k-1}), \\ c_{2k+2} &= c_{2k+1} + c_{2k} = d(x_{2k} + x_{2k-1}) + dx_{2k} \\ &= d(2x_{2k} + x_{2k-1}) \end{aligned}$$

よって，Q_{k+1} も成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，Q_n が成立する．

よって，a と b がともに d の倍数であるとき，c_n は d の倍数である．

(4) $a+b$ が偶数であるのは，次の場合である．

(i) a と b がともに奇数であるとき，(2) の結論から，$c_{2022} = c_{3\cdot 674}$ は偶数であるから不適．

(ii) a と b がともに偶数 (2 の倍数) であるとき，(3) の結論から，c_{2022} は偶数 (2 の倍数) であるから不適．

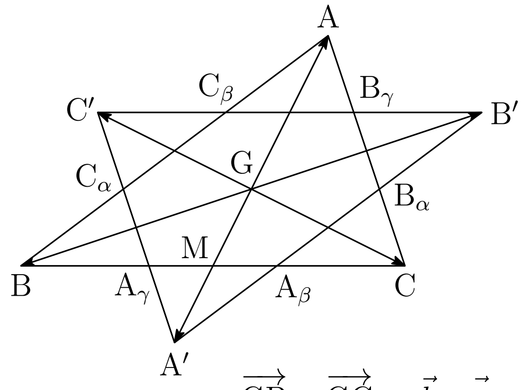
(i)，(ii) より，$a+b$ は偶数ではない，すなわち，$a+b$ は奇数である．■

3.36 (1) $\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{c}$ から，条件により

$$\overrightarrow{\mathrm{GA'}}=-\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{GB'}}=-\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{GC'}}=-\vec{c}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}=\overrightarrow{\mathrm{GC'}}-\overrightarrow{\mathrm{GB'}}=-\vec{c}-(-\vec{b})=-(\vec{c}-\vec{b})=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{BC}}$



(2) 辺 BC の中点を M とすると　$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}}{2}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{GA}}=-2\overrightarrow{\mathrm{GM}}$ であるから

$$\vec{a}=-2\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\quad \text{よって}\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

(3) B′C′ と AB および AC との交点をそれぞれ C_β，B_γ とする．C_β，B_γ は B′C′ 上の点であるから，実数 β，γ を用いて

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{GC}_\beta}&=(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{GB'}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{GC'}}=(1-\beta)(-\vec{b})+\beta(-\vec{c})\\
&=(\beta-1)\vec{b}+\beta(\vec{a}+\vec{b})=\beta\vec{a}+(2\beta-1)\vec{b},\\
\overrightarrow{\mathrm{GB}_\gamma}&=\gamma\overrightarrow{\mathrm{GB'}}+(1-\gamma)\overrightarrow{\mathrm{GC'}}=\gamma(-\vec{b})+(1-\gamma)(-\vec{c})\\
&=\gamma(\vec{c}+\vec{a})+(\gamma-1)\vec{c}=\gamma\vec{a}+(2\gamma-1)\vec{c}
\end{aligned}$$

C_β，B_γ はそれぞれ AB，AC 上にあるから，係数について

$$\beta+(2\beta-1)=1,\quad \gamma+(2\gamma-1)=1\quad \text{ゆえに}\quad \beta=\gamma=\frac{2}{3}$$

したがって，C_β は辺 AB を $1:2$ に内分し，C_γ は辺 AC を $1:2$ に内分する点である．よって，T' の辺 B′C′ は T の辺 AB および AC と交わる．

(4) A_γ，C_α は，BC，BA をそれぞれ $1:2$ に内分し，B_α，A_β は，CA，CB をそれぞれ $1:2$ に内分する．よって　$S-S\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times 3=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{S}$　■

3.37 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{a}}$

(2) $\triangle$ABC の重心を G とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OO'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$

α に関して，P と対称な点を P$'$ とすると

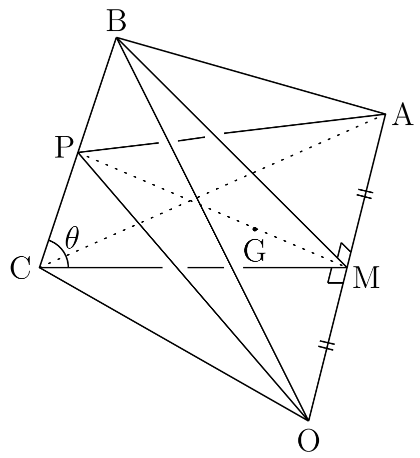
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP'}} &= \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3} = \frac{7\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}}{9} \\ &= \frac{15}{9}\cdot\frac{7\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}}{15}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \dfrac{7\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}}{15}}$ ■

3.38 (1) OA の中点を M とすると，G は線分 PM を $2:1$ に内分する点で，2 点 P，G は平面 MBC 上の点である．このとき，$\mathrm{BO}=\mathrm{AB}$，$\mathrm{OC}=\mathrm{AC}$ より

$$\triangle\mathrm{ABM}\equiv\triangle\mathrm{OBM},\quad \triangle\mathrm{ACM}\equiv\triangle\mathrm{OCM}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{MB}\perp\mathrm{OA},\quad \mathrm{MC}\perp\mathrm{OA}$$

したがって　平面 $\mathrm{MBC}\perp\mathrm{OA}$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$



(2) (1) の結果から

$$\mathrm{MB}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$$
$$\mathrm{CM}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{OM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$$

$\theta=\angle\mathrm{BCM}$ とおき，$\triangle\mathrm{BCM}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CM}^2-\mathrm{MB}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CM}}=\frac{9+8-5}{2\cdot3\cdot2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これから　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

PG が最小となるとき，$\mathrm{MP}\perp\mathrm{BC}$ であるから，求める最小値は

$$\frac{2}{3}\mathrm{MP}=\frac{2}{3}\mathrm{CM}\sin\theta=\frac{2}{3}\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

■

3.39 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t(1,\ 2,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 1,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(7,\ 3,\ 5)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(t-1,\ 2t-1,\ 3t+1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(t-7,\ 2t-3,\ 3t-5)$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2&=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2\\&=(t-1)^2+(2t-1)^2+(3t+1)^2\\&\qquad+(t-7)^2+(2t-3)^2+(3t-5)^2\\&=\boldsymbol{28t^2-56t+86}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=28(t-1)^2+58$

よって　$t=1$，すなわち，$\mathbf{P(1,\ 2,\ 3)}$ のとき，最小値 **58** をとる．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから [11]

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=14,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=28$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2(1,\ 2,\ 3)$

よって　$\mathbf{H(0,\ 0,\ 0)}$，$\mathbf{K(2,\ 4,\ 6)}$

また　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 1,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{KC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OK}}=(5,-1,-1)$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{KC}}$ のなす角 θ は

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{HB}}||\overrightarrow{\mathrm{KC}}|}=\frac{1\cdot5+1\cdot(-1)+(-1)(-1)}{\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{5}{9}}$$

(4) $\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ の値が最小となるとき，$\triangle\mathrm{BPH}\backsim\triangle\mathrm{CPK}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|:|\overrightarrow{\mathrm{KC}}|=\sqrt{3}:3\sqrt{3}=1:3\quad ゆえに\quad \mathrm{HP}:\mathrm{PK}=1:3$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{1+3}\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{1}{4}\cdot2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \mathbf{1},\ \boldsymbol{\frac{3}{2}}\right)$

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}^2&=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OP}^2=\mathrm{OB}^2+\left(\frac{1}{2}\mathrm{OA}\right)^2\\&=3+\frac{1}{4}\cdot14=\frac{26}{4}\quad ゆえに\quad \mathrm{BP}=\frac{\sqrt{26}}{2}\end{aligned}$$

$\mathrm{CP}=3\mathrm{BP}$ であるから　$\mathrm{BP}+\mathrm{CP}=4\mathrm{BP}=4\cdot\dfrac{\sqrt{26}}{2}=\boldsymbol{2\sqrt{26}}$ ■

[11] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2017.pdf (p.5 の補足を参照)

3.40 (1) $3\overrightarrow{\mathrm{OP}}+8\overrightarrow{\mathrm{AP}}+7\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ より

$$3\overrightarrow{\mathrm{OP}}+8(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+7(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

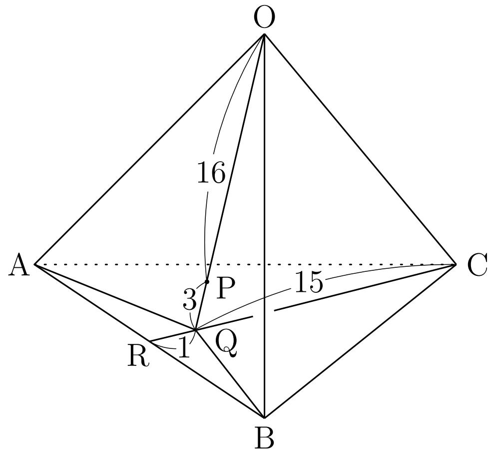
したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8\overrightarrow{\mathrm{OA}}+7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{19}=\frac{16}{19}\cdot\frac{8\overrightarrow{\mathrm{OA}}+7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{16}$$

よって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{8\vec{a}+7\vec{b}+\vec{c}}{19}},\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{8\vec{a}+7\vec{b}+\vec{c}}{16}}$

(2) 2 直線 CQ と AB の交点を R とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{8\overrightarrow{\mathrm{CA}}+7\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{16}$$
$$=\frac{15}{16}\cdot\frac{8\overrightarrow{\mathrm{CA}}+7\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{15}=\frac{15}{16}\overrightarrow{\mathrm{CR}}$$



Q は線分 CR を 15 : 1 に内分するから

$$\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{1}{16}\triangle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot1^2\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{64}}$$

補足 R は線分 AB を 7 : 8 に内分する点である．

(3) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

$$3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})+\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0,$$
$$3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})+\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$
$$=|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と平面 ABC は垂直である．

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\dfrac{1}{3}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

求める体積は $\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{3}{19}\times\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{3}{19}\times\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{1216}}$ ■

3.41 (1) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=2$ および

$$(*)\ \begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=2a_n+1 \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定めらた漸化式に $n=1,\ 2$ を順次代入すると

$$a_2=a_1+b_1=\frac{1}{2}+2=\boldsymbol{\frac{5}{2}}, \qquad b_2=2a_1+1=2\cdot\frac{1}{2}+1=\mathbf{2},$$
$$a_3=a_2+b_2=\frac{5}{2}+2=\boldsymbol{\frac{9}{2}}, \qquad b_3=2a_2+1=2\cdot\frac{5}{2}+1=\mathbf{6}$$

(2) 与えられた等式

$$a_{n+1}+pb_{n+1}+q=r(a_n+pb_n+q) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

の左辺に $(*)$ を代入すると

$$(1+2p)a_n+b_n+p+q=ra_n+rpb_n+rq$$

係数および定数項を比較すると

$$\begin{cases} 1+2p=r & \cdots① \\ 1=rp & \cdots② \\ p+q=rq & \cdots③ \end{cases}$$

①，② から，r を消去すると

$$1=(1+2p)p \quad ゆえに \quad (p+1)(2p-1)=0$$

① より　$p=-1$ のとき $r=-1$，$p=\dfrac{1}{2}$ のとき $r=2$

これらを ③ に代入して　$\boldsymbol{(p,\ q,\ r)=\left(-1,\ \frac{1}{2},-1\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2\right)}$

(3) (2) の結果から

$$(**)\begin{cases} a_{n+1}-b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=-\left(a_n-b_n+\dfrac{1}{2}\right) \\ a_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=2\left(a_n+\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n-b_n+\frac{1}{2} &= \left(a_1-b_1+\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{2}\right)=(-1)^n, \\ a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2} &= \left(a_1+\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}=2^n \end{aligned}$$

上の 2 式から $\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{2^{n+1}}{3}+\dfrac{(-1)^n}{3}-\dfrac{1}{2}}$

$\boldsymbol{b_n=\dfrac{2^{n+1}}{3}-\dfrac{2(-1)^n}{3}}$

(4) $c_1=\sqrt{2},\ d_1=4$ および

$$\begin{cases} c_{n+1}=c_nd_n \\ d_{n+1}=2{c_n}^2 \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定めれた数列は，すべての n について，$c_n>0,\ d_n>0$ であることに注意して，2 式の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 c_{n+1}=\log_2 c_n+\log_2 d_n, \quad \log_2 d_{n+1}=2\log_2 c_n+1$$

また　$a_1=\log_2 c_1=\dfrac{1}{2},\quad b_1=\log_2 d_1=2$

これから，$\log_2 c_n$，$\log_2 d_n$ が，それぞれ a_n，b_n と一致するから

$$\begin{aligned} \log_2 {c_n}^2d_n &= 2\log_2 c_n+\log_2 d_n \\ &= 2a_n+b_n \\ &= 2\left\{\frac{2^{n+1}}{3}+\frac{(-1)^n}{3}-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{2^{n+1}}{3}-\frac{2(-1)^n}{3}\right\} \\ &= 2^{n+1}-1 \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{{c_n}^2d_n=2^{2^{n+1}-1}}$ ■

3.42 (1) q_1 は，1 回目に裏が出る確率であるから　　$\boldsymbol{q_1 = 1 - p}$

操作により，次の確率漸化式が成立する．

$$q_{n+1} = (1-p)q_n + p(1-q_n) \quad \text{すなわち} \quad q_{n+1} = (1-2p)q_n + p \qquad (*)$$

これを変形すると

$$q_{n+1} - \frac{1}{2} = (1-2p)\left(q_n - \frac{1}{2}\right)$$

数列 $\left\{q_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $q_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-2p)$，公比 $1-2p$ の等比数列より

$$q_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-2p)\cdot(1-2p)^{n-1} \quad \text{よって} \quad q_n = \frac{1}{2}\{1+(1-2p)^n\} \quad (**)$$

$n = 2,\ 3$ を $(**)$ に代入すると

$$\boldsymbol{q_2 = 1 - 2p + 2p^2}, \quad \boldsymbol{q_3 = 1 - 3p + 6p^2 - 4p^3}$$

(2) $(*)$ より　$\boldsymbol{q_{n+1} = (1-2p)q_n + p}$

(3) $(**)$ より　$\boldsymbol{q_n = \dfrac{1}{2}\{1+(1-2p)^n\}}$

(4)

X_n	1	-1	合計
$P(X_n)$	q_n	$1-q_n$	1

$$E(X_n) = 1q_n + (-1)(1-q_n) = 2q_n - 1 = \boldsymbol{(1-2p)^n}$$
$$E({X_n}^2) = 1^2 q_n + (-1)^2(1-q_n) = 1$$

したがって

$$V(X_n) = E({X_n}^2) - E(X_n)^2 = \boldsymbol{1 - (1-2p)^{2n}}$$
$$\sigma(X_n) = \sqrt{V(X_n)} = \boldsymbol{\sqrt{1-(1-2p)^{2n}}}$$

■

3.43 (1) 大きいサイコロ，小さいサイコロの目をそれぞれ，A, B とすると

$$X = 10A + B, \quad Y = 10B + A \quad (A, B = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$X - Y = 9(A - B)$ より，$X - Y = 0$ のとき，$A = B$ であるから

$$P(X - Y = 0) = P(A = B) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

$P(X - Y > 0) + P(X - Y = 0) + P(X - Y < 0) = 1$，
$P(X - Y > 0) = P(X - Y < 0)$ であるから

$$P(X - Y > 0) = \frac{1}{2}\{1 - P(X - Y = 0)\} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

(2) $E(A) = E(B)$，$V(A) = V(B)$ により (A, B は独立変数)

$$E(X) = E(10A + B) = 10E(A) + E(B) = 11E(A),$$
$$V(X) = V(10A + B) = 10^2V(A) + V(B) = 101V(A)$$

このとき　$E(A) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7 = \frac{7}{2}$,

$$V(A) = E(A^2) - E(A)^2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

よって　$E(X) = 11\cdot\frac{7}{2} = \mathbf{\frac{77}{2}}$,　$V(X) = 101\cdot\frac{35}{12} = \mathbf{\frac{3535}{12}}$

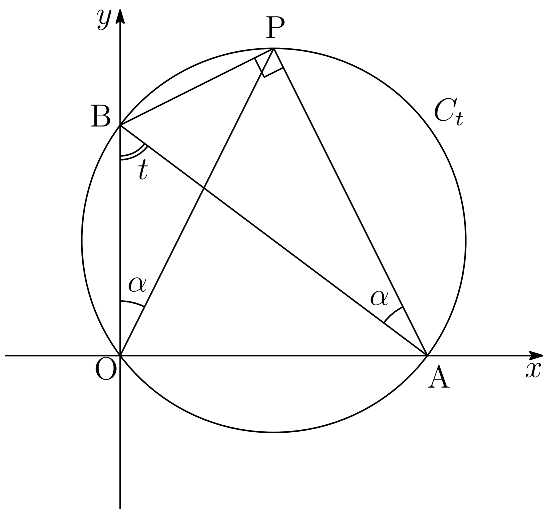
(3) (2) の $V(A)$, $V(B)$ を用いると

$$\begin{aligned} V(A - B) &= V(A + (-B)) = V(A) + V(-B) \\ &= V(A) + (-1)^2V(B) = 2V(A) = 2\cdot\frac{35}{12} = \frac{35}{6}, \end{aligned}$$
$$V(X - Y) = V(9(A - B)) = 9^2V(A - B) = 9^2\cdot\frac{35}{6}$$

よって　$\sigma(X - Y) = \sqrt{V(X - Y)} = 9\sqrt{\frac{35}{6}} = \mathbf{\frac{3}{2}\sqrt{210}}$

補足 A, B は独立変数であるから　　$V(A - B) = V(A) + V(B)$
X, Y は独立変数ではないから　$V(X - Y) \neq V(X) + V(Y)$ ■

4.1 (1) AB を直径とする円を C_t とする．



$\angle\mathrm{P} = \dfrac{\pi}{2}$ より，P は C_t 上にある．

円周角の定理により

$$\angle\mathrm{BOP} = \angle\mathrm{BAP}$$

ゆえに　$\angle\mathrm{BOP} = \alpha$

直線 OP の偏角は　$\dfrac{\pi}{2} - \alpha$

直線 OP の方程式は

$$y = x\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

よって　　$\boldsymbol{y = \dfrac{x}{\tan\alpha}}$

(2) $\angle\mathrm{OBP} = t + \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{\pi}{2} - (\alpha - t)$

$\triangle\mathrm{OBP}$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OP}}{\sin\angle\mathrm{OBP}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OP} = \sin\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha - t)\right\} = \cos(\alpha - t)$$

$f(t) = \mathrm{OP}$ とおくと，$f(t)$ は $t = 0$ から $t = \alpha$ まで単調増加，
$t = \alpha$ から $t = \dfrac{\pi}{2}$ まで単調減少である．

$$f(0) = \cos\alpha, \quad f(\alpha) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$$

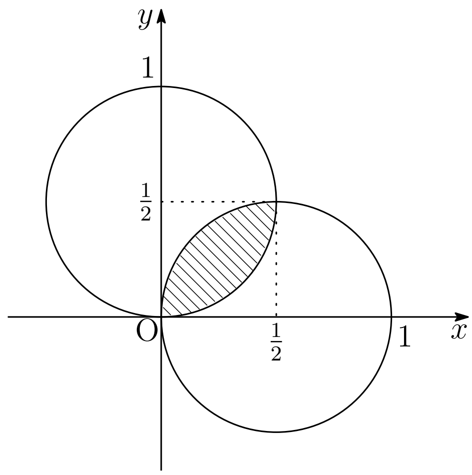
よって，点 P が動く道のりを L とすると

$$\begin{aligned} L &= \{f(\alpha) - f(0)\} + \left\{f(\alpha) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= 1 - \cos\alpha + (1 - \sin\alpha) = \boldsymbol{2 - \sin\alpha - \cos\alpha} \end{aligned}$$

(3) 与えらた連立不等式から

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4},$$
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$$

これを満たす領域 D は右の図の斜線部分である (境界線を含まない)．2 点 O，P を通る直線を ℓ とし，ℓ と D の境界線の交点を Q とする．



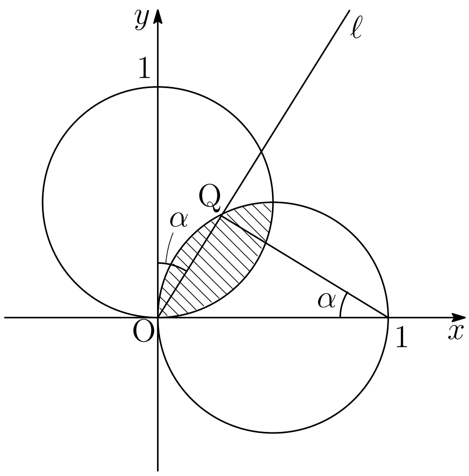
(i) $0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\mathrm{OQ}=\sin\alpha \leqq \cos\alpha=f(0)<f(t)=\mathrm{OP}$$

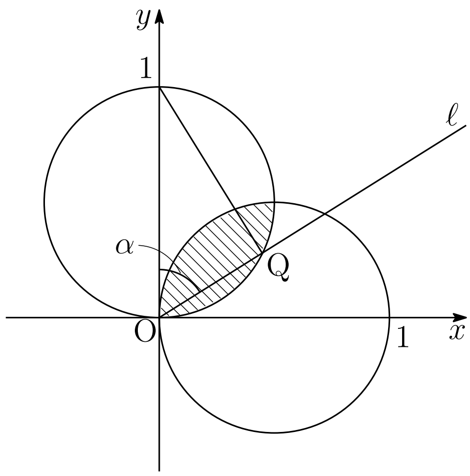
(ii) $\dfrac{\pi}{4} \leqq \alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\mathrm{OQ}=\cos\alpha \leqq \sin\alpha=f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(t)=\mathrm{OP}$$

(i)，(ii) より，点 P は領域 D には入らない．



$0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$



$\dfrac{\pi}{4} \leqq \alpha<\dfrac{\pi}{2}$

4.2 (1) $\dfrac{1}{\alpha-1}=\dfrac{\overline{\alpha}-1}{(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)}=\dfrac{\overline{\alpha}-1}{|\alpha-1|^2}$ より

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\alpha}-1}{|\alpha-1|^2}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha-1|^2}\right)=-\frac{\mathrm{Im}(\alpha)}{|\alpha-1|^2}$$

よって　$\mathrm{Im}(\alpha)>0 \iff \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{\alpha-1}\right)<0$

(2) $\mathrm{Im}(z)>0$ より，$z\neq 0$ に注意して

$$\frac{z^2-1}{(1-iz)-1}=\frac{z^2-1}{-iz}$$

は実数であるから

$$\frac{z^2-1}{-iz}-\overline{\left(\frac{z^2-1}{-iz}\right)}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{z^2-1}{-iz}-\frac{\overline{z}^2-1}{i\overline{z}}=0$$

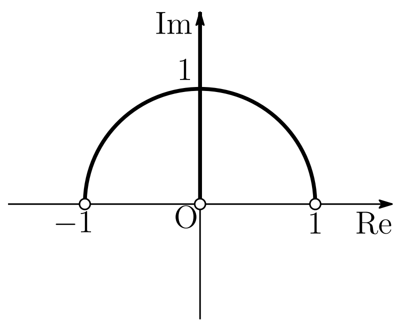
上の第 2 式から

$$\begin{aligned}\overline{z}(z^2-1)+z(\overline{z}^2-1)&=0\\(z+\overline{z})(z\overline{z}-1)&=0\\2\mathrm{Re}(z)(|z|^2-1)&=0\end{aligned}$$

よって，S の満たす条件は

$$\mathrm{Re}(z)=0 \ \text{または} \ |z|=1 \quad (\mathrm{Im}(z)>0)$$

したがって，S は，下の図の太線部分で，$\circ$ は含まない．



(3) $w=\dfrac{1}{z-1}$ について，(1) の結論から，$\mathrm{Im}(z)>0$ より　$\mathrm{Im}(w)<0$

$d=\left|w+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|$ とおくと，d は点 $-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ と点 w の 2 点間の距離を表す.

$w=\dfrac{1}{z-1}$ より　$z=\dfrac{w+1}{w}$

(i) $\mathrm{Re}(z)=0$ のとき，$z+\overline{z}=0$ より　$\dfrac{w+1}{w}+\dfrac{\overline{w}+1}{\overline{w}}=0$

$$w\overline{w}+\frac{1}{2}(w+\overline{w})=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left|w+\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}$$

w は中心 $-\dfrac{1}{2}$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の $\mathrm{Im}(w)<0$ の部分を表す.

d を最小にする点を w_1 とすると

$$\left|w_1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

(ii) $|z|=1$ のとき，$\left|\dfrac{w+1}{w}\right|=1$ より　$|w+1|=|w|$

w は 2 点 $-1,\ 0$ の垂直二等分線の $\mathrm{Im}(w)<0$ の部分を表す.

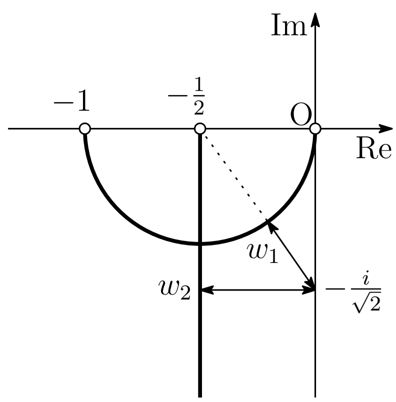
d を最小にする点を w_2 とすると　$\left|w_2+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|=\dfrac{1}{2}$

(i)，(ii) の結果から

$$\left|w_2+\frac{i}{\sqrt{2}}\right|-\left|w_1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}>0$$

$\left|w_1+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|<\left|w_2+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|$ であるから，求める最小値は

$$\left|w_1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$



補足 (2) で得られた結果

$$\mathrm{Re}(z)=0 \quad \text{または} \quad |z|=1 \quad (\mathrm{Im}(z)>0)$$

は次のように表記することもできる[12].

$$z=i\tan\theta \ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{または} \quad z=\cos\varphi+i\sin\varphi \ \ (0<\varphi<\pi)$$

(i) $z=i\tan\theta \ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ のとき

$$\begin{aligned}
w&=\frac{1}{z-1}=\frac{1}{i\tan\theta-1}=-\frac{\cos\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\\
&=-\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)=-\cos^2\theta-i\sin\theta\cos\theta\\
&=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\\
&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\{\cos(2\theta+\pi)+i\sin(2\theta+\pi)\}
\end{aligned}$$

w は中心 $-\frac{1}{2}$，半径 $\frac{1}{2}$ の円周上の $\pi<\arg\left(w+\frac{1}{2}\right)<2\pi$ を満たす点.

(ii) $z=\cos\varphi+i\sin\varphi \ \ (0<\varphi<\pi)$ のとき

$$\begin{aligned}
w&=\frac{1}{z-1}=\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi-1}\\
&=\frac{\cos\varphi-1-i\sin\varphi}{(\cos\varphi-1+i\sin\varphi)(\cos\varphi-1-i\sin\varphi)}\\
&=\frac{\cos\varphi-1-i\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\\
&=-\frac{1}{2}-\frac{2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2\tan\frac{\varphi}{2}}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\tan\frac{\pi-\varphi}{2}
\end{aligned}$$

w は $\mathrm{Re}(w)=-\frac{1}{2}$ の直線上の $\mathrm{Im}(w)<0$ を満たす点. ■

[12] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2019.pdf (p.10 の解説を参照)

4.3 (1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$ において　$x^m e^{-\frac{1}{n}} \leqq x^m e^{-x} \leqq x^m$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-\frac{1}{n}}\,dx = e^{-\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}} x^m\,dx = e^{-\frac{1}{n}}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{(m+1)n^{m+1}},$$
$$\int_0^{\frac{1}{n}} x^m\,dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(m+1)n^{m+1}}$$

したがって
$$\frac{e^{-\frac{1}{n}}}{(m+1)n^{m+1}} \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{(m+1)n^{m+1}} \qquad (*)$$
$$e^{-\frac{1}{n}} \leqq (m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq 1$$

よって
$$e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$$

(2) (1) の結果について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$ であるから，はさみうちの原理により

$$b_m = \lim_{n\to\infty} A(m,\ n) = \mathbf{1}$$

(3) $A(m,\ n)$ について

$$\begin{aligned}A(m,\ n) &= (m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \\ &= n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} (x^{m+1})' e^{-x}\,dx \\ &= n^{m+1}\left[x^{m+1}e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{n}} - n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}(e^{-x})'\,dx \\ &= e^{-\frac{1}{n}} + n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx\end{aligned}$$

したがって
$$\left|A(m,\ n) - e^{-\frac{1}{n}}\right| = n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx$$

$(*)$ により
$$\left|A(m,\ n) - e^{-\frac{1}{n}}\right| \leqq n^{m+1}\cdot\frac{1}{(m+2)n^{m+2}} = \frac{1}{(m+2)n}$$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(m+2)n} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$c_n = \lim_{m\to\infty} A(m,\ n) = \boldsymbol{e^{-\frac{1}{n}}}$$ ■

4.4 (1) x^n を $x-\alpha$ で割った商を $Q_1(x)$，余りを C とすると

$$x^n = (x-\alpha)Q_1(x) + C$$

$Q_1(x)$ を $x-\beta$ で割った商を $Q_2(x)$，余りを B とすると

$$Q_1(x) = (x-\beta)Q_2(x) + B$$

$Q_2(x)$ を $x-\beta$ で割った商を $Q(x)$，余りを A とすると

$$Q_2(x) = (x-\beta)Q(x) + A$$

したがって

$$\begin{aligned} x^n &= (x-\alpha)Q_1(x) + C \\ &= (x-\alpha)\{(x-\beta)Q_2(x) + B\} + C \\ &= (x-\alpha)(x-\beta)Q_2(x) + B(x-\alpha) + C \\ &= (x-\alpha)(x-\beta)\{(x-\beta)Q(x) + A\} + B(x-\alpha) + C \\ &= (x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x) + A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\alpha) + C \qquad (*) \end{aligned}$$

(2) $x=\alpha$ を $(*)$ に代入すると　$\boldsymbol{C=\alpha^n}$

$$\begin{aligned}x^n-\alpha^n &= (x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x)+A(x-\alpha)(x-\beta)+B(x-\alpha)\\ \frac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha} &= (x-\beta)^2Q(x)+A(x-\beta)+B\end{aligned}$$

$f(x)=\dfrac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{nx^{n-1}(x-\alpha)-(x^n-\alpha^n)}{(x-\alpha)^2}$

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-\beta)^2Q(x)+A(x-\beta)+B,\\ f'(x) &= 2(x-\beta)Q(x)+(x-\beta)^2Q'(x)+A\end{aligned}$$

これから，$B=f(\beta)$，$A=f'(\beta)$ より

$$\boldsymbol{B=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha},\quad A=\frac{n\beta^{n-1}(\beta-\alpha)-(\beta^n-\alpha^n)}{(\beta-\alpha)^2}}$$

(3) $g(\beta)=n\beta^{n-1}(\beta-\alpha)-(\beta^n-\alpha^n)$ とおくと

$$\begin{aligned}g'(\beta) &= n(n-1)\beta^{n-2}(\beta-\alpha)\\ g''(\beta) &= n(n-1)\{(n-2)\beta^{n-3}(\beta-\alpha)+\beta^{n-2}\}\end{aligned}$$

$g(\alpha)=0$，$g'(\alpha)=0$，$g''(\alpha)=n(n-1)\alpha^{n-2}$ より，$g(\beta)$ は $(\beta-\alpha)^2$ を因数にもつから，$g(\beta)=(\beta-\alpha)^2H(\beta)$ とおくと $(A=H(\beta))$

$$\begin{aligned}g'(\beta) &= 2(\beta-\alpha)H(\beta)+(\beta-\alpha)^2H'(\beta)\\ g''(\beta) &= 2H(\beta)+4(\beta-\alpha)H'(\beta)+(\beta-\alpha)^2H''(\beta)\end{aligned}$$

$g''(\alpha)=2H(\alpha)=n(n-1)\alpha^{n-2}$，　$A=H(\beta)$ より

$$\lim_{\beta\to\alpha}A=\lim_{\beta\to\alpha}H(\beta)=H(\alpha)=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}}$$

補足 n 次式 $g(\beta)$ を α を極としてテイラー展開すると [13]

$$g(\beta)=g(\alpha)+g'(\alpha)(\beta-\alpha)+\frac{g''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2+\sum_{k=3}^{n}\frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta-\alpha)^k$$

このとき　$A=\dfrac{g(\beta)}{(\beta-\alpha)^2}=\dfrac{g''(\alpha)}{2!}+\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\dfrac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta-\alpha)^{k-2}$

よって　$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}A=\frac{g''(\alpha)}{2!}=\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$ ■

[13] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2001.pdf (p.7)

4.5 (1) $f(x)=(x^2+3x+a)(x+1)^2$ の最小値が負であるとき，2 次方程式

$$x^2+3x+a=0$$

が異なる 2 つの実数解をもつから，係数について

$$D=3^2-4a>0 \quad よって \quad \boldsymbol{a<\frac{9}{4}}$$

(2) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=(2x+3)(x+1)^2+(x^2+3x+a)\cdot 2(x+1)\\ &=(x+1)\{(2x+3)(x+1)+2(x^2+3x+a)\}\\ &=(x+1)(4x^2+11x+2a+3) \end{aligned}$$

$g(x)=4x^2+11x+2a+3$ とおくと　$g(-1)=2(a-2)<0$

$f'(x)=0$ の実数解 -1，α_1，$\alpha_2(\alpha_1<\alpha_2)$ について　$\alpha_1<-1<\alpha_2$

解と係数の関係から　$\alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{11}{4}$

$f'(x)=4(x+1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ より

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	-1	$\cdots$	α_2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

ここで　$$\begin{aligned} f(x)&=\{(x+1)^2+(x+1)+a-2\}(x+1)^2\\ &=(x+1)^4+(x+1)^3+(a-2)(x+1)^2 \end{aligned}$$

$-2-\alpha_2<-1$ に注意して ($-2-\alpha_2$ と α_2 の中央が -1)

$$\begin{aligned} f(\alpha_2)&=(\alpha_2+1)^4+(\alpha_2+1)^3+(a-2)(\alpha_2+1)^2\\ f(-2-\alpha_2)&=(\alpha_2+1)^4-(\alpha_2+1)^3+(a-2)(\alpha_2+1)^2 \end{aligned}$$

$\alpha_2+1>0$ であるから　$f(-2-\alpha_2)<f(\alpha_2)$

また　$(-2-\alpha_2)-\alpha_1=-2-(\alpha_1+\alpha_2)=-2-\left(-\dfrac{11}{4}\right)=\dfrac{3}{4}>0$

$\alpha_1<-2-\alpha_2<-1$ および増減表から　$f(\alpha_1)<f(-2-\alpha_2)$

したがって　$f(\alpha_1)<f(-2-\alpha_2)<f(\alpha_2)$　よって　$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$

別解 (2) の途中の計算から

$$f'(x) = -4(x+1)(x-\alpha_1)(\alpha_2 - x) \qquad (\alpha_1 < \alpha_2)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(\alpha_2) - f(\alpha_1) &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f'(x)\,dx \\ &= -4\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (x+1)(x-\alpha_1)(\alpha_2-x)\,dx \\ &= -4\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{(x-\alpha_1)+(\alpha_1+1)\}(x-\alpha_1)(\alpha_2-x)\,dx \\ &= -4\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (x-\alpha_1)^2(\alpha_2-x)\,dx \\ &\qquad\qquad - 4(\alpha_1+1)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (x-\alpha_1)(\alpha_2-x)\,dx \\ &= -4\cdot\frac{1}{12}(\alpha_2-\alpha_1)^4 - 4(\alpha_1+1)\cdot\frac{1}{6}(\alpha_2-\alpha_1)^3 \\ &= -\frac{1}{3}(\alpha_2-\alpha_1)^3\{(\alpha_2-\alpha_1)+2(\alpha_1+1)\} \\ &= -\frac{1}{3}(\alpha_2-\alpha_1)^3(\alpha_1+\alpha_2+2) \end{aligned}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{11}{4}$ であるから

$$f(\alpha_2) - f(\alpha_1) = \frac{1}{4}(\alpha_2-\alpha_1)^3 > 0$$

よって　　$f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$

補足 次の積分公式[14]

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用している.

[14] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照.

(3) $f'(x)=(x+1)g(x)$ について

$$g(x)=4\left(x+\frac{11}{8}\right)^2+2\left(a-\frac{73}{32}\right),\quad g(-1)=2(a-2)$$

であることと (1) の結果に注意して，$f(x)$ の増減を調べる．

(i) $a<2$ のとき，(2) の結果から，$\beta=\alpha_1$ とすれば成立する．

(ii) $a=2$ のとき，$g(x)=4x^2+11x+7=(x+1)(4x+7)$ より

$$f'(x)=(x+1)^2(4x+7)$$

x	$\cdots$	$-\frac{7}{4}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	最小	$\nearrow$	0	$\nearrow$

したがって　$\beta=-\dfrac{7}{4}$

(iii) $2<a\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	α_2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

(1) の結果から，$f(\alpha_1)\leqq 0=f(-1)$ であるから，$\beta=\alpha_1$

(iv) $\dfrac{9}{4}<a<\dfrac{73}{32}$ のとき，(iii) の増減表と同じであるが，(1) の結果から $f(\alpha_1)>0=f(-1)$ となり，条件を満たさない．

(v) $a=\dfrac{73}{32}$ のとき，$f'(x)=4(x+1)\left(x+\dfrac{11}{8}\right)^2$

x	$\cdots$	$-\frac{11}{8}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって　$\beta=-1$

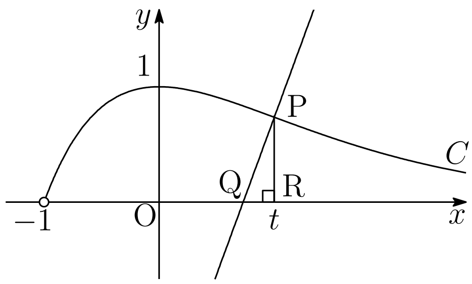
(vi) $\dfrac{73}{32}<a$ のとき，$g(x)>0$ であるから

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって　$\beta=-1$

以上から，(iv) 以外の場合であればよいから　$\boldsymbol{a\leqq\dfrac{9}{4},\ \dfrac{73}{32}\leqq a}$ ■

4.6　(1)　$f(x) = (x+1)e^{-x}$ とおくと



$$f'(x) = -xe^{-x}$$

$C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t, f(t))$ における法線の方程式は

$$x - t + f'(t)\{y - f(t)\} = 0$$

これに $y = 0$ を代入すると　$x - t - f'(t)f(t) = 0$

$$x - t = f'(t)f(t) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{QR} = |x - t| = |f'(t)f(t)|$$

$t > -1$ に注意して　$\mathrm{QR} = d(t) = |te^{-t}\cdot(t+1)e^{-t}| = \boldsymbol{|t|(t+1)e^{-2t}}$

補足　C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における法線は，ベクトル $(1,\ f'(t))$ と垂直であるから，法線上の任意の点 $(x,\ y)$ について

$$(x - t,\ y - f(t))\perp(1,\ f'(t)) \quad \text{ゆえに} \quad x - t + f'(t)\{y - f(t)\} = 0$$

本題では，$t = 0$ のとき，$f'(t) = 0$ であるから，一般的 (generic) に用いる公式 $y - f(t) = -\dfrac{1}{f'(t)}(x - t)$ では $t \neq 0$ として PQ を求め，$t = 0$ の場合は，法線 PQ は y 軸と一致するから $\mathrm{QR} = 0$ となる．これらをまとめて

$$\mathrm{QR} = |t|(t+1)e^{-2t}$$

と表記できることを説明する必要がある．やはり一般 (general) 公式

$$x - t + f'(t)\{y - f(t)\} = 0$$

を用いた方がよい．(薬でもそうであるが)，ジェネリックでも大半の場合に有効であるが，ごく一部に適用できない場合がある．

(2)　$g(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ とおくと

$$g'(x) = e^x - 1 - x, \quad g''(x) = e^x - 1 \geqq e^0 - 1 = 0$$

$g'(0) = 0$，$g''(x) \geqq 0\ (x \geqq 0)$ であるから　$g'(x) \geqq 0\ (x \geqq 0)$

$g(0) = 0$，$g'(x) \geqq 0\ (x \geqq 0)$ であるから　$g(x) \geqq 0\ (x \geqq 0)$

よって　$x \geqq 0$ のとき　$e^x \geqq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

別解 $x \geqq 0$ のとき[15]

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + \int_0^x e^t\,dt = 1 + \int_0^x (t-x)'e^t\,dt \\
&= 1 + \Big[\,(t-x)e^t\,\Big]_0^x - \int_0^x (t-x)e^t\,dt \\
&= 1 + x - \int_0^x \left\{\frac{1}{2}(t-x)^2\right\}' e^t\,dt \\
&= 1 + x - \left[\,\frac{1}{2}(t-x)^2e^t\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2e^t\,dt \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2e^t\,dt \geqq 1 + x + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}
$$

(3) $h(t) = t(t+1)e^{-2t}$ $(t > -1)$ とおくと　$h'(t) = (1-2t^2)e^{-2t}$

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$h(t)$	(0)	↘	極小	↗	極大	↘

$$h\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}},$$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < t$ のとき　$0 < h(t) < h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}e^{-\sqrt{2}}$

$d(t) = |h(t)|$ であるから，$d(t)$ の最大値を M とすると

$$M = \max\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}e^{-\sqrt{2}}\right)$$

このとき　$\dfrac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{2}e^{-\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}-1)^2e^{2\sqrt{2}} = \left\{(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}\right\}^2$

(2) の結果に $x = \sqrt{2}$ を代入すると

$$e^{\sqrt{2}} \geqq 1 + \sqrt{2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$$

上の 2 式から　$\dfrac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{2}e^{-\sqrt{2}}} \geqq \{(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\}^2 = 2 > 1$

よって，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}}}$ ■

[15] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2021.pdf の $\boxed{6}$ を参照.

4.7 (1) $y=\sin x$ を微分すると　$y'=\cos x$
曲線 $y=\sin x$ 上の点 $(a_n,\ \sin a_n)$ における接線の方程式は

$$y-\sin a_n=(x-a_n)\cos a_n$$

これが点 $(-p,\ 0)$ を通るから，$\cos a_n\neq 0$ に注意して

$$-\sin a_n=(-p-a_n)\cos a_n \quad \text{よって} \quad \tan a_n=a_n+p$$

(2) $f(x)=\tan x-x$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x\geqq 0$
a_n は方程式 $f(x)=p$ の解である $(p>0)$．$f(x)$ は単調増加であり，

$$f((n-1)\pi)=-(n-1)\leqq 0, \qquad \lim_{x\to\frac{2n-1}{2}\pi-0} f(x)=\infty$$

であるから，開区間 $I_n=\left((n-1)\pi,\ \dfrac{2n-1}{2}\pi\right)$ に方程式 $f(x)=p$ の解 a_n が唯一存在する．$a_n\in I_n$，$a_{n+1}\in I_{n+1}$ より

$$a_{n+1}-a_n>0 \quad \cdots ①$$

$f(a_n)=f(a_{n+1})$ であるから

$$\tan a_n-a_n=\tan a_{n+1}-a_{n+1} \quad \cdots ②$$

①，② より　$\tan a_{n+1}-\tan a_n=a_{n+1}-a_n>0$

$\tan a_n=\tan(a_n+\pi)$ であるから

$$\tan(a_n+\pi)<\tan a_{n+1}$$

このとき，$a_n+\pi\in I_{n+1}$，$a_{n+1}\in I_{n+1}$ に注意して

$$a_n+\pi<a_{n+1} \quad \text{よって} \quad a_{n+1}-a_n>\pi$$

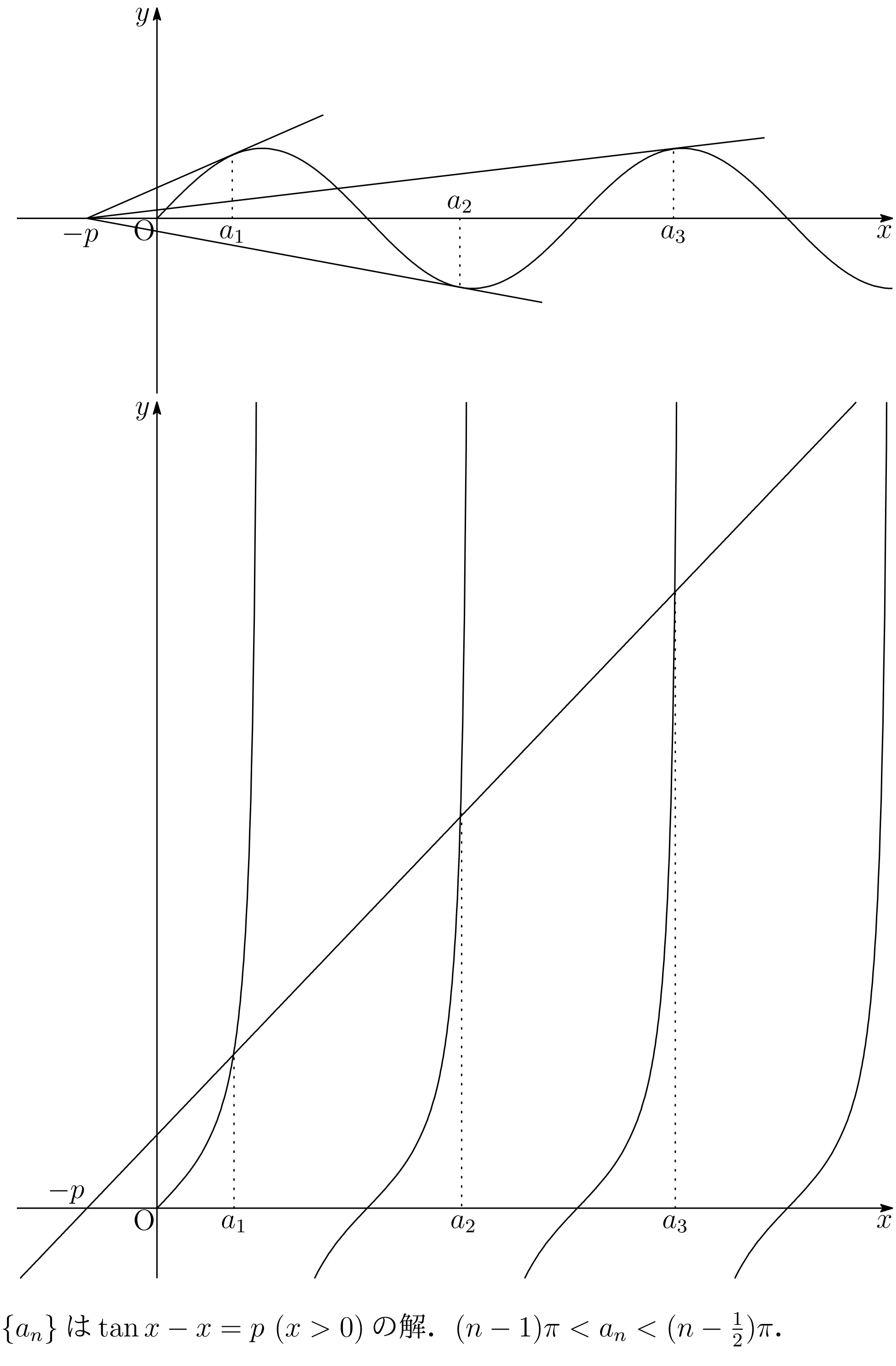
(3) ② から，$a_{n+1}-a_n=\tan a_{n+1}-\tan a_n$．これを (2) の結果に代入すると

$$\tan a_{n+1}-\tan a_n>\pi$$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\tan a_{k+1}-\tan a_k)>\sum_{k=1}^{n}\pi$

$a_1=\dfrac{\pi}{3}$ より　$\tan a_{n+1}-\tan\dfrac{\pi}{3}>n\pi$　よって　$\tan a_{n+1}>n\pi+\sqrt{3}$

補足 グラフは次にようになる．



$\{a_n\}$ は $\tan x - x = p\ (x > 0)$ の解．$(n-1)\pi < a_n < (n - \frac{1}{2})\pi$．

$a_{n+1} - a_n > \pi$ より

$$(\tan a_{n+1} - p) - (\tan a_n - p) > \pi \quad ゆえに \quad \tan a_{n+1} - \tan a_n > \pi \quad ■$$

4.8 (1) 関数 $f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ において連続な増加関数で $f(0)=1$ であるから，区間 $0 \leqq x \leqq 2-\dfrac{1}{n}$ において (n は正の整数)

$$\frac{f(x)}{2-x} \geqq \frac{f(0)}{2-x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{f(x)}{2-x} \geqq \frac{1}{2-x}$$

したがって

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx \geqq \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{2-x}\,dx = -\Big[\ \log(2-x)\ \Big]_0^{2-\frac{1}{n}} = \log 2n$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log 2n = \infty$ より $\qquad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = \infty$

(2) (1) と同様に，$2+\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq y$ において，$\dfrac{f(x)}{x-2} > \dfrac{1}{x-2}$ より

$$\begin{aligned} F_n(y) = \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{x-2}\,dx &> \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= \Big[\ \log(x-2)\ \Big]_{2+\frac{1}{n}}^{y} = \log n(y-2) \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{y\to\infty} \log n(y-2) = \infty$ より $\quad \displaystyle\lim_{y\to\infty} F_n(y) = \infty$

与えらえた等式 (A) $\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = 0$ より

$$\int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{x-2}\,dx = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx \quad \text{ゆえに} \quad F_n(a_n) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx \qquad (*)$$

$F_n'(y) = \dfrac{f(y)}{y-2}$ より，$y>2$ において $\quad F_n'(y) > 0$

$F_n(y)$ から $\quad F_n\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 0$． $\quad (*)$ より $\quad F_n\left(2+\dfrac{1}{n}\right) < F_n(a_n)$

$$F_n(4) - F_n(a_n) = \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{x-2}\,dx - \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx$$

ここで $\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx$ について，$x=4-t$ とおくと

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = \int_4^{2+\frac{1}{n}} \frac{f(4-t)}{t-2}\,(-dt) = \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(4-x)}{x-2}\,dx$$

$2+\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 4$ において $4-x<x$ で，$f(x)$ が増加関数であるから

$$f(x)-f(4-x)>0$$

が成立する．これから

$$\begin{aligned} F_n(4)-F_n(a_n) &= \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{x-2}\,dx - \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(4-x)}{x-2}\,dx \\ &= \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)-f(4-x)}{x-2}\,dx > 0 \end{aligned}$$

したがって

$$F_n\left(2+\frac{1}{n}\right) < F_n(a_n) < F_n(4) \qquad (**)$$

$F_n(y)$ は単調増加なので，$(**)$，すなわち，(A) を満たす a_n はただ 1 つ存在する．

(3) $F_n(y)$ は単調増加なので，$(**)$ より，すべての n について，不等式

$$a_n < 4$$

が成立する．■

4.9 (1) C_1，C_2 は偶関数である．$x=0$ の点はこれらの共有点ではないから，
$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，共有点が 1 つとなる a の値を求めればよい．
C_1，C_2 の方程式から y を消去すると

$$4\cos^2 x = a - \tan^2 x \quad \text{ゆえに} \quad a = 4\cos^2 x + \tan^2 x \qquad (*)$$

$f(x) = 4\cos^2 x + \tan^2 x \ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x) = -8\cos x\sin x + 2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x(1-4\cos^4 x)}{\cos^3 x}$$

$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(4)	$\searrow$	3	$\nearrow$	(∞)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \infty$$

$0<a<4$ より，$(*)$ がただ 1 つの実数解をもつときの a の値は　**3**

別解 C_1，C_2 は偶関数である．$x=0$ の点はこれらの共有点ではないから，
$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，共有点が 1 つとなる a の値を求めればよい．

C_1，C_2 の方程式から y を消去すると　$4\cos^2 x = a - \tan^2 x$

$t=\cos^2 x$ とおくと $(0<t<1)$，$\tan^2 x = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1-t}{t}$ より

$$4t = a - \frac{1-t}{t} \quad \text{整理すると} \quad 4t^2-(a+1)t+1=0 \qquad \cdots ①$$

この 2 次方程式が重解をもつから

$$(a+1)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+5)(a-3)=0$$

$0<a<4$ より　$a=3$　このとき，① は重解 $\dfrac{1}{2}$ をもち，条件を満たす．
よって　$\boldsymbol{a=3}$

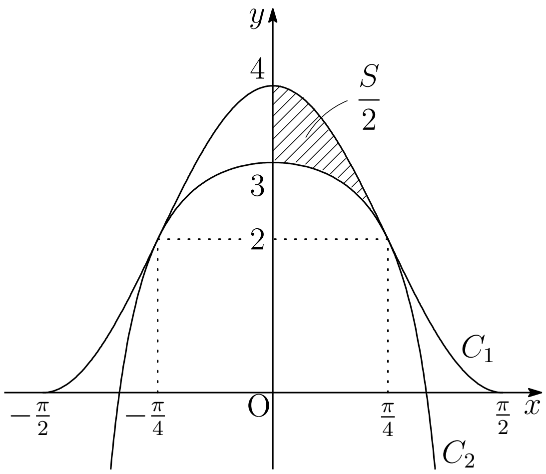
(2) $f(x) \geqq 3$ より，$C_1 : y = 4\cos^2 x$，$C_2 : y = 3 - \tan^2 x$ について

$$4\cos^2 x - (3 - \tan^2 x) = f(x) - 3 \geqq 0$$

したがって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(x) - 3\}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4\cos^2 x + \tan^2 x - 3)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cos 2x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2\right) dx \\
&= \Big[\ \sin 2x + \tan x - 2x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

よって　　$S = \mathbf{4 - \boldsymbol{\pi}}$



4.10 P が線分 AB 上にあるとき，P$(2-2t,\ 0,\ 2t)$ とする $\left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$.

P から xy 平面に垂線 PR を引くと　R$(2-2t,\ 0,\ 0)$

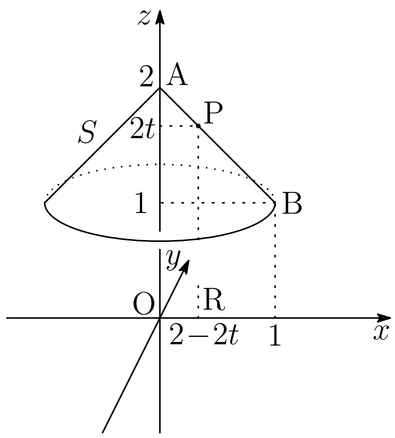
直角三角形 PQR において，PQ $=2$，PR $=2t$ であるから

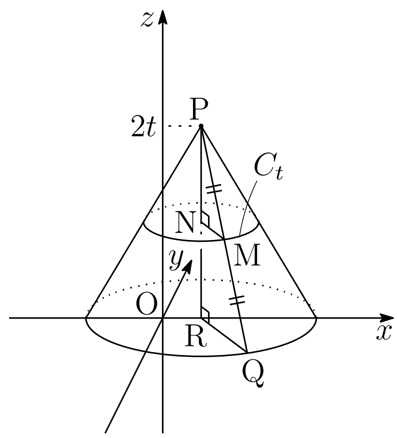
$$\mathrm{QR} = \sqrt{\mathrm{PQ}^2 - \mathrm{PR}^2} = \sqrt{2^2-(2t)^2} = 2\sqrt{1-t^2}$$

PR の中点を N とすると，中点連結定理により

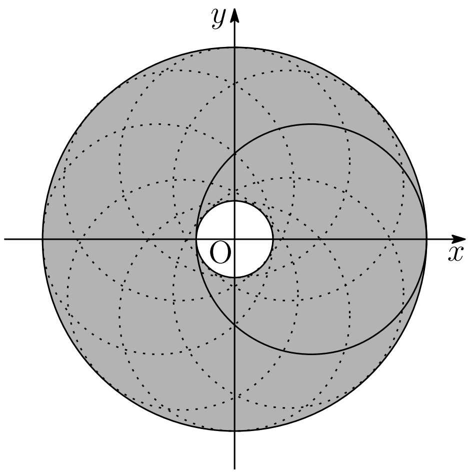
$$\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{QR} = \sqrt{1-t^2}$$

したがって，平面 $z=t$ における中心 $(2-2t,\ 0,\ t)$，半径 $\sqrt{1-t^2}$ の円を C_t とすると，M は C_t 上にある．

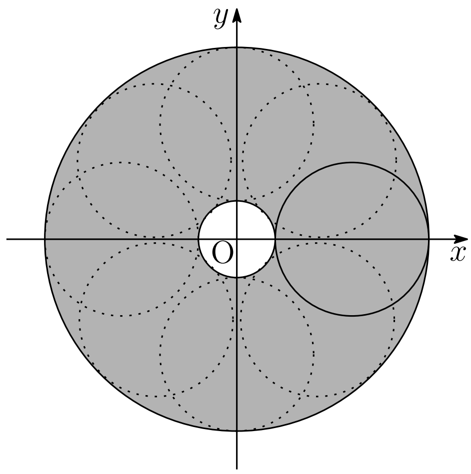




C_t の x 座標 $2-2t$ および半径 $\sqrt{1-t^2}$ の大小関係により，点 P が S 上にあるから，点 M が通過する範囲は，次の領域 (C_t の包絡線) を描く．



$2-2t < \sqrt{1-t^2}$



$2-2t > \sqrt{1-t^2}$

K の $z=t$ における断面積を $S(t)$ とすると $\left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \pi\left\{(2-2t)+\sqrt{1-t^2}\right\}^2 - \pi\left|(2-2t)-\sqrt{1-t^2}\right|^2 \\
&= 4\pi(2-2t)\sqrt{1-t^2} \\
&= 8\pi\sqrt{1-t^2} - 8\pi t\sqrt{1-t^2}
\end{aligned}
$$

K の体積を V とすると

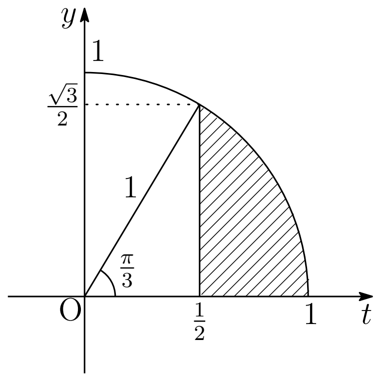
$$
\frac{V}{8\pi} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{S(t)}{8\pi}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt \qquad (*)
$$

ここで

$$
\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt
$$

は，右の図の斜線部分の面積と等しいから

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$



また $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \cdots ②$

①，② を $(*)$ に代入すると

$$
\frac{V}{8\pi} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}
$$

よって $V = 8\pi\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\pi\left(\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right)}$ ■

4.11 (1) $f(x)=x^2-px+1$ および $f(\alpha)=0$ より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - p\cdot\frac{1}{\alpha}+1 \\ &= \frac{1}{\alpha^2}(1-p\alpha+\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}f(\alpha)=0 \end{aligned}$$

(2) $C: y=x^2-px+1$，$l: y=\dfrac{1}{p}x$ から，y を消去すると

$$x^2-px+1=\frac{1}{p}x \quad \text{ゆえに} \quad (x-p)\left(x-\frac{1}{p}\right)=0$$

l の方程式から　$x=p$ のとき $y=1$，$x=\dfrac{1}{p}$ のとき $y=\dfrac{1}{p^2}$

よって，C と l の交点の座標は　$\boldsymbol{(p,\ 1)}$，$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{p},\ \dfrac{1}{p^2}\right)}$

(3) $f(x)=x^2-px+1$ より　$f'(x)=2x-p$

$f(\alpha)=0$，$f'(\alpha)=2\alpha-p$ であるから，m の方程式は

$$x-\alpha+f'(\alpha)\{y-f(\alpha)\}=0 \quad \text{すなわち} \quad x-\alpha+(2\alpha-p)y=0$$

これと l の方程式から y を消去すると

$$x-\alpha+(2\alpha-p)\cdot\frac{1}{p}x=0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha(2x-p)=0$$

$\alpha\neq 0$ より　$x=\dfrac{p}{2}$　これを l の方程式に代入すると　$y=\dfrac{1}{2}$

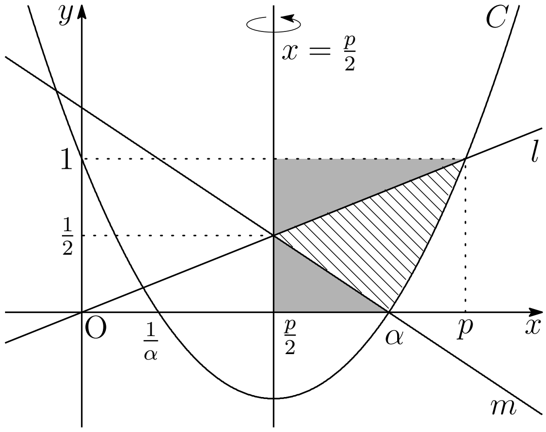
よって，交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

(4) $f(x)=0$ の解が $\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}$ であるから $(\alpha>1)$，解との係数の関係により

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=p \quad ゆえに \quad 0<\frac{1}{\alpha}<\frac{p}{2}<\alpha$$

曲線 C の方程式を変形すると $\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2=y+\dfrac{p^2}{4}-1$

連立不等式の表す領域 D は，下の図の斜線部分である．



したがって，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^1\left(x-\frac{p}{2}\right)^2dy-\frac{1}{3}\pi\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\pi\left(p-\frac{p}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\\
&=\pi\int_0^1\left(y+\frac{p^2}{4}-1\right)dy-\frac{\pi}{6}\left(\alpha^2-\alpha p+\frac{p^2}{2}\right)\\
&=\pi\left[\frac{y^2}{2}+\left(\frac{p^2}{4}-1\right)y\right]_0^1-\frac{\pi}{6}\left(\alpha^2-\alpha p+\frac{p^2}{2}\right)\\
&=\pi\left(\frac{p^2}{6}-\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{6}+\frac{\alpha p}{6}\right)\\
&=\pi\left\{\frac{1}{6}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{6}+\frac{\alpha}{6}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)}
\end{aligned}$$

補足 2点$(\alpha,\ 0)$，$(p,\ 1)$を通る直線をnとする．3直線$l,\ m,\ n$で囲まれた三角形をTとし，Tの面積をSとすると

$$S=\frac{1}{2}\left(p-\frac{p}{2}\right)g(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot\frac{\alpha}{p}=\frac{\alpha}{4}$$

Tの重心をGとし，Gのx座標をx_gとすると

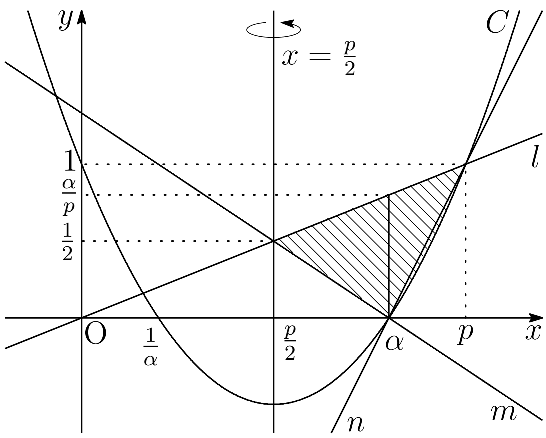
$$x_g=\frac{1}{3}\left(\frac{p}{2}+\alpha+p\right)=\frac{p}{2}+\frac{\alpha}{3}$$

Gと直線$x=\dfrac{p}{2}$の距離をdとすると

$$d=x_g-\frac{p}{2}=\left(\frac{p}{2}+\frac{\alpha}{3}\right)-\frac{p}{2}=\frac{\alpha}{3}$$

Tを直線$x=\dfrac{p}{2}$のまわりに1回転してできる立体の体積をV_1とすると，パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem) により[16]

$$V_1=2\pi dS=2\pi\cdot\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{\alpha}{4}=\frac{\pi\alpha^2}{6}$$



直線nの方程式は　$y=\dfrac{1}{p-\alpha}(x-\alpha)$　すなわち　$y=\alpha(x-\alpha)$

Cとnで囲まれた図形を直線$x=\dfrac{p}{2}$のまわりに1回転してできる立体の体積をV_2とすると，バウムクーヘン型求積法により

$$\frac{V_2}{2\pi}=\int_\alpha^p\left(x-\frac{p}{2}\right)\left\{\alpha(x-\alpha)-(x-\alpha)\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)\right\}dx$$

[16] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6を参照)

$p = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ を利用すると

$$\begin{aligned}
\frac{V_2}{2\pi} &= \int_\alpha^p \left(x - \frac{p}{2}\right)(x-\alpha)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - x\right) dx \\
&= \int_\alpha^p \left\{\frac{p}{2} - (p-x)\right\}(x-\alpha)(p-x)\, dx \\
&= \frac{p}{2}\int_\alpha^p (x-\alpha)(p-x)\, dx - \int_\alpha^p (x-\alpha)(p-x)^2\, dx \\
&= \frac{p}{2}\cdot\frac{1}{6}(p-\alpha)^3 - \frac{1}{12}(p-\alpha)^4 \\
&= \frac{1}{12}\{p-(p-\alpha)\}(p-\alpha)^3 = \frac{1}{12}\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 = \frac{1}{12\alpha^2}
\end{aligned}$$

したがって　$V_2 = \dfrac{\pi}{6\alpha^2}$　　よって　$V = V_1 + V_2 = \dfrac{\pi}{6}\left(\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right)$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\, dx$$

また積分公式[17]

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用している． ■

[17] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

4.12 (1) $l,\ m,\ n$ は正の奇数であるから

$$l = 2a+1, \quad m = 2b+1, \quad n = 2c+1 \quad (a,\ b,\ c \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

とおくと，$l+m+n=99$ のとき

$$2a+1+2b+1+2c+1=99 \quad \text{ゆえに} \quad a+b+c=48$$

これを満たす組 $(a,\ b,\ c)$ の個数は

$${}_3\mathrm{H}_{48} = {}_{3+48-1}\mathrm{C}_{48} = {}_{50}\mathrm{C}_2 = \frac{50\cdot 49}{2} = \mathbf{1225}\ (\text{個})$$

(2) $l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つだけ含む組は

$$\text{(i)}\ \ l=m\neq n \qquad \text{(ii)}\ \ m=n\neq l \qquad \text{(iii)}\ \ n=l\neq m$$

の 3 つの場合がある．(i) について

$$2a+1=2b+1\neq 2c+1 \quad \text{ゆえに} \quad a=b\neq c,\ a+b+c=48$$

$b=a$ より，$c=48-2a\neq a$ であるから

$$a \geqq 0, \quad 48a-2a \geqq 0, \quad 48-2a\neq a$$

a は 16 を除く 0 以上 24 以下の整数で 24 組ある．

(ii)，(iii) の場合も (i) の場合と同様にそれぞれ 24 組ある．

また，$l=m=n$ が等しい同じ奇数を含む組が 1 組ある．

よって，求める個数は　$24\times 3+1=\mathbf{73}$ (個)

(3) $K=2k+3$ とおき (k は 0 以上の整数)，N を求める．(1) と同様に

$$2a+1+2b+1+2c+1=2k+3 \quad \text{ゆえに} \quad a+b+c=k$$

したがって　$N={}_3\mathrm{H}_k={}_{3+k-1}\mathrm{C}_k={}_{k+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{(k+2)(k+1)}{2}$

$N>K$ より　$\dfrac{(k+2)(k+1)}{2}>2k+3$　　ゆえに　$k(k-1)>4$

これを満たす最小の k が 3 であるから，求める K は　$2\cdot 3+3=\mathbf{9}$　■

4.13 (1) $ab+2c \geqq abc$ より，$(ab-2)c \leqq ab$ であるから，$ab \leqq 2$ のとき，c は任意．

$ab \geqq 3$ のとき　　$c \leqq \dfrac{ab}{ab-2} = 1 + \dfrac{2}{ab-2}$　　$\cdots(*)$

とくに，$ab \geqq 5$ のとき　$c < 2$　ゆえに　$c = 1$

(i) $ab \leqq 2$，すなわち，$(a,\ b) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ のとき

$$c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

(ii) $ab = 3$，すなわち，$(a,\ b) = (1,\ 3),\ (3,\ 1)$ のとき，$(*)$ より

$$c \leqq 3 \quad \text{ゆえに} \quad c = 1,\ 2,\ 3$$

(iii) $ab = 4$，すなわち，$(a,\ b) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ のとき，$(*)$ より

$$c \leqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad c = 1,\ 2$$

(iv) $ab \geqq 5$ のとき，$c = 1$ で，$(a,\ b)$ の組は，(i)〜(iii) を除いた

$$6^2 - (3+2+3) = 28 \text{ 通り}$$

(i)〜(iv) より，求める確率は

$$\frac{3{\cdot}6 + 2{\cdot}3 + 3{\cdot}2 + 28{\cdot}1}{6^3} = \frac{58}{216} = \mathbf{\frac{29}{108}}$$

(2) まず「$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素」であることは「ab と $2c$ が互いに素」であるための必要十分条件であることを示す．

$(\Longrightarrow)$ ab と $2c$ が素数 p を因数にもつならば，$ab+2c$ および $2abc(= ab{\cdot}2c)$ は素数 p を因数にもち，$ab+2c$ と $2abc$ はともに p を因数にもつ．

$(\Longleftarrow)$ $ab+2c$ と $2abc(= ab{\cdot}2c)$ が素数 q を因数にもつならば，$ab{\cdot}2c$ が素数 q を因数にもつから，ab または $2c$ が素数 q を因数にもつ．

$$2c = (ab+2c) - ab, \quad ab = (ab+2c) - 2c$$

ab が素数 q を因数にもつとき上の第 1 式から $2c$ も q を因数にもち，$2c$ が素数 q を因数にもつとき上の第 2 式から ab も素数 q を因数にもつ．(証終)

したがって，ab と $2c$ が互いに素となる確率を求めればよい．

$(a,\ b)=(1,\ 1)$ のとき　$c=1,2,3,4,5,6$

$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3)$ のとき　$c=1,2,4,5$

$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 5)$ のとき　$c=1,2,3,4,6$

$(a,\ b)=(3,\ 5),\ (5,\ 3)$ のとき　$c=1,2,4$

よって，求める確率は

$$\frac{1\cdot 6+3\cdot 4+3\cdot 5+2\cdot 3}{6^3}=\frac{39}{216}=\boldsymbol{\frac{13}{72}}$$

■

4.14 (1) $\vec{v}_k = \left(\cos\dfrac{2k\pi}{3},\ \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ より

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_3 = \vec{v}_6 = \cdots,\quad \vec{v}_1 = \vec{v}_4 = \vec{v}_7 = \cdots,\quad \vec{v}_2 = \vec{v}_5 = \vec{v}_8 = \cdots$$

$\vec{u}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を次のように定める．

$$\vec{u}_j = \begin{cases} \vec{v}_k & (j\text{ 回目で表が出て，}k\text{ は }j\text{ 回目までに裏が出た回数}) \\ \vec{0} & (j\text{ 回目で裏が出る}) \end{cases}$$

与えられた漸化式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}_n = \sum_{j=1}^{n} \vec{u}_j$$

$\vec{u}_j \in \left\{\vec{0},\ \vec{v}_0,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2\right\}$ であり，上式の右辺の $\vec{v}_0,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ の個数をそれぞれ $a,\ b,\ c$ とすると，X_n が O にあるとき，$\vec{v}_0 = -(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ により

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OX}}_n &= a\vec{v}_0 + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 = -a(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 \\ &= (b-a)\vec{v}_1 + (c-a)\vec{v}_2 = \vec{0} \end{aligned}$$

$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ は，1 次独立であるから

$$b - a = c - a = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = b = c \qquad (*)$$

このとき，$a + b + c \leqq 8$ であるから　$a = b = c = 0,\ 1,\ 2$

(i) $a = b = c = 0$ のとき，8 回とも裏が出る確率であるから　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

(ii) $a = b = c = 1$ のとき，裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を α_k とすると $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OX}}_8 &= \alpha_0\vec{v}_0 + \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 + \alpha_4\vec{v}_4 + \alpha_5\vec{v}_5 \\ &= (\alpha_0 + \alpha_3)\vec{v}_0 + (\alpha_1 + \alpha_4)\vec{v}_1 + (\alpha_2 + \alpha_5)\vec{v}_2 = \vec{0} \end{aligned}$$

$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3$，$\alpha_0 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_5$ より

$$\alpha_0 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_5 = 1$$

このときの確率は　$2^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

(iii) $a=b=c=2$ のとき，裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を β_k とすると $(k=0,1,2)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_8}=\beta_0\vec{v}_0+\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2=\vec{0}$$

$\beta_0+\beta_1+\beta_2=6$，$\beta_0=\beta_1=\beta_2$ より

$$\beta_0=\beta_1=\beta_2=2$$

このときの確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

(i)〜(iii) より，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8+2^3\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^8=10\left(\frac{1}{2}\right)^8=\mathbf{\frac{5}{128}}$$

(2) $(*)$ より，X_n が O にあるとき，表の出た回数 $r=a+b+c$ について，$a=b=c$ であるから，r は 3 の倍数である．まず

$$p_r=0 \quad (r\not\equiv 0 \pmod 3)$$

$r\equiv 0 \pmod 3$，すなわち，$r=3s$ のとき $(s=0,1,2,\cdots,66)$，裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を t_k とすると

$$t_0+t_3+t_6+\cdots+t_{198-3s}=s$$
$$t_1+t_4+t_7+\cdots+t_{199-3s}=s$$
$$t_2+t_5+t_8+\cdots+t_{200-3s}=s$$

上の 3 式を満たす t_k の組は，すべて

$${}_{67-s}\mathrm{H}_s={}_{(67-s)+s-1}\mathrm{C}_s={}_{66}\mathrm{C}_s$$

このとき $\quad p_{3s}=({}_{66}\mathrm{C}_s)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{200}=\dfrac{({}_{66}\mathrm{C}_s)^3}{2^{200}} \qquad (**)$

よって $\quad \boldsymbol{p_r=\begin{cases} \mathbf{0} & (r\not\equiv 0) \\ \dfrac{\left({}_{66}\mathrm{C}_{\frac{r}{3}}\right)^3}{2^{200}} & (r\equiv 0)\end{cases} \pmod 3}$

p_r が最大となるのは，(**) より，${}_{66}\mathrm{C}_s$ が最大となるときである．

$$\frac{{}_{66}\mathrm{C}_{s+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_s}=\frac{66!}{(s+1)!(65-s)!}\cdot\frac{s!(66-s)!}{66!}=\frac{66-s}{s+1}$$

ゆえに　$\dfrac{{}_{66}\mathrm{C}_{s+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_s}-1=\dfrac{65-2s}{s+1}$

したがって

$${}_{66}\mathrm{C}_0<{}_{66}\mathrm{C}_1<\cdots<{}_{66}\mathrm{C}_{32}<{}_{66}\mathrm{C}_{33}>{}_{66}\mathrm{C}_{34}>\cdots>{}_{66}\mathrm{C}_{66}$$

よって，$s=33$，すなわち，$\boldsymbol{r=99}$ のとき p_r は最大となる．■

4.15 (1) $f(m,\ n) = {}_{m+n}\mathrm{C}_m - mn - 2\ (m \leqq n)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(1,\ n) &= (1+n) - 1{\cdot}n - 2 = -1 \\ f(2,\ n) &= \frac{1}{2}(n+2)(n+1) - 2n - 2 = \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \end{aligned}$$

$f(m,\ n) = 0$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めればよいから

$$\boldsymbol{(m,\ n) = (2,\ 2)}$$

(2) 正の整数 $l = 2, 3, \cdots, m-1$ について

$$\begin{aligned} {}_{m+n}\mathrm{C}_{l+1} - {}_{m+n}\mathrm{C}_l &= \frac{(m+n)!}{(l+1)!(m+n-l-1)!} - {}_{m+n}\mathrm{C}_m \\ &= \frac{m+n-l}{l+1}{\cdot}{}_{m+n}\mathrm{C}_m - {}_{m+n}\mathrm{C}_m \\ &= \frac{m+n-2l-1}{l+1}{\cdot}{}_{m+n}\mathrm{C}_m \\ &= \frac{n-m+2(m-1-l)+1}{l+1}{\cdot}{}_{m+n}\mathrm{C}_m > 0 \end{aligned}$$

ゆえに　${}_{m+n}\mathrm{C}_2 < {}_{m+n}\mathrm{C}_3 < \cdots < {}_{m+n}\mathrm{C}_{m-1} < {}_{m+n}\mathrm{C}_m$

したがって，$2 \leqq m \leqq n$ を満たす整数 $m,\ n$ について次式が成立する．

$$ {}_{m+n}\mathrm{C}_m - {}_{m+n}\mathrm{C}_2 \geqq 0 \qquad (*)$$

ただし，上式について等号が成立するとき，$m = 2$ である．

$$f(m,\ n) = {}_{m+n}\mathrm{C}_m - {}_{m+n}\mathrm{C}_2 + {}_{m+n}\mathrm{C}_2 - mn - 2$$

とすると，$2 \leqq m \leqq n$ であるから

$$\begin{aligned} {}_{m+n}\mathrm{C}_2 - mn - 2 &= \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1) - mn - 2 \\ &= \frac{1}{2}(m+1)(m-2) + \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \geqq 0 \qquad (**) \end{aligned}$$

が成立する．ただし，等号が成立するとき，$m = n = 2$ である．

$(*)$，$(**)$ から，$f(m,\ n) = 0$ となるのは，(1) の結果に限る．

別解 1 (1) で $1 \leqq m \leqq 2$ のとき，$(m,\ n)=(2,\ 2)$ がただ 1 つの解である．

$m \geqq 3$ のとき，$(m,\ n)$ の解が存在しないことを示せばよい．

$m \geqq 3$ のとき　　${}_{m+n}\mathrm{C}_2 < {}_{m+n}\mathrm{C}_3 < \cdots < {}_{m+n}\mathrm{C}_m$

また　　${}_{m+n}\mathrm{C}_2-(mn+2)=\dfrac{1}{2}\{n(n-1)+m(m-1)-4\}$

$n \geqq m \geqq 3$ より　$n(n-1) \geqq m(m-1) \geqq 3{\cdot}2>4$

よって　　${}_{m+n}\mathrm{C}_2>mn+2$

別解 2 与えられた等式から

$$g(m,\ n)=\frac{{}_{m+n}\mathrm{C}_m}{mn+2}=\frac{(m+n)!}{m!n!(mn+2)}$$

とおく．(1) の結果から $g(m,\ n)=1$ を満たす整数 $m,\ n\ (2 \leqq m \leqq n)$ を求めればよい．

$$\begin{aligned}\frac{g(m,\ n+1)}{g(m,\ n)}-1&=\frac{(m+n+1)(mn+2)}{(n+1)(mn+m+2)}-1\\&=\frac{\{(n+1)+m\}(mn+2)}{(n+1)\{(mn+2)+m\}}-1\\&=\frac{m(mn+2)-m(n+1)}{(n+1)\{(mn+2)+m\}}\\&=\frac{m\{(m-1)n+1\}}{(n+1)\{(mn+2)+m\}}>0\end{aligned}$$

$g(m,\ n+1)>g(m,\ n)$ であるから，m を固定すると，$g(m,\ n)$ は n について単調増加．また，$g(m,\ n)$ は m，n の対称式であるから，同様に n を固定すると，$g(m,\ n)$ は m について単調増加．したがって

$$g(m,\ n) \geqq g(2,\ 2)=1$$

が成立する．ただし，等号が成立するとき，$m=n=2$ である．

よって，求める正の整数の組 $(m,\ n)$ は (1) の結果に限る．　■

4.16 (1) $n^4 = 1 + 210m^2 \cdots$ ① の右辺は奇数であるから，n は奇数．

$n^2+1,\ n^2-1$ は偶数であるから，$\dfrac{n^2+1}{2},\ \dfrac{n^2-1}{2}$ は整数．

$\dfrac{n^2+1}{2} - \dfrac{n^2-1}{2} = 1$ より，$\dfrac{n^2+1}{2},\ \dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素である．

補足 ユークリッドの互除法により $\dfrac{n^2+1}{2} = \dfrac{n^2-1}{2}\cdot 1 + 1$

$\dfrac{n^2+1}{2},\ \dfrac{n^2-1}{2}$ の最大公約数が 1 であるから，これらの 2 数は互いに素．

(2) n が奇数であるから，$n+1,\ n-1$ はともに偶数で，一方は 4 で割り切れるから，次式から n^2-1 は，8 の倍数である．

$$n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$$

① より　$(n^2+1)(n^2-1) = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7m^2 \quad \cdots$ ①′

ここで　$n^2 \equiv 0,\ 1 \pmod 3$ より　$n^2+1 \not\equiv 0 \pmod 3 \quad \cdots$ ②

$n^2 \equiv 0,\ 1,\ 4,\ 2 \pmod 7$ より　$n^2+1 \not\equiv 0 \pmod 7 \quad \cdots$ ③

①′，②，③ より，n^2-1 は $3\cdot 7$ の倍数である．

よって，n^2-1 は，$8\times 3\cdot 7$，すなわち，168 の倍数である．

(3) (2) の結論から，$n^2-1 = 168N$ (N は整数) とおくと，①′ より

$$(168N+2)\cdot 168N = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7m^2 \quad \text{ゆえに} \quad m = 2\sqrt{\frac{2N(84N+1)}{5}}$$

$2N$ は偶数，$84N+1$ は奇数であるから，$N = 2k$ (k は整数) とおくと

$$m = 4\sqrt{\frac{k(168k+1)}{5}}, \quad n = \sqrt{336k+1} \qquad (*)$$

$(*)$ の第 1 式から，整数 k の必要条件は

$$k \equiv 0 \quad \text{または} \quad 168k+1 \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad k \equiv 0,\ 3 \pmod 5$$

$k = 3$ のとき　$m = 4\sqrt{3\cdot 101}$，$n = \sqrt{1009}$ より，不適

$k = 5$ のとき　$m = 4\sqrt{841} = 4\cdot 29 = 116,\ n = \sqrt{1681} = 41$

よって　$\boldsymbol{(m,\ n) = (116,\ 41)}$ ■

4.17 2 つの正の整数 $X,\ Y$ の最大公約数を $(X,\ Y)$ と表記することにする．

$$\begin{aligned} n^4+2&=(n^2+2)(n^2-2)+6,\\ n^6+2&=(n^2+2)(n^4-2n^2+4)-6 \end{aligned}$$

ユークリッドの互除法により

$$\begin{aligned} (n^4+2,\ n^2+2)&=(n^2+2,\ 6),\\ (n^6+2,\ n^2+2)&=(n^2+2,\ 6) \end{aligned}$$

したがって，3 つの整数 $n^2+2,\ n^4+2,\ n^6+2$ の最大公約数 A_n は，

$$A_n=(n^2+2,\ 6)$$

$A_n \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ となるから，法 6 について

$$\begin{array}{llll} n\equiv 0 \text{ のとき} & n^2+2\equiv 2 & \text{ゆえに} & A_n=2 \pmod 6\\ n\equiv \pm1 \text{ のとき} & n^2+2\equiv 3 & \text{ゆえに} & A_n=3 \pmod 6\\ n\equiv \pm2 \text{ のとき} & n^2+2\equiv 0 & \text{ゆえに} & A_n=6 \pmod 6\\ n\equiv 3 \text{ のとき} & n^2+2\equiv 5 & \text{ゆえに} & A_n=1 \pmod 6 \end{array}$$

よって $$\boldsymbol{A_n=\begin{cases} 2 & (n\equiv 0)\\ 3 & (n\equiv \pm1)\\ 6 & (n\equiv \pm2)\\ 1 & (n\equiv 3) \end{cases} \pmod 6}$$ ■

4.18 (1) $A=a+b+c$，$B=bc+ca+ab$，$C=abc$とおくと，a, b, cを解とする3次方程式は

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0$$

A, B, Cが1以外の素数pを因数にもつと仮定する (背理法).
aはこの方程式の解であるから

$$a^3=Aa^2-Ba+C$$

上式の右辺はpを因数にもつから，左辺a^3はpを因数にもつ，すなわち，aはpを因数にもつ．同様の議論により，b, cもpを因数にもつ．
これから，pはa, b, cの公約数となり，条件に反する．

別証 $A=a+b+c$，$B=bc+ca+ab$，$C=abc$とおき，A, B, Cが素数pを因数にもつと仮定する (背理法).
Cがpを因数にもつから，a, b, cの少なくとも1つがpを因数もつ．
一般性を失うことなく，aがpを因数にもつと

$$b+c=A-a,\quad bc=B-a(b+c)$$

上の2式の右辺は，ともにpを因数にもつから，$b+c$, bcは，pを因数もつ．
bcがpを因数にもつと，b, cの一方がpを因数もち，bがpを因数にもつとすれば，$c=(b+c)-b$より，cもpを因数にもつ．
これから，pはa, b, cの公約数となり，条件に反する．

(2) $D=a^2+b^2+c^2,\ E=a^3+b^3+c^3$ とおくと

$$\begin{aligned}
D&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\
&=A^2-2B\\
E&=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}+3abc\\
&=A(A^2-3B)+3C
\end{aligned}$$

ゆえに　$(*)\ \ 2B=A^2-D,\quad 3C=E-A(A^2-3B)$

$A,\ D,\ E$ が素数 $q\ (q\geqq 5)$ を因数にもつと仮定すると，$(*)$ の第 1 式から，B は q を因数にもつ．これを $(*)$ の第 2 式に適用すると，C も q を因数にもつ．このとき，$A,\ B,\ C$ が素数 q を因数にもち，条件に反する．

したがって，$A,\ D,\ E$ の最大公約数は 2^m3^n $(m\ ,n$ は 0 以上の整数$)$ と表される．$(*)$ より，$2B,\ 3C$ は 2^m3^n で割り切れるから，$m\geqq 2,\ n\geqq 2$ のとき，A は 2^m3^n で割り切れ，B は $2^{m-1}3^n$ で割り切れ，C は 2^m3^{n-1} で割り切れる．このことは，$A,\ B,\ C$ の最大公約数が 1 であることに反する．

$A,\ D,\ E$ の最大公約数を G とすると

$$G\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$$

に絞られる．これら G の存在をすべて示せば十分である．

a	b	c	A	D	E	G
1	1	1	3	3	3	3
1	1	2	4	6	10	2
1	1	3	5	11	29	1
1	1	4	6	18	66	6

よって，求める最大公約数となる正の整数は　**1，2，3，6**　■

4.19 (1) $a_1=1,\ a_{n+1}={a_n}^2+1$ より

$$a_2={a_1}^2+1=1^2+1=2,$$
$$a_3={a_2}^2+1=2^2+1=5$$

$b=a^2+1$，$c=b^2+1$，$d=c^2+1$ とおくと，$a\equiv 0 \pmod 5$ のとき

$$\begin{aligned} b&=a^2+1\equiv 0^2+1\equiv 1 &\pmod 5\\ c&=b^2+1\equiv 1^2+1\equiv 2 &\pmod 5\\ d&=c^2+1\equiv 2^2+1\equiv 0 &\pmod 5\end{aligned}$$

上式より，$a_3\equiv 0 \pmod 5$ であるから，$a_6\equiv 0 \pmod 5$
したがって，順次，a_3，a_6，a_9，$\cdots$ は 5 の倍数となる．
よって，正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となる．

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}={a_n}^2+1$ より　$a_n\geqq 1$
さらに，$a_{n+1}-a_n=a_n(a_n-1)+1>0$ より　$a_n<a_{n+1}$
$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{k-1}<a_k$ より，a_1，a_2，$a_3,\cdots$，a_{k-1} を a_k で割った余りは，それぞれ，a_1，a_2，$a_3,\cdots$，a_{k-1} である．
$l=1,2,3,\cdots,k$ について，

$$(*)\quad a_{k+l}\equiv a_l \pmod{a_k}$$

が成立することを示す．

$$\begin{aligned} a_{k+1}&={a_k}^2+1\equiv 0^2+1=a_1 &\pmod{a_k}\\ a_{k+2}&={a_{k+1}}^2+1\equiv {a_1}^2+1=a_2 &\pmod{a_k}\\ a_{k+3}&={a_{k+2}}^2+1\equiv {a_2}^2+1=a_3 &\pmod{a_k}\\ &\vdots\\ a_{2k-1}&={a_{k+(k-2)}}^2+1\equiv {a_{k-2}}^2+1=a_{k-1} &\pmod{a_k}\\ a_{2k}&={a_{k+(k-1)}}^2+1\equiv {a_{k-1}}^2+1=a_k\equiv 0 &\pmod{a_k}\end{aligned}$$

これから，$(*)$ が成立し，特に $a_{k+l}\equiv 0 \pmod{a_k}$ となるのは，$l=k$ のときに限る．したがって，a_k の倍数は

$$a_k,\ a_{2k},\ a_{3k},\cdots$$

よって，a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件は　**$\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{k}$ の倍数**

補足 k の値について実験を行い，結論を予想する．整数 $p,\ q$ について，p が q の倍数 (q が p の約数) であることを，$q\,|\,p$ と書く．

$b=a^2+1$，$c=b^2+1$，$d=c^2+1$，$e=d^2+1$ とおく．

(i) $k=1$ のとき，$a_1=1$ であるから，正の整数 n について　$a_1\,|\,a_n$

(ii) $k=2$ のとき，$a_2=2$．$a\equiv 0 \pmod 2$ とすると

$$\begin{aligned} b&=a^2+1\equiv 0^2+1\equiv 1 && \pmod 2\\ c&=b^2+1\equiv 1^2+1\equiv 0 && \pmod 2 \end{aligned}$$

したがって，順次，a_2，a_4，$a_6,\cdots$ は a_2 の倍数である．
よって，n が 2 の倍数のとき　$a_2\,|\,a_n$

(iii) $k=3$ のとき，(1) の結論から，n が 3 の倍数のとき　$a_3\,|\,a_n$

(iv) $k=4$ のとき，$a_4={a_3}^2+1=5^2+1=26$．$a\equiv 0 \pmod{26}$ とすると

$$\begin{aligned} b&=a^2+1\equiv 0^2+1\equiv 1 && \pmod{26}\\ c&=b^2+1\equiv 1^2+1\equiv 2 && \pmod{26}\\ d&=c^2+1\equiv 2^2+1\equiv 5 && \pmod{26}\\ e&=d^2+1\equiv 5^2+1\equiv 0 && \pmod{26} \end{aligned}$$

したがって，順次，a_4，a_8，$a_{12},\cdots$ は a_4 の倍数である．
よって，n が 4 の倍数のとき　$a_4\,|\,a_n$

(i)〜(iv) から，「$k\,|\,n \iff a_k\,|\,a_n$」が予想される．

(3) (2) の結論から，a_{4k} は a_k の倍数．$k=2022$ とおくと，$8091=4k+3$ より

$$\begin{aligned}
a_{4k+1} &= {a_{4k}}^2+1 \equiv 0^2+1=1 && (\mathrm{mod}\ a_k)\\
a_{4k+2} &= {a_{4k+1}}^2+1 \equiv 1^2+1=2 && (\mathrm{mod}\ a_k)\\
a_{4k+3} &= {a_{4k+2}}^2+1 \equiv 2^2+1=5 && (\mathrm{mod}\ a_k)\\
{a_{4k+3}}^2 &\equiv 5^2=25 && (\mathrm{mod}\ a_k)
\end{aligned}$$

ユークリッドの互除法により

(∗∗)　${a_{4k+3}}^2$ と a_k の最大公約数は，a_k と 25 の最大公約数．

$b=a^2+1$，$c=b^2+1$，$d=c^2+1$，$e=d^2+1$ とおくと，$a\equiv 1 \pmod{25}$ のとき

$$\begin{aligned}
b &= a^2+1 \equiv 0^2+1 \equiv 1 && (\mathrm{mod}\ 25)\\
c &= b^2+1 \equiv 1^2+1 \equiv 2 && (\mathrm{mod}\ 25)\\
d &= c^2+1 \equiv 2^2+1 \equiv 5 && (\mathrm{mod}\ 25)\\
e &= d^2+1 \equiv 5^2+1 \equiv 1 && (\mathrm{mod}\ 25)
\end{aligned}$$

$a_1=1$ より，k が 3 の倍数のとき　$a_k\equiv 5 \pmod{25}$

これから a_k は 5 で割り切れるが，25 で割り切れない．

(∗∗) より，求める最大公約数は　**5** ■

5.1 (1) 直線OAの傾きがtであるから，ℓは点$\mathrm{A}(1,\ t)$を通り傾き$-\dfrac{1}{t}$の直線より

$$y - t = -\frac{1}{t}(x-1) \quad すなわち \quad \boldsymbol{x + ty = 1 + t^2}$$

(2) $C_2 : y = f(x)$とおくと，点Aの座標とℓの傾きから　$f(1) = t$，$f'(1) = -\dfrac{1}{t}$

$$f(x) = a(x-1)^2 - \frac{1}{t}(x-1) + t$$

とおける（aは定数）．C_2はx軸に接するから

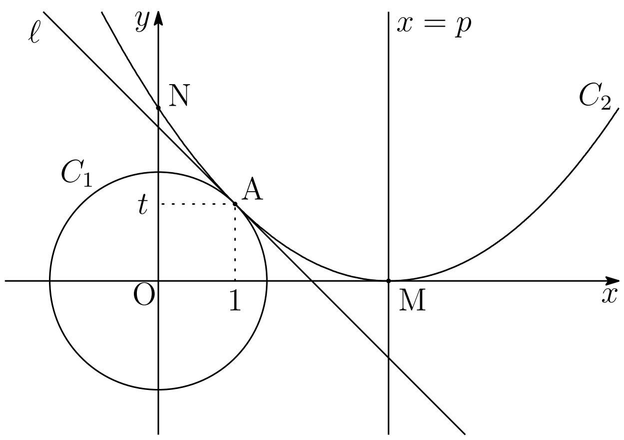
$$\left(-\frac{1}{t}\right)^2 - 4at = 0 \quad ゆえに \quad a = \frac{1}{4t^3}$$

したがって　$f(x) = \dfrac{1}{4t^3}(x-1)^2 - \dfrac{1}{t}(x-1) + t$

$$= \frac{1}{4t^3}\{(x-1)^2 - 4t^2(x-1) + 4t^4\}$$

$$= \frac{1}{4t^3}\{(x-1) - 2t^2\}^2 = \frac{1}{4t^3}(x - 2t^2 - 1)^2$$

よって　　$\boldsymbol{p = 2t^2 + 1}$



(3) 点Nのy座標は　$f(0) = \dfrac{1}{4t^3}(2t^2+1)^2$

$$\triangle\mathrm{OMN} = \frac{1}{2}pf(0) = \frac{1}{2}(2t^2+1)\cdot\frac{1}{4t^3}(2t^2+1)^2 = \left(\frac{2t^2+1}{2t}\right)^3 = \left(t + \frac{1}{2t}\right)^3$$

$t + \dfrac{1}{2t} \geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{2t}} = \sqrt{2}$ より，求める最小値は　$(\sqrt{2})^3 = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$　■

5.2 (1) $C: y=e^x$ を微分すると　$y'=e^x$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における接線 l は

$$\boldsymbol{y-e^t=e^t(x-t)}$$

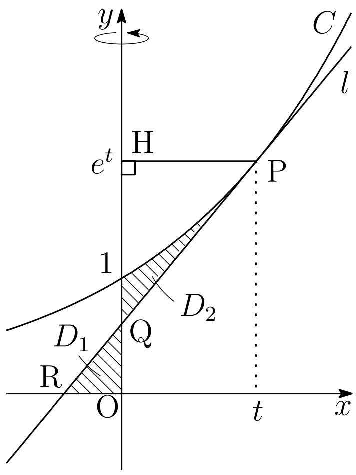
すなわち　$y=e^t(x-t+1)$

$x=0$ のとき，$y=e^t(1-t)$ であるから

$$\mathbf{Q}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{e^t(1-t)})$$

$y=0$ のとき，$x=t-1$ であるから

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{t}-\mathbf{1},\ \mathbf{0})$$



(2) 部分積分法により

$$\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int dx$$
$$= \boldsymbol{x(\log x-1)+C_1}\quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\textbf{は積分定数)},$$
$$\int (\log x)^2\,dx = \int (x)'(\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2x(\log x-1)+C_2$$
$$= \boldsymbol{x\{(\log x)^2-2\log x+2\}+C_2}\quad \textbf{(}\boldsymbol{C_2}\textbf{は積分定数)}$$

別解 $t=\log x$ とおくと，$x=e^t$，$\dfrac{dx}{dt}=e^t$ であるから

$$\int \log x\,dx = \int e^t t\,dt = e^t\{t-(t)'\}+C_1$$
$$= e^t(t-1)+C_1$$
$$= x(\log x-1)+C_1,$$
$$\int (\log x)^2\,dx = \int e^t t^2\,dt = e^t\{t^2-(t^2)'+(t^2)''\}+C_2$$
$$= e^t(t^2-2t+2)+C_2$$
$$= x\{(\log x)^2-2\log x+2\}+C_2$$

ここでは，次の積分公式を利用している[18].

$$\int e^{px}f(x)\,dx = \frac{e^{px}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$
$$\int e^x f(x)\,dx = e^x\{f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+\cdots\}+C$$

[18] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7 を参照)

(3) $V_1(t)$，$V_2(t)$ の体積は，前ページの図から $(C : x = \log y)$

$$\begin{aligned}
V_1(t) &= \frac{1}{3}\pi \mathrm{OR}^2 \cdot \mathrm{OQ} \\
&= \frac{\pi}{3}(1-t)^2 \cdot e^t(1-t) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}e^t(1-t)^3}, \\
V_2(t) &= \frac{1}{3}\pi \mathrm{PH}^2 \cdot \mathrm{QH} - \pi \int_1^{e^t} (\log y)^2\,dy \\
&= \frac{\pi}{3}t^2 \cdot \{e^t - e^t(1-t)\} - \pi \Big[\, y\{(\log y)^2 - 2\log y + 2\} \,\Big]_1^{e^t} \\
&= \frac{\pi}{3}e^t t^3 - \pi\{e^t(t^2 - 2t + 2) - 2\} \\
&= \boldsymbol{\pi\left\{e^t\left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\right) + 2\right\}}
\end{aligned}$$

別解 バウムクーヘン型の求積法を用いると [19]，D_2 を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 $V_2(t)$ は，$C : y = e^x$，$l : y = e^t x + (1-t)e^t$ より

$$\begin{aligned}
\frac{V_2(t)}{2\pi} &= \int_0^t x\{e^x - e^t x - (1-t)e^t\}\,dx \\
&= \Big[\, e^x(x-1) - \frac{1}{3}e^t x^3 - \frac{1}{2}(1-t)e^t x^2 \,\Big]_0^t \\
&= e^t\left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t - 1\right) + 1
\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}
V(t) &= V_1(t) + V_2(t) = \frac{\pi}{3}e^t(1-t)^3 + \pi\left\{e^t\left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\right) + 2\right\} \\
&= \pi\left\{e^t\left(t - \frac{5}{3}\right) + 2\right\}, \\
V'(t) &= e^t\left(t - \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

$0 < t < 1$ における $V(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$V(t)$ は $\boldsymbol{t = \frac{2}{3}}$ のとき，最小値 $V\left(\frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{\pi(2 - e^{\frac{2}{3}})}$ をとる． ■

[19] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2016.pdf $\boxed{2}$

5.3 (1) $I_n=\displaystyle\int_1^e(\log x)^n\,dx$ より (n は自然数)

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_1^e\log x\,dx=\Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_1^e=\mathbf{1},\\
I_2&=\int_1^e(\log x)^2\,dx=\Big[\,x\{(\log x)^2-2\log x+2\}\,\Big]_1^e=\boldsymbol{e-2},\\
I_{n+1}&=\int_1^e(x)'(\log x)^{n+1}\,dx\\
&=\Big[\,x(\log x)^{n+1}\,\Big]_1^e-(n+1)\int_1^e(\log x)^n\,dx\\
&=\boldsymbol{e-(n+1)I_n}
\end{aligned}$$

(2) $a+be=0$ について ($a,\ b$ は有理数)，$b\neq0$ とすると

$$e=-\frac{a}{b}$$

上式の左辺は無理数，右辺は有理数であるから，不合理.

$b=0$ であるから，これを $a+be=0$ に代入すると　$a=0$

よって，$a+be=0$ ならば ($a,\ b$ は有理数)，$a=0$ かつ $b=0$

(3) $(*)$　$I_n=A_n+B_ne$ ($A_n,\ B_n$は有理数)

［1］$n=1$ のとき，$I_1=1+0\cdot e$ より，$(*)$ は成立する.

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立する，すなわち，

$$I_k=A_k+B_ke\ (A_k,\ B_k\text{は有理数})$$

であると仮定すると，(1) で示した漸化式により

$$\begin{aligned}
I_{k+1}&=e-(k+1)I_k=e-(k+1)(A_k+B_ke)\\
&=-(k+1)A_k+\{1-(k+1)B_k\}e
\end{aligned}$$

これから

$$A_{k+1}=-(k+1)A_k,\quad B_{k+1}=1-(k+1)B_k \qquad (**)$$

とおくと，A_{k+1}，B_{k+1} は有理数であるから，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する.

［1］,［2］により，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する.

(4) $(**)$ の第 1 式の両辺を $(-1)^{k+1}(k+1)!$ で割ると

$$\frac{A_{k+1}}{(-1)^k(k+1)!}=\frac{A_k}{(-1)^k k!} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{A_n}{(-1)^n n!}=\frac{A_1}{(-1)^1 1!}$$

$A_1=1$ であるから　$A_n=\boldsymbol{(-1)^{n+1}n!}$　また　$C_n=\dfrac{A_n}{(-1)^{n+1}n!}=\mathbf{1}$

(5) $(\#)$　$B_n=1+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i{}_n\mathrm{P}_i$

［1］$n=1$ のとき，$I_1=1+0\cdot e$ より，$B_1=0$

$(\#)$ より　$B_1=1+\displaystyle\sum_{i=1}^{1}(-1)^i{}_1\mathrm{P}_i=1+(-1)=0$

よって，$n=1$ のとき，$(\#)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(\#)$ が成立する，すなわち

$$B_k=1+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i{}_k\mathrm{P}_i$$

が成り立つと仮定すると，$(**)$ の第 2 式から

$$\begin{aligned}
B_{k+1}&=1-(k+1)B_k\\
&=1-(k+1)\left\{1+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i{}_k\mathrm{P}_i\right\}\\
&=1+(-1)^1{}_{k+1}\mathrm{P}_1+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}{}_{k+1}\mathrm{P}_{i+1}\\
&=1+(-1)^1{}_{k+1}\mathrm{P}_1+\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^i{}_{k+1}\mathrm{P}_i=1+\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i{}_{k+1}\mathrm{P}_i
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(\#)$ は成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(\#)$ は成立する．

(4) および上の結果を用いて

$$\begin{aligned}
I_5&=A_5+B_5e=(-1)^6 5!+\left\{1+\sum_{i=1}^{5}(-1)^i{}_5\mathrm{P}_i\right\}e\\
&=120+(1-5+20-60+120-120)e\\
&=\mathbf{120-44}\boldsymbol{e}
\end{aligned}$$

補足　$I_1=1,\ I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ より

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}I_{n+1}-\frac{(-1)^n}{n!}I_n=\frac{(-1)^{n+1}e}{(n+1)!}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}I_{k+1}-\frac{(-1)^k}{k!}I_k\right\}&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}e}{(k+1)!}\\ \frac{(-1)^n}{n!}I_n+1&=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!}$ であるから

$$\begin{aligned}I_n&=(-1)^{n+1}n!+(-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!}\\ &=(-1)^{n+1}n!+e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}\\ &=(-1)^{n+1}n!+e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}=(-1)^{n+1}n!+e\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立する．よって

$$A_n=(-1)^{n+1}n!,\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k$$

$t=\log x$ とおくと，$x=e^t$，$\dfrac{dx}{dt}=e^t$ であるから (66 ページの 5.2 を参照)

$$\begin{aligned}I_n&=\int_1^e(\log x)^n\,dx=\int_0^1 e^t t^n\,dt=\left[\ e^t\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(t^n)^{(k)}\ \right]_0^1\\ &=\left[\ e^t\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k t^{n-k}+e^t(-1)^n n!\ \right]_0^1\\ &=e\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k+(-1)^{n+1}n!\end{aligned}$$

■

5.4 (1) 点 P$(a,\ b)$ を通り，傾き m の直線を ℓ とすると，その方程式は

$$y-b=m(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y=mx-ma+b$$

$C: y=x^3-x$ と $\ell: y=mx-ma+b$ の方程式から，y を消去すると

$$x^3-x=mx-ma+b \quad \text{ゆえに} \quad x^3-(m+1)x+ma-b=0 \qquad (*)$$

$f(x)=x^3-(m+1)x+ma-b$ とおくと，ℓ と C が異なる 3 点で交わるとき，3 次関数 $f(x)$ は極値をもち，極値を与える x の値は 2 次方程式 $f'(x)=0$ の異なる 2 つの実数解であるから

$$3x^2-(m+1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\pm\sqrt{\frac{m+1}{3}} \quad (m>-1)$$

ここで，$k=\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\cdots$① とおくと $(k>0)$

$$f(x)=x^3-3k^2x+(3k^2-1)a-b$$

極大値 $f(-k)$，極小値 $f(k)$ は

$$f(-k)=2k^3+(3k^2-1)a-b, \quad f(k)=-2k^3+(3k^2-1)a-b$$

上の 2 式から，十分大きい k の値に対して

$$\begin{aligned} f(-k)f(k) &= \{(3k^2-1)a-b\}^2-4k^6 \\ &= k^6\left\{\left(\frac{3a}{k}-\frac{a+b}{k^3}\right)^2-4\right\}<0 \end{aligned}$$

① より，ℓ の傾き m が十分に大きいとき，条件 (i) を満たす.

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると $(\alpha<\beta<\gamma)$，点 P が条件 (ii) を満たすとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\beta^\gamma\{-f(x)\}\,dx \quad \text{ゆえに} \quad \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx=0 \qquad (**)$$

このとき，$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}(x-\gamma) \\ &= -(x-\alpha)^2(\gamma-x)+(\beta-\alpha)(x-\alpha)(\gamma-x) \end{aligned}$$

したがって[20]

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx &= -\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)^2(\gamma-x)\,dx + (\beta-\alpha)\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)(\gamma-x)\,dx \\
&= -\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^4 + (\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3 \\
&= \frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3\{-(\gamma-\alpha)+2(\beta-\alpha)\} \\
&= \frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3(-\alpha+2\beta-\gamma)
\end{aligned}
$$

$(**)$ より　$-\alpha+2\beta-\gamma=0 \quad \cdots ②$

また，3 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-m-1, \quad \alpha\beta\gamma=-ma+b$$

上の 3 式と ② から $(\alpha<\beta<\gamma)$

$$-\alpha=\gamma>0, \quad \beta=0, \quad m=\gamma^2-1, \quad -ma+b=0$$

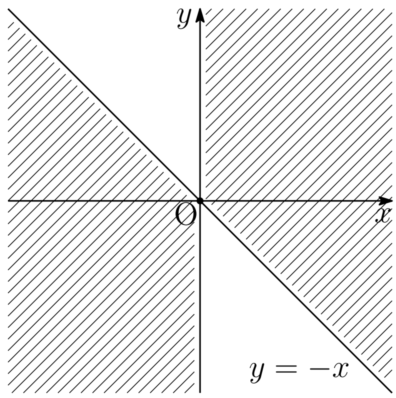
これから，直線 ℓ の方程式は　$y=(\gamma^2-1)x \quad (\gamma>0)$

(i) $x=0$ のとき　$y=0$

(ii) $x>0$ のとき，直線 $y=-x$ の上側で境界線を含まない．

(iii) $x<0$ のとき，直線 $y=-x$ の下側で境界線を含まない．

以上の結果から，点 P の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．ただし，原点を含む．



■

[20] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2020.pdf (p.8 を参照)

5.5 (1) $f(x) = g(x) + 3\int_0^x e^{t-x} f(t)\,dt$ より

$$f(x) = g(x) + 3e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt \qquad (*)$$

これを微分すると

$$f'(x) = g'(x) - 3e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt + 3f(x) \qquad (**)$$

$(*)$ と $(**)$ の辺々を加えて整理すると

$$f'(x) = 2f(x) + g(x) + g'(x) \qquad \text{(A)}$$

これが $f'(x) = 2f(x) + h(x)$ と一致するから

$$\boldsymbol{h(x) = g(x) + g'(x)}$$

(2) $e^{-2x}f(x)$ を微分し，(A) を代入すると

$$\begin{aligned}\{e^{-2x}f(x)\}' &= -2e^{-2x}f(x) + e^{-2x}f'(x)\\ &= -2e^{-2x}f(x) + e^{-2x}\{2f(x) + g(x) + g'(x)\}\\ &= \boldsymbol{e^{-2x}\{g(x) + g'(x)\}}\end{aligned}$$

(3) $e^{-2x}f(x)$ が定数関数のとき，(2) の結果は 0 であるから

$$g(x) + g'(x) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad e^x g(x) + e^x g'(x) = 0$$

$\{e^x g(x)\}' = 0$ であるから，定数 C_1 を用いて

$$e^x g(x) = C_1 \quad \text{ゆえに} \quad g(x) = C_1 e^{-x}$$

$g(0) = 1$ であるから　$C_1 = 1$　よって　$\boldsymbol{g(x) = e^{-x}}$

$e^{-2x}f(x)$ が定数関数であるから，定数 C_2 を用いて

$$e^{-2x}f(x) = C_2 \quad \text{ゆえに} \quad f(x) = C_2 e^{2x}$$

$(*)$ に $x = 0$ を代入すると　$f(0) = g(0) = 1$　ゆえに　$C_2 = 1$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = e^{2x}}$

(4) (A) に $g(x)=x^2+1$ を代入することにより

$$f'(x)-2f(x)=(x+1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \{e^{-2x}f(x)\}'=e^{-2x}(x+1)^2$$

積分定数 C を用いて

$$\begin{aligned}
e^{-2x}f(x) &= \int e^{-2x}(x+1)^2\,dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left\{(x+1)^2+\frac{\{(x+1)^2\}'}{2}+\frac{\{(x+1)^2\}''}{2^2}\right\}+C \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

したがって　$f(x)=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}+Ce^{2x}$

$f(0)=1$ であるから　$\boldsymbol{f(x)=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}+\dfrac{9}{4}e^{2x}}$

補足 ここでは，次の積分公式を利用している[21].

$$\int e^{px}f(x)\,dx=\frac{e^{px}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$

$$\int e^{-px}f(x)\,dx=-\frac{e^{px}}{p}\left\{f(x)+\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}+\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$

■

[21] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7 を参照)

5.6 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,\ 2)$

$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ であるから

$$x+y=0,\quad 2x+y+2z=0\quad \text{ゆえに}\quad y=-x,\quad z=-\frac{1}{2}x$$

$\vec{n}=\left(x,-x,-\dfrac{1}{2}x\right)$，$|\vec{n}|^2=1$ であるから

$$x^2+x^2+\frac{1}{4}x^2=1\quad \text{ゆえに}\quad 9x^2=4$$

$x>0$ に注意して　$x=\dfrac{2}{3}$　よって　$\boldsymbol{\vec{n}=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)}$

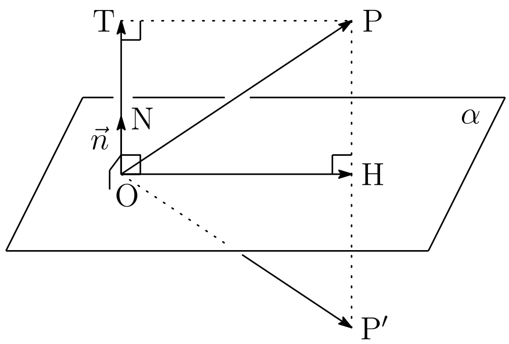
(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{n}$ とし，P から平面 α および直線 ON に引いた垂線の交点をそれぞれ H，T とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OT}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n})\vec{n} \qquad (*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 0,-1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(2,-2,-1)$

これと $(*)$ の第 1 式により，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ 2,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+(-\overrightarrow{\mathrm{OT}})=(0,\ 4,\ 1)\quad \text{よって}\quad \mathbf{P'(0,4,\ 1)}$$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3>0$，Q(4, 0, 5) より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=1>0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき，PR : RQ = P′R : RQ = 3 : 1 であるから，R は線分 P′Q を 3 : 1 に内分する点である．

$$\left(\frac{1\cdot 0+3\cdot 4}{3+1},\ \frac{1\cdot 4+3\cdot 0}{3+1},\ \frac{1\cdot 1+3\cdot 5}{3+1}\right)\quad \text{すなわち}\quad \mathbf{R(3,\ 1,\ 4)}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3>0$，$\mathrm{Q}(4,\ 0,\ 5)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=1>0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき点 R は，2 点 $\mathrm{P}'(0,\ 4,\ 1)$，$\mathrm{Q}(4,\ 0,\ 5)$ を通る直線上にある．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}+t\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{Q}} \qquad (t\text{ は実数})\\&=(0,\ 4,\ 1)+t(4,-4,\ 4)\\&=(4t,\ 4-4t,\ 1+4t)\end{aligned}$$

点 R は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{n}=0$ より

$$\frac{2}{3}\cdot 4t-\frac{2}{3}(4-4t)-\frac{1}{3}(1+4t)=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=\frac{3}{4}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(3,\ 1,\ 4)$　よって　**R(3，1，4)**　■

5.7 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$，
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)$ について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=b_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_2(b_3c_1-b_1c_3)+b_3(b_1c_2-b_2c_1)\\&=b_1b_2c_3-b_3b_1c_2+b_2b_3c_1-b_1b_2c_3+b_3b_1c_2-b_2b_3c_1=0,\\\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=c_1(b_2c_3-b_3c_2)+c_2(b_3c_1-b_1c_3)+c_3(b_1c_2-b_2c_1)\\&=b_2c_3c_1-b_3c_1c_2+b_3c_1c_2-b_1c_2c_3+b_1c_2c_3-b_2c_3c_1=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が1次独立であるから，平面 ABC 上の任意の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad(\alpha,\ \beta\text{は実数})$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0\end{aligned}$$

(2) 等式

$$\begin{aligned}({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)({c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2)=(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2+(b_2c_3-b_3c_2)^2\\+(b_3c_1-b_1c_3)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2\end{aligned}$$

より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$ が成立する．

したがって，$\triangle$ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\qquad(*)$$

A$(-1,\ 1,\ 2)$，B$(3,-1,\ 0)$，C$(1,\ 3,-2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,-2,-2),\quad\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 2,-4)$$

ゆえに $\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=(-2\cdot(-4)-(-2)\cdot2,\ (-2)\cdot2-4\cdot(-4),\ 4\cdot2-(-2)\cdot2)\\&=(12,\ 12,\ 12)\end{aligned}$

よって $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2+12^2}=\boldsymbol{6\sqrt{3}}$

(3) $(*)$ と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(d_1,\ d_2,\ d_3)$, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(e_1,\ e_2,\ e_3)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=(d_2e_3-d_3e_2,\ d_3e_1-d_1e_3,\ d_1e_2-d_2e_1) \qquad (**)$$

とすると，$\triangle\mathrm{BCE}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BF}}|$ である．

$\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{B}(3,-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 3,-2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=(-1,\ 1,\ 2)+k(12,\ 12,\ 12)\\&=(12k-1,\ 12k+1,\ 12k+2) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 3,-2)-(3,-1,\ 0)=(-2,\ 4,-2),\\\overrightarrow{\mathrm{BE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(12k-1,\ 12k+1,\ 12k+2)-(3,-1,\ 0)\\&=(12k-4,\ 12k+2,\ 12k+2)\end{aligned}$$

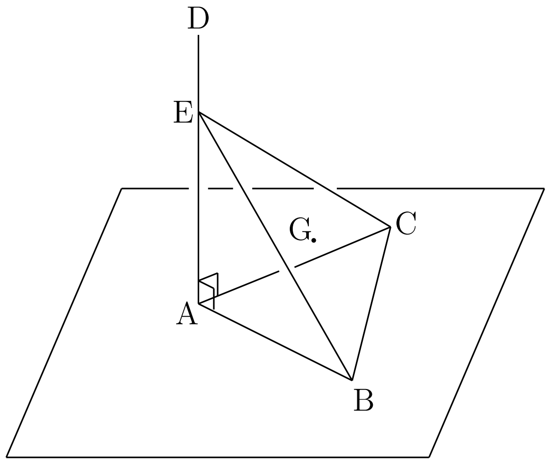
$(**)$ により，$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=12(-6k-1,-1,\ 6k-1)$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCE}&=\frac{1}{2}\cdot12\sqrt{(-6k-1)^2+(-1)^2+(6k-1)^2}\\&=6\sqrt{72k^2+3}\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{EBC}=6\sqrt{5}$ であるから

$$6\sqrt{72k^2+3}=6\sqrt{5} \quad これを解いて\ (k>0) \quad k=\frac{1}{6}$$

① より　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1,\ 3,\ 4)$　よって　**E(1，3，4)**



(4) $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{E}(1,\ 3,\ 4)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = (2,\ 2,\ 2) \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = 2\sqrt{3}$$

2 つの条件から　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{BCE}|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|$

$$\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{5}|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}| \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{GQ}}| = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

(3) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = 12(-2, -1,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 1,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ は平行であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{GQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|\vec{e} = \pm\frac{6}{5}(2,\ 1,\ 0)$$

また，$\mathrm{E}(1,\ 3,\ 4)$，$\mathrm{B}(3, -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 3, -2)$ より，$\triangle\mathrm{EBC}$ の重心 G は

$$\mathrm{G}\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + \overrightarrow{\mathrm{GQ}} = \left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right) \pm \frac{6}{5}(2,\ 1,\ 0)$$

よって，求める点 E の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{61}{15},\ \frac{43}{15},\ \frac{2}{3}\right)} \quad \textbf{または} \quad \boldsymbol{\left(-\frac{11}{15},\ \frac{7}{15},\ \frac{2}{3}\right)}$$

■

5.8 (1) A(2, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(0, 0, 1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2,\ 0,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の x 成分が等しく，y 成分および z 成分が異なる．

したがって，3 点 A，B，C は一直線上にない．

$\mathrm{D}\left(3, -1,\ \frac{5}{6}\right)$，$\mathrm{E}\left(8,\ 4, -\frac{1}{3}\right)$，$\mathrm{F}\left(5,\ 3,\ \frac{1}{2}\right)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \left(5,\ 5, -\frac{7}{6}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{DF}} = \left(2,\ 4, -\frac{1}{3}\right)$$

これから $\quad \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \left(1,\ 1, -\frac{7}{30}\right)$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \left(1,\ 2, -\frac{1}{6}\right)$

$\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ の x 成分が等しく，y 成分および z 成分が異なる．

したがって，3 点 D，E，F は一直線上にない．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{u} = (3,\ 2,\ 6)$ とし，
$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{v} = (9, -2,\ 30)$ とする．
平面 ABC 上の点 P$(x,\ y,\ z)$ について，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ であるから

$$3(x-2) + 2y + 6z = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3x + 2y + 6z = 6 \quad \cdots①$$

平面 DEF 上の点 Q$(x,\ y,\ z)$ について，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}} = 0$ であるから

$$9(x-3) - 2(y+1) + 30\left(z - \frac{5}{6}\right) = 0$$

整理すると $\quad 9x - 2y + 30z = 54 \quad \cdots②$

①，② から y を消去すると $\quad x = -3z + 5 \quad \cdots③$

③ を ① に代入すると $\quad z = \frac{2}{3}y + 3 \quad \cdots④$

$y = 3t$ とおくと，③，④ より $\quad x = -6t - 4$，$z = 2t + 3$

したがって $\quad \ell : (x,\ y,\ z) = (-4,\ 0,\ 3) + t(-6,\ 3,\ 2)$

よって，ℓ は点 **(−4, 0, 3)** を通り，ベクトル **(−6, 3, 2)** に平行． ■

索引