

令和4年度 京都工芸繊維大学2次試験前期日程(数学問題)

令和4年2月25日

- 問題 ① ② ③ ④ 数I・II・III・A・B (120分)

① 四角形ABCDについて $AB = 1$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle CDA = 90^\circ$ とする. $\angle BCD = \theta$ とおき, $45^\circ < \theta < 90^\circ$ であるとする.

- (1) 線分BC上の点Eが $\angle DAE = 90^\circ$ を満たすとき, $AE < \sqrt{2}$ であることを示せ.
- (2) 点Cを中心とし直線ABと直線DAの両方に接する円が存在し, かつ $CD = \sqrt{2}$ であるとき, $\sin \theta$ の値を求めよ.

② t を正の実数とする. $f(x)$ を x の2次関数とする. xy 平面上の曲線 $C_1 : y = e^{|x|}$ と曲線 $C_2 : y = f(x)$ が, 点 $P_1(-t, e^t)$ で直交し, かつ点 $P_2(t, e^t)$ でも直交している. ただし, 2曲線 C_1 と C_2 が点Pで直交するとは, Pが C_1 と C_2 の共有点であり, C_1 と C_2 はPにおいてそれぞれ接線を持ち, C_1 のPにおける接線と C_2 のPにおける接線が垂直であることである. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ を求めよ.
- (2) 線分 P_1P_2 と曲線 C_2 とで囲まれた図形の面積を S とする. S を t を用いて表せ. また, t が $t > 0$ の範囲を動くときの S の最大値を求めよ.

③ (1) 不定積分 $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ を求めよ.

(2) θ の関数 $f(\theta)$ を $f(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin \theta - \sin x|}{\cos^2 x} dx$ で定める. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲における $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ.

4 横一列に並んだ6文字からなる文字列に対して次の操作を考える.

(*) 大小2個のサイコロを投げて, 大きいサイコロの出た目の数を k , 小さいサイコロの出た目の数を l とする. 考えている文字列の左端から k 番目の文字と左端から l 番目の文字をとり換える. ただし $k = l$ のときは考えている文字列をそのままにする.

また, (*) の操作を続けて行う場合は直前の操作で得られた文字列に対して (*) の操作を行うものとする.

- (1) 文字列 BANANA に対して (*) の操作を1回行って得られる文字列が再び BANANA である確率 p_1 を求めよ.
- (2) 文字列 BANANA に対して (*) の操作を2回続けて行うとき, 1回目の操作の結果が NABANA であり2回目の操作の結果が BANANA である確率 p_2 を求めよ.
- (3) 文字列 BANANA に対して (*) の操作を2回続けて行って得られる文字列が BANANA である確率 p_3 を求めよ.

解答例

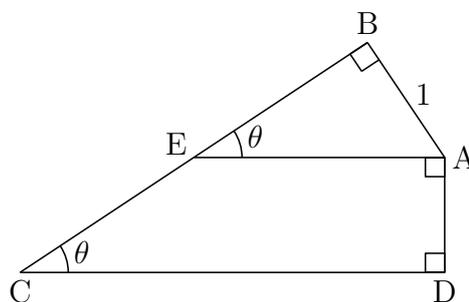
- 1 (1) $\angle CDA = 90^\circ$, $\angle DAE = 90^\circ$ より,
 $EA \parallel CD$ であるから

$$\angle BEA = \angle BCD = \theta$$

$\triangle ABE$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{AE}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$45^\circ < \theta < 90^\circ \text{ より } AE = \frac{1}{\sin \theta} < \sqrt{2}$$



- (2) $\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ について

CA は共通

$CB = CD = \sqrt{2}$ (円の半径)

$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ (接線と半径)

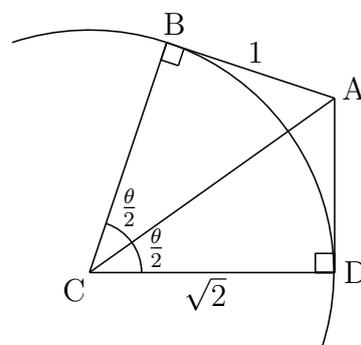
したがって $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

$$AD = 1 \text{ より } CA = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{3}$$

$\triangle ACD$ に注目すると

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって } \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



■

- 2 (1) $y = e^{|x|}$ 上の 2 点 P_1, P_2 の y 座標が等しいから, 放物線 $y = f(x)$ の軸は y 軸であり, $f(x) = ax^2 + c$ とおける. $g(x) = e^x$ とすると

$$f'(x) = 2ax, \quad g'(x) = e^x$$

点 P_2 について, 条件から $f(t) = g(t), \quad f'(t)g'(t) = -1$

$$at^2 + c = e^t, \quad 2ate^t = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{2te^t}, \quad c = e^t + \frac{t}{2e^t}$$

$$\text{よって} \quad f(x) = -\frac{x^2}{2te^t} + e^t + \frac{t}{2e^t}$$

- (2) y 軸に関する対称性に注意して

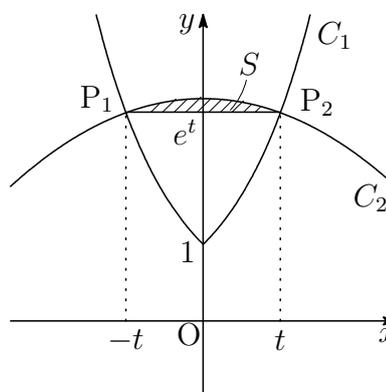
$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^t (ax^2 + c - e^t) dx \\ &= \frac{1}{2e^t} \int_0^t \left(-\frac{x^2}{t} + t \right) dx \\ &= \frac{1}{2e^t} \left[-\frac{x^3}{3t} + tx \right]_0^t = \frac{t^2}{3e^t} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad S = \frac{2t^2e^{-t}}{3}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2}{3} \{ 2te^{-t} + t^2(-e^{-t}) \} = \frac{2}{3} t(2-t)e^{-t}$$

t	(0)	...	2	...
$\frac{dS}{dt}$		+	0	-
S		↗	$\frac{8}{3e^2}$	↘

よって, $t = 2$ のとき, S は最小値 $\frac{8}{3e^2}$ をとる. ■



$$\boxed{3} \quad (1) \quad \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \text{ より}$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

別解 $t = \cos x$ とおくと $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ により

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin \theta - \sin x|}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\theta} \frac{\sin \theta - \sin x}{\cos^2 x} dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin \theta}{\cos^2 x} dx \\ &= \left[\sin \theta \tan x - \frac{1}{\cos x} \right]_0^{\theta} + \left[\frac{1}{\cos x} - \sin \theta \tan x \right]_{\theta}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{2(\sin^2 \theta - 1)}{\cos \theta} - \sin \theta + 1 + \sqrt{2} \\ &= -(\sin \theta + 2 \cos \theta) + 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ とおくと $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, $\tan \alpha = 2$, $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,
 $\tan \frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ より

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{3\pi}{8}, \quad \alpha \leq \theta + \alpha \leq \frac{\pi}{4} + \alpha < \frac{5\pi}{8}$$

したがって $f(\theta) = -\sqrt{5} \sin(\theta + \alpha) + 1 + \sqrt{2} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$

よって 最大値 $f(0) = \sqrt{2} - 1$,

最小値 $f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sqrt{5} + 1 + \sqrt{2}$ ■

- 4 (1) (i) 2, 4, 6 番目の A どおしが交換される時、次の 6 通り ($3^2 - 3$)

$$(k, \ell) = (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 4)$$

- (ii) 3, 5 番目の N どおしが交換される時、次の 2 通り ($2^2 - 2$)

$$(k, \ell) = (3, 5), (5, 3)$$

- (iii) $k = l$ のとき、6 通り.

$$(i) \sim (iii) \text{ より } p_1 = \frac{6 + 2 + 6}{6^2} = \frac{7}{18}$$

- (2) 「BANANA」から「NABANA」になるのは、1 番目の B, 3 番目の N が交換される次の 2 通り

$$(k, \ell) = (1, 3), (3, 1)$$

「NABANA」から「BANANA」になるのも 1 番目の N, 3 番目の B が交換される次の 2 通り

$$(k, \ell) = (1, 3), (3, 1)$$

$$\text{よって、求める確率は } p_2 = \frac{2}{6^2} \times \frac{2}{6^2} = \frac{1}{324}$$

- (3) (i) 1 回目行った後も「BANANA」であるときの確率は

$$p_1 \times p_1 = \frac{7}{18} \times \frac{7}{18} = \frac{49}{18^2}$$

- (ii) 1 回目に B と A が交換される場合の数は $4^2 - 1^2 - 3^2 = 6$ (通り)
2 回目に 1 回目に交換された B と N が元に戻る場合の数は 2 (通り)

$$\text{このときの確率は } \frac{6}{6^2} \times \frac{2}{6^2} = \frac{3}{18^2}$$

- (iii) 1 回目に B と N が交換される場合の数は $3^2 - 1^2 - 2^2 = 4$ (通り)
2 回目に 1 回目に交換された B と A が元に戻る場合の数は 2 (通り)

$$\text{このときの確率は } \frac{4}{6^2} \times \frac{2}{6^2} = \frac{2}{18^2}$$

- (iv) 1 回目に A と N が交換される場合の数は $5^2 - 3^2 - 2^2 = 12$ (通り)
2 回目に 1 回目に交換された A と N が元に戻る場合の数は 2 (通り)

$$\text{このときの確率は } \frac{12}{6^2} \times \frac{2}{6^2} = \frac{6}{18^2}$$

- (i) ~ (iv) より、求める確率は

$$p_3 = \frac{49}{18^2} + \frac{3}{18^2} + \frac{2}{18^2} + \frac{6}{18^2} = \frac{60}{18^2} = \frac{5}{27}$$