令和４年度　岡山大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和４年２月25日

- 歯，薬，教育 [選択]，農，理，医，工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$
  数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育 [選択]，経済学部　$\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数 I・II・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ A，B，C の 3 人で次のルールに従って一連の試合を行い，優勝者を決定する．

- 1 試合目は A と B が戦う．
- 自然数 n に対し，$n+1$ 試合目は n 試合目の勝者と n 試合目に戦わなかった人が戦う．
- 2 連勝した人が出た時点で，その人が優勝者となり，以後試合は行わない．
- すべての試合において，引き分けはないものとする．

A，B，C が互いに戦う際の勝率は次の通りとする．ただし，p は $0<p<1$ を満たす実数とする．

- A と B の試合：勝つ確率は A と B のどちらも $\dfrac{1}{2}$ である．
- A と C の試合：A が勝つ確率は $1-p$，C が勝つ確率は p である．
- B と C の試合：B が勝つ確率は $1-p$，C が勝つ確率は p である．

n 試合目で優勝者が決定する確率を a_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2) 自然数 k に対し，a_{3k} を求めよ．

(3) C が優勝する確率を求めよ．

(4) 1 以上 99 以下の自然数 N に対し $p=\dfrac{N}{100}$ であるとする．このとき C が優勝する確率が $\dfrac{1}{3}$ 以上になるような N の最小値を求めよ．

2 a を実数とし，座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 + (a+2)x^2 + 2ax + 2$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) a がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点を通る．その 2 点の座標を求めよ．

(2) (1) で求めた 2 点のうち，x 座標の小さい方を点 A，もう一方を点 B とし，その 2 点を通る直線を L とする．曲線 C と直線 L が異なる 3 点で交わり，その交点がすべて線分 AB 上にあるような a の値の範囲を求めよ．

(3) a の値が (2) で求めた範囲にあるとする．このとき，曲線 C と (2) で定めた直線 L で囲まれた部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ．

3 ℓ を正の実数とし，四面体 OABC において，各辺の長さを

$$\mathrm{OA} = \frac{1}{2}\ell, \quad \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \ell, \quad \mathrm{AB} = \mathrm{CA} = \ell, \quad \mathrm{BC} = \sqrt{2}\ell$$

とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，点 H は $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}$ を満たすとする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 H は 3 点 A，B，C が定める平面上に存在することを示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ の値を求めよ．

(3) $\angle\mathrm{OHB}$ の大きさを求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

4 $-1 < x < 1$ に対して

$$f(x) = \log(1+x) + \log(1-x) - x\log(1-x)$$

とおく．ただし，対数は自然対数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $-1 < x < 1$ のとき，$f'(x) \geqq 0$ であることを示せ．

(2) $-1 < x < 1$，$x \neq 0$ のとき，$\dfrac{f(x)}{x} > 0$ であることを示せ．

(3) n が 2 以上の整数のとき，不等式

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1} < \frac{n-1}{n} < \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{5}$ ハート，スペード，クラブ，ダイヤの各マークのついた「A(エース)」,「2」,「3」のカードがそれぞれ1枚ずつ箱に入っている．カードは全部で12枚である．この箱から1枚ずつ無作為に取り出して，12枚のカードを横一列に並べる．以下の問いに答えよ．

(1) 「A(エース)」のカードが4枚連続して並ぶ確率を求めよ．

(2) どの2枚の「A(エース)」のカードも連続しては並ばない確率を求めよ．

(3) 「A(エース)」のカードの連続した並びが生じ，かつ,「A(エース)」のカードが3枚以上は連続して並ばない確率を求めよ．

$\boxed{6}$ 三角形ABCにおいて，各辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とし，
$a^2=5-\sqrt{2}-\sqrt{6}$，$b^2=1$，$c^2=4$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{BAC}$ の値を求めよ．

(2) 三角形ABCの面積 S を求めよ．

(3) $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ．

$\boxed{7}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2+a_n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で，数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を

$$b_1=c_1=1,\quad b_{n+1}=c_n,\quad c_{n+1}=b_n+2c_n\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n について $a_n=\dfrac{b_n}{c_n}$ が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{\alpha b_n-c_n\}$ が等比数列になるような実数 α をすべて求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 1試合目で勝者は決定しないから　$\boldsymbol{a_1 = 0}$

2試合目で勝者が決定する，すなわち，2試合の勝者が順にAAまたはBBとなる確率は

$$a_2 = \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p) = \boldsymbol{1-p}$$

3試合目で勝者が決定する，すなわち，3試合の勝者が順にACCまたはBCCとなる確率は

$$a_3 = \frac{1}{2}pp + \frac{1}{2}pp = \boldsymbol{p^2}$$

4試合目で勝者が決定する，すなわち，4試合の勝者が順にACBBまたはBCAAとなる確率は

$$a_4 = \frac{1}{2}p(1-p)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p(1-p)\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}p(1-p)}$$

(2) $3k$試合目で勝者が決定する，すなわち，$3k$試合の勝者が順に

$$\overbrace{(\mathrm{ACB})(\mathrm{ACB})\cdots(\mathrm{ACB})}^{k-1\text{ 個}}(\mathrm{ACC}) \quad \text{または} \quad \overbrace{(\mathrm{BCA})(\mathrm{BCA})\cdots(\mathrm{BCA})}^{\mathrm{k}-1\text{ 個}}(\mathrm{BCC})$$

となる確率は

$$a_{3k} = \left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}\frac{1}{2}pp + \left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}\frac{1}{2}pp = \boldsymbol{p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}}$$

(3) Cが優勝するのは，$3k$試合目である．(2)の結果および

$0 < \dfrac{1}{2}p(1-p) < 1$により

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{3k} = p^2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1} p^2 \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}p(1-p)} = \boldsymbol{\frac{2p^2}{2-p+p^2}}$$

(4) (3)で求めた確率が$\dfrac{1}{3}$以上であるから　$\dfrac{2p^2}{2-p+p^2} \geqq 3$

$0 < p < 1$，$2-p+p^2 = 1+(1-p)+p^2 > 0$に注意して

$$5p^2 + p - 2 \geqq 0 \quad \text{これを解くと} \quad \frac{-1+\sqrt{41}}{10} \leqq p < 1$$

$p = \dfrac{N}{100}$ より　$-10+\sqrt{4100} \leqq N < 100$

$64^2 = 4096 < 4100 < 4225 = 65^2$ より　$54 < -10+\sqrt{4100} < 55$

よって，求めるNの最小値は　**55**　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 曲線 C の方程式を a について整理すると

$$a(x^2+2x)+x^3+2x^2-y+2=0$$

求める 2 点は，次の 2 式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ である．

$$x^2+2x=0, \quad x^3+2x^2-y+2=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{(-2,\ 2),\ (0,\ 2)}$

(2) (1) の結果の x 座標に注意して　$\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$

したがって，2 点 A，B を通る直線 L は　$L: y=2$

曲線 C と L の方程式から

$$\{x^3+(a+2)x^2+2ax+2\}-2=x(x+2)(x+a) \qquad (*)$$

C と L の A，B 以外の交点の x 座標は　$-a$

条件から　$-2<-a<0$　よって　$\boldsymbol{0<a<2}$

(3) $(*)$ より，C と L で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} |x(x+2)(x+a)|\,dx \\ &= \int_{-2}^{-a} x(x+2)(x+a)\,dx - \int_{-a}^{0} x(x+2)(x+a)\,dx \end{aligned}$$

$x(x+2)(x+a)=x^3+(a+2)x^2+2ax$ の原始関数の 1 つを

$$F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2$$

とすると

$$F(-2)=\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}, \quad F(-a)=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3, \quad F(0)=0$$

したがって

$$S(a) = -F(-2) + 2F(-a) - F(0) = -\frac{1}{6}a^4 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}$$
$$S'(a) = -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

$0 < a < 2$ において，$a^2 - 2a - 2 = (a-1)^2 - 3 < 0$ に注意して

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

よって，$S(a)$ は，最小値 $S(1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$ ■

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c} - \vec{a} \\ &= \frac{1}{8}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{8}(\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

よって，点 H は平面 ABC 上の点である．

(2) $\ell = |\vec{b} - \vec{a}|$，$\ell = |\vec{c} - \vec{a}|$ より

$$\ell^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2, \quad \ell^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2$$

上の 2 式に $|\vec{b}| = |\vec{c}| = \ell$，$|\vec{a}| = \frac{1}{2}\ell$，$|\vec{b}| = |\vec{c}| = \ell$ を代入することにより

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{1}{8}\ell^2$$

$\sqrt{2}\ell = |\vec{c} - \vec{b}|$　ゆえに　$2\ell^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|$

これに $|\vec{b}| = |\vec{c}| = \ell$ を代入すると　$\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 &= \left|\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}\right|^2 \\ &= \frac{9}{16}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{64}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{64}|\vec{c}|^2 + \frac{3}{16}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{32}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{3}{16}\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= \frac{9}{16}\ell^2 + \frac{1}{64}\ell^2 + \frac{1}{64}\ell^2 + \frac{3}{128}\ell^2 + \frac{3}{128}\ell^2 = \frac{14}{64}\ell^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| > 0$ であるから　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{\sqrt{14}}{8}\ell}$

(3) (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{HO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= \frac{14}{64}\ell^2 - \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}\right)\cdot\vec{b} \\
&= \frac{7}{32}\ell^2 - \frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{8}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c} \\
&= \frac{7}{32}\ell^2 - \frac{3}{32}\ell^2 - \frac{1}{8}\ell^2 = 0
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\angle \mathrm{OHB} = \frac{\pi}{2}}$

(4) (3) と同様にして

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{HO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \frac{14}{64}\ell^2 - \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}\right)\cdot\vec{a} \\
&= \frac{7}{32}\ell^2 - \frac{3}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{8}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{a} \\
&= \frac{7}{32}\ell^2 - \frac{3}{16}\ell^2 - \frac{1}{64}\ell^2 - \frac{1}{64}\ell^2 = 0
\end{aligned}$$

ゆえに　　$\angle \mathrm{OHA} = \frac{\pi}{2}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は平面 ABC と垂直である．

$\triangle \mathrm{ABC}$ は $\angle \mathrm{CAB} = \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\ell^2$$

よって，求める四面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ell^2\cdot\frac{\sqrt{14}}{8}\ell = \boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{48}\ell^3}$$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ により

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とおくと　　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OT}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=\ell^2,\\
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2=\frac{1}{8}\ell^2-\frac{1}{4}\ell^2=-\frac{1}{8}\ell^2,\\
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2=\frac{1}{8}\ell^2-\frac{1}{4}\ell^2=-\frac{1}{8}\ell^2
\end{aligned}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\vec{a}+\frac{1}{8}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{1}{8}(\vec{c}-\vec{a})=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

発展 四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，行列 M を $M=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とすると，四面体 OABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{6}|\det M|$$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=\dfrac{\ell^2}{4},\ \vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=\ell^2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{\ell^2}{8},\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0$ であるから

$${}^tMM=\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a}&\vec{a}\cdot\vec{b}&\vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a}&\vec{b}\cdot\vec{b}&\vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a}&\vec{c}\cdot\vec{b}&\vec{c}\cdot\vec{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\ell^2}{4}&\frac{\ell^2}{8}&\frac{\ell^2}{8}\\ \frac{\ell^2}{8}&\ell^2&0\\ \frac{\ell^2}{8}&0&\ell^2\end{pmatrix}$$

$\det M=\det{}^tM$ より，$\det({}^tMM)=\det{}^tM\det M=(\det M)^2$ に注意して

$$(\det M)^2=\frac{14}{64}\ell^6\quad ゆえに\quad |\det M|=\frac{\sqrt{14}}{8}\ell^3$$

よって　　$V=\dfrac{1}{6}|\det M|=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{\sqrt{14}}{8}\ell^3=\dfrac{\sqrt{14}}{48}\ell^3$　■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\log(1+x)+\log(1-x)-x\log(1-x)$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}-\log(1-x)+\frac{x}{1-x} \\ &= \frac{1}{1+x}-1-\log(1-x), \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)} \end{aligned}$$

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

上の増減表から　$-1<x<1$ において　$f'(x)\geqq 0$

(2) (1) の結果から，$f(x)$ は単調増加．$f(0)=0$ であるから

$$-1<x<0 \text{ において } f(x)<0, \quad 0<x<1 \text{ において } f(x)>0$$

よって　$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，$\dfrac{f(x)}{x}>0$

(3) (2) の結果から，$-1<x<1$ のとき

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\log(1-x^2)-\log(1-x)>0$$

したがって　　$1-x<(1-x^2)^{\frac{1}{x}}$　　$(*)$

$x=\dfrac{1}{n}$ を $(*)$ に代入すると $(n\geqq 2)$

$$1-\frac{1}{n}<\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n-1}{n}<\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \qquad (**)$$

$x=-\dfrac{1}{n}$ を $(*)$ に代入すると $(n\geqq 2)$

$$1+\frac{1}{n}<\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{n+1}>\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$$

上の第 2 式の辺々に $\dfrac{n^2-1}{n^2}$ を掛けると

$$\frac{n-1}{n}>\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}$$

上式および $(**)$ より　$\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}<\dfrac{n-1}{n}<\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$　■

5 (1) 12 枚のカードの並べ方は 12! 通り．A(エース)4 枚をまとめて 1 枚と考えると，9 枚すべての並べ方は 9! 通りあり，A(エース)4 枚の並べ方が 4! 通りある．よって，求める確率は

$$\frac{9!4!}{12!} = \mathbf{\frac{1}{55}}$$

(2) A(エース) を除く 8 枚のカードを並べ，その両端と間の 9 カ所からエースを並べる 4 カ所の並べ方の確率であるから

$$\frac{8!\cdot{}_9\mathrm{P}_4}{12!} = \mathbf{\frac{14}{55}}$$

(3) A(エース) が 3 枚連続して並ぶ確率を求める．連続する A(エース)3 枚の並び方は ${}_4\mathrm{P}_3$ 通りあり，これら 3 枚を 1 枚のカードとすると，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{P}_3\cdot 8!\cdot{}_9\mathrm{P}_2}{12!} = \frac{8}{55}$$

求める確率は，これと (1)，(2) の余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{1}{55} + \frac{14}{55} + \frac{8}{55}\right) = \mathbf{\frac{32}{55}}$$

■

6 (1) 余弦定理により $(b = 1,\ c = 2)$

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1 + 4 - (5 - \sqrt{2} - \sqrt{6})}{2\cdot1\cdot2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

(2) (1) の結果から

$$\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2\angle\mathrm{BAC}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

よって　$S = \dfrac{1}{2}bc\sin\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$

(3) (1) の結果から　$\boldsymbol{\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{12}}$

■

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1)　(∗)　$a_n = \dfrac{b_n}{c_n}$

［1］$n = 1$ のとき，$a_1 = 1,\ b_1 = c_1 = 1$ より，(∗) は成立する．

［2］$n = k$ のとき，(∗) が成立すると仮定すると

$$a_{k+1} = \frac{1}{2 + a_k} = \frac{1}{2 + \dfrac{b_k}{c_k}} = \frac{c_k}{b_k + 2c_k} = \frac{b_{k+1}}{c_{k+1}}$$

よって，$n = k + 1$ のときも (∗) は成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，(∗) は成立する．

(2)　$\alpha b_{n+1} - c_{n+1} = \alpha c_n - (b_n + 2c_n) = -b_n + (\alpha - 2)c_n \quad \cdots ①$

数列 $\{\alpha b_n - c_n\}$ が等比数列となるとき

$$\alpha : -1 = -1 : \alpha - 2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha(\alpha - 2) = 1$$

整理すると　$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$　これを解いて　$\boldsymbol{\alpha = 1 \pm \sqrt{2}}$

(3) ① より　$b_{n+1} - \dfrac{1}{\alpha}c_{n+1} = -\dfrac{1}{\alpha}\left(b_n - \dfrac{1}{\alpha}c_n\right)$

このとき，$-\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{-1}{1 \pm \sqrt{2}} = 1 \mp \sqrt{2}$

$\beta = 1 + \sqrt{2},\ \gamma = 1 - \sqrt{2}$ とおくと

$$b_{n+1} + \beta c_{n+1} = \beta(b_n + \beta c_n), \quad b_{n+1} + \gamma c_{n+1} = \gamma(b_n + \gamma c_n)$$

これから　$b_n + \beta c_n = \beta^{n-1}(b_1 + \beta c_1) = \beta^{n-1}(1 + \beta),$
$b_n + \gamma c_n = \gamma^{n-1}(b_1 + \gamma c_1) = \gamma^{n-1}(1 + \gamma)$

このとき　$1 + \beta = 2 + \sqrt{2} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}\beta$
$1 + \gamma = 2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) = -\sqrt{2}\gamma$

$$b_n + \beta c_n = \beta^{n-1}(b_1 + \beta c_1) = \sqrt{2}\beta^n,$$
$$b_n + \gamma c_n = \gamma^{n-1}(b_1 + \gamma c_1) = -\sqrt{2}\gamma^n$$

上の第 1 式から第 2 式を引くと　$(\beta - \gamma)c_n = \sqrt{2}(\beta^n + \gamma^n)$

したがって　$c_n = \dfrac{1}{2}(\beta^n + \gamma^n)$

$b_n = c_{n-1}$ より　$b_n = \dfrac{1}{2}(\beta^{n-1} + \gamma^{n-1}),$

$a_n = \dfrac{b_n}{c_n}$ より　$a_n = \dfrac{\beta^{n-1} + \gamma^{n-1}}{\beta^n + \gamma^n}$

よって　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}}{(1+\sqrt{2})^{n}+(1-\sqrt{2})^{n}}}$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}\}}$$

$$\boldsymbol{c_n = \frac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^{n}+(1-\sqrt{2})^{n}\}}$$

補足 $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \dfrac{1}{2+a_n}$ の特性方程式は

$$x = \frac{1}{2+x} \quad \text{整理すると} \quad x^2+2x-1=0$$

この解は　$-\beta, -\gamma$ であるから　$\beta^2-2\beta-1=0,\ \gamma^2-2\gamma-1=0$

$$a_{n+1}+\beta = \frac{\beta a_n+2\beta+1}{2+a_n} = \frac{\beta(a_n+\beta)}{2+a_n},$$
$$a_{n+1}+\gamma = \frac{\gamma a_n+2\gamma+1}{2+a_n} = \frac{\gamma(a_n+\gamma)}{2+a_n}$$

上の 2 式から　$\dfrac{a_{n+1}+\gamma}{a_{n+1}+\beta} = \dfrac{\gamma}{\beta}\cdot\dfrac{a_n+\gamma}{a_n+\beta}$

したがって　$\dfrac{a_n+\gamma}{a_n+\beta} = \left(\dfrac{\gamma}{\beta}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1+\gamma}{1+\alpha} = -\dfrac{\gamma^n}{\beta^n}$

$$\beta^n(a_n+\gamma)+\gamma^n(a_n+\beta)=0$$

$\beta\gamma=-1$ であるから

$$(\beta^n+\gamma^n)a_n = \beta^{n-1}+\gamma^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{\beta^{n-1}+\gamma^{n-1}}{\beta^n+\gamma^n}$$

■