

## 令和4年度 香川大学2次試験前期日程 (数学問題)

令和4年2月25日

- 創造工学部 A [1] [2] [3] [4] 数I・II・III・A・B (90分)
- 創造工学部 B・法学部 [1] [2] [3] [5] 数I・II・A・B (90分)
- 教育・農・医(臨床)学部 [1] [2] [5] 必答, [3] [4] の2題から1題選択  
数I・II・(III)・A・B (90分)
- 医(医)学部 [2] [6] [7] [8] 数I・II・II・III・A・B (90分)

[1] ABCにおいて、辺ABを1:3に内分する点をP、辺ACを1:4に内分する点をQとし、線分BQとCPの交点をR、直線ARと辺BCの交点をSとする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ とおくとき、次の問に答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{AQ}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (2)  $\overrightarrow{AR}$ ,  $\overrightarrow{AS}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (3)  $\triangle ABC$  の面積は  $\triangle RBS$  の面積の何倍かを答えよ。

[2] 数列  $\{a_n\}$  を,

$$a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{-3a_n + 2}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。このとき、次の問に答えよ。

- (1)  $b_n = \frac{-3}{a_n - 1}$  とおくとき、 $b_{n+1}$  を  $b_n$  で表せ。
- (2)  $b_n$  を  $n$  を用いて表せ。
- (3)  $b_n > \frac{2021}{2022}$  を満たす最小の自然数  $n$  を求めよ。

[3] 関数  $f(x) = x^3 - 6x^2$  に対し、座標平面上の曲線  $y = f(x)$  を  $C$  とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 曲線  $C$  上の点  $(p, f(p))$  における接線の方程式を求めよ。
- (2) 関数  $y = f(x)$  の極値を求めよ。
- (3) 点  $(4, k)$  から曲線  $C$  上の異なる3点それぞれに接線が引けるとする。このときの定数  $k$  の値の範囲を求めよ。

4 曲線  $y = -x^2 + 2x$  を  $C$  とし,  $C$  上の点  $(0, 0)$  における接線を  $l$  とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 接線  $l$  の方程式を求めよ.
- (2) 曲線  $C$  と接線  $l$ , および直線  $x = 1$  で囲まれてできる図形  $D$  を座標平面上に図示し, その面積  $S$  を求めよ.
- (3)  $D$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積  $V_1$  を求めよ.
- (4)  $D$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積  $V_2$  を求めよ.

5  $a$  を実数の定数とする. 関数  $f(x) = x^2 - ax + a$  について, 次の問に答えよ.

- (1) 放物線  $y = f(x)$  の頂点の座標を  $a$  を用いて表せ.
- (2) 放物線  $y = f(x)$  と  $x$  軸が異なる 2 点で交わるような  $a$  の値の範囲を求めよ.
- (3) 不等式  $f(x) > 0$  を解け.

6 座標平面上において, 中心  $(1, 1)$ , 半径 1 の円  $C$  の周上の点  $P$  の座標を  $(1 + \cos \theta, 1 + \sin \theta)$  で表す. このとき, 次の問に答えよ.

- (1)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき, 点  $P$  における円  $C$  の接線と  $x$  軸との交点を  $A$ ,  $y$  軸との交点を  $B$  とする. 線分  $AB$  の長さ  $L(\theta)$  を  $\theta$  を用いて表せ.
- (2)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  における  $L(\theta)$  の最小値を求めよ.

7  $a > 0$  に対し,

$$f(x) = ax^2 + \frac{2}{a}, \quad g(x) = a^2x^2 + \frac{2}{a}$$

とおく. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 実数  $a$  が  $a > 0$  の範囲を動くとき, 曲線  $y = f(x)$  が通りうる範囲を座標平面上に図示せよ.
- (2) 実数  $a$  が  $a > 0$  の範囲を動くとき, 曲線  $y = g(x)$  が通りうる範囲を座標平面上に図示せよ.

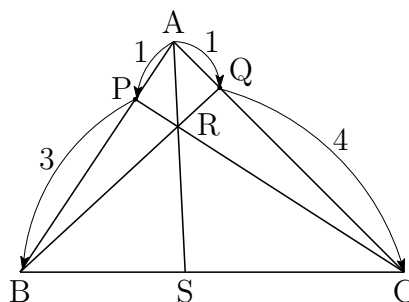
8 関数  $f(x) = x \log x$  について, 次の問に答えよ.

- (1) 不定積分  $\int f(x) dx$  を求めよ.
- (2)  $a > 1$  に対し,  $I(a) = \int_1^a \{5f(x) - af'(x)\} dx$  とおく. このとき,  $I(a)$  を  $a$  を用いて表せ.
- (3)  $a > 1$  における  $I(a)$  の最小値と, そのときの  $a$  の値を求めよ.

## 解答例

1 (1) 条件から

$$\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{a}, \quad \vec{AQ} = \frac{1}{5}\vec{b}$$



(2)  $\vec{AR} = x\vec{a} + y\vec{b}$  とおくと,  $\vec{a} = 4\vec{AP}$ ,  $\vec{b} = 5\vec{AQ}$  より

$$\vec{AR} = 4x\vec{AP} + y\vec{AC} = x\vec{AB} + 5y\vec{AQ}$$

S は CP, BQ 上の点であるから

$$4x + y = x + 5y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{4}{19}, \quad y = \frac{3}{19}$$

$$\text{したがって} \quad \vec{AR} = \frac{4}{19}\vec{a} + \frac{3}{19}\vec{b} = \frac{7}{19} \cdot \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{7} = \frac{7}{19}\vec{AS}$$

$$\text{よって} \quad \vec{AR} = \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{19}, \quad \vec{AS} = \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{7}$$

別解 チェバの定理により  $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{4}{1} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad BS : SC = 3 : 4$$

$$\text{したがって} \quad \vec{AS} = \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{7}$$

$\triangle ABS$  と直線 PC についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BC}{CS} \cdot \frac{SR}{RA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{SR}{RA} = 1$$

$$AR : RS = 7 : 12 \quad \text{より} \quad \vec{AR} = \frac{7}{19}\vec{AS} = \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{19}$$

(3)  $\triangle RBS = \frac{12}{19}\triangle ABS$ ,  $\triangle ABS = \frac{3}{7}\triangle ABC$  より

$$\triangle RBS = \frac{12}{19} \cdot \frac{3}{7} \triangle ABC \quad \text{ゆえに} \quad \triangle ABC = \frac{133}{36} \triangle RBS$$



$$\boxed{2} \quad (1) \quad a_{n+1} = \frac{-3a_n + 2}{a_n - 1} \text{ より } a_{n+1} - 1 = \frac{-3a_n + 2 - (a_n - 1)}{a_n - 1} = \frac{-4(a_n - 1)}{a_n - 2}$$

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = -\frac{a_n - 2}{4(a_n - 1)} = -\frac{-1 + (a_n - 1)}{4(a_n - 1)} = \frac{1}{4(a_n - 1)} - \frac{1}{4}$$

$$\text{したがって } \frac{-3}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-3}{a_n - 1} + \frac{3}{4} \quad \text{よって } b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{3}{4}$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果から } b_{n+1} - 1 = \frac{1}{4}(b_n - 1)$$

$$b_1 - 1 = \frac{-3}{a_1 - 1} - 1 = \frac{-3}{4 - 1} - 1 = -2$$

$\{b_n - 1\}$  は初項  $-2$ 、公比  $\frac{1}{4}$  の等比数列であるから

$$b_n - 1 = -2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{よって } b_n = 1 - \frac{2}{4^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{2n-3}}$$

$$(3) \quad (2) \text{ の結果から, } b_n > \frac{2021}{2022} = 1 - \frac{1}{2022} \text{ を満たすとき}$$

$$1 - \frac{1}{2^{2n-3}} > 1 - \frac{1}{2022} \quad \text{ゆえに } 2^{2n-3} > 2022$$

$$\text{したがって } 2^{2n-4} > 1011$$

$2^8 = 256$ ,  $2^{10} = 1024$  であるから, 上式を満たす最小の  $n$  は

$$2n - 4 = 10 \quad \text{すなわち } n = 7$$



**3** (1)  $f(x) = x^3 - 6x^2$  より  $f'(x) = 3x^2 - 12x$

$y = f(x)$  上の点  $(p, f(p))$  における接線の方程式は

$$y = f'(p)(x - p) + f(p) \quad \text{ゆえに} \quad y = (3p^2 - 12p)(x - p) + p^3 - 6p^2$$

よって  $y = 3(p^2 - 4p)x - 2p^3 + 6p^2$

(2)  $f'(x) = 3x(x - 4)$  より

$x$	...	0	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-32	↗

よって 極大値  $f(0) = 0$ , 極小値  $f(4) = -32$

(3) (1) で求めた接線が点  $(4, k)$  を通るとき

$$k = (3p^2 - 12p) \cdot 4 - 2p^3 + 6p^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2p^3 - 18p^2 + 48p + k = 0$$

$g(p) = 2p^3 - 18p^2 + 48p + k$  とおくと, 3次方程式  $g(p)$  が異なる3つの実数解をもつ  $k$  の値の範囲を求めればよい.

$$g'(p) = 6p^2 - 36p + 48 = 6(p - 2)(p - 4)$$

$g(p)$  は極大値  $g(2) = k + 40$ , 極小値  $g(4) = k + 32$  をとるから, 求める  $k$  の値の範囲は

$$k + 32 < 0 < k + 40 \quad \text{ゆえに} \quad -40 < k < -32$$

補足  $f'(x) = 3x^2 - 12x$ ,  $f''(x) = 6(x - 2)$  より,  $y = f(x)$  の変曲点  $(2, -16)$  における接線の方程式を  $y = h(x)$  とすると

$$h(x) = -12x + 8$$

$h(4) = -40$ ,  $f(4) = -32$  であるから<sup>1</sup>

$$-40 < k < -32$$



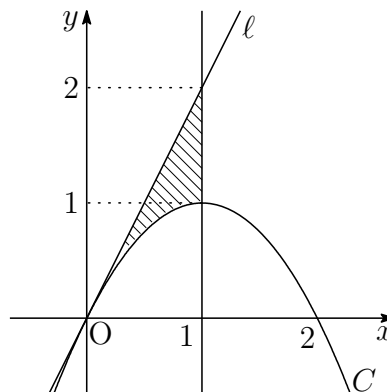
<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai\\_2017.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf) (p.12 を参照)

- 4 (1)  $C: y = -x^2 + 2x$  を微分すると  $y' = -2x + 2$   
 $x = 0$  のとき,  $y' = 2$  より,  $C$  上の点  $(0, 0)$  における接線  $\ell$  は

$$y = 2x$$

- (2) 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{2x - (-x^2 + 2x)\} dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



- (3) 求める回転体の体積  $V_1$  は

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_0^1 \{(2x)^2 - (-x^2 + 2x)^1\} dx \\ &= \int_0^1 (-x^4 + 4x^3) dx = \left[ -\frac{x^5}{5} + x^4 \right]_0^1 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

よって  $V_1 = \frac{4}{5}\pi$

- (4) 求める回転体の体積  $V_2$  は

$$\frac{V_2}{2\pi} = \int_0^1 x \{2x - (-x^2 + 2x)\} dx = \int_0^1 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

よって  $V_2 = \frac{\pi}{2}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leq x \leq b$  の範囲で  $f(x) \geq 0$  のとき,  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸および 2 直線  $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた部分を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積  $V$  は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

5 (1)  $f(x) = x^2 - ax + a = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a$  より,

頂点の座標は  $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + a\right)$

(2) (1) で求めた頂点の  $y$  座標および  $x^2$  の係数に注意して

$$-\frac{a^2}{4} + a < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a-4) > 0$$

よって  $a < 0, 4 < a$

(3) 方程式  $f(x) = 0$  の判別式を  $D$  とすると  $D = a^2 - 4a = a(a-4)$

(i)  $a < 0, 4 < a$  のとき,  $f(x) > 0$  の解は

$$x < \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} < x$$

(ii)  $a = 0$  のとき,  $f(x) = x^2 > 0$  の解は  $x \neq 0$

(iii)  $a = 4$  のとき,  $f(x) = (x-2)^2 > 0$  の解は  $x \neq 2$

(iv)  $0 < a < 4$  のとき,  $f(x) > 0$  の解は すべての実数

$$\text{よって} \left\{ \begin{array}{ll} a < 0, 4 < a \text{ のとき} & x < \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}, \\ & \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} < x \\ a = 0 \text{ のとき} & x \neq 0 \\ a = 4 \text{ のとき} & x \neq 2 \\ 0 < a < 4 \text{ のとき} & \text{すべての実数} \end{array} \right.$$



- 6** (1)  $C : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  上の点  $(1 + \cos \theta, 1 + \sin \theta)$  における接線は

$$(x-1) \cos \theta + (y-1) \sin \theta = 1 \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = 0 \text{ とすると } x = \frac{1 + \sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta}$$

$$x = 0 \text{ とすると } y = \frac{1 + \sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\text{したがって } A\left(\frac{1 + \sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta}, 0\right), B\left(0, \frac{1 + \sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1 + \sin \theta + \cos \theta) \left(-\frac{1}{\cos \theta}, \frac{1}{\sin \theta}\right) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} L(\theta) = |\overrightarrow{AB}| &= (1 + \sin \theta + \cos \theta) \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1 + \sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果の分母に注意して

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \cos \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1 \\ &= (\sin \theta + \cos \theta + 1)(\sin \theta + \cos \theta - 1) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \frac{2(1 + \sin \theta + \cos \theta)}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{2(1 + \sin \theta + \cos \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta + 1)(\sin \theta + \cos \theta - 1)} \\ &= \frac{2}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{2}{\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 1} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$  であるから,  $L(\theta)$  は,  $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ , すなわち,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき, 最小値

$$L\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 2(\sqrt{2} + 1)$$

をとる. ■



7 (1)  $y = ax^2 + \frac{2}{a}$  について ( $a > 0$ ),  $x$  を固定して考える.

(i)  $x > 0$  のとき  $\frac{dy}{da} = x^2 - \frac{2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} \left( a^2 - \frac{2}{x^2} \right)$

$a$	(0)	...	$\frac{\sqrt{2}}{x}$	...
$\frac{dy}{da}$		-	0	+
$y$		$\searrow$	$2\sqrt{2}x$	$\nearrow$

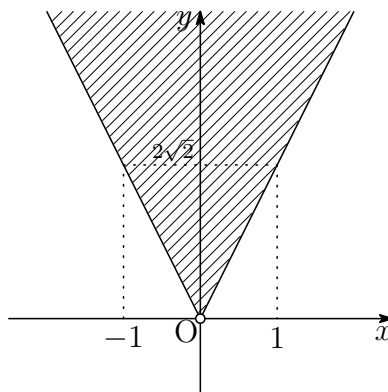
$$\lim_{a \rightarrow +0} y = \infty, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} y = \infty \quad \text{より} \quad y \geq 2\sqrt{2}x$$

(ii)  $x = 0$  のとき  $y = \frac{2}{a} > 0$

(iii)  $x < 0$  のとき,  $-x > 0$  であるから, (i) の結果から

$$y \geq 2\sqrt{2}(-x) \quad \text{すなわち} \quad y \geq -2\sqrt{2}x$$

(i)~(iii) より,  $y = f(x)$  が通る領域は, 下の図の斜線部分で原点以外の境界線を含む.



(2)  $y = a^2x^2 + \frac{2}{a}$  について ( $a > 0$ ),  $x$  を固定して考える.

(i)  $x > 0$  のとき  $\frac{dy}{da} = 2ax^2 - \frac{2}{a^2} = \frac{2x^2}{a^2} \left( a^3 - \frac{1}{x^2} \right)$

$a$	(0)	...	$x^{-\frac{2}{3}}$	...
$\frac{dy}{da}$		-	0	+
$y$		↘	$3x^{\frac{2}{3}}$	↗

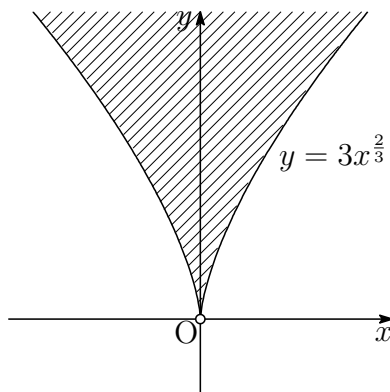
$$\lim_{a \rightarrow +0} y = \infty, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} y = \infty \text{ より } y \geq 3x^{\frac{2}{3}}$$

(ii)  $x = 0$  のとき  $y = \frac{2}{a} > 0$

(iii)  $x < 0$  のとき,  $-x > 0$  であるから, (i) の結果から

$$y \geq 3(-x)^{\frac{2}{3}} \quad \text{すなわち} \quad y \geq 3x^{\frac{2}{3}}$$

(i)~(iii) より,  $y = g(x)$  が通る領域は, 下の図の斜線部分で原点以外の境界線を含む.



8 (1)  $f(x) = x \log x$  より

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x \log x dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から,  $F(x) = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}$  とおくと

$$F(a) = \frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4}, \quad F(1) = -\frac{1}{4}$$

また,  $f(a) = a \log a$ ,  $f(1) = 0$  より

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_1^a \{5f(x) - af'(x)\} dx \\ &= 5 \left[ F(x) \right]_1^a - a \left[ f(x) \right]_1^a \\ &= 5 \left( \frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4} \right) - a \cdot a \log a \\ &= \frac{3}{2} a^2 \log a - \frac{5}{4} a^2 + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から ( $a > 1$ )

$$I'(a) = 3a \log a + \frac{3}{2}a - \frac{5}{2}a = 3a \left( \log a - \frac{1}{3} \right)$$

$a$	(1)	...	$e^{\frac{1}{3}}$	...
$I'(a)$		-	0	+
$I(a)$		↘	極小	↗

よって,  $I(a)$  は最小値  $I\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{4}$  ■