令和４年度　高知大学２次試験前期日程 (数学問題)

令和 4 年 2 月 25 日

- 理工 (数学物理・情報科学)・医 (医) 学部　1　2　3　4
  数 I・II・III・A・B (120 分)

- 教育学部　5　6　7　8
  数 I・II・A・B (120 分)

1 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，$a_2 = 5$，および，すべての自然数 n に対して，

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n - 4$$

をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して，$b_n = a_{n+1} - a_n$ で数列 $\{b_n\}$ を定義する．
一般項 b_n を求めよ．

(3) 一般項 a_n を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) $1 \leqq p \leqq 8$, $1 \leqq q \leqq 8$, $|p-q| > 2$ を同時にみたす整数の組 $(p,\ q)$ の個数を求めよ．

(2) 自然数 n に対して，整数 p と q は，$1 \leqq p \leqq n$ と $1 \leqq q \leqq n$ を満たすとする．さらに，p と q の少なくとも一方が $\dfrac{n}{2}$ 以上であるような整数の組 $(p,\ q)$ の個数 a_n を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$1 \leqq p \leqq n$，$1 \leqq q \leqq n$，$p^2 + q^2 \leqq n^2$ を同時にみたす整数の組 $(p,\ q)$ の個数を b_n とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^2} = \frac{\pi}{4}$$

となることを示せ．

3 a と b は実数とし，次の方程式を考える．

$$x^2+ax+b=0 \quad \cdots ①$$

また，$|z-(\sqrt{3}+i)|=1$ をみたす複素数平面上の点 z からなる図形を C とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 ① の 1 つの解の偏角が $\dfrac{\pi}{3}$ となるときの a と b の条件を求めよ．さらに，その条件をみたす点 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ．

(2) 方程式 ① の解の 1 つに対応する複素数平面上の点が C 上にあるとする．その解の絶対値が最大となるときの a と b を求めよ．

(3) 方程式 ① の解の 1 つに対応する複素数平面上の点が C 上にあるとする．その解の偏角が 0 以上 2π 未満の範囲において最大となるときの a と b を求めよ．

4 次の問いに答えよ．

(1) 正の実数 x に対して，$e^x>1+x$ が成り立つことを示せ．

(2) $n \geqq 1$ に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\log(n+1)$ が成り立つことを示せ．

(3) $k \geqq 2$ に対して，$\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{(k-1)k}$ が成り立つことを用いて，$n \geqq 2$ に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ は正の無限大には発散しないことを示せ．また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ は正の無限大に発散することを示せ．

$\boxed{5}$ 1辺の長さが1である正四面体をABCDとし，三角形BCDの重心をPとする．また，点Gを $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}}{4}$ をみたす点とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分AGの長さを求めよ．

(2) 3点A，G，Pは同一直線上にあることを示せ．

(3) AG : GPを求めよ．

(4) $\cos\angle\mathrm{AGB}$ の値を求めよ．

$\boxed{6}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\sin\dfrac{11}{12}\pi$ の値を求めよ．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式をみたす θ を求めよ．

$$\cos 2\theta + 11\sin\theta - 6 = 0$$

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式をみたす異なる θ がちょうど4個あるような実数 k の範囲を求めよ．

$$\sin 3\theta - 9\sin^2\theta + 9\sin\theta = k$$

$\boxed{7}$ 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，および，すべての自然数 n に対して，

$$a_{n+1} = \frac{4 - a_n}{3 - a_n}$$

をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2) 一般項 a_n を推測して，それが正しいことを証明せよ．

$\boxed{8}$ $a > 0$ とする．$y = x(a - x)$ で定まる曲線を C とする．そして，C と x 軸とで囲まれた部分の面積を2等分するような，原点を通る直線を ℓ とする．また，C と ℓ との原点以外の交点をPとする．さらに，C のPにおける接線を m とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) Pの座標を求めよ．

(3) m の方程式を求めよ．

(4) y 軸と C と m で囲まれた部分の面積は(1)で求めた値に等しいことを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_1=1,\ a_2=5,\ a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n-4$ より

$$\begin{aligned} a_3&=4a_2-3a_1-4=4\cdot5-3\cdot1-4=\mathbf{13}\\ a_4&=4a_3-3a_2-4=4\cdot13-3\cdot5-4=\mathbf{33}\\ a_5&=4a_4-3a_3-4=4\cdot33-3\cdot13-4=\mathbf{89} \end{aligned}$$

(2) $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n-4,\ b_n=a_{n+1}-a_n$ より

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)-4 \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1}=3b_n-4$$

上の第 2 式から　　$b_{n+1}-2=3(b_n-2)$

数列 $\{b_n-2\}$ は，初項 $b_1-2=a_2-a_1-2=2$，公比 3 の等比数列

$$b_n-2=2\cdot3^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_n=2\cdot3^{n-1}+2}$$

(3) (2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)&=\sum_{k=1}^{n-1}(2\cdot3^{k-1}+2)\\ a_n-a_1&=2\cdot\frac{3^n-1}{3-1}+2(n-1) \end{aligned}$$

したがって　　$a_n=3^{n-1}+2n-2$

これは，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n=3^{n-1}+2n-2}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}(3^{k-1}+2k-2)\\ &=\frac{3^n-1}{3-1}+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n\\ &=\boldsymbol{\frac{3^n-1}{2}+n^2-n} \end{aligned}$$

■

2 (1) 6 個の球を一列に並べ，その中から p，q に該当する 2 個の球の選び方は，${}_6\mathrm{P}_2$ 通りある．その後 p と q の間に 2 個の球を並べる．このとき並んだ p と q をその順番とすればよい．よって，求める組 $(p,\ q)$ の個数は

$${}_6\mathrm{P}_2 = 6 \times 5 = \mathbf{30}\ (\text{個})$$

(2) $1 \leqq p \leqq n$，$1 \leqq q \leqq n$ を満たすとき，$1 \leqq p < \dfrac{n}{2}$，$1 \leqq q < \dfrac{n}{2}$ である整数の組は

$$n\text{ が偶数のとき } \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \text{ 個},\quad n\text{ が奇数のとき } \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \text{ 個}$$

- n が偶数のとき

$$a_n = n^2 - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}(3n-2)(n+2)}$$

- n が奇数のとき

$$a_n = n^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}(3n-1)(n+1)}$$

(3) $1 \leqq p \leqq n$，$1 \leqq q \leqq n$，$p^2 + q^2 \leqq n^2$ より　$1 \leqq q \leqq \sqrt{n^2 - p^2}$

$b_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \left[\ \sqrt{n^2 - p^2}\ \right]$ であるから ($[x]$ は x を超えない最大の整数)

$$\sum_{p=1}^{n}(\sqrt{n^2-p^2} - 1) < b_n \leqq \sum_{p=1}^{n}\sqrt{n^2-p^2}$$
$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{p}{n}\right)^2} - \frac{1}{n} < \frac{b_n}{n^2} < \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{p}{n}\right)^2}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{p}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2} = \frac{\pi}{4}$ ■

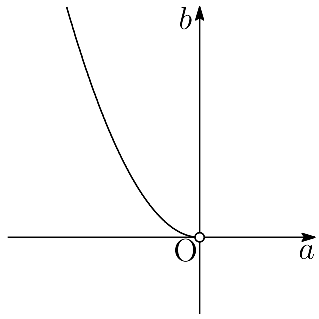
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの解を

$$r\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

とおくと $(r>0)$，解との係数の関係から

$$r=-a,\quad r^2=b$$

よって　　$\boldsymbol{b=a^2\ (a<0)}$



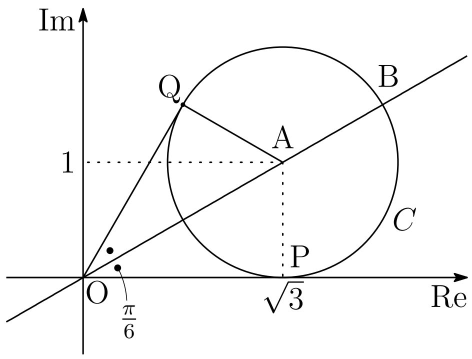
(2) C 上の偏角が $\dfrac{\pi}{6}$ で，大きさが3である下の図の点Bである．

①が2つの解

$$3\left(\cos\frac{\pi}{6}\pm\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

をもつときであるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{a=-3\sqrt{3},\quad b=9}$$



(3) C 上の偏角が $\dfrac{\pi}{3}$ で，大きさが $\sqrt{3}$ である上の図の点Qである．

①が2つの解

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

をもつときであるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{a=-\sqrt{3},\quad b=3}$$

■

4 (1) $f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと　$f(0) = 0$

$$f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad (x > 0)$$

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x) \geqq f(0) = 0 \quad \text{よって} \quad e^x > 1 + x \ \ (x > 0)$$

(2) $\dfrac{1}{k} > \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx$ より

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

別解 (1) の結果から　$e^{\frac{1}{k}} > 1 + \dfrac{1}{k} = \dfrac{k+1}{k}$

$$\frac{1}{k} > \log\frac{k+1}{k} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{k} > \log(k+1) - \log k$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \{\log(k+1) - \log k\} = \log(n+1)$

(3) $n \geqq 2$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

(4) (3) の結果から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ は正の無限大に発散しない．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \infty$ であるから，(2) の結果より

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ は正の無限大に発散する．　■

$\boxed{5}$ (1) 1辺の長さが1である正四面体ABCDにより

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 1,$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\cdot 1\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 \\ &\quad + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} \\ &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = 6\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}| = \sqrt{6}$ より

$$\mathrm{AG} = |\overrightarrow{AG}| = \frac{|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

(2) 点Pは△BCDの重心であるから

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AP}$　$\cdots$①

よって，3点A，G，Pは同一直線上にある．

(3) ①より　**AG : GP = 3 : 1**

(4) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{4}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{4} \\ &= \frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}}{4}\end{aligned}$$

(1)と同様にして　$\mathrm{BG} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

△AGBに余弦定理を適用すると

$$\cos\angle\mathrm{AGB} = \frac{\mathrm{AG}^2 + \mathrm{BG}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AG}\cdot\mathrm{BG}} = \frac{\frac{3}{8}+\frac{3}{8}-1}{\frac{3}{4}} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}}$$

■

$\boxed{6}$ (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin\frac{11}{12}\pi &= \sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

(2) $\cos 2\theta+11\sin\theta-6=0$ より

$$1-2\sin^2\theta+11\sin\theta-6=0 \quad \text{ゆえに} \quad (\sin\theta-5)(2\sin\theta-1)=0$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であるから

$$\sin\theta=\frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi}$$

(3) 方程式 $sin3\theta-9\sin^2\theta+9\sin\theta=k$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ は，
$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ より

$$-4\sin^3\theta-9\sin^2\theta+12\sin\theta=k \quad (0 \leqq \theta < 2\pi) \qquad (*)$$

$x=\sin\theta$ とおくと $(-1 \leqq x \leqq 1)$

$$-4x^3-9x^2+12x=k \quad (-1 \leqq x \leqq 1) \qquad (**)$$

$f(x)=-4x^3-9x^2+12x$ とおくと $(-1 \leqq x \leqq 1)$

$$\begin{aligned}f'(x)&=-12x^2-18x+12=-6(2x^2+3x-2)\\ &=-6(x+2)(2x-1)\end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表は

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-17	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	-1

$\sin\theta=x$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の解の個数 N は

$$N=\begin{cases}0\text{個} & (|x|>1\text{ のとき})\\ 1\text{個} & (|x|=1\text{ のとき})\\ 2\text{個} & (|x|<1\text{ のとき})\end{cases}$$

方程式 $(*)$ が異なる 4 つの解をもつとき，方程式 $(**)$ が $-1<x<1$ に異なる 2 つの実数解をもつときであるから

$$\boldsymbol{-1<k<\frac{13}{4}}$$

■

$\boxed{7}$ (1) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{4-a_n}{3-a_n}$ より

$$a_2=\frac{4-a_1}{3-a_1}=\frac{4-1}{3-1}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$
$$a_3=\frac{4-a_2}{3-a_2}=\frac{4-\frac{3}{2}}{3-\frac{3}{2}}=\mathbf{\frac{5}{3}}$$
$$a_4=\frac{4-a_3}{3-a_3}=\frac{4-\frac{5}{3}}{3-\frac{5}{3}}=\mathbf{\frac{7}{4}}$$

(2) $(*)\quad a_n=\dfrac{2n-1}{n}$

［1］$n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{2\cdot 1-1}{1}=1$ より，$(*)$ が成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$a_{k+1}=\frac{4-a_k}{3-a_k}=\frac{4-\frac{2k-1}{k}}{3-\frac{2k-1}{k}}=\frac{2k+1}{k+1}=\frac{2(k+1)-1}{k+1}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

補足 特性方程式 $x=\dfrac{4-x}{3-x}$ を解くと[1]　$x=2$

$$a_{n+1}-2=\frac{4-a_n}{3-a_n}-2=\frac{a_n-2}{3-a_n}$$

ゆえに　$\dfrac{1}{a_{n+1}-2}=\dfrac{3-a_n}{a_n-2}=\dfrac{1}{a_n-2}-1$

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-2}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1-2}=-1$，公差 -1 の等差数列であるから

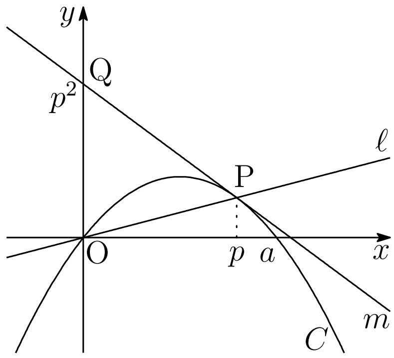
$$\frac{1}{a_n-2}=-1-(n-1)=-n \quad \text{ゆえに} \quad a_n-2=-\frac{1}{n}$$

よって　$a_n=\dfrac{2n-1}{n}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2015.pdf (p.4 参照)

$\boxed{8}$ (1) 求める面積を S_1 とすると

$$S_1 = \int_0^a x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a^3}{6}}$$



(2) 点 P の x 座標を p とすると

$$\frac{p^3}{6} = \frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{6} \quad \text{ゆえに} \quad p = \boldsymbol{\frac{a}{\sqrt[3]{2}}}$$

$$y = p(a-p) = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}\left(a - \frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}a^2$$

よって　　$\mathrm{P}\boldsymbol{\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}a^2\right)}$

(3) $y = x(a-x) = ax - x^2$ より　$y' = a - 2x$

C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p(a-p))$ における接線の方程式は

$$y = (a-2p)(x-p) + p(a-p) \quad \text{ゆえに} \quad y = (a-2p)x + p^2 \qquad (*)$$

$p = \dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$ より　$\boldsymbol{m : y = (1-\sqrt[3]{4})ax + \frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}}$

(4) 直線 m の y 軸との交点を Q とすると，$(*)$ より　$\mathrm{Q}(0,\ p^2)$

y 軸と C と m で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \triangle\mathrm{OPQ} - \frac{1}{6}p^3 = \frac{1}{2}p^2\cdot p - \frac{1}{6}p^3 = \frac{1}{3}p^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = \frac{a^3}{6}$$

よって　　$S_1 = S_2$　■