令和４年度　香川大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和４年２月25日

- 創造工学部 A　1 2 3 4 数 I・II・III・A・B (90 分)
- 創造工学部 B・法学部　1 2 3 5 数 I・II・A・B (90 分)
- 教育・農・医 (臨床) 学部　1 2 5 必答，3 4 の２題から１題選択
  数 I・II・(III)・A・B (90 分)
- 医 (医) 学部　2 6 7 8 数 I・II・II・III・A・B (90 分)

1 ABC において，辺 AB を 1 : 3 に内分する点を P，辺 AC を 1 : 4 に内分する点を Q とし，線分 BQ と CP の交点を R，直線 AR と辺 BC の交点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) △ABC の面積は △RBS の面積の何倍かを答えよ．

2 数列 $\{a_n\}$ を，

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = \frac{-3a_n + 2}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) $b_n = \dfrac{-3}{a_n - 1}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表せ．

(2) b_n を n を用いて表せ．

(3) $b_n > \dfrac{2021}{2022}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

3 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2$ に対し，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 曲線 C 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ．

(3) 点 $(4,\ k)$ から曲線 C 上の異なる３点それぞれに接線が引けるとする．このときの定数 k の値の範囲を求めよ．

4 曲線 $y=-x^2+2x$ を C とし，C 上の点 $(0,\ 0)$ における接線を ℓ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と接線 ℓ，および直線 $x=1$ で囲まれてできる図形 D を座標平面上に図示し，その面積 S を求めよ．

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V_1 を求めよ．

(4) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V_2 を求めよ．

5 a を実数の定数とする．関数 $f(x)=x^2-ax+a$ について，次の問に答えよ．

(1) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標を a を用いて表せ．

(2) 放物線 $y=f(x)$ と x 軸が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ．

(3) 不等式 $f(x)>0$ を解け．

6 座標平面において，中心 $(1,\ 1)$，半径 1 の円 C の周上の点 P の座標を $(1+\cos\theta,\ 1+\sin\theta)$ で表す．このとき，次の問に答えよ．

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，点 P における円 C の接線と x 軸との交点を A，y 軸との交点を B とする．線分 AB の長さ $L(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $L(\theta)$ の最小値を求めよ．

7 $a>0$ に対し，

$$f(x)=ax^2+\frac{2}{a},\quad g(x)=a^2x^2+\frac{2}{a}$$

とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) 実数 a が $a>0$ の範囲を動くとき，曲線 $y=f(x)$ が通りうる範囲を座標平面に図示せよ．

(2) 実数 a が $a>0$ の範囲を動くとき，曲線 $y=g(x)$ が通りうる範囲を座標平面に図示せよ．

8 関数 $f(x)=x\log x$ について，次の問に答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

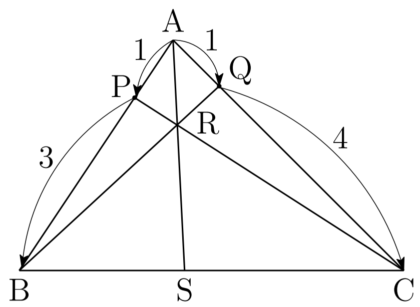
(2) $a>1$ に対し，$I(a)=\displaystyle\int_1^a\{5f(x)-af'(x)\}\,dx$ とおく．このとき，$I(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $a>1$ における $I(a)$ の最小値と，そのときの a の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 条件から

$$\overrightarrow{\mathbf{AP}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\vec{\boldsymbol{a}},\quad \overrightarrow{\mathbf{AQ}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\vec{\boldsymbol{b}}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと，$\vec{a} = 4\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\vec{b} = 5\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = 4x\overrightarrow{\mathrm{AP}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 5y\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

R は CP，BQ 上の点であるから

$$4x + y = x + 5y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{4}{19},\ y = \frac{3}{19}$$

したがって $\quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{4}{19}\vec{a} + \dfrac{3}{19}\vec{b} = \dfrac{7}{19}\cdot\dfrac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7} = \dfrac{7}{19}\overrightarrow{\mathrm{AS}}$

よって $\quad \overrightarrow{\mathbf{AR}} = \dfrac{\mathbf{4}\vec{\boldsymbol{a}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{b}}}{\mathbf{19}},\quad \overrightarrow{\mathbf{AS}} = \dfrac{\mathbf{4}\vec{\boldsymbol{a}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{b}}}{\mathbf{7}}$

別解 チェバの定理により $\quad \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = 1$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}\cdot\frac{4}{1} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{BS} : \mathrm{SC} = 3 : 4$$

したがって $\quad \overrightarrow{\mathbf{AS}} = \dfrac{\mathbf{4}\vec{\boldsymbol{a}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{b}}}{\mathbf{7}}$

△ABS と直線 PC についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CS}}\cdot\frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{RA}} = 1 \qquad \text{ゆえに} \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{RA}} = 1$$

AR : RS = 7 : 12 より $\quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{7}{19}\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \dfrac{\mathbf{4}\vec{\boldsymbol{a}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{b}}}{\mathbf{19}}$

(3) $\triangle\mathrm{RBS} = \dfrac{12}{19}\triangle\mathrm{ABS}$，$\triangle\mathrm{ABS} = \dfrac{3}{7}\triangle\mathrm{ABC}$ より

$$\triangle\mathrm{RBS} = \frac{12}{19}\cdot\frac{3}{7}\triangle\mathrm{ABC} \quad \text{ゆえに} \quad \triangle\mathrm{ABC} = \frac{\mathbf{133}}{\mathbf{36}}\triangle\mathrm{RBS}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_{n+1}=\dfrac{-3a_n+2}{a_n-2}$ より $\quad a_{n+1}-1=\dfrac{-3a_n+2-(a_n-2)}{a_n-2}=\dfrac{-4(a_n-1)}{a_n-2}$

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=-\frac{a_n-2}{4(a_n-1)}=-\frac{-1+(a_n-1)}{4(a_n-1)}=\frac{1}{4(a_n-1)}-\frac{1}{4}$$

したがって $\quad \dfrac{-3}{a_{n+1}-1}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{-3}{a_n-1}+\dfrac{3}{4}\quad$ よって $\quad \boldsymbol{b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n+\dfrac{3}{4}}$

(2) (1) の結果から $\quad b_{n+1}-1=\dfrac{1}{4}(b_n-1)$

$$b_1-1=\frac{-3}{a_1-1}-1=\frac{-3}{4-1}-1=-2$$

$\{b_n-1\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$b_n-1=-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\quad \text{よって}\quad b_n=1-\frac{2}{4^{n-1}}=\boldsymbol{1-\frac{1}{2^{2n-3}}}$$

(3) (2) の結果から，$b_n>\dfrac{2021}{2022}=1-\dfrac{1}{2022}$ を満たすとき

$$1-\frac{1}{2^{2n-3}}>1-\frac{1}{2022}\quad \text{ゆえに}\quad 2^{2n-3}>2022$$

したがって $\quad 2^{2n-4}>1011$

$2^8=256,\ 2^{10}=1024$ であるから，上式を満たす最小の n は

$$2n-4=10\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{n=7}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = x^3 - 6x^2$ より　$f'(x) = 3x^2 - 12x$

$y = f(x)$ 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線の方程式は

$$y = f'(p)(x - p) + f(p) \quad \text{ゆえに} \quad y = (3p^2 - 12p)(x - p) + p^3 - 6p^2$$

よって　$\boldsymbol{y = 3(p^2 - 4p)x - 2p^3 + 6p^2}$

(2) $f'(x) = 3x(x - 4)$ より

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$

よって　極大値 $f(0) = \mathbf{0}$，極小値 $f(4) = \mathbf{-32}$

(3) (1) で求めた接線が点 $(4,\ k)$ を通るとき

$$k = (3p^2 - 12p)\cdot 4 - 2p^3 + 6p^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2p^3 - 18p^2 + 48p + k = 0$$

$g(p) = 2p^3 - 18p^2 + 48p + k$ とおくと，3 次方程式 $g(p)$ が異なる 3 つの実数解をもつ k の値の範囲を求めればよい．

$$g'(p) = 6p^2 - 36p + 48 = 6(p - 2)(p - 4)$$

$g(p)$ は極大値 $g(2) = k + 40$，極小値 $g(4) = k + 32$ をとるから，求める k の値の範囲は

$$k + 32 < 0 < k + 40 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{-40 < k < -32}$$

補足 $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f''(x) = 6(x - 2)$ より，$y = f(x)$ の変曲点 $(2, -16)$ における接線の方程式を $y = h(x)$ とすると

$$h(x) = -12x + 8$$

$h(4) = -40$，$f(4) = -32$ であるから [1]

$$-40 < k < -32$$

■

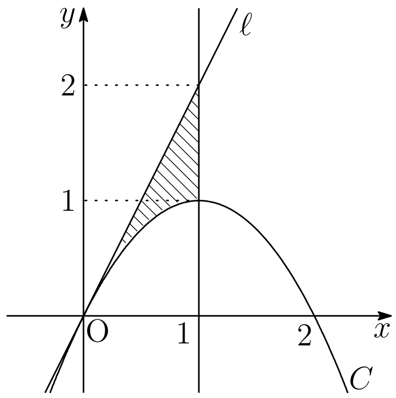
[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf (p.12 を参照)

$\boxed{4}$ (1) $C: y=-x^2+2x$ を微分すると　$y'=-2x+2$

$x=0$ のとき，$y'=2$ より，C 上の点 $(0,\ 0)$ における接線 ℓ は

$$\boldsymbol{y=2x}$$

(2) 求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{2x-(-x^2+2x)\}dx \\ &= \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(3) 求める回転体の体積 V_1 は

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_0^1 \{(2x)^2-(-x^2+2x)^2\}\,dx \\ &= \int_0^1 (-x^4+4x^3)\,dx = \left[-\frac{x^5}{5}+x^4\right]_0^1 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V_1=\frac{4}{5}\pi}$

(4) 求める回転体の体積 V_2 は

$$\frac{V_2}{2\pi} = \int_0^1 x\{2x-(-x^2+2x)\}\,dx = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

よって　　$\boldsymbol{V_2=\frac{\pi}{2}}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

■

$\boxed{5}$ (1) $f(x)=x^2-ax+a=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a$ より，

頂点の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a^2}{4}+a\right)}$

(2) (1) で求めた頂点の y 座標および x^2 の係数に注意して

$$-\frac{a^2}{4}+a<0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a-4)>0$$

よって　$\boldsymbol{a<0,\ 4<a}$

(3) 方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると　$D=a^2-4a=a(a-4)$

(i) $a<0,\ 4<a$ のとき，$f(x)>0$ の解は

$$x<\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2},\ \frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}<x$$

(ii) $a=0$ のとき，$f(x)=x^2>0$ の解は　$x\neq 0$

(iii) $a=4$ のとき，$f(x)=(x-2)^2>0$ の解は　$x\neq 2$

(iv) $0<a<4$ のとき，$f(x)>0$ の解は　すべての実数

よって
$$\boldsymbol{\begin{cases} a<0,\ 4<a \text{ のとき} & x<\dfrac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}, \\ & \dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}<x \\ a=0 \text{ のとき} & x\neq 0 \\ a=4 \text{ のとき} & x\neq 2 \\ 0<a<4 \text{ のとき} & \text{すべての実数} \end{cases}}$$

■

6 (1) $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上の点 $(1+\cos\theta,\ 1+\sin\theta)$ における接線は

$$(x-1)\cos\theta+(y-1)\sin\theta=1 \qquad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$y=0$ とすると　$x=\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}$

$x=0$ とすると　$y=\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}$

したがって　$\mathrm{A}\left(\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1+\sin\theta+\cos\theta)\left(-\dfrac{1}{\cos\theta},\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$ より

$$\begin{aligned} L(\theta)=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| &= (1+\sin\theta+\cos\theta)\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果の分母に注意して

$$\begin{aligned} 2\sin\theta\cos\theta &= (\sin\theta+\cos\theta)^2-1 \\ &= (\sin\theta+\cos\theta+1)(\sin\theta+\cos\theta-1) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \frac{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta+1)(\sin\theta+\cos\theta-1)} \\ &= \frac{2}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \frac{2}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1} \end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$ であるから，$L(\theta)$ は，$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，最小値

$$L\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}-1}=\boldsymbol{2(\sqrt{2}+1)}$$

をとる． ■

$\boxed{7}$ (1) $y = ax^2 + \dfrac{2}{a}$ について $(a > 0)$，x を固定して考える．

(i) $x > 0$ のとき　$\dfrac{dy}{da} = x^2 - \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{x^2}{a^2}\left(a^2 - \dfrac{2}{x^2}\right)$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{x}$	$\cdots$
$\frac{dy}{da}$		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	$2\sqrt{2}x$	$\nearrow$

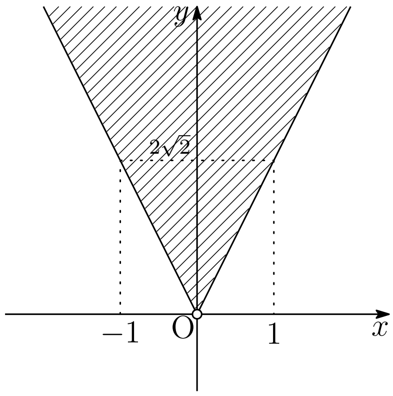
$\lim_{a \to +0} y = \infty$，$\lim_{a \to \infty} y = \infty$ より　$y \geqq 2\sqrt{2}x$

(ii) $x = 0$ のとき　$y = \dfrac{2}{a} > 0$

(iii) $x < 0$ のとき，$-x > 0$ であるから，(i) の結果から

$$y \geqq 2\sqrt{2}(-x) \quad \text{すなわち} \quad y \geqq -2\sqrt{2}x$$

(i)〜(iii) より，$y = f(x)$ が通る領域は，下の図の斜線部分で原点以外の境界線を含む．



(2) $y=a^2x^2+\dfrac{2}{a}$ について $(a>0)$，x を固定して考える．

(i) $x>0$ のとき　$\dfrac{dy}{da}=2ax^2-\dfrac{2}{a^2}=\dfrac{2x^2}{a^2}\left(a^3-\dfrac{1}{x^2}\right)$

a	(0)	$\cdots$	$x^{-\frac{2}{3}}$	$\cdots$
$\frac{dy}{da}$		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	$3x^{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$

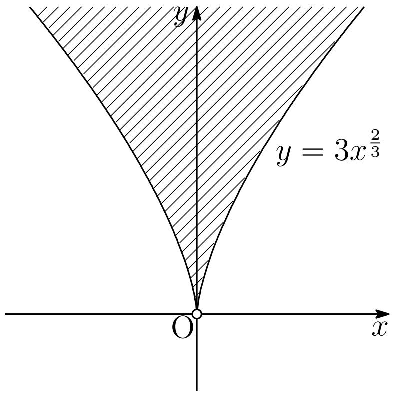
$\displaystyle\lim_{a\to+0}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}y=\infty$ より　$y\geqq 3x^{\frac{2}{3}}$

(ii) $x=0$ のとき　$y=\dfrac{2}{a}>0$

(iii) $x<0$ のとき，$-x>0$ であるから，(i) の結果から

$$y\geqq 3(-x)^{\frac{2}{3}}\quad\text{すなわち}\quad y\geqq 3x^{\frac{2}{3}}$$

(i)〜(iii) より，$y=g(x)$ が通る領域は，下の図の斜線部分で原点以外の境界線を含む．



8 (1) $f(x) = x\log x$ より

$$\int f(x)\,dx = \int x\log x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C} \qquad \textbf{(}\boldsymbol{C}\textbf{ は積分定数)}$$

(2) (1) の結果から，$F(x) = \dfrac{x^2}{2}\log x - \dfrac{x^2}{4}$ とおくと

$$F(a) = \frac{a^2}{2}\log a - \frac{a^2}{4}, \quad F(1) = -\frac{1}{4}$$

また，$f(a) = a\log a$，$f(1) = 0$ より

$$I(a) = \int_1^a \{5f(x) - af'(x)\}\,dx$$
$$= 5\Big[\,F(x)\,\Big]_1^a - a\Big[\,f(x)\,\Big]_1^a$$
$$= 5\left(\frac{a^2}{2}\log a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}\right) - a\cdot a\log a$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}a^2\log a - \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}}$$

(3) (2) の結果から $(a > 1)$

$$I'(a) = 3a\log a + \frac{3}{2}a - \frac{5}{2}a = 3a\left(\log a - \frac{1}{3}\right)$$

a	(1)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{3}}$	$\cdots$
$I'(a)$		$-$	0	$+$
$I(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$I(a)$ は最小値 $I\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \boldsymbol{-\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{4}}$ ■