令和４年度　愛媛大学２次試験前期日程 (数学問題)
令和４年２月25日

- 教育 [選択]・工 (文理)・農学部　1 2 3 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育 [選択] 学部　2 3 4 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 理・医・工 (理系) 学部　4 5 6 数 I・II・II・A・B (120 分)

1 以下の問いに答えよ．

(1) t を実数とする．原点を中心とする半径 1 の円と，2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(0,\ t)$ を通る直線との 2 つの交点のうち，A でない交点を C とする．C の座標を t を用いて表せ．

(2) 2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，$\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ．

(3) $m^2-mn-2n^2=22$ を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

(4) 赤玉 4 個，白玉 3 個，黒玉 2 個が入っている袋から，3 個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉の色がすべて異なる確率を求めよ．

(5) 次の和を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{98}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

2 以下の問いに答えよ．

(1) n を自然数とするとき，

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2={}_{2n+1}\mathrm{C}_3$$

が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ．

(2) θ が $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta<\pi$ を満たすとき，

$$0<\frac{\cos\theta+1}{\sin\dfrac{\theta}{2}+1}\leqq 1$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 関数 $y=|x-1|-2|x+1|\ (-4\leqq x\leqq 2)$ の最大値，最小値を求めよ．

$\boxed{3}$ n を自然数とし，p を正の実数とする．放物線

$$C : y = -x^2 + 4$$

上に点 $\mathrm{P}(p, -p^2 + 4)$，$\mathrm{Q}(-p, -p^2 + 4)$ がある．C 上の点 P における接線を ℓ_1 とし，点 P と点 $(0, -n)$ を通る直線を ℓ_2 とする．以下の問いに答えよ．

(1) ℓ_1 の傾きを p を用いて表せ．

(2) ℓ_2 の傾きを p，n を用いて表せ．

(3) ℓ_1 と ℓ_2 が垂直であるとき，p を n を用いて表せ．

(4) ℓ_1 と ℓ_2 が垂直であるとき，直線 PQ と C で囲まれる部分の面積 S_n を求めよ．

(5) (4) で求めた S_n について，$S_n \geqq 288$ となる n の最小値を求めよ．

$\boxed{4}$ 次の $\boxed{}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ．

(1) $f(x) = \sin^2\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき，$f'(0) = \boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+4} - b}{x} = 1$ がなりたつとき，$a = \boxed{\text{イ}}$，$b = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) p，q を正の実数とし，空間内の 4 点 $\mathrm{A}(p,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(p, -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-q,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 1)$ を考える．$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形で，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が垂直であるとき，$p = \boxed{\text{エ}}$，$q = \boxed{\text{オ}}$ である．

(4) z，w を $|z| = 2$，$|w| = 5$ を満たす複素数とする．$z\overline{w}$ の実部が 3 であるとき，$|z - w| = \boxed{\text{カ}}$ である．

(5) 関数 $f(x)$ が $f(x) = x + \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ を満たすとき，$f(0) = \boxed{\text{キ}}$ である．

(6) 媒介変数 $t > 0$ を用いて $x = t + e^t$，$y = 2 + \log t$ と表された曲線の $t = 1$ に対応する点における接線の方程式は，$y = \boxed{\text{ク}}\,x + \boxed{\text{ケ}}$ である．

5 以下の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$ を初項が 6，公差が 3 の等差数列，$\{b_n\}$ を初項が 3，公比が 2 の等比数列とする．

(i) a_2，a_3，b_2，b_3 を求めよ．

(ii) すべての $n \geqq 4$ について $a_n < b_n$ となることを証明せよ．

(2) s，t を実数とする．x についての 2 次方程式 $x^2 + sx + t = 0$ のすべての解の実部が負であるような点 $(s,\ t)$ の領域を st 平面上に図示せよ．

(3) 関数 $y = |x-1| - 2|x+1|\ (-4 \leqq x \leqq 2)$ の最大値，最小値を求めよ．

6 以下の問いに答えよ．

(1) t は $0 < t < 1$ であるとする．座標平面上を動く点 Q を考える．Q は次の規則 $(*)$ に従う移動を繰り返す．

Q が点 $(x,\ y)$ にいるとき，
$(*)$ 点 $(x+3,\ y+2)$ または点 $(x+2,\ y+5)$ のどちらかに
それぞれ確率 t，確率 $1-t$ で移動する．

n を自然数とし，はじめ原点にいた Q が n 回移動したとき，直線 $y = x$ 上にいる確率 P_n とおく．

(i) $\vec{a} = (3,\ 2)$，$\vec{b} = (2,\ 5)$ とする．次の条件 $(\#)$ をみたす自然数の組 $(\ell,\ m)$ をすべて求めよ．

$(\#)$ 原点に関する位置ベクトルが $\ell\vec{a} + m\vec{b}$ となる点が
直線 $y = x$ 上にある．

(ii) (i) で求めた $(\ell,\ m)$ について，$\ell + m$ のとりうる値の最小値を N とするとき，P_1，$P_2, \cdots, P_N$，$P_{N+1}, \cdots, P_{2N}$ を求めよ．

(iii) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，(ii) で求めた P_N が最大となる t を求めよ．

(2) x を実数とし，無限等比級数

$$(\diamondsuit) \qquad \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(1+x)^4}+\frac{1}{(1+x)^6}+\cdots+\frac{1}{(x+1)^{2n}}+\cdots$$

を考える．

(i) 無限等比級数 $(\diamondsuit)$ が収束するような x の値の範囲を求めよ．

(ii) x が (i) で求めた範囲にあるとき，無限等比級数 $(\diamondsuit)$ の和を求めよ．

(iii) (ii) で求めた和を $f(x)$ とおく．k を 2 以上の自然数とするとき，曲線 $y=f(x)$ と，直線 $x=1$，$x=k$，および x 軸で囲まれた部分の面積 S_k を求めよ．

(iv) (iii) で求めた S_k について，極限 $\displaystyle\lim_{k\to\infty} S_k$ を求めよ．

解答例

1 (1) 直線 AB: $y=t(x+1)$ と円 $x^2+y^2=1$ から y を消去すると

$$x^2+t^2(x+1)^2=1 \quad 整理すると \quad (1+t^2)x^2+2t^2x+t^2-1=0$$

この方程式が -1 を解にもつことに注意して

$$(x+1)\{(1+t^2)x+t^2-1\}=0$$

A 以外の交点の x 座標は　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

これを直線 AB の方程式に代入すると

$$y=t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)=\frac{2t}{1+t^2}$$

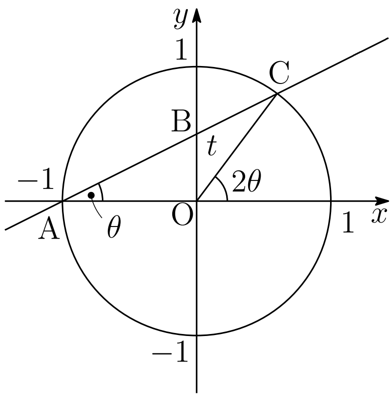
よって，点 C の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)}$

補足 直線 AB の偏角を θ とすると

$$t=\tan\theta,\quad \mathrm{C}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$$

$$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta},\quad \sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

よって　$\mathrm{C}\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$



(2) 2 次方程式 x^2-3x+4=の解 α, β と係数の関係から

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=4$$

よって　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\cdot3\cdot4=\boldsymbol{-9}$

(3) 与式から　$(m+n)(m-2n)=22$

m, n は自然数であるから，$m+n>0$, $m+n>m-2n$ に注意して

$$\begin{cases} m+n=22 \\ m-2n=1 \end{cases} \quad または \quad \begin{cases} m+n=11 \\ m-2n=2 \end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{(m,\ n)=(15,\ 7),\ (8,\ 3)}$

(4) $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_1}=\mathbf{\dfrac{2}{7}}$

(5)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{98}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{98}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{100}+\sqrt{99}-\sqrt{2}-\sqrt{1})\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}(9+3\sqrt{11}-\sqrt{2})}\end{aligned}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $(*)\quad 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2={}_{2n+1}\mathrm{C}_3$

［1］$n=1$ のとき，$1^2={}_3\mathrm{C}_3$ より，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2={}_{2k+1}\mathrm{C}_3$$

両辺に $(2k+1)^2$ を加えると

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k+1)^2={}_{2k+1}\mathrm{C}_3+(2k+1)^2$$

上式の右辺は

$$\begin{aligned}{}_{2k+1}\mathrm{C}_3+(2k+1)^2&=\frac{(2k+1)\cdot 2k(2k-1)}{3!}+(2k+1)^2\\&=\frac{(2k+1)\{2k(2k-1)+6(2k+1)}{3!}\\&=\frac{(2k+1)(2k+2)(2k+3)}{3!}={}_{2k+3}\mathrm{C}_3\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について $(*)$ が成立する．

(2) $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$t=\sin\dfrac{\theta}{2}$ とおくと　$\dfrac{1}{2}\leqq t<1$

$$\frac{\cos\theta+1}{\sin\frac{\theta}{2}+1}=\frac{2-2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}+1}=\frac{2(1-t^2)}{t+1}=\frac{2(1+t)(1-t)}{1+t}=2(1-t)$$

$0<2(1-t)\leqq 1$　よって　$0<\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\frac{\theta}{2}+1}\leqq 1$

(3) $y=|x-1|-2|x+1|\ (-4 \leqq x \leqq 2)$

(i) $-4 \leqq x \leqq -1$ のとき

$$y=-x+1-2(-x-1)=x+3 \quad \text{ゆえに} \quad -1 \leqq y \leqq 2$$

(ii) $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$y=-x+1-2(x+1)=-3x-1 \quad \text{ゆえに} \quad -4 \leqq y \leqq 2$$

(iii) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$y=x-1-2(x+1)=-x-3 \quad \text{ゆえに} \quad -5 \leqq y \leqq -4$$

(i)〜(iii) より　最大値 $\mathbf{2}$ $(x=-1)$，最小値 $\mathbf{-5}$ $(x=2)$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $C: y=-x^2+4$ を微分すると　$y'=-2x$

点 $\mathrm{P}(p, -p^2+4)$ における C の接線 ℓ_1 の傾きは　$\boldsymbol{-2p}$

(2) 2 点 $(0, -n)$, $(p, -p^2+4)$ を通る直線 ℓ_2 の傾きは

$$\frac{-p^2+4-(-n)}{p-0}=\boldsymbol{\frac{n-p^2+4}{p}}$$

(3) 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 が垂直であるから，(1), (2) の結果から

$$-2p\cdot\frac{n-p^2+4}{p}=-1 \quad \text{ゆえに} \quad p^2=n+\frac{7}{2}$$

$p>0$ より　$\boldsymbol{p=\sqrt{n+\frac{7}{2}}}$

(4) 2 点 $\mathrm{P}(p, -p^2+4)$，$\mathrm{Q}(-p, -p^2+4)$ を通る直線 PQ の方程式は　$y=-p^2+4$

直線 PQ と曲線 C で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{-p}^{p}\{(-x^2+4)-(-p^2+4)\}\,dx \\ &= \int_{-p}^{p}(p^2-x^2)\,dx = -\int_{-p}^{p}(x+p)(x-p)\,dx = \frac{1}{6}(2p)^3=\frac{4}{3}p^3 \end{aligned}$$

(3) の結果から　$S_n=\dfrac{4}{3}\left(\sqrt{n+\dfrac{7}{2}}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\left(n+\dfrac{7}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

(5) (4) の結果を $S_n \geqq 288$ に代入すると　$\dfrac{4}{3}\left(n+\dfrac{7}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \geqq 288$

$$\left(n+\frac{7}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \geqq 216 \quad \text{ゆえに} \quad n+\frac{7}{2} \geqq 36$$

したがって　$n \geqq 32.5$　よって，求める最小の n は　**33**　■

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ を微分すると

$$f'(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

よって　$\boldsymbol{f'(0)=\sqrt{3}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+4}-b}{x}=1$ より

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+4}-b)=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{\sqrt{ax+4}-b}{x}$$
$$2-b=0\cdot 1$$

$b=2$ より　$\dfrac{\sqrt{ax+4}-2}{x}=\dfrac{(ax+4)-4}{x(\sqrt{ax+4}+2)}=\dfrac{a}{\sqrt{ax+4}+2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a}{4}=1$$

よって　$\boldsymbol{a=4,\ b=2}$

(3) A$(p,\ 1,\ 0)$，B$(p,-1,\ 0)$，C$(-q,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,-2,\ 0),\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-p-q,\ 1,\ 0),\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-p,-1,\ 1)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$ より $(p,\ q>0)$

$$4=(p+q)^2+1 \quad \text{ゆえに} \quad p+q=\sqrt{3} \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$-p(-p-q)-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p+q)=1 \quad \cdots②$$

①, ② を解いて　$\boldsymbol{p=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \ q=\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

(4) $\mathrm{Re}(z\overline{w})=\dfrac{z\overline{w}+\overline{z}w}{2}=3$ より　$z\overline{w}+\overline{z}w=6$

$$|z-w|^2=|z|^2+|w|^2-(z\overline{w}+\overline{z}w)=2^2+5^2-6=23$$

よって　$\boldsymbol{|z-w|=\sqrt{23}}$

(5) $a=\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ とおくと　$f(x)=x+a$

$$
\begin{aligned}
a &= \int_0^{\pi}(t+a)\sin t\,dt\\
&= \Big[-(t+a)\cos t+\sin t\Big]_0^{\pi}=\pi+2a
\end{aligned}
$$

ゆえに　$a=-\pi$　したがって　$f(x)=x-\pi$

よって　$\boldsymbol{f(0)=-\pi}$

(6) $x=t+e^t,\ y=2+\log t$ より　$\dfrac{dx}{dt}=1+e^t,\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t}$

$t=1$ のとき，$x=1+e,\ y=2,\ \dfrac{dx}{dt}=1+e,\ \dfrac{dy}{dt}=1$

接線の傾きは　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+e}$

求める接線の方程式は

$$y-2=\frac{1}{1+e}(x-1-e)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{x}{1+e}+1}$$

■

$\boxed{5}$ (1) (i) $a_n=6+3(n-1)=3n+3,\ b_n=3\cdot2^{n-1}$ であるから

$$\boldsymbol{a_2=9,\quad a_3=12,\quad b_2=6,\quad b_3=12}$$

(ii) $(*)$　「すべての $n\geqq4$ について $a_n<b_n$」

［1］$n=4$ のとき

$$a_4=14,\ b_4=24$$

このとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立する，すなわち

$$3k+3<3\cdot2^{k-1}$$

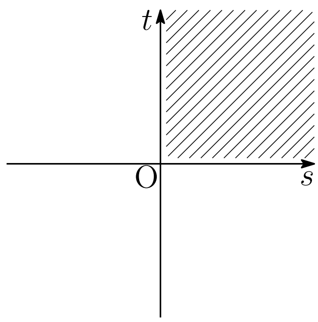
と仮定すると

$$
\begin{aligned}
b_{k+1}-a_{k+1}&=3\cdot2^k-(3k+6)\\
&=2\cdot3\cdot2^{k-1}-(3k+6)\\
&>2(3k+3)-(3k+6)=3k>0
\end{aligned}
$$

$a_{k+1}<b_{k+1}$ となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，$(*)$ は成立する．

(2) 2 次方程式 $x^2+sx+t=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により



$$\alpha+\beta=-s,\quad \alpha\beta=t$$

$\alpha,\ \beta$ の実部がいずれも負となるとき

$$\alpha+\beta<0,\ \ \alpha\beta>0$$

したがって　$-s<0,\ \ t>0$　よって　$s>0,\ t>0$

求める領域は，上の図の斜線部分で境界線を含まない．

(3) $\boxed{2}$ (3) を参照．■

$\boxed{6}$ (1) (i) 原点に関する位置ベクトル

$$\ell\vec{a}+m\vec{b}=\ell\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\ell+2m\\2\ell+5m\end{pmatrix}$$

となる点が直線 $y=x$ 上にあるとき

$$3\ell+2m=2\ell+5m \quad \text{ゆえに}\quad \ell=3m$$

したがって，条件 (#) を満たす自然数 $(\ell,\ m)$ は

$$\boldsymbol{(\ell,\ m)=(3k,\ k)}\qquad \textbf{(}\boldsymbol{k}\ \textbf{は自然数)}$$

(ii) $\ell+m$ が最小となるのは，(i) の結果から，$k=1$，すなわち，$(\ell,\ m)=(3,\ 1)$ であるから　$N=3+1=4,\ 2N=8$

$P_j\ (j=1,2,\cdots 8)$ について求めればよい．

P_4 は，$\ell=3,\ m=1$ である確率であるから

$$P_4={}_4\mathrm{C}_1t^3(1-t)=\boldsymbol{4t^3(1-t)}$$

P_8 は，$\ell=6,\ m=2$ である確率であるから

$$P_8={}_8\mathrm{C}_2t^6(1-t)^2=\boldsymbol{28t^6(1-t)^2}$$

$j\neq 4,\ 8$ のとき　$\boldsymbol{P_j=0}$

(iii) 4 正数 $t,\ t,\ t,\ 3(1-t)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{t+t+t+3(1-t)}{4}\geqq\sqrt[4]{t^3\cdot 3(1-t)}\quad \text{ゆえに}\quad P_4\leqq\frac{27}{64}$$

上式において等号が成立するとき　$t=3(1-t)$　よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{3}{4}}$

(2) (i) 公比 $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ について

$$\left|\frac{1}{(x+1)^2}\right| < 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)^2 > 1$$

したがって　$x(x+2) > 0$　これを解いて　$\boldsymbol{x < -2,\ 0 < x}$

(ii) 初項 $\dfrac{1}{(x+1)^2}$，公比 $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ が収束するから

$$\frac{\dfrac{1}{(x+1)^2}}{1-\dfrac{1}{(x+1)^2}} = \boldsymbol{\frac{1}{x(x+2)}}$$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+2)}$ より，$1 \leqq x \leqq k$ において　$f(x) > 0$

$$\begin{aligned} S_k &= \int_1^k f(x)\,dx = \int_1^k \frac{1}{x(x+2)}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ \log x - \log(x+1)\ \Big]_1^k = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\log 3 + \log \tfrac{k}{k+2}\right)} \end{aligned}$$

(iv) (iii) の結果から

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} S_k &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(\log 3 + \log \frac{k}{k+2}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(\log 3 + \log \frac{1}{1+\frac{2}{k}}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 3} \end{aligned}$$

■