令和４年度　京都工芸繊維大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和４年２月25日

- 問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{1}$ 四角形ABCDについてAB $=1$，$\angle$ABC $=90^\circ$，$\angle$CDA $=90^\circ$ とする．$\angle$BCD $=\theta$ とおき，$45^\circ<\theta<90^\circ$ であるとする．

(1) 線分BC上の点Eが$\angle$DAE $=90^\circ$ を満たすとき，AE $<\sqrt{2}$ であることを示せ．

(2) 点Cを中心とし直線ABと直線DAの両方に接する円が存在し，かつCD $=\sqrt{2}$ であるとき，$\sin\theta$ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ t を正の実数とする．$f(x)$ を x の2次関数とする．xy 平面上の曲線 $C_1 : y=e^{|x|}$ と曲線 $C_2 : y=f(x)$ が，点 $\mathrm{P}_1(-t,\ e^t)$ で直交し，かつ点 $\mathrm{P}_2(t,\ e^t)$ でも直交している．ただし，2曲線 C_1 と C_2 が点Pで直交するとは，Pが C_1 と C_2 の共有点であり，C_1 と C_2 はPにおいてそれぞれ接線をもち，C_1 のPにおける接線と C_2 のPにおける接線が垂直であることである．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ と曲線 C_2 とで囲まれた図形の面積を S とする．S を t を用いて表せ．また，t が $t>0$ の範囲を動くときの S の最大値を求めよ．

$\boxed{3}$ (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ を求めよ．

(2) θ の関数 $f(\theta)$ を $f(\theta)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin\theta-\sin x|}{\cos^2 x}dx$ で定める．$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲における $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ．

4 横一列に並んだ 6 文字からなる文字列に対して次の操作を考える．

(∗) 大小 2 個のサイコロを投げて，大きいサイコロの出た目の数を k，小さいサイコロの出た目の数を ℓ とする．考えている文字列の左端から k 番目の文字と左端から ℓ 番目の文字をとり換える．ただし $k=\ell$ のときは考えている文字列をそのままにする．

また，(∗) の操作を続けて行う場合は直前の操作で得られた文字列に対して (∗) の操作を行うものとする．

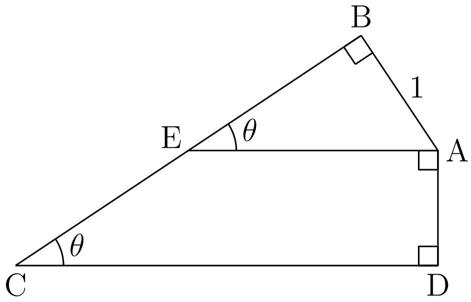
(1) 文字列 BANANA に対して (∗) の操作を 1 回行って得られる文字列が再び BANANA である確率 p_1 を求めよ．

(2) 文字列 BANANA に対して (∗) の操作を 2 回続けて行うとき，1 回目の操作の結果が NABANA であり 2 回目の操作が BANANA である確率 p_2 を求めよ．

(3) 文字列 BANANA に対して (∗) の操作を 2 回続けて行って得られる文字列が BANANA である確率 p_3 を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\angle\mathrm{BAD} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{DAE} = 90^\circ$ より，
EA//CD であるから



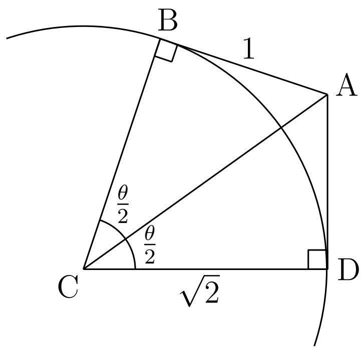
$$\angle\mathrm{BEA} = \angle\mathrm{BCD} = \theta$$

$\triangle\mathrm{ABE}$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AE}}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$45^\circ < \theta < 90^\circ$ より　$\mathrm{AE} = \dfrac{1}{\sin\theta} > \sqrt{2}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{ADC}$ について



CA は共通
$\mathrm{CB} = \mathrm{CD} = \sqrt{2}$　(円の半径)
$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ADC} = 90^\circ$　(接線と半径)

したがって　$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{ADC}$
$\mathrm{AD} = 1$ より　$\mathrm{CA} = \sqrt{\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD}^2} = \sqrt{3}$
$\triangle\mathrm{ACD}$ に注目すると

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

よって　$\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=e^{|x|}$ 上の2点 P_1，P_2 の y 座標が等しいから，放物線 $y=f(x)$ の軸は y 軸であり，$f(x)=ax^2+c$ とおける．$g(x)=e^x$ とすると

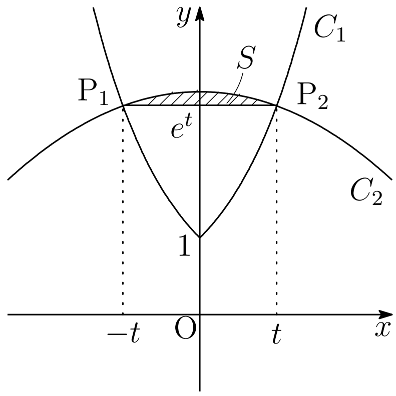
$$f'(x)=2ax,\quad g'(x)=e^x$$

点 P_2 について，条件から　$f(t)=g(t),\quad f'(t)g'(t)=-1$

$$at^2+c=e^t,\quad 2ate^t=-1\quad \text{ゆえに}\quad a=-\frac{1}{2te^t},\quad c=e^t+\frac{t}{2e^t}$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=-\dfrac{x^2}{2te^t}+e^t+\dfrac{t}{2e^t}}$

(2) y 軸に関する対称性に注意して



$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^t(ax^2+c-e^t)\,dx\\&=\frac{1}{2e^t}\int_0^t\left(-\frac{x^2}{t}+t\right)dx\\&=\frac{1}{2e^t}\left[-\frac{x^3}{3t}+tx\right]_0^t=\frac{t^2}{3e^t}\end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{S=\dfrac{2t^2e^{-t}}{3}}$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{2}{3}\{2te^{-t}+t^2(-e^{-t})\}=\frac{2}{3}t(2-t)e^{-t}$$

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$\frac{dS}{dt}$		$+$	0	$-$
S		$\nearrow$	$\frac{8}{3e^2}$	$\searrow$

よって，$t=2$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{8}{3e^2}}$ をとる． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = -\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ より

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \boldsymbol{\frac{1}{\cos x} + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\,\textbf{は積分定数)}$$

別解 $t = \cos x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \boldsymbol{\frac{1}{\cos x} + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\,\textbf{は積分定数)}$$

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ により

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin\theta - \sin x|}{\cos^2 x}dx \\ &= \int_0^{\theta} \frac{\sin\theta - \sin x}{\cos^2 x}dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin\theta}{\cos^2 x}dx \\ &= \left[\sin\theta\tan x - \frac{1}{\cos x}\right]_0^{\theta} + \left[\frac{1}{\cos x} - \sin\theta\tan x\right]_{\theta}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{2(\sin^2\theta - 1)}{\cos\theta} - \sin\theta + 1 + \sqrt{2} \\ &= -(\sin\theta + 2\cos\theta) + 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ とおくと $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\tan\alpha = 2$, $\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\tan\dfrac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ より

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{3\pi}{8}, \quad \alpha \leqq \theta + \alpha \leqq \frac{\pi}{4} + \alpha < \frac{5\pi}{8}$$

したがって　$f(\theta) = -\sqrt{5}\sin(\theta + \alpha) + 1 + \sqrt{2} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$

よって　最大値 $f(0) = \boldsymbol{\sqrt{2} - 1}$,

最小値 $f\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \boldsymbol{-\sqrt{5} + 1 + \sqrt{2}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) (i) 2, 4, 6 番目の A どおしが交換されるとき，次の 6 通り (3^3-3)

$$(k,\ \ell)=(2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (4,\ 2),\ (4,\ 6),\ (6,\ 2),\ (6,\ 4)$$

(ii) 3, 5 番目の N どおしが交換されるとき，次の 2 通り (2^2-2)

$$(k,\ \ell)=(3,\ 5),\ (5,\ 3)$$

(iii) $k=l$ のとき，6 通り．

(i)〜(iii) より $\quad p_1=\dfrac{6+2+6}{6^2}=\mathbf{\dfrac{7}{18}}$

(2) 「BANANA」から「NABANA」になるのは，1 番目の B，3 番目の N が交換される次の 2 通り

$$(k,\ \ell)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

「NABANA」から「BANANA」になるのも 1 番目の N，3 番目の B が交換される次の 2 通り

$$(k,\ \ell)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

よって，求める確率は $\quad p_2=\dfrac{2}{6^2}\times\dfrac{2}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{324}}$

(3) (i) 1 回目行った後も「BANANA」であるときの確率は

$$p_1\times p_1=\frac{7}{18}\times\frac{7}{18}=\frac{49}{18^2}$$

(ii) 1 回目に B と A が交換される場合の数は $\quad 4^2-1^2-3^2=6$ (通り)
2 回目に 1 回目に交換された B と A が元に戻る場合の数は $\quad 2$ (通り)
このときの確率は $\quad \dfrac{6}{6^2}\times\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{3}{18^2}$

(iii) 1 回目に B と N が交換される場合の数は $\quad 3^2-1^2-2^2=4$ (通り)
2 回目に 1 回目に交換された B と A が元に戻る場合の数は $\quad 2$ (通り)
このときの確率は $\quad \dfrac{4}{6^2}\times\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{2}{18^2}$

(iv) 1 回目に A と N が交換される場合の数は $\quad 5^2-3^2-2^2=12$ (通り)
2 回目に 1 回目に交換された A と N が元に戻る場合の数は $\quad 2$ (通り)
このときの確率は $\quad \dfrac{12}{6^2}\times\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{6}{18^2}$

(i)〜(iv) より，求める確率は

$$p_3=\frac{49}{18^2}+\frac{3}{18^2}+\frac{2}{18^2}+\frac{6}{18^2}=\frac{60}{18^2}=\mathbf{\frac{5}{27}}$$

■